

Mémoire présenté le :

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Ilona Kedote

Titre Etude de méthodes alternatives de calibrage de la probabilité de défaut d'un
portefeuille low-default

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présents du jury de l'Institut
des Actuaires*

signature

Entreprise : SFIL

Nom :

Signature :

Membres présents du jury de l'ISFA

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Idriss ALASSANE-SALLA

Signature :

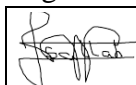
Invité :

Nom :

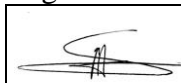
Signature :

**Autorisation de publication et de mise en
ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



Mémoire présenté devant l'Institut de Science Financière et
d'Assurances
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire
et l'admission à l'Institut des Actuaire
le

Par : Iona Kedote

Titre : Étude de méthodes alternatives de calibrage de la probabilité de défaut d'un portefeuille low-default

Confidentialité : Non Oui (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaire :*

Entreprise :
Nom : Pierre-E. THEROND
Signature :

*Membres présents du Jury du Master
Actuariat de ISFA Lyon :*

Directeur de Mémoire en entreprise :
Nom : Idriss ALASSANE SALLA
Signature :

*Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise

Bibliothèque :

Signature du candidat

Résumé

La probabilité de défaut (PD), c'est-à-dire la probabilité qu'un emprunteur ne respecte pas ses obligations financières, est un élément essentiel de la modélisation du risque de crédit. De ce fait, la précision de l'estimation de cette probabilité est directement liée à la qualité des modèles de risque de crédit. Selon la nature du portefeuille étudié, cette estimation peut être difficile à réaliser. L'un des principaux obstacles liés à l'estimation de la PD est le faible nombre de défauts, qui caractérise les portefeuilles appelés *Low Default Portfolio*. Dans ces portefeuilles, le nombre de prêts en défaut est beaucoup plus faible que le nombre de prêts sains. De tels portefeuilles correspondent généralement à des portefeuilles avec une bonne qualité d'emprunteur, comme les portefeuilles de souverains ou de banques. Le problème de l'estimation des PD dans ces portefeuilles à faible taux de défaut provient du fait que le faible nombre de défauts donne lieu à des estimations qui sont faibles et très volatiles dans le temps. Ces estimations ne sont donc pas fiables au sens statistique du terme et peuvent aboutir à une évaluation inadéquate du risque réel, plus précisément du ratio de solvabilité prévue par la norme Bâle 2.

La modélisation de la probabilité de défaut est traitée dans le second accord de Bâle, qui est un ensemble de recommandations sur les lois et réglementations bancaires émises par le Comité de Bâle sur le contrôle bancaire. Elles indiquent qu'en général, les estimations des probabilités de défaut comportent certaines erreurs imprévisibles et que les banques devraient donc ajouter une marge de prudence. Ils indiquent également que si les données sont moins satisfaisantes, comme dans les *Low Default Portfolio*, une plus grande marge de conservatisme devrait être ajoutée. L'enjeu de ce mémoire sera de proposer une méthode de calibrage de la probabilité de défaut pour un portefeuille de type *Low Default*. Le secteur étudié est celui des collectivités territoriales françaises, sur un historique de cinq années. Une analyse du portefeuille sera réalisée dans un premier temps à travers une étude de représentativité, dont l'objectif est de s'assurer que les données de modélisation reflètent la structure actuelle du portefeuille. Les approches de modélisation pour le calibrage seront présentées de même que leur application. Il s'agit de l'approche par intervalle de confiance et de l'approche bayésienne. Le but sera de trouver le meilleur moyen de mettre un add-on au taux de défaut historique, tout en respectant un cadre technique.

Mots-clés : probabilité de défaut, low default portfolio, calibrage, approche bayésienne, théorie des valeurs extrêmes, intervalle de confiance, risque de crédit.

Abstract

The probability of default (PD), that is, the probability that a borrower will not meet its financial obligations, is an essential element of hard credit risk modeling. Therefore, the accuracy of the estimation of this probability is directly related to the quality of the credit risk models. Depending on the nature of the portfolio under consideration, this estimate may be difficult to achieve. One of the main obstacles in estimating PD is the low number of defaults, which characterizes the portfolio called Low Default Portfolio. In these portfolios, the number of outstanding loans is much lower than the number of healthy loans. Such portfolios generally correspond to portfolios with good borrower quality, such as sovereign or bank portfolios. The problem with estimating PD in these low default portfolios is that the low number of defaults results in estimates that are low and highly volatile over time. These estimates are therefore not reliable in the statistical sense of the term and may lead to an inadequate assessment of the actual risk, more precisely the solvency ratio provided for in the Basel 2 standard.

The probability of default modelling is addressed in the second Basel Agreement, which is a set of recommendations on banking laws and regulations issued by the Basel Committee on Banking Supervision. They indicate that in general, estimates of the probability of default have some unpredictable errors and that banks should therefore add a margin of prudence. They also indicate that if the data are less satisfactory, as in the *Low Default Portfolio*, a greater margin of conservatism should be added. The challenge this memory will be to propose a method of calibration of the probability of default for a portfolio of type *Low Default*. The sector studied is that of French local authorities, over a five-year history. An analysis of the portfolio will be carried out initially through a representativeness study, the aim of which is to ensure that the modelling data reflect the current portfolio structure. The modelling approaches for calibration will be presented as well as their application. This is the confidence interval approach and the Bayesian approach. The goal will be to find the best way to put an add-on at the historical default rate, while respecting a technical framework.

Keywords : probability of default, low default portfolio, calibration, bayesian approach, extreme value theory, confidence interval, credit risk.

Note de Synthèse

Dans le cadre de l'application des accords de Bâle, les institutions financières doivent procéder à l'évaluation des risques auxquels elles sont exposées du fait de leurs activités. Cette estimation passe par la détermination des paramètres clés que sont la probabilité de défaut, la perte en cas de défaut et l'exposition au moment du défaut. Trois approches sont proposées pour ce faire : l'approche standard, l'approche fondation et l'approche avancée. La SFIL dont le portefeuille est ici étudié utilise la méthode avancée pour calculer les paramètres bâlois. La nature de ses créiteurs que sont les collectivités territoriales fait que le portefeuille a un taux de défaut très faible de part le nombre de défaut faible. Les portefeuilles à faible taux de défaut (low default portfolio) sont certaines catégories de portefeuilles de crédit qui, en raison de la bonne qualité du crédit de leurs composants, n'offrent pas de statistiques historiques adéquates des événements de défaillance pour permettre une modélisation statistique appropriée. Le portefeuille étudié dans ce document est un portefeuille de type low default, comme l'indique les taux de défauts historiques moyens (sur la période 2013-2017) par classe de risque dans le tableau ci-après :

Classe de risque	Taux de défaut (en%)	Nombre de contreparties
1	0,008	26626
2	0,014	6972
3	0,026	7478
4	0,082	9775
5	0,157	8274
6	0,432	3009
7	0,707	2263
8	3,734	2169

TABLE 1 – Taux de défaut historiques moyens par classe de risque

L'enjeu de ce papier est de proposer une méthode alternative pour le calibrage de la probabilité de défaut dans le processus de modélisation de cette probabilité. Les données disponibles sont les données historiques sur cinq années, réparties entre huit classes de risque. Dans un premier temps, une analyse statistique a été réalisée pour confirmer que les données de modélisation représentent fidèlement la structure du portefeuille de SFIL : il s'agit de l'étude de représentativité. La comparaison de la répartition entre les classes de risque, du taux de défaut et des variables d'intérêt avec les données disponibles post période de modélisation, révèle que les données sont représentatives de la structure du portefeuille. Une fois cette étape validée, deux approches sont utilisées pour calibrer la probabilité de défaut à part du taux de défaut observé : l'approche par intervalle de confiance et l'approche bayésienne.

L'approche par intervalle de confiance proposée par Dirk et Tasche permet d'utiliser toutes les informations quantitatives connues par rapport au portefeuille. Ce sont notamment le nombre de défauts observés sur l'historique, le nombre de contreparties par classe de risque. Qualifiée d'approche de calibrage la plus prudente, elle détermine la probabilité de défaut calibrée telle que la probabilité d'observer un certain nombre de défauts sur une classe soit au moins égale $1 - \alpha\%$, tout en tenant compte de la classification des classe de risques par niveau de risque croissant. Les résultats obtenus par cette approche sont :

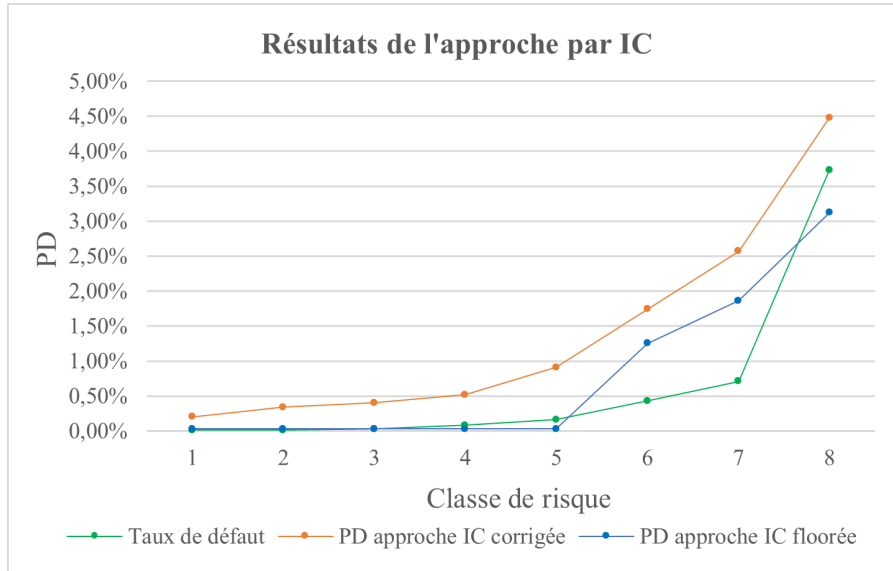


FIGURE 1 – Résultats de l'approche par intervalle de confiance

L'approche bayésienne quant à elle offre une certaine flexibilité pour la modélisation de la probabilité de défaut. Dans les statistiques bayésiennes, les paramètres de la loi de la variable aléatoire modélisée sont à leur tour considérés comme des variables aléatoires auxquelles on affectera une densité. La formule du Bayes telle qu'on la connaît est alors modifiée. En effet, il faut affecter des densités aux paramètres du modèle pour pouvoir prendre en compte cet aspect aléatoire. A titre d'exemple, soit X une variable aléatoire de densité f dépendant du paramètre Θ qui a pour densité π . Soit $f(x|\theta)$ la densité conditionnelle de X aux réalisations de Θ . Alors, la densité jointe vaut :

$$f(x, \theta) = f(x|\theta)\pi(\theta) = \pi(\theta|x)f(x) \quad (1)$$

Le principe est d'utiliser les données disponibles à travers la vraisemblance et une loi a priori afin de proposer une loi a posteriori pour le paramètre d'intérêt.

Les lois suivantes ont été proposées comme loi *a priori* : la loi Uniforme sur $[0,1]$, la loi Beta, l'a priori de Jeffreys (correspondant à une loi Beta $(0,5; 0,5)$). Etant donné que la modélisation de la probabilité de défaut dans un contexte low default s'apparente à la modélisation d'un événement rare, un approfondissement de l'approche bayésienne est proposé. Il s'appuie sur l'utilisation de la théorie des valeurs extrêmes, et ainsi, l'utilisation de la loi de Pareto comme loi a priori. Les paramètres des loi ont été calibrés à partir de l'historique, et les estimations de la loi a posteriori ont été faites par simulation de Monte-Carlo. Les meilleurs résultats obtenus sont :

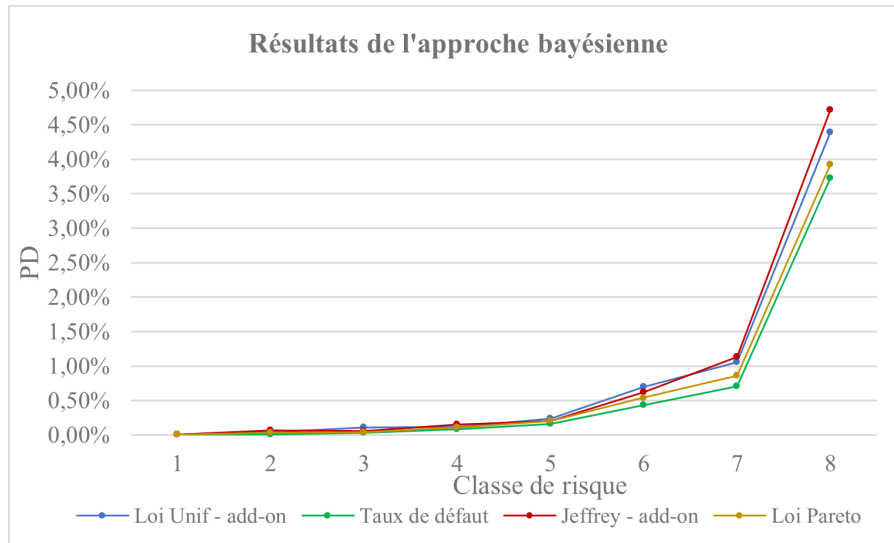


FIGURE 2 – Résultats de l'approche bayésienne

Au vu de ces résultats, la meilleure approche pour le calibrage de la probabilité de défaut du portefeuille ici étudié est l'approche bayésienne en utilisant la loi Uniforme comme loi *a priori*.

Le processus de backtesting permettant d'apprécier la qualité des différents modèles s'est fait en trois phases : la **calibration**, la **discrimination** et la **stabilité**. La première phase vise à comparer la probabilité de défaut calibrée au taux de défaut observé sur la période de test. De l'application de la méthodologie, il ressort que les modèles retenus produisent des probabilités statistiquement jugées conservatrices (voire trop ; ceci constitue une vraie limite des modèles utilisés). La seconde phase, la discrimination, a pour objectif de comparer la qualité discriminante du modèle à un classifieur aléatoire. Il en ressort que le modèle a une bonne capacité de discrimination. Pour finir, la phase de stabilité correspond à la comparaison des contreparties entre les classes de risque sur la période de référence et sur la période de test, et ceci, d'une année sur l'autre. Elle est divisée en deux parties : l'indice de stabilité et les matrices de migration. Sur cet dernier axe d'analyse, on peut conclure à une bonne stabilité au cours du temps des données du portefeuille.

Synthesis note

In the context of the application of the Basel agreements, credit institutions must assess the risks that they are facing due to their activity. This assessment requires the calibration of key parameters such as the probability of default, the loss given default and the exposure at default. The standard mentions three approaches to use for this assessment: the standard approach, the foundation approach and the advanced approach. SFIL, which portfolio is studied in this paper, uses the advanced approach to calculate the credit risk parameters. Its creditors are unlikely not to pay back their loans, as they are attached to the state. Then, it implies low number of default events and low default rate. Low default portfolio are certain categories of credit portfolios which, due to the good credit quality of their components, do not provide adequate historical default event statistics to allow for appropriate statistical modelling. The following table shows that SFIL portfolio is one of this special type of portfolio :

Risk class	Default rate (%)	Number of counterparties
1	0,008	26626
2	0,014	6972
3	0,026	7478
4	0,082	9775
5	0,157	8274
6	0,432	3009
7	0,707	2263
8	3,734	2169

Table 2 – Historical default rate per risk class

The purpose of this paper is to provide an alternative approach to calibrate the probability of default. The available data are the historical data over five years. We will conduct in the first place a statistical analysis to compare the historical data to the actual data. The aim of this study is to confirm the representativeness. A comparison of the distribution between risk classes, the default rate and the interest variables with the data available after the modelling period reveals that the data are representative of the portfolio structure. Once this step is validated, two approaches are used to calibrate the probability of default apart from the observed default rate: the confidence interval approach and the Bayesian approach.

The confidence interval approach proposed by Dirk and Tasche use all known quantitative information about the portfolio. This includes the number of defaults observed in the past and the number of counterparties per risk class. Qualified as the most conservative calibration approach, it determines the calibrated probability of default such that the probability of observing a certain number of defaults on a class is at least equal to $1 - \alpha\%$, while taking into account the classification of risk classes by

increasing risk level. The results obtained by this approach are :

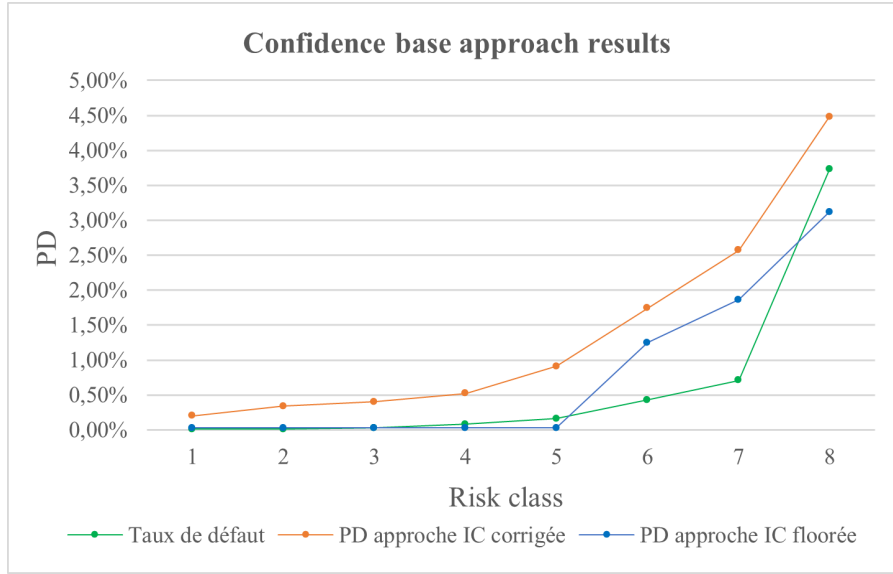


Figure 3 – Confidence interval based approach results

The Bayesian approach offers some flexibility for modelling the probability of default. In Bayesian statistics, the parameters of the law of the modelled random variable are in turn considered as random variables to which a density will be assigned. The Bayes formula as we know it is then modified. Indeed, densities must be assigned to the parameters of the model in order to take this random aspect into account. For example, let X be a random variable which density f , depends on the parameter Θ which density is π . Let $f(x|\theta)$ be the conditionnal density of X knowing Θ . The joint density function is :

$$f(x, \theta) = f(x|\theta)\pi(\theta) = \pi(\theta|x)f(x) \quad (2)$$

The principle is to use the data available through likelihood and a priori law in order to propose a posteriori law for the parameter of interest. The following laws have been proposed as a priori laws: the Uniform law on $[0,1]$, the Beta law, the Jeffreys' a priori (corresponding to a Beta law $(0,5; 0,5)$). Given that the modeling of the probability of default in a low default context is similar to the modeling of a rare event, an extension of the Bayesian approach is proposed. It is based on the use of the extreme value theory, and thus, the use of the Pareto law as a priori law. The parameters of the laws have been calibrated from the history, and the estimates of the a posteriori law have been made by Monte-Carlo simulation. The best results obtained are :

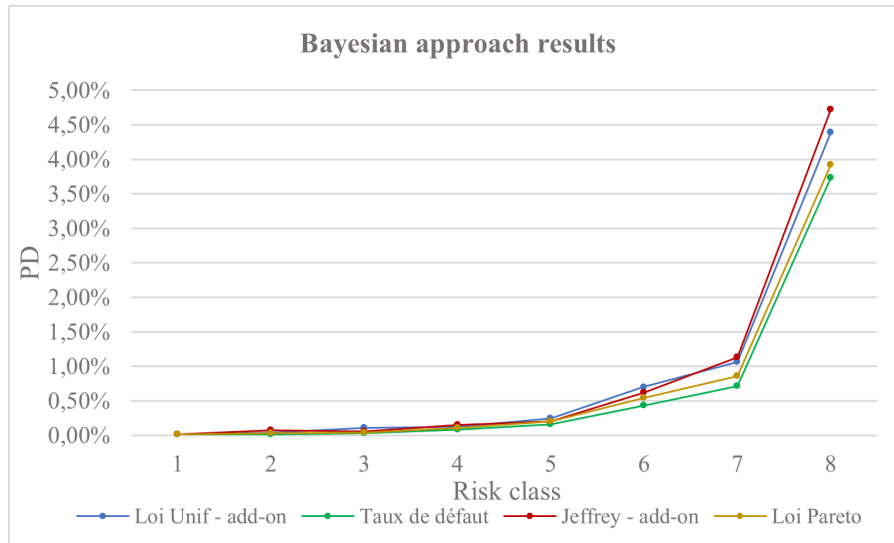


Figure 4 – Bayesian approach results

In view of these results, the best approach for the calibration of the probability of default of the portfolio studied here is the Bayesian approach using the Uniform law as a priori law. The backtesting process used to assess the quality of the various models is carried out in three phases: **calibration**, **discrimination** and **stability**. The first phase aims to compare the calibrated probability of default with the observed default rate over the test period. From the application of the methodology, it appears that the models selected produce probabilities that are statistically judged to be conservative (or even too conservative; this constitutes a real limitation of the models used). The second phase, discrimination, aims at comparing the discriminating quality of the model to a random classifier. It is found that the model has a good discrimination capacity. Finally, the stability phase corresponds to the comparison of the counterparts between the risk classes over the reference period and the test period, from one year to the next. It is divided into two parts: the stability index and the migration matrices. On this last axis of analysis, we can conclude that the portfolio data are quite stable over time.

Remerciements

Tout d'abord, je souhaite remercier sincèrement les personnes qui m'ont suivie, accompagnée et aidée tout au long de la réalisation des travaux présentés dans ce mémoire. J'adresse les remerciements à Mamadou YADE pour m'avoir accueillie au sein de l'équipe Modèle Crédit et Projets Transverses, ainsi que Idriss ALASSANE SALLA, responsable de la Modélisation Quantitative. Je vous remercie pour m'avoir apporté votre expertise, votre soutien et vos conseils dans la réalisation de mes travaux.

Je souhaite également adresser mes sincères remerciements à mes collègues au sein de la même équipe Thomas GUIRGUIS et Julien CHAMBERT. Votre aide au quotidien m'a permis de monter en compétence sur le sujet, de fournir des résultats et le plus important, m'a initié à la professionnelle afin de faciliter mon intégration dans le monde du travail. Pour finir, je tiens tout particulièrement à remercier Pierre THEROND, mon encadrant académique pour sa bienveillance et sa pédagogie qui ont grandement contribué à la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Note de Synthèse	5
Synthesis note	9
Remerciements	13
Table des matières	15
Introduction	21
1 Cadre de l'étude	23
1.1 Le risque de crédit	23
1.2 Paramètres de mesure du risque de crédit	23
1.2.1 Probability of Default (PD)	24
1.2.2 Loss Given Default (LGD)	24
1.2.3 Exposure At Default (EAD)	24
1.3 Cadre réglementaire	25
1.3.1 Pilier 1 de Bâle II	25
1.3.2 Approches de calcul des différents paramètres sous Bâle II	26
1.4 Enjeux du sujet	26
1.4.1 Objectif de la modélisation de la PD	27
1.4.2 Objectif de la modélisation de la PD : Portefeuille <i>low-default</i>	27
1.4.3 Contraintes des métiers et réglementaire	29
2 Cadre technique	31
2.1 Présentation du modèle actuel	31
2.2 Nouvelle définition du défaut : étude de représentativité du portefeuille	31
2.2.1 Présentation des variables d'intérêt	33
2.2.2 Tests statistiques utilisés	35
2.2.3 Représentativité des variables qualitatives	37
2.2.4 Représentativité des variables quantitatives	38
2.2.5 Comparaison de la segmentation en classes	40
3 Concepts mathématiques et méthodes utilisées	43

3.1	Rappel de la problématique de modélisation	43
3.2	Approche de calibrage par intervalle de confiance	43
3.2.1	Application à un portefeuille <i>zero-default</i>	44
3.2.2	Application à un portefeuille <i>low-default</i>	46
3.2.3	Avantages et limites de l'approche par IC	47
3.3	Calibrage par approche bayésienne	47
3.3.1	Les principes de la statistique bayésienne	47
3.3.2	Expression de la fonction de vraisemblance	49
3.3.3	Choix de la densité <i>a priori</i>	50
3.3.4	Détermination de la densité <i>a posteriori</i>	54
3.3.5	Procédure de simulation: Monte-Carlo par Chaîne de Markov	56
3.4	Vérification des propriétés du MCMC	58
3.5	Approfondissement de l'approche bayésienne : application de la théorie des valeurs extrêmes	58
3.5.1	Transformation de la probabilité de défaut	58
3.5.2	Calcul de la densité <i>a posteriori</i>	59
3.5.3	Procédure de simulation	61
3.5.4	Avantages et limites de l'approche bayésienne	63
4	Application des méthodes et mesure de performance	65
4.1	Calibrage par intervalle de confiance	65
4.1.1	Approximation des valeurs infinies par la meilleure estimation possible	66
4.1.2	Sensibilité de la PD au niveau de confiance $1 - \alpha$	67
4.2	Calibrage par approche bayésienne	68
4.2.1	Loi Beta (α, β) comme loi <i>a priori</i>	68
4.2.2	Loi de Jeffreys comme loi <i>a priori</i> : Loi Beta (0, 5; 0, 5)	70
4.2.3	Loi Uniforme comme loi <i>a priori</i> : Loi Beta (1; 1)	71
4.3	Loi de Pareto comme loi <i>a priori</i> (TVE)	72
5	Backtesting des modèles	75
5.1	Objectif du backtesting des modèles	75
5.2	Axes de backtesting	75
5.2.1	Calibrage	75
5.2.2	Discrimination	76
5.2.3	Stabilité	77
5.3	Résultats des backtesting	78
5.3.1	Données de backtesting	78
5.3.2	Résultats des test de calibration	79
5.3.3	Résultats du test de discrimination	81
5.3.4	Analyse de la stabilité	81
	Conclusion	83

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	17
Bibliographie	85
Annexes	91
A	93
A.1 Présentation des deux autres piliers de Bâle II	93
A.1.1 Pilier 2	93
A.1.2 Pilier 3	94
A.2 Rappel sur les tests statistiques	94
A.2.1 Test du Khi^2 d'indépendance	94
A.3 Compléments sur les résultats des méthodes	95
A.3.1 KPSS Test : stationnarité	95
A.3.2 Approche bayésienne	96
A.4 Compléments sur les backtesting des résultats	97
A.4.1 Matrice de migration	97

Liste des abréviations

PD : Probability of Default (probabilité de défaut)

LGD : Loss Given Default (perte en cas de défaut)

EAD : Exposure at Default

RWA : Risk Weighted Assets

DR : Default Rate (taux de défaut observé)

CR : Classe de risque

ISV : Indice de Stabilité par Variable

LDP : Low Default Portfolio

F-IRB : Foundation Internal ratings-based

A-IRB : Advanced Internal ratings-based

EL: Expected Loss

IC: Intervalle de confiance

ME: Meilleur Estimateur

TVE : Théorie des Valeurs Extrêmes

GFP : Groupement à Fiscalité Propre

Introduction

Une banque est une institution financière agréementée par l'institution monétaire, la Banque Centrale, assurant de multiples fonctions. Ce sont essentiellement : la collecte des dépôts, la gestion des moyens de paiement, et l'octroi de crédit. La collecte des dépôts est une mission essentielle de la banque, représentant un véritable enjeu pour chaque établissement car déterminant pour chaque banque sa part de marché, sa capacité d'octroi de crédit ainsi que son rôle de prêteur ou d'emprunteur. En ce qui concerne la gestion des moyens de paiement, elle représente une mission destinée à faciliter les transactions quotidiennes. Cela passe par la mise à disposition de moyens de paiement tels qu'on les connaît : les cartes bancaires, les chèques et ordres de virement entre autres.

Ce mémoire s'inscrit dans le contexte de la troisième grande mission de la banque : l'octroi de crédit. La loi 90/10 du 14 Avril 1990 relative à la monnaie et au crédit, définit la notion de crédit comme suit, dans son article 112 : « *Constitue une opération de crédit pour l'application de la présente loi tout acte à titre onéreux par lequel une personne met ou promet de mettre des fonds à la disposition d'une autre personne ou prend, dans l'intérêt de celle-ci, un engagement par signature tel qu'un aval, un cautionnement ou une garantie. Sont assimilés à des opérations de crédits les opérations de location assorties d'options d'achat, notamment les crédits bails* » .

On peut déduire de cette définition que l'activité d'octroi de crédit expose la banque au risque que ses clients ne puissent éventuellement pas respecter leurs engagements. Pour son bon fonctionnement et pour la pérennité de son activité, la banque doit connaître la nature du risque auquel elle doit faire face, le mesurer et mettre en place des dispositifs lorsque la situation lui est défavorable. Ainsi, dans le cadre de l'octroi, la mesure du risque de crédit représente un enjeu important pour les institutions. Elle se fait au moyen de trois paramètres de risque : la perte en cas de défaut dite **LGD** et la probabilité de défaut appelée **PD** et l'exposition en cas de défaut dite **EAD**. Le présent document traitera de la PD qui est un indicateur synthétique de la probabilité d'occurrence d'un défaut pour une contrepartie donnée. Nous nous intéressons à la modélisation de ce paramètre dans le contexte particulier d'une banque publique ayant un portefeuille dit *low-default* qui sera présenté dans la suite du document.

Dans la réalisation de ses missions, SFIL octroie un nombre considérable de crédit à ses clients, d'où la nécessité de mettre en place des modèles précis pour les paramètres. Ces indicateurs sont calculés par segment de risque. A titre d'exemple, sur le portefeuille des Communes et des Groupements à Fiscalité Propre de SFIL, les clients sont classés en huit classes dites classes homogènes de risque avec un niveau de risque croissant.

Ce mémoire s'inscrit dans un contexte de changement de la définition du défaut, plus précisément à l'étape du calibrage de la PD d'un portefeuille low-default. Il consiste en la réalisation d'un état de l'art des méthodes de calibration de la littérature quantitative et d'en proposer une pour être une alternative à la méthode historique et actuellement utilisée par SFIL. Pour ce faire, une présentation

du portefeuille concerné sera introduite et complétée d'une étude de représentativité dont le but est de d'assurer de la conformité des données de modélisation avec les données de test. Ensuite, les concepts mathématiques utilisés seront exposés dans le calibrage de la PD pour un LDP¹, leurs avantages et leurs inconvénients. Enfin, les méthodologies retenues seront appliquées au portefeuille et une présentation des résultats sera faite.

1. Low Default Portfolio

Chapitre 1

Cadre de l'étude

1.1 Le risque de crédit

Le risque de crédit regroupe l'ensemble des risques financiers liés aux incapacités d'un agent (un particulier, une entreprise ou un état souverain) de payer un engagement de remboursement. Le cas extrême est le risque de faillite ou le défaut de l'agent. En d'autres termes, c'est le risque de pertes encourues suite à un manquement de remboursement de la part d'un emprunteur. Il regroupe trois sous catégories de risques :

- le **risque de contrepartie** : il s'agit de la probabilité que l'une des parties prenantes du contrat fasse défaut vis-à-vis de ses engagements contractuels

- le **risque de défaut** : c'est le risque qu'une perte financière soit causée par l'incapacité de la contrepartie à rembourser une partie ou la totalité de son emprunt. Ce montant peut être le capital dû, les intérêts contractuels associés et éventuellement ceux liés aux pénalités de retard s'il y en a eu.

- le **risque de liquidité** : c'est le risque qu'il soit impossible de convertir des titres financiers en liquide, c'est-à-dire à les vendre en raison de l'étroitesse du marché. Il existe en effet des actifs plus liquides que d'autres.

Il comprend également le risque de perte de qualité de la créance. Au fil des années, les institutions financières ont rencontré des difficultés par manque de précision dans la mesure du risque. La principale cause de ces problèmes était et est liée aux normes de crédit insuffisamment rigoureuses pour les emprunteurs et les contreparties, à la gestion du risque de portefeuille, au manque d'attention aux changements de la conjoncture économique ou encore d'autres circonstances pouvant conduire à une détérioration de la solvabilité des contreparties clientes d'une banque.

Ainsi, la gestion du risque de crédit vise à atténuer les pertes en prenant en compte à toute date l'adéquation du capital et des réserves (provisions) pour pertes liées à des prêts. Ce processus représente un réel défi pour les institutions financières. C'est à cet effet qu'a eu lieu la création du comité de Bâle. Il a mis en place un dispositif prudentiel, dont le but est de mieux appréhender les risques bancaires, notamment celui de crédit. Ce dispositif qui sera présenté dans la section suivante, demande la mesure correcte et la plus précise possible de trois principaux paramètres de risque que sont : *la PD, la LGD et l'EAD*.

1.2 Paramètres de mesure du risque de crédit

1.2.1 Probability of Default (PD)

En français probabilité de défaut, elle est définie comme la probabilité qu'une contrepartie fasse défaut à horizon de temps donné. La PD reflète le risque que l'emprunteur ne puisse ou ne veuille pas rembourser sa dette en totalité ou à temps. Le risque de défaillance est calculé en analysant la capacité du débiteur à rembourser la dette conformément aux conditions contractuelles. La PD, est impactée dans son calcul par des caractéristiques financières telles que des flux de trésorerie insuffisants pour assurer le service de la dette, une baisse des revenus ou des marges d'exploitation, un endettement élevé, une liquidité décroissante ou marginale et l'incapacité à mettre en œuvre avec succès un plan d'affaires. Outre ces facteurs quantifiables, il faut également évaluer la volonté de remboursement de l'emprunteur. Il convient de définir au préalable la notion de défaut afin d'en évaluer la probabilité. Cette dernière est dictée par le régulateur et évolue dans le temps.

Pour formaliser, on propose la définition suivante pour la PD:

Définition 1 *Probabilité de défaut*

Soit D la variable aléatoire binaire qui vaut 0 en cas de non-défaut et 1 en cas de défaut. D suit une loi de Bernoulli de paramètre p tel que :

$$\begin{cases} P(D = 1) = P(\text{Défaut}) = p \\ P(D = 0) = P(\text{Sain}) = 1 - p \end{cases}$$

On rappelle qu'une telle variable aléatoire a pour espérance et variance :

- $\mathbb{E}(D) = p$
- $\text{Var}(D) = p(1 - p)$

1.2.2 Loss Given Default (LGD)

La perte en cas de défaut, connue sous son nom en anglais *Loss Given Default*, est le montant que perd une banque ou institution financière lorsqu'un emprunteur ne rembourse pas un prêt, représenté en pourcentage de l'exposition totale au moment du défaut. En d'autres termes, c'est le taux de perte constaté en cas de défaillance. La LGD totale d'une institution financière est calculée après un examen de tous les prêts en cours en utilisant les pertes et expositions cumulées. En partant de cette définition, on peut introduire le *taux de récupération* comme le taux effectif ou estimé du capital et des intérêts que le créancier peut récupérer en cas de défaillance de la contrepartie. Il est calculé simplement comme suit :

$$\boxed{\text{Taux de récupération} = 1 - \text{LGD}}$$

La LGD est d'un paramètre commun dans les modèles de risque de crédit et également un paramètre utilisé dans le calcul de la perte étendue ou le capital réglementaire au titre de la réglementation de Bâle II. La perte en cas de défaut est propre à chaque établissement, surtout à chaque type de portefeuille parce que ces pertes sont généralement susceptibles d'être influencées par les caractéristiques de la transaction, comme les caractéristiques de l'emprunteur, le caractère subordonné du crédit, les garanties reçues.

1.2.3 Exposure At Default (EAD)

L'exposition en cas de défaut est la valeur totale à laquelle une banque est exposée lorsqu'une contrepartie manque à ses engagements. Généralement, les banques calculent l'EAD pour chaque prêt et agrègent les résultats pour déterminer le niveau de risque global. La notion d'exposition englobe les encours bilanciaux ainsi qu'une quote-part des engagements hors bilan.

1.3 Cadre réglementaire

Les crises financières successives ont amené les institutions à se concentrer sur les risques qui n'étaient pas pris en compte jusqu'à lors, notamment le risque de crédit. Il s'agit là de la mission du Comité de Bâle qui est une instance internationale, chargée de concevoir les règles bancaires et internationales. Ses premiers travaux de grande ampleur ont donné naissance à un accord sur un ratio international de solvabilité baptisé le *ratio Cooke*, du nom de l'instigateur du Comité. L'accord de 1988 a été jugé insuffisant pour les raisons suivantes : une conception des risques bancaires trop étroite (limitée uniquement aux risques de crédit et aux risques de marché); une mesure du risque insuffisamment affinée; une grille de pondération rigide car ne prenant pas en compte les options de réduction de risque par la biais des garanties.

Ainsi, la complexité des évolutions des métiers bancaires a engendré une révision du cadre réglementaire, conduisant aux accords de Bâle II. Ils se déclinent en 3 piliers:

1. L'exigence de fonds propres minimum (ratio de solvabilité McDonough)
2. La procédure de surveillance de la gestion des fonds propres ;
3. Une discipline du marché (transparence dans la communication des établissements).

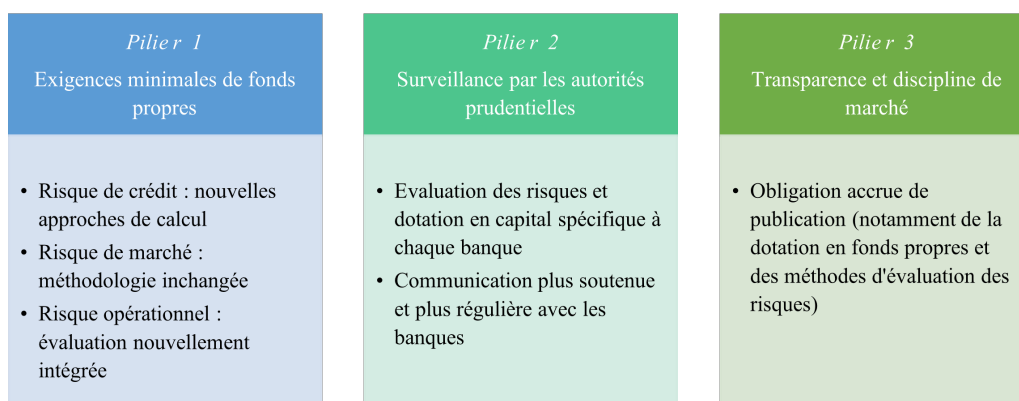


Figure 1.1 – Description des trois piliers de la norme Bâle II

1.3.1 Pilier 1 de Bâle II

D'après le pilier 1 des accords de Bâle II, les fonds propres des banques doivent représenter au moins 8% des crédits qu'elles ont accordés. Il s'agit d'une évolution de ratio Cooke des accords de Bâle I qui laisse place au *ratio McDonough* encore appelé ratio de solvabilité bancaire. Le niveau d'engagement des banques est ainsi limité par leur propre solidité financière. Le niveau minimal imposé par les accords reste inchangé par rapport au premier. Cependant, son calcul s'est sophistiqué, du fait de la prise en compte du risque opérationnel et également de nouvelles approches pour une meilleure mesure du risque de crédit. Moins un prêt est risqué, moins l'établissement bancaire doit le couvrir en fonds propres, et inversement. Les fonds propres de la banque se positionnent sur un taux de 8% mais cette fois sur une part de risque quantifiée risques de crédit pour 85%, risque de marché pour 5% et opérationnels pour 10% des montant totaux des risques du banquier. Les méthodes internes après approbation des autorités de surveillance, ont pu être employées par les établissements non assujettis à l'approche standard.

$$\text{ratio } McDonough = \frac{\text{Fonds propres}}{\text{Risque de crédit} + \text{Risque de marché} + \text{Risque opérationnel}} \geq 8\%$$

L'évaluation du risque de crédit se fait par les Risk Weighted Assets (RWA) selon un modèle qui se compose de la PD, de la LGD et de l'EAD. Le dispositif de Bâle II prévoit trois méthodes de calcul possibles pour le calcul des exigences fonds propres pour le risque de crédit. Elles sont introduites dans la section ci-après.

1.3.2 Approches de calcul des différents paramètres sous Bâle II

Afin de respecter les exigences en fonds propres réglementaires prévus par le pilier 1 des accords de Bâle, les banques ont besoin de calculer les actifs pondérés. Il s'agit des RWA (Risk Weighted Assets). Les RWA crédit sont fonction de la PD et de la LGD :

$$RWA = f(PD, LGD) * EAD$$

Il est alors nécessaire d'évaluer les trois paramètres précédemment présentés. Les méthodes prévues par les accords sont les suivantes :

- La **méthode standard** : La méthode standard est utilisée lorsque l'institution financière n'a pas encore obtenue l'accord du régulateur pour appliquer l'une des méthodes avancées. La nouveauté dans l'application de cette méthode par rapport à la norme précédente est la pondération forfaitaire en fonction des ratings externes des contreparties. Il s'agit d'une approche simple et peu sensible aux risques, dans le cadre de la quantification du risque de crédit.
- **Foundation Internal ratings-based (F-IRB)** : elle autorise les banques à évaluer par des modèles internes le paramètre PD mais la LGD et l'EAD restent imposés et contrôlés par l'autorité de manière forfaitaire. Pour les modèles de PD, cette approche requiert comme condition l'utilisation sur une période de 1 an des modèles de calcul, un historique de 5 années et une validation par l'autorité réglementaire.
- **Advanced Internal ratings-based (A-IRB)** : cette dernière prévoit un modèle pour chacun des paramètres de risque pour déterminer les exigences en fonds propres. Son adoption est plus contraignante que la méthode F-IRB. En effet, elle requiert un historique plus profond (7 ans) et une durée d'utilisation des modèles plus importante (3 ans). C'est une approche plus flexible et utilisée par les banques et institutions financières.

Dans le présent document, nous nous intéresserons uniquement à la modélisation de la PD. Elle est faite sous selon la méthode avancée chez SFIL. Nous nous focaliserons sur l'une des étapes de cette modélisation à savoir le calibrage pour un portefeuille *low default*.

1.4 Enjeux du sujet

Le principal enjeu de ce mémoire est d'identifier et d'implémenter des approches adaptées pour la modélisation de la PD dans un contexte *low-default*.

1.4.1 Objectif de la modélisation de la PD

Il convient de préciser les notions de PD Point-In-Time et de PD Through-The-Cycle. Les probabilités de défaut **point-in-time** représentent la probabilité de défaut à un instant t du cycle économique. Elles tiennent compte des variations dans le cycle économique et varient en fonction d'elles, tenant ainsi compte de l'information actuelle. Ces probabilités de défaut sont généralement calculées à partir de modèle incluant des variables reflétant le risque systémique (risque lié à l'économie) et le risque idiosyncratique (risque lié à la contrepartie elle-même). La probabilité de défaut through-the-cycle correspond quant à elle à la probabilité moyenne sur un cycle économique. De ce fait, elle est constante contrairement à la PD-PIT qui change en fonction de l'instant auquel elle est observée.

Conformément à la réglementation, SFIL a choisi d'être en méthode IRB-avancée sur ses portefeuilles les plus significatifs. Au vu du pilier I de Bâle II, concernant les exigences en fonds propres, il est nécessaire de mesurer la PD et la LGD des contreparties de SFIL sur les portefeuilles concernés. Au sein de la Direction des risques, l'équipe Modèles de Crédits et Projets Transverses développe des modèles quantitatifs de risque de crédit qui mesurent la PD et la LGD pour chaque contrepartie. Outre la finalité de calcul des exigences en fonds propres, la PD est également utilisée pour l'attribution des crédits. La note issue du modèle permet d'appréhender le risque de contrepartie et la PD associée permet d'évaluer le niveau de risque lié à l'octroi du crédit.

Ainsi, on distingue :

- La PD bâloise : correspond à une moyenne cyclique dite *Through-The-Cycle*. Dans le cadre du développement des modèles bâlois internes, les données utilisées sont l'historique des variables caractéristiques des contreparties pour lesquelles le caractère *sain* ou *en défaut* est connu selon la définition du défaut. Après l'étape de la segmentation basée sur le score de chaque observation, un taux de défaut observé est calculé par classe. Le calibrage vise à consolider ce taux en y rajoutant une marge de conservatisme, pour en faire une PD modèle. Il s'agit de la partie de la procédure d'estimation du paramètre conduisant à une quantification appropriée du risque en garantissant que les estimations obtenues correspondent aux taux de défaut moyen à long terme au niveau pertinent, pour la méthode appliquée. Dans le modèle actuel, la PD est déterminée à l'aide de la distribution du bootstrap des taux de défaut observés. La PD calibrée correspond à un percentile de cette distribution.
- La PD à l'octroi : dans le processus d'octroi de crédit, les analystes utilisent le score issu du modèle afin de décider ou non de l'attribution du prêt au client. Ce score permet d'évaluer le niveau de risque que présente ce dernier, du point de vue des données disponibles. Une fois cette étape passée, la PD calibrée, issue du modèle et correspondant au score, sert alors au calcul des **Expected Credit Loss**. Ils correspondent à la moyenne pondérée des pertes attendues au titre du risque de crédit sur la période étudiée (douze mois ou la durée de vie totale). Ils sont utilisés dans l'application de la norme IFRS 9 qui prévoit le passage d'un modèle de pertes encourues à un modèle de pertes attendues. Le modèle de dépréciation instauré par IFRS 9 repose en effet sur la constatation immédiate des pertes attendues au titre du risque de crédit (Expected Credit Loss) pour tous les actifs évalués au coût amorti.

1.4.2 Objectif de la modélisation de la PD : Portefeuille *low-default*

Comme mentionné précédemment, la PD représente un indicateur important dans la quantification du risque de crédit. Ainsi, il est nécessaire pour les institutions d'avoir des modèles précis compte tenu des caractéristiques de leur portefeuille. Dans le cas d'un portefeuille *low-default*, cet objectif devient

un véritable enjeu. En effet, un LDP¹ est caractérisé par des probabilités de défaut relativement très faibles pour les classes de risques. C'est généralement le cas lorsque les contreparties sont essentiellement des emprunteurs sûrs, présentant une stabilité financière et un taux de défaut historique quasi-nul. En d'autres termes, nous constatons que les défauts dans les portefeuilles de crédit se produisent rarement ou ne sont pas observés. Dans le cas du financement des collectivités locales, les défauts sont rares puisqu'ils portent sur des institutions publiques soutenues par les états (à des degrés divers). Ils peuvent toutefois survenir ponctuellement.

A titre d'exemple, les taux de défauts moyens annuels sur 7 classes de risques. L'horizon temporel est de 1970-2005. Les données proviennent de l'agence de notation Moody's.

Classe de risque	Taux de défaut moyen annuel (en%)
Aaa	0,351
Aa	0,346
A	0,852
Baa	2,710
Ba	10,270
B	21,999
Caa-C	38,871

Table 1.1 – Taux de défaut historiques moyens - Portefeuille corporate (1970-2005)

En comparaison aux taux de défaut du portefeuille ici étudié, nous pouvons remarquer que les taux de défauts sont relativement faibles comparés à ceux qu'un portefeuille corporate. Dans ce contexte,

Classe de risque	Taux de défaut (en%)	Nombre de contreparties
1	0,008	26626
2	0,014	6972
3	0,026	7478
4	0,082	9775
5	0,157	8274
6	0,432	3009
7	0,707	2263
8	3,734	2169

Table 1.2 – Taux de défaut historiques moyens par classe de risque

les taux de défauts observés étant très bas, les estimations de la PD sur la base des données historiques sont très peu fiables à mettre en oeuvre. C'est le cas du portefeuille qui est étudié dans ce mémoire. La rareté de la survenance de défaut peut entraîner selon la méthode, le caractère sur-conservateur des estimations par rapport à la réalité. L'objectif est alors d'étudier de présenter de nouvelles méthodes alternatives plus robustes, tout en maintenant un sens économique afin d'en favoriser l'application.

Les méthodes qu'on présentera seront essentiellement basées sur l'utilisation de l'information a priori sur les défauts des contreparties. On tentera un calibrage de la PD par approche bayésienne, soit de manière empirique, soit en postulant une loi a priori, décrivant au mieux la survenance du défaut.

1. Low Default Portfolio

Pour finir, on réalisera un backtesting du meilleur modèle afin d'évaluer la cohérence avec les données de test déjà disponibles. On pourra alors évaluer le caractère sur-conservateur de la méthode choisie.

1.4.3 Contraintes des métiers et réglementaire

Le Journal Officiel de l'Union Européenne du 26 Juin 2013 présente les exigences réglementaires pour les modèles internes de paramètres de risque. Le règlement fixe des règles uniformes concernant les exigences prudentielles respectées par les établissements sous surveillance du régulateur. L'article 170 présente la structure exigée pour les systèmes de notation. Ils doivent être construits de sorte à tenir compte des caractéristiques de risque du client (caractéristiques financières par exemple) et de la nature de l'opération (le type de crédit qui est accordé). Ils devront inclure une échelle de notation des débiteurs, reflétant la quantification du risque de défaut. Il est exigé que les contreparties soient réparties au minimum en sept classes de risque pour celles non défaillantes, et une classe pour les contreparties défaillantes, par niveau de risque croissant.

Concernant la modélisation de la PD, la probabilité par échelon est estimée à partir de la moyenne à long terme des taux de défaut annuels. Lorsque les données utilisées pour l'estimation de la PD sont les données historiques propres à l'entreprise (historique minimum de 5 ans exigé), une marge de conservatisme devra être rajoutée aux estimations. De plus, il est indiqué que la probabilité de défaut d'une exposition sur une entreprise ou un établissement doit être d'au moins 0.03%.

En résumé

La réglementation bancaire dans son évolution, impose de nouvelles normes dans la modélisation du risque bancaire, notamment le risque de crédit. La mise en place de ces exigences requiert la refonte des modèles. A titre d'exemple, le modèle de la probabilité de défaut est utilisé dans le calcul des actifs pondérés par le risque en risque de crédit afin de déterminer le ratio de solvabilité bancaire, connu sous le nom de *ratio McDonough* sous Bâle II.

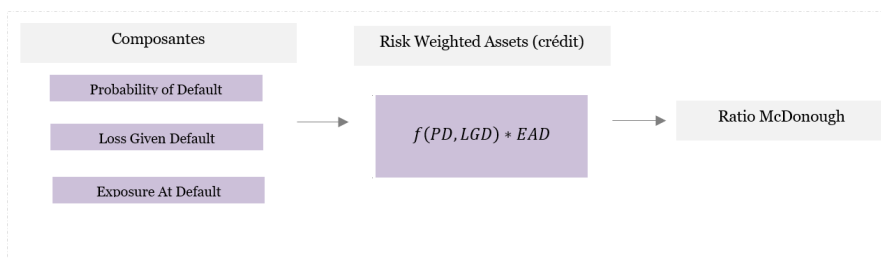


Figure 1.2 – Utilisation des paramètres de risque de crédit dans Bâle II

Avoir un modèle robuste et conforme aux exigences de l'autorité est l'enjeu des banques et établissements de crédit, en particulier dans un contexte de changement de la définition du défaut. De ce fait, la précision de l'estimation de la PD est directement liée à la qualité des modèles de risque de crédit. Le cadre réglementaire de ce mémoire étant présenté, nous allons à présent procéder à l'étude de représentativité pour assurer la validité de l'utilisation du nouveau modèle sur le portefeuille.

Chapitre 2

Cadre technique

2.1 Présentation du modèle actuel

Le modèle présentement utilisé pour l'octroi de crédit et pour le calcul des RWA est basé sur la définition du défaut précédant l'actuelle dont l'entrée en vigueur est prévue pour Janvier 2021. La modélisation de la PD réalisée chez SFIL est faite selon les étapes suivantes :

1. La création de la base de modélisation : elle passe par les étapes d'extraction des données, de nettoyage et détection des valeurs extrêmes et des valeurs aberrantes. Aussi, sont gérées les valeurs manquantes afin de construire une base finale, prête à l'emploi.
2. Le cadrage du modèle : il consiste en la définition des objectifs de prédiction, de la variable cible et de la temporalité de la modélisation.
3. La sélection de variables : une fois le but du modèle clairement défini, les analyses univariées et bivariées, les statistiques descriptives, l'étude des corrélations permettent de sélectionner les variables pour l'étape suivante.
4. Modélisation de la fonction score
5. La segmentation et le calibrage du modèle : suite à la segmentation, on obtient un certain nombre k de classes de risque. Conformément à la définition du défaut valide, on obtient le taux de défaut observé en divisant le nombre de défauts par le nombre de contreparties au sein de la classe. Le calibrage consistera alors à obtenir une PD modèle à partir du taux de défaut observé.
6. L'évaluation du modèle retenu sur une année non comprise dans la base de modélisation

Dans ce mémoire, nous allons aborder la phase du calibrage du modèle. Dans le modèle actuel, la PD modèle est obtenue par bootstrapping des taux de défauts observés. En effet, une fois la fonction de score déterminée, conformément aux exigences réglementaires (d'avoir un minimum de 7 classes de risques), les données sont segmentées en groupes appelés classes de risque. Le but est d'obtenir une bonne homogénéité intra-segments et une hétérogénéité inter-segments, les classes de risque étant triées par niveau croissant de risque.

2.2 Nouvelle définition du défaut : étude de représentativité du portefeuille

La définition du défaut par l'EBA fournit un nouvel ensemble de standards plus détaillé et plus normatives qui auront un impact significatif sur la gouvernance, les données, les processus et les modèles de crédit.

Définition 2 (*Définition du défaut sous Bâle 2*)

Conformément à la définition de défaut dans le Bâle II, un impayé est considéré comme « réel » s'il résulte de l'incapacité financière de la contrepartie à payer son (es) échéance (s). Par opposition, les impayés dits "opérationnels" ou "techniques" en sont exclus, car ils reposent sur le fait que la contrepartie a la capacité financière de payer.

L'autorité bancaire européenne a publié en septembre 2016 ses orientations relatives à la nouvelle définition du défaut concernant le nombre de jours d'arriéré, les indications d'une absence probable de paiement (dénommée ci-après « UTP¹ ») :

- Le seuil d'impayé a été abaissé à 500 euros et couplé avec une autre condition : la somme des impayés rapportée au total des expositions de la contrepartie concernée doit être supérieur à 1 %.
- La durée de l'impayé doit être supérieure à 90 jours pour les contreparties relevant du secteur public français.

Les banques qui appliquent la méthode avancée devront alors mettre à jour leur modèle en utilisant les nouvelles informations. C'est dans ce contexte que s'inscrit le calibrage de la PD présenté. L'une des exigences de la refonte des modèles est la réalisation d'une étude de représentativité.

Dans les guidelines intitulées "Orientations sur les estimations de probabilité de défaut (PD), les estimations de perte en cas de défaut (LGD) et sur le traitement des expositions sur lesquelles il y a eu défaut", l'EBA présente ses exigences en ce qui concerne la mise en place du nouveau modèle. Au nombre de celles-ci, on compte l'étude de représentativité. Elle a pour but de garantir que le modèle mis en place est en accord avec l'état actuel du portefeuille. D'après les textes, elle a pour but de s'assurer que les données utilisées pour élaborer le modèle visant à classer des débiteurs ou les expositions (*données de modélisation*) sont statistiquement en accord avec les *données de test*. Pour rappel, les données de modélisation couvrent la période 2013–2017 (minimum de 5 années d'historique) et les données de tests disponibles sont celles de l'année 2018 et 2019, toutes deux en années de défaut.

En application des paragraphes 32, 34 et 83 des Guidelines EBA et conformément à l'article 64 du chapitre Credit Risk du Guide BCE modèles internes, il est demandé de réaliser une analyse de représentativité :

- D'une part, des données de modélisation par rapport à des données de portefeuille plus récentes afin de s'assurer que les premières ne comportent pas de déviations significatives par rapport à un jeu de données actualisées,
- D'autre part, de la période de référence historique ou période de modélisation pour vérifier que celle-ci contient bien un mélange équilibré « de bonnes et de mauvaises années », assurant la prédictibilité du défaut « à travers les cycles économiques ».

Ces deux axes définissent le plan de cette étude qui complétera la refonte du modèle de PD des « Communes et GFP français ».

Nous allons procéder dans un premier temps à une analyse descriptive du portefeuille puis dans un second temps à une analyse plus approfondie, utilisant des tests statistiques selon la nature et le sens des variables d'intérêt.

1. Unlikely To Pay

2.2.1 Présentation des variables d'intérêt

NB : nous appellerons dans la suite l'échantillon de modélisation "échantillon 1" et celui de test "échantillon 2". Cette numérotation sera également utilisée pour nommer les variables correspondantes.

Les données de modélisation qu'on pourra également appeler données de référence dans cette étude, sont les données du portefeuille Communes et GFP pour la période 2013 à 2017 en année de défaut. La base que nous allons comparer à ces données est la base de backtesting disponible. Elle représente les dernières données pour une année de défaut complète (année de défaut 2018 et 2019). On compte 66566 lignes pour la base de modélisation et 11353 pour la base de test. De la fonction de score, il ressort les variables d'intérêt ci-après :

- le ratio R_1 de la famille des ratios variables portant sur la dette. Il s'agit également d'une variable **quantitative continue**, idéalement de signe négatif.
- le ratio R_2 correspond à l'épargne nette (hors cessions) sur les recettes réelles de fonctionnement (RRF). Il permet de mesurer la capacité à dégager de l'épargne une fois les dépenses courantes effectuées. Il s'agit d'une variable **quantitative continue** dont le signe attendu est positif.
- le ratio R_3 : la capacité de désendettement potentielle. Il s'agit d'un indicateur visant à apprécier la capacité de remboursement de la collectivité.
- la variable R_4 : Elle caractérise la nature sensible ou non d'un crédit structuré. La **Charte Gissler** définit les crédits structurés comme :

" des prêts combinant dans un seul et même contrat un prêt bancaire classique et un ou plusieurs dérivés, dont les intérêts sont déterminés selon l'évolution d'un indice sous-jacent non standard (taux de change, différentiel entre un taux long et un taux court, écart de valeur entre deux indices d'inflation,...) ou sont calculés selon des formules complexes pouvant être non linéaires de sorte que l'évolution des taux supportés peut être plus que proportionnelle à celle de l'index lui-même (c'est notamment le cas des produits affectés de coefficients multiplicateurs)".

Ainsi, une contrepartie SFIL ayant souscrit à un tel contrat est plus exposée à un risque de défaut. Ce sont les prêts les plus risqués et les plus complexes, caractérisés par une volatilité potentielle importante des taux d'intérêt et des coûts de sortie en cas d'activation d'option.

$$1_{\text{crédit structure sensible}} = \begin{cases} 0 & \text{si le client n'a pas un crédit structuré} \\ 1 & \text{si le client a un crédit structuré} \end{cases}$$

- la variable R_5 qui est une indicatrice. Elle permet de caractériser la dette et est construite comme suit :

$$1_{\text{impayés 24 mois}} = \begin{cases} 0 & \text{si le client n'a eu aucun impayé au cours des 24 derniers mois} \\ 1 & \text{si le client a eu un impayé au cours des 24 derniers mois} \end{cases}$$

- la variable indicatrice R_6 soit indicatrice insularité : traduit l'appartenance à l'Outre-Mer ou à la Corse

$$1_{\text{insularité}} = \begin{cases} 0 & \text{si la commune/GFP appartient à la métropole} \\ 1 & \text{si la commune/GFP appartient à l'Outre - Mer} \end{cases}$$

Deux autres variables seront aussi étudiées. Il s'agit de :

- La classe de risque (notée CR)
- L'indicatrice de la survenance de défaut (notée Flag défaut)

Les tableaux suivants présentent les statistiques descriptives des variables sur la base de modélisation et sur la base de test. On observe globalement des similitudes de répartitions entre les bases. En effet, les modalités les plus et les moins dominantes sont les mêmes. A titre d'exemple, dans les deux bases, la classe de risque 1 contient le pourcentage maximal d'observations tandis que la classe de risque 8 contient le pourcentage minimal d'observations.

Noms variables	Modalités	<i>Modèle</i>		<i>Test</i>	
		Effectif	Proportion	Effectif	Proportion
CR	1	26626	20 %	3857	16,88 %
	2	7026	5,20 %	1309	5,73 %
	3	6824	5,05 %	1297	5,68 %
	4	10054	7,44 %	2134	9,34 %
	5	8655	6 %	1706	7,47 %
	6	3063	2,27 %	538	2,35 %
	7	2059	1,52 %	277	1,21 %
	8	2259	1,67 %	235	1,03 %
Flag défaut	0	66430	99,80 %	11341	99,89 %
	1	136	0,20 %	12	0,11 %
Insularité	Corse	960	1,44 %	160	1,41 %
	Outre-Mer	65606	98,56 %	11193	98,59 %
Crédit sensible	Non	64593	97,04 %	11206	98,71 %
	Oui	1973	2,96 %	147	1,29 %
Impayés 24 mois	Non	65526	98,44 %	11219	98,82 %
	Oui	1040	1,56 %	134	1,18 %
Total (Modèle — Test)		66566	100 %	11353	100 %

Table 2.1 – Statistiques descriptives des variables qualitatives

	R1		R2		R3	
	Modèle	Test	Modèle	Test	Modèle	Test
Min	0,09	0,10	0	0	0	0
Q_{25%}	0,54	0,57	0,05	0,04	0,07	0
Q_{50%}	0,88	0,88	0,11	0,09	1,17	1,07
Q_{75%}	1,30	1,29	0,18	0,16	2,69	2,44
Max	6,54	6,48	0,4	0,4	210	210
Moyenne	1	1	0,12	0,11	2,30	1,98
Variance	0,45	0,40	0,01	0,01	75,84	47,69

Table 2.2 – Statistiques descriptives des variables quantitatives

Une analyse détaillée des similitudes et différences observées entre les deux bases sera faite dans les sections suivantes. Nous procéderons par des analyses descriptives et des tests statistiques de comparaison des valeurs observées sur la base test par rapport à la base de données de référence.

2.2.2 Tests statistiques utilisés

Cette section présente les tests statistiques qui seront utilisés dans cette étude. Ils seront interprétés à l'aide du trafic light suivant :

Intervalles (en %)	Couleurs	Conclusion
[10 ; 100]		Pas de présomption contre H_0
[5 ; 10]		Faible présomption contre H_0
[1 ; 5]		Forte présomption contre H_0
[0 ; 1]		Très forte présomption contre H_0

Table 2.3 – Traffic light pour l'interprétation des p-values

Test de Student : comparaison des proportions

Ce test est un test paramétrique qui permet de tester si 2 proportions (\hat{p}_1) et (\hat{p}_2) provenant d'échantillons aléatoires indépendants sont les réalisations d'une même proportion $p = p_1 = p_2$. Le test est formulé comme suit :

$$H_0 : p_1 = p_2$$

$$H_a : p_1 \neq p_2$$

La statistique de test $t = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$ suit asymptotiquement une $\mathcal{N}(0, 1)$

Test du χ^2 d'homogénéité

Le test de χ^2 d'homogénéité permet de dire à un niveau de significativité donné si deux échantillons proviennent de la même loi discrète. Il sera utilisé pour tester la stabilité de la répartition dans les modalités des variables discrètes. Les hypothèses du test de χ^2 d'homogénéité sont les suivantes :

H_0 : les distributions observées sont identiques entre les échantillons
 H_a : les distributions observées sont différentes entre les échantillons

Sous H_0 , la statistique de test est la suivante :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^k \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \text{ suit une loi } \chi^2((k-1)(p-1))$$

où les o_{ij} sont les effectifs observés et les e_{ij} les effectifs théoriques calculés dans le tableau de contingence des k variables à p modalités. la validité du test nécessite que les effectifs e_{ij} soient supérieurs à 5.

Test de Student des moyennes

Ce test paramétrique permet de comparer pour une variable, si les moyennes m_1 et m_2 sur 2 populations sont égales. Les hypothèses sont formulées ainsi :

$$\begin{aligned} H_0 &: m_1 = m_2 \\ H_a &: m_1 \neq m_2 \end{aligned}$$

La statistique de test est donnée par $t = \frac{\hat{m}_1 - \hat{m}_2}{\sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$ suit une loi de Student à $(n_1 + n_2 - 2)$ degrés

de liberté où $s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$. La validité du test requiert que les distributions soient normales et que $n_1, n_2 > 30$.

Test de Kolmogorov-Smirnov et test de Cramer Von Mises

Ces tests rentrent dans la catégorie des tests non paramétriques qui servent à comparer deux distributions empiriques F_1, F_2 . les hypothèses :

$$\begin{aligned} H_0 &: F_1 = F_2 \\ H_a &: F_1 \neq F_2 \end{aligned}$$

La statistique du test de Kolmogorov Smirnov (KS) est l'écart maximal en valeur absolue entre les deux fonctions de répartition exprimé en tous les points :

$$KS = \sup_x \left| \hat{F}_1(x_j) - \hat{F}_2(x_j) \right|, j = 1, \dots, n_1 + n_2$$

Le test de Cramer Von Mises est une alternative au test de Kolmogorov Smirnov (KS-test). Pour rappel, le KS-test permet de comparer deux échantillons via la comparaison de leurs fonctions de répartition. La statistique de test est l'écart maximal en valeur absolue entre les deux fonctions de répartition exprimées en tous les points. La valeur ajoutée du test de Cramer Von Mises est la prise en compte de :

- l'écart quadratique plutôt que l'écart en valeur absolue du test de Kolmogorov
- des écarts sur toutes les valeurs (en calculant une intégrale sur l'ensemble des valeurs) pendant que le KS test prend en compte l'écart maximal dans le calcul de la statistique de test.

La statistique de test vaut :

$$CM = \frac{1}{n} \sum_j^{n_1 n_2} \left(\hat{F}_1(x_j) - \hat{F}_2(x_j) \right)^2$$

Comme pour le test KS, cette statistique suit une loi non classique dont les valeurs sont bien tabulées pour l'application.

Stabilité par variable

Afin de garantir la stabilité des ratios utilisés dans le calcul de la fonction de score, on décide de calculer un indice de stabilité par variable (ISV) pour chacune des variables et un indice global (IGSV) pour l'ensemble. Ces deux indicateurs permettent de mesurer la dissimilarité de deux populations (l'une étant la population de référence et l'autre étant la population observée ou de test).

Définition 3 *Indice de stabilité par variable*

Soit X la variable dont on veut étudier la stabilité entre N et $N + 1$. Si X est une variable catégorielle, il n'y a pas de transformation à faire. Si X est une variable quantitative continue, il est nécessaire de la discrétiser en classe pour le calcul de l'indice qui se fait comme suit :

1. Calculer les proportions $prop_N^i$ $prop_{N+1}^i$ de chaque classe sur les deux années
2. Déterminer l'ISV par classe ou par modalité i :

$$ISV_{N;N+1}^i = (prop_N^i - prop_{N+1}^i) * \log \left(\frac{prop_N^i}{prop_{N+1}^i} \right)$$

3. Déterminer l'indice de stabilité de la variable pour l'année en sommant les indices par classe:

$$ISV_{N;N+1} = \sum_{i=1}^k ISV_{N;N+1}^i, \text{ avec } k \text{ le nombre de classes}$$

L'interprétation de ce coefficient se fera au moyen du traffic light suivant :

Intervalles (en %)	Couleurs	Conclusion
[0 ; 10]		Excellente stabilité
[10 ; 15]		Bonne stabilité
[15 ; 20]		Instabilité très faible
[20 ; 30]		Faible stabilité
[30 ; 100]		Forte instabilité

Table 2.4 – Traffic light pour l'interprétation de l'ISV

2.2.3 Représentativité des variables qualitatives

Les trois variables qui seront présentées sont les ratios R_4 , R_5 et R_6 .

Pour le ratio R_4 , la répartition des données montre un écart absolu très faible de 0,03 % entre les proportions sur les deux échantillons. Cet écart témoigne d'une différence non significative de la répartition du ratio sur les deux échantillons. En ce qui concerne la variable R_5 , les données de modélisation contiennent 2,96 % de clients ayant des crédits structurés sensibles tandis que les données test en contiennent 1,29 % soit **+1,7 %**. Ce constat n'est pas aberrant car on s'attend à une baisse du nombre de crédits sensibles au cours du temps s'agissant de contreparties disposant de contrats qui ne sont plus commercialisés par SFIL depuis sa création. Cependant la différence de proportion est faible quand on regarde 97,04 % contre 98,71 % de clients sans crédit sensible. Pour finir, l'analyse du ratio R_6 montre que les deux bases présentent quasiment le même pourcentage de non impayés 98,44 % contre 98,82 % soit une différence de **0,38 %**.

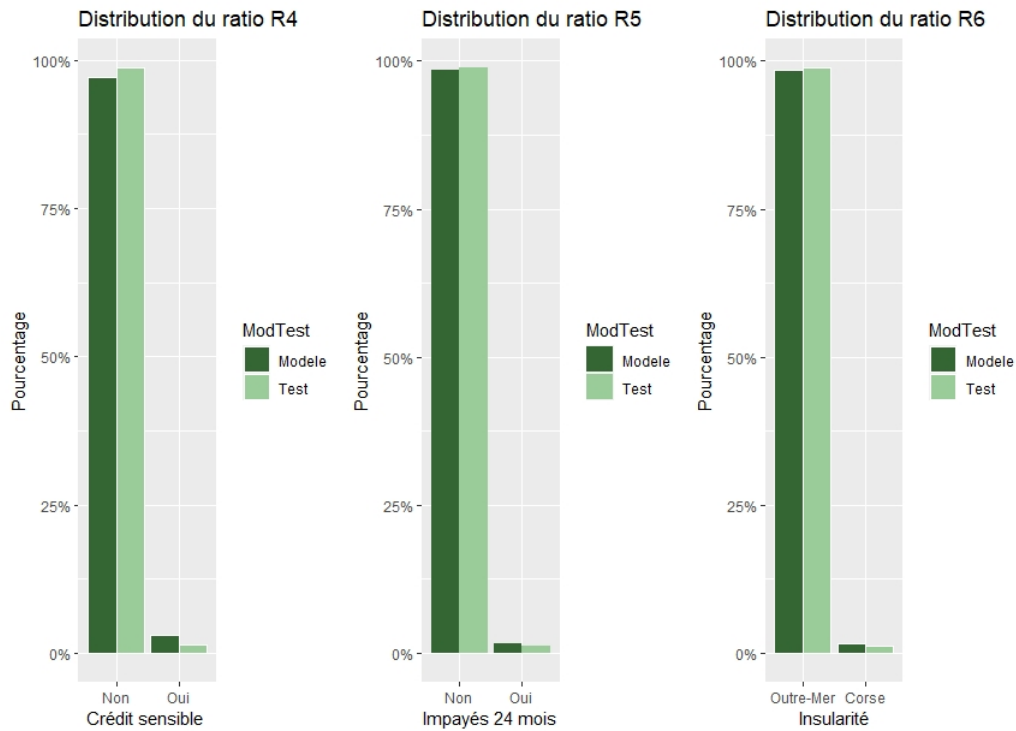


Figure 2.1 – Représentation graphique des ratios qualitatifs

2.2.4 Représentativité des variables quantitatives

L'objectif de cette rubrique est d'évaluer la représentativité des ratios par comparaison des densités empiriques des deux bases. Les graphiques ci-dessous présentent leurs distributions empiriques.

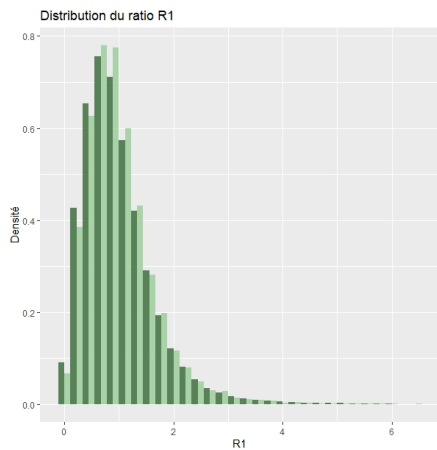


Figure 2.2 – Ratio R1 (modèle & test)

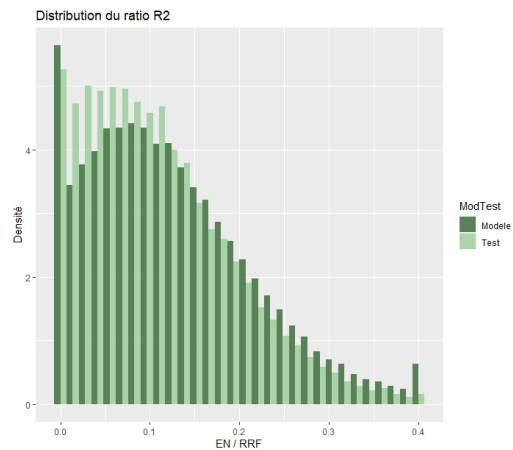


Figure 2.3 – Ratio R2 (modèle & test)

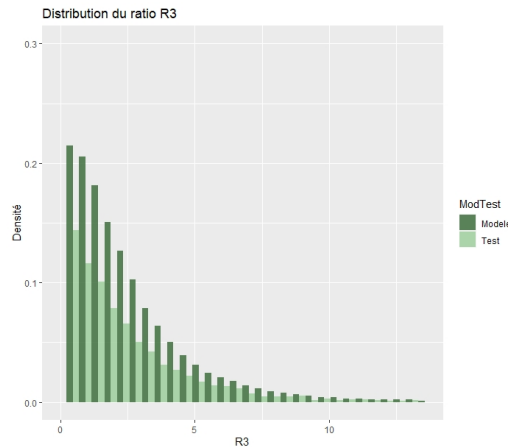


Figure 2.4 – Ratio R3 (modèle & test)

Pour le ratio R_1 , la distribution du taux d'endettement sur l'échantillon de test ne s'éloigne pas significativement de celle sur l'échantillon de modélisation. Quant au ratio R_2 , la représentation graphique montre que les données de modélisation présentent des valeurs plus élevées que les données de backtesting. Enfin, pour le ratio R_3 , les deux distributions semblent suivre le même mouvement de fond. La distribution sur la base de test semble toutefois avoir une queue moins épaisse que celle de la base de modélisation.

D'un point de vue plus quantitatif, on peut dire que les moyennes des ratios R_1 et R_2 sont sensiblement égales. Le ratio R_3 présente quant à lui une légère différence qui ne permet pas d'affirmer une égalité au moyen des tests de Kolmogorov et CVM. Les résultats des tests sont les suivants :

Variables	Moyenne (modèle)	Moyenne (test)	T-test	KS-test	CVM-test
R_1	1	1	100 %	0 %	0 %
R_2	0,12	0,11	0 %	0 %	0 %
R_3	2,30	1,98	0 %	0 %	0 %

Table 2.5 – Résultats des tests de Student, de KS et de Cramer Von Mises

Les tests ne permettent pas de conclure à l'égalité des distributions continues. Cependant pour apprécier la représentativité des données, il nous apparaît plus pertinent d'observer si les distributions discrétisées par classes sont au moins cohérentes sur certaines tranches de valeurs. Dans cette partie nous découpons les variables continues par intervalles (classes) et on s'intéresse à la proportion des observations dans chaque classe. Bien que cette procédure ne capte pas la stricte égalité des distributions continues, elle permet de voir si les deux échantillons ont les mêmes répartitions par tranches de valeurs, et ainsi d'apprécier leur représentativité.

Les variables sont découpées en déciles (10 intervalles) dans la base de modélisation, et les proportions de contreparties dans chaque intervalle sont calculées. En utilisant les mêmes bornes d'intervalle, les proportions sont calculées sur l'échantillon de test. On vérifie enfin si les 2 distributions en classes sont similaires à l'aide d'un test de Khi-2 d'homogénéité et de l'ISV. Le choix de 10 classes permet d'avoir assez d'observations dans chaque classe.

Segment	Effectifs		Proportions		ISV	Khi ² p.value
	Mod.	Test	Mod.	Test		
1	6657	1003	10%	8,83%	0,14%	
2	6657	1090	10%	9,60%	0,02%	
3	6656	1082	10%	9,53%	0,02%	
4	6657	1180	10%	10,39%	0,02%	
5	6656	1237	10%	10,90%	0,08%	
6	6657	1218	10%	10,73%	0,05%	
7	6656	1177	10%	10,37%	0,01%	
8	6657	1176	10%	10,36%	0,01%	
9	6656	1124	10%	9,90%	0,00%	
10	6657	1066	10%	9,39%	0,04%	
TOTAL	66566	11353	100%	100%	0,39%	35%

Figure 2.5 – Calcul de l'ISV - Ratio R_1

Segment	Effectifs		Proportions		ISV	Khi ² p.value
	Mod.	Test	Mod.	Test		
1	6657	1164	10%	10,25%	0,01%	
2	6657	1519	10%	13,38%	0,98%	
3	6656	1317	10%	11,60%	0,24%	
4	6657	1255	10%	11,05%	0,11%	
5	6656	1246	10%	10,98%	0,09%	
6	6657	1166	10%	10,27%	0,01%	
7	6656	1089	10%	9,59%	0,02%	
8	6657	984	10%	8,67%	0,19%	
9	6656	894	10%	7,87%	0,51%	
10	6657	719	10%	6,33%	1,68%	
TOTAL	66566	11353	100%	100%	3,82%	35,10%

Figure 2.6 – Calcul de l'ISV - Ratio R_2

Les 10 classes permettent d'avoir assez d'observations dans chaque classe. Pour la variable R_3 , il y a une forte concentration à 0, d'où les premières classes sont regroupées. Les faibles valeurs de l'ISV pour chaque variable permettent de conclure à une stabilité de ces coefficients. Ceci est confirmé par les faibles ISV totaux avec un max pour R_2 à 3,82%. Les résultats du test du Khi-2 concluent en faveur de la représentativité. On ne peut rejeter l'égalité des répartitions pour toutes les variables au seuil de 5%.

2.2.5 Comparaison de la segmentation en classes

Ici, nous analysons si la répartition des contreparties dans les classes de risque est la même entre les 2 bases.

2.2. NOUVELLE DÉFINITION DU DÉFAUT : ÉTUDE DE REPRÉSENTATIVITÉ DU PORTEFEUILLEA1

Segment	Effectifs		Proportions		ISV	K χ^2 p.value
	Mod.	Test	Mod.	Test		
1	19970	3649	30%	32,14%	0,15%	
2	6657	1114	10%	9,81%	0,00%	
3	6656	1172	10%	10,32%	0,01%	
4	6657	1188	10%	10,46%	0,02%	
5	6656	1184	10%	10,43%	0,02%	
6	6657	1070	10%	9,42%	0,03%	
7	6656	1019	10%	8,98%	0,11%	
8	6657	957	10%	8,43%	0,27%	
TOTAL	66566	11353	100%	100%	0,61%	31,30%

Figure 2.7 – Calcul de l’ISV - Ratio R_3

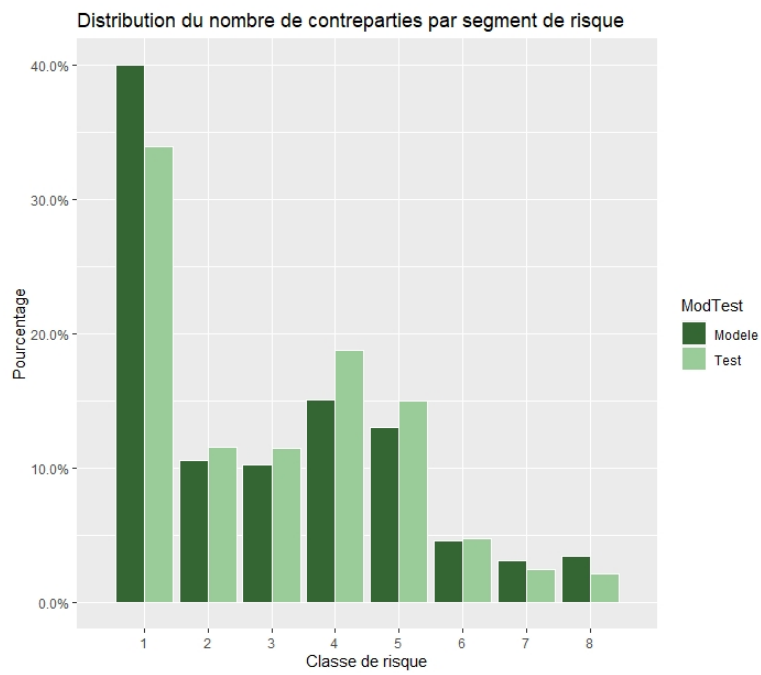


Figure 2.8 – Répartition des contreparties par segment (modèle et test)

RC	Effectifs		Proportion		ISV	Chi ²
	Mod.	Test	Mod.	Test		p-value
1	26626	3834	40,0%	33,8%	1,1%	
2	6972	1271	10,5%	11,2%	0,0%	
3	7478	1416	11,2%	12,5%	0,1%	
4	9775	2069	14,7%	18,2%	0,8%	
5	8274	1655	12,4%	14,6%	0,3%	
6	3009	572	4,5%	5,0%	0,1%	
7	2263	307	3,4%	2,7%	0,2%	
8	2169	229	3,3%	2,0%	0,6%	
GLOBAL	66566	11353	100%	100%	3,1%	22,9%

Figure 2.9 – Calcul de l'ISV par classe de segment

La figure 2.8 présente la similitude de distribution entre les bases de modèle et de test. Cette similitude est soutenue par les résultats de l'ISV et par le test du Khi2 dans le tableau 8 qui conduisent à ne pas rejeter l'hypothèse d'homogénéité avec une p-valeur de 22,8%. Ces tests permettent de conclure à une répartition homogène des contreparties au sein des classes de risque entre les 2 bases.

En résumé

L'analyse de la représentativité donne des résultats très satisfaisants à l'aide de l'ISV et des résultats plus nuancés avec des tests statistiques. Les variables continues lorsqu'elles sont analysées après segmentation en classe montrent une très bonne stabilité de la distribution entre l'échantillon de modélisation et l'échantillon test. Ceci est confirmé par le test du Khi-2 qui est très concluant. On peut donc conclure à une représentativité des données de modélisation par rapport à des données de portefeuille plus récentes.

Chapitre 3

Concepts mathématiques et méthodes utilisées

3.1 Rappel de la problématique de modélisation

Le sujet traité dans ce mémoire est le calibrage de la probabilité de défaut que nous avons défini comme la détermination d'une probabilité de défaut à horizon d'un an sur la base d'un historique. Plus précisément, dans le cas d'un portefeuille *low-default*, le manque de données représente le premier obstacle à la mise en place d'un modèle robuste. Les méthodes statistiques qui pourraient être utilisées nécessitent un historique profond et une bonne répartition des modalités de la variables qualifiant le caractère **en défaut** ou **sain** des contreparties. Ainsi, le déséquilibre de classes constaté sur un portefeuille *low-default* ne garantit pas la justesse des résultats qui pourraient en sortir.

Avant de poursuivre, il est utile de reconsidérer certains des faits connus sur la probabilité de défaut des portefeuilles à faible taux de défaut. Comme mentionné, la probabilité de défaut est une valeur comprise entre 0 et 1, ce qui est intuitivement évident. Le problème de l'estimation de la probabilité de défaut pour les portefeuilles à faible taux de défaut est qu'il existe une rareté significative des observations de défaut. En calculant la probabilité de défaut à partir de données historiques dans lesquelles il y a pas d'observations par défaut, une estimation égale à zéro est attendue. Cependant, il est peu réaliste que la probabilité de défaut soit nulle. Réglementairement, cela n'est pas autorisé d'où le floor à 0,03% exigé par le régulateur. Cela signifie essentiellement qu'il est certain qu'aucune contrepartie de la classe de risque ne fera défaut, ce qui est impossible. Il faut donc calibrer la probabilité de défaut.

L'enjeu du calibrage de la PD est de déterminer un niveau ni trop conservateur, ni trop faible. En effet les probabilités de défaut calibrées sont utilisées pour le calcul de l'Expected Credit Loss. La nouvelle norme IFRS9 prévoit de calculer les pertes de crédits "attendues" dès que les banques mettent en place des financements, et non plus après avoir constaté un événement de crédit. Ainsi, c'est la probabilité de défaut à 12 mois, celle qui est calibrée qui est utilisée pour déterminer le niveau de provisionnement. On comprend ainsi qu'une PD trop conservatrice entraînerait des provisions trop grandes; une PD trop faible des provisions insuffisantes au vu des engagements de la banque. Différentes approches pour mener à bien ce calibrage sont introduites ci-après.

3.2 Approche de calibrage par intervalle de confiance

L'approche par intervalle de confiance a été introduite par Pluto et Tasche (2011). Elle repose sur le principe de l'estimation la plus prudente pour la PD. En d'autres termes, on cherchera à estimer la probabilité que survienne un défaut dans l'année, dans le pire des cas conformément au niveau de risque de la classe qui est calibrée. Cela se fera par utilisation du nombre de défauts réellement observé. L'avantage d'estimer le paramètre de mesure du risque par intervalle de confiance est de s'accorder une marge d'erreur dans sa détermination. Les auteurs présentent la méthode dans un premier temps dans le cas d'un portefeuille *zero-default*. Nous commencerons par présenter l'approche dans ce contexte, puis l'appliquerons au portefeuille *low-default*, sous certaines conditions qui seront vérifiées.

3.2.1 Application à un portefeuille *zero-default*

Commençons par le cas d'un **portefeuille avec zéro défaut**. Comme le nom l'indique, il s'agit d'un portefeuille caractérisé par un nombre de défauts, et donc un taux de défaut annuel nul. La réglementation de Bâle II impose que les probabilités de défauts soient non nulles. Le texte prévoit un floor à 0.03% pour toutes les valeurs de probabilité de défaut calibrées en dessous. On comprend qu'il y a un enjeu de calibrage de la PD, même dans le cas où aucun défaut n'est observé. Pluto & Tasche propose la méthode ci-après pour le faire.

Suite à l'étape de segmentation basée sur la fonction score et en accord avec les analystes crédit, nous disposons des informations suivantes concernant les contreparties :

Classe de risque	Nombre de contreparties	Nombre de défauts	Taux de défaut
1	n_1	d_1	p_1
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
r	n_r	d_r	p_r
Total	$n = \sum_{i=1}^r n_i$	$d = \sum_{i=1}^r d_i$	$p = \frac{d}{n}$

Table 3.1 – Données disponibles par classe de risque après la segmentation

Les contreparties étant classées par niveau de risque croissant, on a intuitivement :

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r \quad (3.1)$$

L'idée est de se placer dans le pire scénario possible dans chaque classe de risque. On pourrait dire que cela revient à ce que toutes les contreparties du segment sont en défaut mais cela ne serait pas correct du point de vue de la définition du défaut, et impliquerait également que la probabilité de défaut est de 100%. Pluto & Tasche définissent l'estimateur le plus prudent pour la PD du segment $i_{(1,\dots,r)}$ comme $p_i = p_r$. En d'autres termes, on postule que le segment calibré a le même niveau de risque de le segment le plus risqué du portefeuille : on parlera du **principe d'homogénéité** du portefeuille.

Par exemple, si le segment calibré est le segment 1, l'équation 3.1 devient :

$$\boxed{p_1 = p_2 = \dots = p_r} \quad (3.2)$$

Soit alors α le niveau d'erreur que l'on s'autorise dans l'estimation. On souhaite que la vraisemblance de l'événement *tous les segments sont sains* soit au moins de $(1 - \alpha)\%$.

A une classe de risque k fixée, soit Y_i^k la variable aléatoire qui vaut 1 si la contrepartie i est en défaut avec une probabilité p_k et 0 si elle est saine avec une probabilité $1 - p_k$.

$Y_i^k \sim \mathcal{B}(p_k)$. Conformément au cas de figure qu'on étudie, le cas où aucun défaut n'est observé dans le portefeuille, la **vraisemblance** de l'événement *toutes les contreparties du segment sont saines* est :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y_1, \dots, y_{n_k}, p_k) &= \mathbb{P}(\{Y_1^k = 0\} \cap \dots \cap \{Y_{n_k}^k = 0\}) \\ &= (1 - p_k) * (1 - p_k) * \dots * (1 - p_k) \\ &= \prod_{j=1}^{n_k} (1 - p_k) \\ &= (1 - p_k)^{n_k}\end{aligned}$$

Soit Z la variable aléatoire qui modélise le caractère sain ou en défaut du portefeuille contenant r classes de risque. En supposant que la survenance du défaut est indépendante de l'appartenance à un segment de risque, l'événement *tout le portefeuille est sain* se traduit en probabilité comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = 0) &= \mathbb{P}(\{\{Y_1^1 = 0\} \cap \dots \cap \{Y_{n_1}^1 = 0\}\} \cap \{\{Y_1^r = 0\} \cap \dots \cap \{Y_{n_r}^r = 0\}\}) \\ &= (1 - p_1)^{n_1} * (1 - p_2)^{n_2} * \dots * (1 - p_{n_r})^{n_r} \\ &= (1 - p_1)^{n_1} * (1 - p_1)^{n_2} * \dots * (1 - p_1)^{n_k} && \text{d'après l'équation 3.2} \\ &= (1 - p_1)^{\sum_{i=1}^{n_r} n_i}\end{aligned}$$

Alors, l'**estimation la plus prudente** de la PD du segment 1 est la probabilité p_1 telle que :

$$(1 - p_1)^{\sum_{i=1}^{n_r} n_i} \geq 1 - \alpha \quad (3.3)$$

Cela revient à résoudre une équation à une inconnue:

$$\begin{aligned}(1 - p_1)^{\sum_{i=1}^{n_r} n_i} = 1 - \alpha &\Rightarrow 1 - p_1 = (1 - \alpha)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n_r} n_i}} \\ &\Rightarrow p_1 = 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n_r} n_i}}\end{aligned}$$

Cette introduction permet de présenter de manière simple l'idée derrière l'approche par intervalle de confiance de Pluto et Tasche. Cependant, elle ne correspond pas exactement au portefeuille modélisé dans ce mémoire. Nous calibrons ici la PD des classes de risque d'un portefeuille *low-default*.

Proposons un exemple pour mieux comprendre la méthode. Soit un portefeuille fictif ayant 0 défaut, de 100 contreparties, réparties en 3 classes de risque comme suit :

CR	Nombre de ctp	Probabilité de défaut
1	45	p_1
2	30	p_2
3	25	p_3

Au seuil d'erreur $\alpha = 5\%$, on détermine \hat{p}_1 , \hat{p}_2 et \hat{p}_3 comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{p}_1 &= 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^3 n_i}} \\ \hat{p}_2 &= 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{\sum_{i=2}^3 n_i}} \\ \hat{p}_3 &= 1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{n_3}}\end{aligned}$$

Application numérique

$$\begin{aligned}\hat{p}_1 &= 1 - (1 - 0,05) \frac{1}{45 + 30 + 25} = 0,05 \\ \hat{p}_2 &= 1 - (1 - 0,05) \frac{1}{30 + 25} = 0,09 \\ \hat{p}_3 &= 1 - (1 - 0,05) \frac{1}{25} = 0,20\end{aligned}$$

Le portefeuille zero-default ainsi calibré a comme probabilité de défaut:

CR	Nombre de ctp	Probabilité de défaut
1	45	0,05%
2	30	0,09%
3	25	0,20%

3.2.2 Application à un portefeuille *low-default*

Pour ce faire, ce ne sera plus non la survenance ou non du défaut qui sera modélisée, mais plutôt le nombre de défaut. Naturellement, on utilise une variable de comptage du nombre de défauts par classe :

$$T^k = \sum_{i=1}^{n_k} Y_i^k \sim \mathcal{B}(n_k, p_k) \text{ avec } Y_i^k \sim \mathcal{B}(p_k) \text{ et } k \text{ le segment}$$

L'hypothèse faite dans le cas du portefeuille *zero-default* (équation 3.2) ne pourrait être directement appliquée car le nombre de défauts survenus ne serait pas pris en compte. Plutôt que de postuler l'égalité des taux de défaut pour appliquer le principe de l'estimation la plus prudente, nous considérerons le nombre de défauts. On sait que par définition,:

$$\mathbb{P}(T^k = t) = \binom{n_k}{t} p_k^t (1 - p_k)^{n_k - t}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, d_k \quad (3.4)$$

La fonction de masse de la variable aléatoire T^k est :

$$\sum_{j=0}^{d_k} \mathbb{P}(T^k = j) = \sum_{j=0}^{d_k} \binom{n_k}{j} p_k^j (1 - p_k)^{n_k - j}$$

Pour appliquer le **principe d'homogénéité** précédemment énoncé, on considère le portefeuille est composé des segments d'ordre k à r de même probabilité de défaut p_k . Par exemple, pour le segment 1, on considère que l'ensemble des contreparties appartient à une classe de risque homogène de taille $n_1 + n_2 + \dots + n_r$ et de probabilité p_1 . Pour le segment 2, on considérera le portefeuille homogène constitué des segments 2 à r , de taille $n_2 + n_3 + \dots + n_r$ et de probabilité de défaut p_2 .

Pour généraliser, on définit respectivement le nombre cumulé de contreparties et le nombre de défauts composant le portefeuille homogène utilisé pour déterminer la PD de la classe k :

$$n_k^* = \sum_{i=k}^r n_i \quad d_k^* = \sum_{i=k}^r d_i \quad (3.5)$$

Au niveau de confiance $1 - \alpha$, la PD du segment sera la probabilité qui satisfait l'inégalité ci-après, de même que dans le cas *zero-default*:

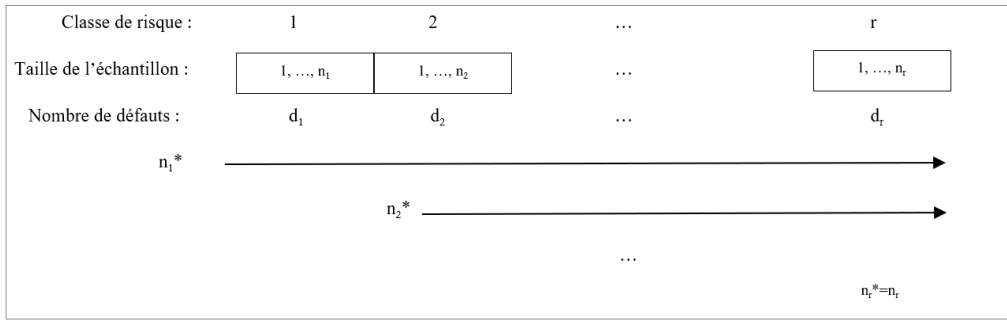


Figure 3.1 – Approche de calibrage par intervalle de confiance: Principe d’homogénéité

$$\mathbb{P}(T^k \leq d_k^*) = \sum_{j=0}^{d_k^*} \binom{n_k^*}{j} p_k^j (1 - p_k)^{n_k^* - j} \geq 1 - \alpha \tag{3.6}$$

3.2.3 Avantages et limites de l’approche par IC

Cette approche présente de nombreux avantages. Elle permet d’utiliser toutes les informations quantitatives connues par rapport au portefeuille. Ce sont notamment le nombre de défauts observés sur l’historique, le nombre de contreparties par segment. Elle détermine la probabilité de défaut calibrée par la borne supérieure de l’intervalle de confiance à $1 - \alpha\%$, tout en tenant compte de la classification des segments par niveau de risque croissant.

Elle est connue pour être l’une des méthodes les plus conservatrices voire trop conservatrice selon la volumétrie du portefeuille. En effet, le principe d’estimation la plus prudente est que dans le cas de quelques défauts, pour tous les niveaux de risque, les estimations de la limite supérieure de l’intervalle de confiance de la PD sont supérieures au taux moyen de défaut de l’ensemble du portefeuille. Ce phénomène n’est pas surprenant, étant donné que tous les défauts du portefeuille sont inclus dans l’estimation de la limite supérieure de confiance, même pour la classe la plus élevée.

Toutefois, ces estimations peuvent être considérées comme trop conservatrices par certains praticiens. De plus, le coefficient binomial de la densité de probabilité de la variable T^k explose rapidement. Dans ce cas, une approximation du coefficient peut être tentée soit par moyenne mobile, soit par imputation des valeurs infinies par la dernière valeur finie. La méthodologie est cependant limitée par le problème de la spécification d’un niveau de confiance approprié. En déterminant le niveau de confiance, il existe un risque de sous-estimation potentielle de la PD moyenne. Nous analyserons également la variation de la PD calibrée en fonction du niveau de confiance.

3.3 Calibrage par approche bayésienne

3.3.1 Les principes de la statistique bayésienne

A la différence de la statistique classique, dans les statistiques bayésiennes, les paramètres sont considérés comme des variables aléatoires auxquelles on cherchera à affecter une densité. La formule du Bayes telle qu’on l’a connaît est alors modifiée. En effet, il faut affecter des densités aux paramètres

du modèle pour pouvoir prendre en compte cet aspect aléatoire. Cette densité est la **densité a priori** des paramètres car elle est définie avant d'observer les résultats, ici le taux de défaut de l'année $N + 1$.

Définition 4 : (Probabilité conditionnelle)

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad (3.7)$$

Théorème 1 : (Probabilités totales)

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) \\ &= \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}) \end{aligned}$$

Théorème 2 : (Théorème de Bayes)

Si A et B sont deux événements, la probabilité que A se produise sachant B réalisé est égale à la probabilité que les deux événements se réalise, c'est-à-dire l'intersection, rapportée à la probabilité que B survienne. Il en découle la formule suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A|B) &= \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})} \end{aligned}$$

Définition 5 : (Densité conditionnelle)

Soient X et Y deux variables aléatoires de **densité jointe** $f(x, y)$, sous réserve de non égalité du dénominateur, on définit la densité conditionnelle par :

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{\int f(x, y) dx} \quad (3.8)$$

Soit T la variable aléatoire modélisant le nombre de défauts et P la variable aléatoire qui représente la probabilité de défaut. Comme énoncé précédemment, on cherchera à affecter à P une densité *a priori* G . la densité jointe de T et P est alors :

$$f_{T|P}(t|p) = \frac{f_{T,P}(t|p)}{g_P(p)} \iff f_{T,P}(t|p) = f_{T|P}(t|p)g_P(p) \quad (3.9)$$

L'objectif de cette méthode est de déterminer la densité *a posteriori* $f_{P|L}(p|l)$. En appliquant le théorème de Bayes précédemment énoncé et à partir de l'équation (3.9), on peut écrire la **densité conditionnelle** de P sachant T :

$$f_{P|T}(p|t) = \frac{f_{T,P}(t, p)}{f_T(t)} \quad (3.10)$$

La distribution marginale de la variable T est obtenue par :

$$\begin{aligned}
 f_T(t) &= \int_{[0;1]} f_{T,P}(t|p) \, dp \\
 &= \int_{[0;1]} f_{T|P}(t|p) g_P(p) \, dp
 \end{aligned}$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned}
 f_{P|T}(p|t) &= \frac{f_{T,P}(t, p)}{f_T(t)} \\
 &= \frac{f_{T|P}(t|p) g_P(p)}{f_T(t)} \\
 &= \frac{f_{T|P}(t|p) g_P(p)}{\int_{[0;1]} f_{T|P}(t|p) g_P(p) \, dp}
 \end{aligned}$$

On trouve que la densité *a posteriori* est proportionnelle au produit de la **vraisemblance** et de la **densité a priori**

$$\boxed{f_{P|T}(p|t) \propto f_{T|P}(t|p) * g_P(p)} \quad (3.11)$$

où :

- $f_{T|P}(t|p)$: est la fonction de vraisemblance autrement dit la densité des observations pour des paramètres donnés
- $f_T(t)$: la densité marginale de T qui s'écrit comme : $f(T) = \int_{[0;1]} f_{T|P}(t|p) g_P(p) \, dp$
- $f_{T,P}(t, p)$: la densité jointe des données observées et des paramètres
- $g_P(p)$: la densité de probabilité des paramètres appelée loi *a priori*
- $f_{P|T}(p|t)$: est la densité de probabilité conditionnelle des paramètres sachant la réalisation de T appelée loi *a posteriori*

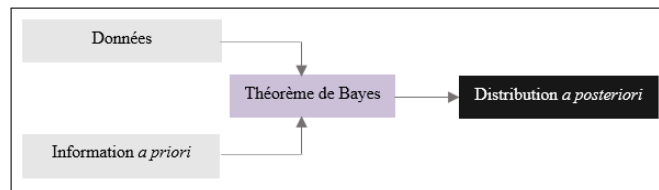


Figure 3.2 – Résumé de l'approche bayésienne

3.3.2 Expression de la fonction de vraisemblance

Il s'agit de la densité des observations conditionnellement à la réalisation de la variable P . En choisissant de modéliser le nombre de défauts par une loi binomiale, de même que dans l'équation (3.4), pour un nombre de défaut d et une réalisation p de P , on a :

$$f_{T|P}(t|p) = \mathbb{P}(T = t | P = p) = \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t} \quad (3.12)$$

Une fois la vraisemblance connue, la densité jointe peut être déterminée par un calcul d'intégrale. Néanmoins, celui-ci requiert la spécification de la densité *a priori* de P . Aussi, La formule de Bayes

et le calcul des différentes lois marginales qui en découle font appel à de nombreux calculs d'intégrales multidimensionnelles pour lesquelles la forme analytique peut être très complexe. On verra par la suite que des méthodes de simulations Monte Carlo permettent alors d'approcher ces intégrales.

3.3.3 Choix de la densité *a priori*

La détermination de la loi *a priori* est l'élément clé de l'inférence bayésienne et sa détermination est donc l'étape la plus importante dans la mise en œuvre de cette inférence. Il existe deux principales catégories de distributions pouvant être utilisées : les distributions **subjectives** et les distributions **objectives**. La première catégorie est basée sur le jugement d'expert. Elle vise à refléter l'opinion subjective due l'expert concernant la distribution des défauts. Dans la suite, nous nous concentrerons plutôt sur la deuxième catégorie de distributions.

Les distributions conjuguées

L'une des difficultés de l'approche bayésienne est la détermination de la loi *a posteriori*. Le calcul peut être facilité par la nature des lois choisies. En effet, dans certains cas, la vraisemblance et la loi *a priori* peuvent être des lois conjuguées. On a alors pour la loi *a posteriori* une expression explicite, dont la simulation d'une valeur peut se faire simplement.

Afin de déterminer les paramètres des lois *a priori*, on peut s'appuyer sur les données disponibles. C'est la méthode la plus utilisée dans la pratique. Elle consiste à choisir une loi pour la densité puis à calibrer les paramètres soit par la **méthode des moments**, soit par la **méthode du maximum de vraisemblance**. Le principal inconvénient de l'estimation est que les queues de distributions peuvent avoir des effets non négligeables sur les moments empiriques. Il reste possible d'estimer les quantiles de la distribution *a priori* puis de choisir les paramètres, de sorte à respecter certaines contraintes.

Loi Beta comme loi *a priori*

Un des intérêts de la loi *Beta* est qu'elle s'interprète aisément en termes de succès et d'échecs, ce qui la rend particulièrement intéressante lorsque l'on analyse des proportions, que l'on peut toujours interpréter comme une série de succès et d'échecs. Elle a l'avantage d'être définie sur $[0; 1]$ et est donc adaptée pour modéliser une probabilité. De plus, il s'agit d'une loi dont la densité peut prendre plusieurs formes, en fonction de la valeur des paramètres. Elle est plutôt flexible.

Définition 6 : (*Fonction de densité de densité d'une loi Beta*(α, β))

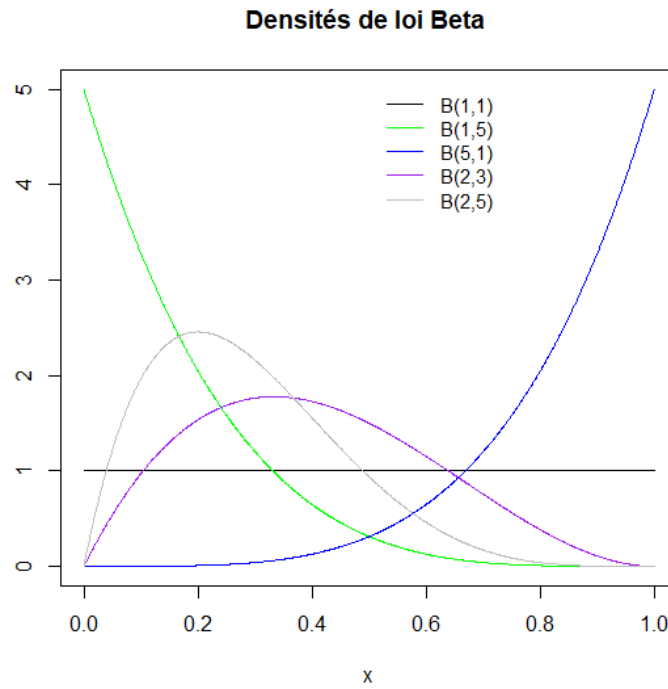
Soit X une variable aléatoire suivant une loi *Beta* de paramètres α, β . Elle admet comme densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} & \text{pour } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En optant pour la loi *Beta* comme loi *a priori*, la loi *a posteriori* du paramètre aléatoire P est une loi *Beta* de paramètres différents et la loi du nombre de défauts T conditionnellement aux paramètres est une loi *BetaBinomiale*. En effet, la loi *BetaBinomiale* est la loi conjuguée de la loi Binomiale. Cela résulte d'un changement analytique d'une loi $B(n, p)$ où le paramètre p suit une loi *Beta*.

Si la loi de la variable T est :

$$\begin{aligned} L(t|p) &= \text{Bin}(n, p) \\ &= \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t} \end{aligned}$$

Figure 3.3 – Exemples de densités de loi Beta pour différents α, β

et la loi de la variable P est une loi Beta¹ de densité :

$$\begin{aligned} g(p|\alpha, \beta) &= \text{Beta}(\alpha, \beta) \\ &= \frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \end{aligned}$$

alors la loi composée est donnée par :

$$\begin{aligned} f(t|\alpha, \beta) &= \int_0^1 L(t|p)g(p|\alpha, \beta)dp \\ &= \binom{n}{t} p^t(1-p)^{n-t} \times \frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \\ &= \binom{n}{t} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 p^{t+\alpha-1}(1-p)^{n-t+\beta-1}dp \end{aligned}$$

$$f(t|\alpha, \beta) = \binom{n}{t} \frac{B(t+\alpha, n-t+\beta)}{B(\alpha, \beta)}$$

Nous avons démontré là, la loi *a posteriori* de la variable comptant le nombre de défauts. Cependant, ce qui nous intéresse ici est de déterminer la loi *a posteriori* de la probabilité P . En effet, en réécrivant l'équation 3.11, en remplaçant la vraisemblance de T (3.12) et en prenant compte du choix de la loi *Beta*, on a :

1. On rappelle la fonction Beta : $\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du$

$$\begin{aligned}
f_{P|T}(p|t) &\propto \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t} \times p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1} \times \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \\
&\propto \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \binom{n}{t} p^{\alpha+t-1} (1-p)^{\beta+n-t-1} \\
&\propto C \times p^{A-1} (1-p)^{B-1} \\
&\propto C \times \text{Beta}(A, B)
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
- C &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \binom{n}{t} \\
- A &= \alpha + t \\
- B &= \beta + n - t
\end{aligned}$$

En résumé, lorsque la loi *a priori* est : $P \sim \text{Beta}(\alpha; \beta)$,

$$\boxed{\mathbf{f}_{\mathbf{P}|\mathbf{T}}(\mathbf{p}|\mathbf{t}) \propto \mathbf{C} \times \mathbf{Beta}(\alpha + \mathbf{t}, \beta + \mathbf{n} - \mathbf{t})}$$

L'objectif à présent sera d'estimer les paramètres α et β de la loi de la variable P afin d'en simuler une réalisation qui sera notre probabilité de défaut. Pour ce faire nous utiliserons la méthode des moments en se basant sur l'historique pour obtenir une expression analytique des paramètres de la loi.

Une fois les paramètres calculés, nous simulerons les réalisations de la variable P de différentes manières avant de comparer les résultats. Ces méthodes seront explicitement présentées dans la section portant sur la détermination de la densité *a posteriori*.

Loi Uniforme comme loi *a priori*

L'intérêt de cette loi est aussi qu'elle est définie sur $[0; 1]$. Elle convient donc à la modélisation de la probabilité de défaut par segment. On rappelle :

Définition 7 : (Fonction de densité d'une loi Uniforme sur $[a, b]$)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi *Uniforme* sur $[a; b]$. X admet pour densité :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Afin d'exploiter l'idée de distribution conjuguée qui permet de déterminer facilement la densité *a posteriori* de la variable d'intérêt, on peut démontrer facilement que la loi *Uniforme* est en réalité une loi *Beta*(1, 1).

Prenons $\alpha = \beta = 1$ dans l'expression de la densité de la loi *Beta* :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^{1-1}(1-x)^{1-1}}{B(1, 1)} = 1 & \text{pour } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, les propriétés de la loi *a posteriori* précédemment démontrées sont utilisables, ce qui facilite les calculs.

En résumé, lorsque la loi *a priori* est : $P \sim \text{Beta}(1; 1)$,

$$\mathbf{f}_{\mathbf{P}|\mathbf{T}}(\mathbf{p}|\mathbf{t}) \propto \mathbf{C} \times \mathbf{Beta}(\mathbf{1} + \mathbf{t}, \mathbf{1} + \mathbf{n} - \mathbf{t})$$

Les distributions non informatives

Lorsque les informations sont disponibles, les lois conjuguées sont adaptées pour la détermination de la densité a posteriori. Il peut cependant arriver que cela ne soit pas le cas. Dans ce contexte, il est possible d'utiliser les lois **non informatives**. Un exemple de loi non informative que l'on utilisera dans un premier temps est la loi de **Jeffreys**.

Définition 8 : (*L'a priori de Jeffreys*)

L'idée sous-jacente est de définir une densité a priori fondée sur l'information de Fisher, donnée par :

$$I(p) = -\mathbb{E}_p \left[\frac{d^2 \log f(T|p)}{dp^2} \right] \quad (3.13)$$

$I(p)$ représente une mesure de la quantité d'information sur p contenue dans l'observation. Plus $I(p)$ est grande, plus l'observation apporte de l'information. Il semble alors naturel de favoriser les valeurs de p pour lesquelles $I(p)$ est grande : cela permet de minimiser l'influence de la loi *a priori* au profit de l'observation. On prendrait alors pour loi *a priori* pour notre paramètre inconnu P , $g_P(p)$ comme suit :

$$g_P(p) = \sqrt{I(p)} \quad (3.14)$$

$$\log(f(t|p)) = t \log p + (n - t) \log(1 - p) + \text{constante}$$

$$\frac{d}{dp} \log f(t|p) = \frac{t}{p} - \frac{n - t}{1 - p}$$

$$\frac{d^2}{dp^2} \log f(t|p) = -\frac{t}{p^2} - \frac{n - t}{(1 - p)^2}$$

En définissant t comme la réalisation de la variable aléatoire $T = \sum_{i=1}^n T_i$ (où $T_i \sim \mathcal{B}(1, p)$), on trouve que $\mathbb{E}_P(T) = np$. L'information de Fisher $I(p)$ vaut alors :

$$\begin{aligned} I(p) &= -\mathbb{E}_p \left[\frac{d^2 \log f(T|p)}{dp^2} \right] \\ &= -\mathbb{E}_p \left[-\frac{t}{p^2} - \frac{n - t}{(1 - p)^2} \right] \\ &= \mathbb{E}_p \left(\frac{t}{p^2} \right) + \mathbb{E}_p \left(\frac{n - t}{(1 - p)^2} \right) \\ &= \frac{np}{p^2} + \frac{n - np}{(1 - p)^2} \\ &= \frac{n}{p} + \frac{n}{1 - p} \end{aligned}$$

On conclut que l'information de Fisher associée à l'observation de P est donnée par :

$$I(p) = \frac{n}{p(1-p)}$$

On en déduit la densité *a priori* :

$$g_P(p) = \sqrt{I(p)} \propto p^{-\frac{1}{2}}(1-p)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

On reconnaît l'expression de la densité d'une loi *Beta* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. La densité *a posteriori* est alors la même que dans le cas de la loi conjuguée *Beta*. La seule différence est la valeur des paramètres $(\alpha; \beta)$ qui sont égaux à $(0.5; 0.5)$.

En résumé, lorsque la loi *a priori* est : $P \sim \text{Beta}(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$,

$$\mathbf{f}_{P|T}(\mathbf{p}|\mathbf{t}) \propto \mathbf{C} \times \mathbf{Beta}(\frac{1}{2} + \mathbf{t}, \frac{1}{2} + \mathbf{n} - \mathbf{t})$$

Dans l'approche bayésienne, la qualité de l'estimation dépend du choix de la distribution *a priori*. Il s'agit du point le plus critiquable et le plus difficile dans cette approche. Dans le cas où l'information *a priori* disponible est précise, il est possible de faire un meilleur choix de la loi qui correspond au mieux aux données. La densité *a posteriori* peut être déterminée mécaniquement au moyen de la formule (3.10).

Cependant, dans la pratique, il est peu fréquent d'avoir des données assez précises et un historique suffisamment profond. En l'occurrence, les données dont nous disposons dans ce mémoire s'étalent sur une période de 5ans et sont regroupées par classes de risque. le niveau de granularité n'est pas suffisamment fin pour calibrer les paramètres des lois, en fonction des choix de modélisation. De plus, si l'information *a priori* est riche, la loi *a priori* sera mieux définie que dans le cas non informatif.

3.3.4 Détermination de la densité *a posteriori*

Dans le cas où ce sont des lois conjuguées qui sont choisies, la densité *a posteriori* du paramètre est une loi standard. L'estimation de la variable d'intérêt dans le cas unidimensionnel peut se faire de deux manières différentes : soit on considère le meilleur estimateur possible de la variable, soit et son évaluation se fait par simple simulation de Monte-Carlo.

D'abord, présentons la méthode des moments qui sera utilisée pour déterminer le couple de paramètres $(\alpha; \beta)$. Rappelons que pour la loi Uniforme il vaut $(1; 1)$ et pour l'*a priori* de Jeffrey $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Elle sera alors utilisée pour calibrer ceux de la loi *Beta* qui sont inconnus.

Méthode des moments pour estimer les paramètres

Afin de calibrer les paramètres des lois *a priori*, on peut avoir recours à plusieurs méthodes dont la méthodes des moments. Elle requiert des données disponibles qui permettront de déterminer les meilleurs paramètres, au vu de l'information à portée de main.

Définition 9 (*Moment d'ordre k d'une variable aléatoire*)

Soit X une variable aléatoire d'échantillon (X_1, \dots, X_n) . On appelle **moment d'ordre k** de X , s'il existe, le nombre

$$m_k = \mathbb{E}(X^k)$$

— Si X est une variable discrète, son moment d'ordre k se calcule par la formule :

$$m_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \mathbb{P}(X = x_i)$$

— Si X est une variable continue, le moment d'ordre k se calcule en faisant :

$$m_k = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx$$

On peut également introduire les **moments centrés d'ordre k** , définis comme suit :

$$\mu_k = \mathbb{E} \left[(X - \mathbb{E}(X))^k \right]$$

Considérons une loi de probabilité P_θ dépendant du paramètre inconnue θ , et un échantillon (X_1, \dots, X_n) de cette loi. Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que l'application :

$$\begin{aligned} \Theta &\Rightarrow \mathbb{R} \\ \Phi : \theta &\longmapsto \mathbb{E}_\theta [f(X_1)] \end{aligned}$$

soit **injective**. On définit l'estimateur $\hat{\theta}_n$ comme la solution dans Θ (sous condition d'existence) de l'équation :

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)$$

Dans la plupart des cas, $f(X)$ est une puissance de X , ou de $X - \mathbb{E}(X)$. Cela revient ainsi à déterminer les moments de X , d'où le nom **méthode des moments**.

Introduisons l'estimation des paramètres de la loi *Beta* (α, β) par la méthode des moments. Soit X une variable aléatoire suivant une loi *Beta* (α, β) . Elle a pour espérance et pour variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad ; \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$$

Si on appelle E l'espérance et V la variance, les estimateurs de α et β sont :

$$\hat{\alpha} = \frac{E(E - E^2 - V)}{V} \quad ; \quad \hat{\beta} = \frac{E - 2E^2 + E^3 - V + EV}{V}$$

La moyenne de la loi a posteriori comme meilleur estimateur de la probabilité a posteriori

Rappelons que $f(p|t)$ représente comme le résumé de l'information disponible sur P , une fois le nombre de défauts t observé. D'un point de vue bayésien, la connaissance de la loi *a posteriori* permettrait d'avoir toute l'information. Cependant, étant donné que ses paramètres sont inconnus, quand on souhaite disposer d'une estimation pour P , on retient la moyenne de la loi *a posteriori*.

Définition 10 : (Estimateur de Bayes de P : \hat{P}_B)

On appelle estimation bayésienne du paramètre d'intérêt P la moyenne de la loi *a posteriori*. Elle est définie comme suit :

$$\mathbb{E}[P|T] = \int_0^1 p \times f(p|t) dp = \frac{\int_0^1 p \times f(t|p)g(p) dp}{\int_0^1 f(t|p)g(p) dp}$$

Analytiquement, l'estimation bayésienne de P vaut :

$$\hat{P}_B = \mathbb{E}[P|T] = \frac{\alpha + t}{\beta + n - t} \quad (3.16)$$

Ainsi, vient d'être présentée la première méthode pour déterminer une PD par segment *a posteriori*. Comme énoncé précédemment, la seconde consistera à simuler N réalisations Eren d'une variable aléatoire suivant la loi que l'on a déterminé. Ces simulations seront utilisées pour appliquer la méthode de Monte-Carlo pour trouver la PD.

3.3.5 Procédure de simulation: Monte-Carlo par Chaîne de Markov

Simulation d'une variable aléatoire de loi connue : Méthode de Monte-Carlo

Il s'agit d'une méthode d'estimation d'une quantité numérique en utilisant des procédés aléatoires. Elle est adaptée pour les cas où l'expression explicite de la variable s'avère difficile à exploiter. C'est une méthode qui a pour avantage d'être simple à utiliser et qui s'applique à un large éventail de problèmes. Elle s'appuie sur le résultat de la **loi des grands nombres**.

Théorème 3 : (*Loi des grands nombres*)

Soit $(X_i)_{i \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance μ et d'écart-type σ . Pour chaque $n \geq 1$, soit $M_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ la moyenne des n premières valeurs. Alors la suite de ces moyennes M_n tend vers le nombre μ dans le sens suivant :

$$\text{Pour tout } \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|M_n - \mu| \geq \epsilon) = 0$$

La première étape de la résolution d'un problème par Monte-Carlo est de l'écrire sous forme d'une espérance. Supposons que l'on cherche à estimer la quantité μ précédemment introduite et inconnue. Pour ce faire, la solution standard est de simuler une suite $(X_M)_{M \geq 1}$ de M variables aléatoires suivant une loi donnée, puis d'en estimer l'espérance par la moyenne empirique :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \quad (3.17)$$

La méthode de Monte-Carlo ainsi présentée permet de simuler une variable aléatoire dont on connaît la loi. Plus précisément, dans notre cas, elle suffirait à simuler M réalisations de la probabilité *a posteriori*. Lorsque la loi de $P|T$ n'est pas une loi standard, il existe des techniques adaptées à l'approche bayésienne et facilitant les calculs. Au nombre de ces méthodes, on compte les méthodes de **Monte-Carlo par Chaîne de Markov** (MCMC). Plus précisément, on utilisera l'algorithme de **Métropolis-Hastings** qui est une méthode MCMC. Bien que la simple méthode Monte-Carlo serait suffisante pour trouver la probabilité de défaut, nous utiliserons la méthode MCMC pour plus de précision et de meilleurs résultats.

Principe des méthodes MCMC

L'extension de la méthode de Monte-Carlo classique tire son nom de l'idée que pour reproduire des approximations acceptables d'intégrales et d'autres fonctions dépendant d'une loi d'intérêt, il suffit de générer une chaîne de Markov $(p_m)_m$ de loi limite la loi d'intérêt.

Une chaîne de Markov est une séquence de variables aléatoires X_1, \dots, X_n dépendantes, telle que la distribution de X_i conditionnellement aux observations passées ne dépend que de X_{i-1} :

$$f(x_i | x_{i-1}, \dots, x_1) = f(x_i | x_{i-1}) \quad (3.18)$$

Une chaîne de Markov est caractérisée par deux composantes :

- la distribution initiale $f(x_1)$
- les distributions conditionnelles de $X_i | X_{i-1}$ appelées les kernels de transitions notés $K(x_{i-1}, x_i)$

Le choix de construire des chaînes de Markov reposent sur deux propriétés utiles au problème traité. Ce sont l'**invariance** et la **stationnarité**. Elles permettent d'assurer que la loi de X_{i+1} est la même que celle de X_i . de plus, la propriété d'**irréductibilité** des chaînes de Markov est très importante dans l'estimation de la densité *a posteriori*.

On cherche à construire une chaîne de Markov pour le paramètre P . La chaîne est construite de sorte à ce qu'elle converge vers la distribution *a posteriori* qui en est la distribution stationnaire : c'est la propriété d'**ergodicité**

Théorème 4 : (*Théorème ergodique*)

Soit P une matrice de transition irréductible et $(X_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ d'état initial x . On suppose qu'il existe une probabilité invariante π i.e. $(\pi P = \pi)$. Alors :

- π est l'unique probabilité invariante et $\pi(x) > 0$
- Tous les états sont récurrents (chaîne dite **récurrente positive**)
- Pour tout état x , et toute fonction f telle que $\sum |f(x)|\pi(x) < +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) = \sum f(x)\pi(x), \mathbb{P} - p.s.$$

Par application, la fonction f représente ici la densité *a posteriori* de P et la probabilité π , les kernels de transition. Ces derniers satisfont la propriété suivante, appelée **condition d'équilibre ponctuel**:

$$f(p_{i-1}|t)K(p_{i-1}, p_i) = f(p_i|t)K(p_i, p_{i-1}) \quad (3.19)$$

On peut alors approcher $\mathbb{E}[f(p|t)]$ à l'aide du théorème ergodique.

Procédure de simulation

Plusieurs algorithmes existent pour simuler une loi selon la méthode MCMC : algorithme de Propp-Wilson, algorithme de Metropolis-Hastings, échantillonnage de Gibbs pour ne citer que ceux là. Dans notre cas, nous utiliserons l'**échantillonnage de Gibbs**.

Afin de calibrer les paramètres des lois *a priori*, nous utiliserons les taux de défaut par année pour chaque classe de risque, étant donné que la calibration sera faite à ce niveau de granularité. Pour déterminer la probabilité de défaut, la procédure de simulation pour chaque classe de risque sera la suivante :

1. Simuler M réalisations du nombre de défaut avec $T \sim \mathcal{B}(n, p)$ où
 - n représente le nombre de contreparties dans la classe de risque
 - p représente le taux de défaut observé
2. A cette étape, deux différentes méthodes seront utilisées en fonction de la manière dont on veut simuler la variable P :
 - Dans le cas où c'est la loi *a posteriori* qui est utilisée pour trouver la PD calibrée, suite à l'étape précédente, il convient de simuler un vecteur de taille M de réalisations de la variable aléatoire $P \sim g_P(p)$: selon la loi *a priori* qui est choisie, les paramètres sont estimés par la méthode des moments. Le nombre de défaut utilisé dans la formule des paramètres de la loi *a posteriori* sera celui du vecteur résultant de l'étape 1, correspondant à la même itération $i = 1, \dots, M$. Une fois les M itérations faites, on applique la méthode de Monte-Carlo pour déterminer une PD finale.
 - Lorsque qu'on utilise le meilleur estimateur de la probabilité *a posteriori*, à savoir la moyenne de la loi, la PD calibrée est obtenue en appliquant la formule de la moyenne (3.16)

3.4 Vérification des propriétés du MCMC

Dans le cas du calibrage au moyen de l'approche bayésienne, on a vu que la simulation de la loi *a posteriori* se fait par l'échantillonnage de Gibbs. La méthode par chaîne de Markov repose sur l'hypothèse de dépendance énoncée à (3.19). Pour vérifier cette hypothèse, on choisit de représenter les **autocorrélations partielles** de la série simulée.

Définition 11 : (Fonction d'autocorrélation)

L'autocorrélation d'une série fait référence au fait que dans une série temporelle, la mesure d'un phénomène à un instant t peut-être corrélées aux mesures précédentes ($t-1, t-2, \dots$) ou aux mesures suivantes ($t+1, t+2, \dots$). Une série autocorrélée est ainsi corrélée à elle-même avec un décalage (**lag**) donné. Pour une série stationnaire (X_t) , on définit la fonction d'autocorrélation pour tout t par :

$$h \mapsto \rho_X(h) = \text{corr}(X_t, X_{t-h}) = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t-h})}{\sqrt{V(X_t)}\sqrt{V(X_{t-h})}} = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} \quad (3.20)$$

L'autocorrélation partielle permet de mesurer l'autocorrélation d'un signal pour un décalage k , **indépendamment** des autocorrélations pour les décalages inférieurs.

Définition 12 : (Fonction d'autocorrélation partielle)

Pour une série stationnaire, (X_t) , on définit la fonction d'autocorrélation partielle :

$$h \mapsto \psi(h) \text{ tel que } \psi(h) = \text{corr}(\hat{X}_t, \hat{X}_{t-h}) \quad (3.21)$$

où

$$\begin{cases} \hat{X}_{t-h} &= X_{t-h} - EL(X_{t-h}|X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1}) \\ \hat{X}_t &= X_t - EL(X_t|X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1}) \\ EL(X_t|X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1}) &= a_1(h-1)X_{t-1} + a_2(h-1)X_{t-2} + \dots + a_{h-1}(h-1)X_{t-h+1} \end{cases}$$

EL est la projection de X_t sur l'espace engendré par $(X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1})$ aussi appelée *espérance linéaire*.

Afin de valider l'hypothèse de dépendance, on utilisera analysera les autocorrélogrammes partiels, qui représentent les différents ψ pour chaque simulation faite. Les barres significatives qui seront en dehors de l'intervalle de confiance de nullité de la corrélation, indiqueront le **lag** de corrélation. Pour que l'hypothèse soit confirmée, il faudrait que seulement un pic soit significatif. Une fois les résultats présentés, nous afficheront les autocorrélogrammes.

Pour ce qui est de la stationnarité de la série, nous le `kpss.test` qui sera présenté en annexe. La p-value de ce test permet de conclure à la stationnarité (resp. à la non stationnarité) de la série lorsque la p-value est inférieure au seuil (resp. supérieur au seuil). On prendre un seuil de 5%.

3.5 Approfondissement de l'approche bayésienne : application de la théorie des valeurs extrêmes

3.5.1 Transformation de la probabilité de défaut

Comme énoncé précédemment, la problématique traitée est la modélisation de la probabilité de défaut d'un portefeuille *low-default*. Pour rappel, il s'agit d'un portefeuille dans lequel la probabilité de survenance du défaut est relativement très proche de 0, mais ne peut être nulle car cela sous-entendrait

qu'aucun défaut ne surviendra. Il est donc impossible d'obtenir d'un modèle des PD calibrées à 0%. Il n'y aurait pas nécessité d'évaluer le niveau de risque et il serait alors impossible de calculer le ratio de solvabilité. En résumé, la probabilité de défaut d'un portefeuille *low-default* :

- prend des valeurs entre 0 et 1
- est très proche de 0
- ne peut être nulle

On pourrait alors proposer la transformation suivante :

$$p \in [0; 1] \Rightarrow \lambda = \frac{1}{p} \in [1, \infty)$$

Ainsi, plus petites sont les valeurs de p , plus élevées sont celles de λ (lorsque $p \rightarrow 0$, $\lambda = \frac{1}{p} \rightarrow \infty$).

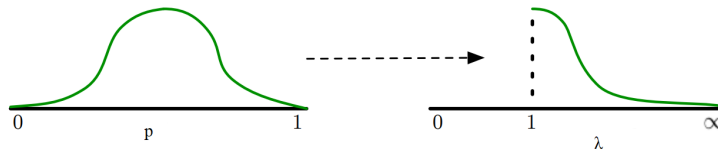


Figure 3.4 – Transformation de p pour utilisation de la TVE

3.5.2 Calcul de la densité a posteriori

Définition 13 : (Distribution de Pareto $(\frac{1}{\gamma})$)

Soit λ une variable aléatoire qui suit une loi de Pareto. Elle a deux paramètres que sont l'indice de Pareto ici $\frac{1}{\gamma}$ et la valeur minimale λ_0 égale à 1 dans notre cas. Car la plus petite valeur de λ correspond à la plus grande possible de la probabilité p , soit 1. La variable aléatoire admet pour fonction de densité :

$$g_{\Lambda}(\lambda) = \frac{1}{\gamma} \lambda^{-\frac{1}{\gamma}-1} \tag{3.22}$$

A l'instar de ce qui a été fait pour l'utilisation de la loi Beta, remplaçons dans l'expression de la vraisemblance 3.12 la loi de Pareto comme loi *a priori*:

$$f_{T|P}(t|p) = \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t}$$

On pose le changement de variable suivant : $\lambda = \frac{1}{p} \Rightarrow p = \frac{1}{\lambda}$. La vraisemblance devient :

$$f_{T|\Lambda}(t|\lambda) = f_{T|P}(t|p) \left| \frac{d}{d\lambda} p \right|$$

Pour appliquer le changement de variable, on calcule le terme :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{d\lambda} p \right| &= \left| \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\lambda} \right| \\
&= \left| -\frac{1}{\lambda^2} \right| \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

La vraisemblance du nombre de défauts conditionnellement à la probabilité de défaut s'écrit alors :

$$f_{T|\Lambda} \left(t \middle| \frac{1}{\lambda} \right) = \binom{n}{t} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^t \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)^{n-t} \times \frac{1}{\lambda^2}$$

La densité *a posteriori* admet pour expression :

$$\begin{aligned}
h \left(\frac{1}{\lambda} \middle| t \right) &\propto f \left(t \middle| \frac{1}{\lambda} \right) \times g(\lambda) \\
&\propto \binom{n}{t} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^t \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)^{n-t} \times \frac{1}{\lambda^2} \times \frac{1}{\gamma} \lambda^{-\frac{1}{\gamma}-1}
\end{aligned}$$

On peut remarquer que contrairement au cas d'utilisation de la loi Beta comme loi *a priori*, la constante de normalisation n'est pas explicitement exprimée. Pour faciliter le calcul, on appliquera le logarithme à l'expression de la densité.

Soit $k(\lambda) = \log \left(h \left(\frac{1}{\lambda} \middle| t \right) \right)$. D'un point de vue mathématique, utiliser $h \left(\frac{1}{\lambda} \middle| t \right)$ ou $\exp(k(\lambda))$ produirait le même résultat. Pour contourner l'absence de la constante de normalisation et faciliter le processus de simulation, prenons :

$$h \left(\frac{1}{\lambda} \middle| t \right) = \binom{n}{t} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^d \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)^{n-t} \times \frac{1}{\lambda^2} \times \frac{1}{\gamma} \lambda^{-\frac{1}{\gamma}-1} \quad (3.23)$$

On obtient l'expression de la fonction $k(\lambda)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
k(\lambda) &= \log \binom{n}{t} - d \log(\lambda) + (n-d) \log \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) - 2 \log(\lambda) - \left(\frac{1}{\gamma} + 1 \right) \log(\lambda) - \log(\gamma) \\
&= \log \binom{n}{t} - \left[d + \frac{1}{\gamma} + 3 \right] \log(\lambda) + (n-d) \log \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)
\end{aligned}$$

La première étape de l'application de la théorie précédemment exposée est le calibrage du paramètre γ de la loi de Pareto. On utilisera à nouveau la méthode des moments. Une variable aléatoire suivant une loi de *Pareto(k)* admet pour espérance :

$$\mathbb{E}[\lambda] = \frac{1}{1-\gamma}. \text{ On déduit : } \boxed{\gamma = \frac{\mathbb{E}[\lambda] - 1}{\mathbb{E}[\lambda]}}$$

Cette expression utilise la moyenne empirique de λ que l'on calculera à partir des taux de défaut observés. Pour parcourir une plage de valeurs possibles, tout en restant proche de la valeur observée, sera considéré l'intervalle de confiance à $(1-\alpha)\% = 95\%$ autour du taux de défaut observé. Cela revient à construire un intervalle de confiance autour d'une proportion.

Intervalle de confiance autour d'une proportion

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(n, p)$ pour un échantillon de taille n . Lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, on peut faire une approximation de la loi binomiale par la loi normale :

$$\mathcal{B}(n, p) \sim \mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right) \text{ ou } \mathcal{N}\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \text{ si on considère la proportion de succès.}$$

Trouver l'intervalle de confiance à 95% revient à trouver l'intervalle $[a; b]$ tel que :

$$P(a \leq p^* \leq b) = 0,95 \iff P\left(\frac{a-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq \frac{p^*-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq \frac{b-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) = 0,95$$

$$\iff P(-Z_\alpha \leq Z \leq Z_\alpha)$$

Où

$$- Z = \frac{p^* - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Z_α le quantile d'ordre α de la loi normale centrée réduite

On trouve : $a = p - Z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$; $b = p + Z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Pour $\alpha = 5\%$:

$$IC_{95\%} = \left[p - Z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + Z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Une fois cet intervalle calculé pour chaque classe de risque, les valeurs de λ qui seront utilisées seront les parties entières de chaque valeur de $\frac{1}{p}$ et le paramètre γ est calculé empiriquement. Il est alors possible d'évaluer la fonction $k(\lambda)$ en chaque point de sorte à obtenir un vecteur. La loi *a posteriori* n'étant pas une loi usuelle, on se propose d'utiliser la méthode de rejet ci-après.

3.5.3 Procédure de simulation

Méthode de rejet

La méthode de rejet permet de simuler une réalisation d'une variable aléatoire X de densité connue, qu'on ne sait pas simuler directement. Le principe est de simuler une autre variable aléatoire Y de densité connue et de conditionner par une événement A , tel que la loi conditionnelle de Y est celle de X .

Proposition 1 Soit X et Y deux variables aléatoires de densités respectives f et g telles que

$$f(x) \leq g(x)$$

Et une certaine constante c (qu'on appellera le **facteur de significativité**).

Soit U une variable aléatoire de loi Uniforme sur $[0;1]$. Alors la loi de Y sachant $(cUg(y) < f(Y))$ est la loi de X . De plus,

$$\mathbb{P}[cUg(Y) < f(Y)] = \frac{1}{c}$$

Démonstration

Posons $A = cUg(Y) < f(Y)$. Pour tout borélien B , on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[Y \in B|A] &= \frac{\mathbb{P}[Y \in B; A]}{\mathbb{P}[A]} \\
 &= \frac{1}{\mathbb{P}[A]} \int_{(y,u) \in \mathbb{R}^d \times [0;1]: y \in B, c u g(y) < f(y), g(y) \neq 0} g(y) dy du \\
 &= \frac{1}{\mathbb{P}[A]} \int_{y \in \mathbb{R}^d} g(y) \frac{f(y)}{c g(y)} dy \\
 &= \frac{1}{c \mathbb{P}[A]} \int_{y \in B} f(y) dy
 \end{aligned}$$

Calculons $\mathbb{P}[A]$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[A] &= \mathbb{P}(c U g(Y) < f(Y)) \\
 &= \mathbb{P}\left(U < \frac{f(Y)}{c g(Y)}\right) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\left(U < \frac{f(y)}{c g(y)}\right) g(y) dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{c g(y)} g(y) dy \\
 &= \frac{1}{c}
 \end{aligned}$$

Lorsqu'on remplace $\mathbb{P}[A]$ dans le calcul de la probabilité conditionnelle on trouve :

$$\mathbb{P}[Y \in B|A] = \int_{y \in B} f(y) dy. \quad (3.24)$$

Ainsi, on obtient la densité f de la variable aléatoire X . Dans la pratique, plus précisément dans notre cas, on prendre comme fonction f la fonction $\log\left(h\left(\frac{1}{\lambda}|t\right)\right)$ et g comme le $\max\left(\log\left(h\left(\frac{1}{\lambda}|t\right)\right)\right)$.

On calcule pour chaque λ , $k(\lambda) = \log\left(h\left(\frac{1}{\lambda}|t\right)\right) - \max\left(\log\left(h\left(\frac{1}{\lambda}|t\right)\right)\right)$. La condition de sélection des valeurs de λ est d'après la précédente proposition :

$$\log\left(h\left(\frac{1}{\lambda}|t\right)\right) > 0,01 \times \max\left(\log\left(h\left(\frac{1}{\lambda}|t\right)\right)\right) \quad (3.25)$$

Etant donné que la fonction k est le logarithme de la fonction, cela revient à :

$$\exp(k(\lambda)) > 0,01 \quad (3.26)$$

Le résultat final à savoir la PD calibrée, correspondra à la moyenne des valeurs obtenues par cette méthode de rejet, à laquelle on applique la transformation inverse.

3.5.4 Avantages et limites de l'approche bayésienne

L'approche bayésienne a pour avantage de permettre un meilleur calibrage du paramètre de la loi de la variable d'intérêt. En effet, le fait de considérer le paramètre d'une loi (λ pour la loi de poisson, p pour la loi binomiale par exemple) comme une variable aléatoire, offre une certaine flexibilité dans la modélisation et permet d'ajuster le calibrage à la problématique et au contexte. Nous avons pu voir dans le cas d'une loi *Beta* que selon la valeur des paramètres (α, β) , la densité peut prendre plusieurs formes. Les LDP sont caractérisés par des taux de défaut très faibles. La densité des taux de défaut observés est concentrée vers la valeur 0. Un bon choix des paramètres de la loi a priori permet d'inclure cette spécificité du portefeuille dans le calibrage. De plus, l'information disponible (l'historique) est utilisée pour déterminer la vraisemblance et calibrer les paramètres de la loi a priori.

C'est de ce fait que découle le principal inconvénient de cette approche. Le manque de données peut être un obstacle à la détermination des paramètres. Un historique peu fourni produira avec peu de chance des paramètres de loi bien calibrés. Une autre limite de l'approche bayésienne pour le calibrage de la loi a posteriori est l'utilisation du Monte-Carlo par Chaîne de Markov pour la simulation de la loi a posteriori. Son utilisation rend le calcul des paramètres moins intuitif et rend ainsi la méthode plus opaque. Comparé aux méthodes faisant intervenir des lois conjuguées, on ne peut pas introduire de sensibilités sur les paramètres d'une loi a priori mais seulement influencer sur les lois cibles et candidates de manière arbitraire.

En résumé

Nous avons listé deux principales approches pour calibrer la probabilité de défaut *a posteriori*. Ce sont :

1. L'approche par intervalle de confiance : elle se décline en deux sous approches selon qu'on est dans le cadre d'un portefeuille avec zéro-défaut ou dans le cas d'un portefeuille low-default
2. L'approche bayésienne : elle repose essentiellement sur le choix de la loi *a priori*. On se propose d'en tester quelques unes à savoir :
 - la loi Beta
 - la loi Uniforme qui équivaut à une loi Beta(1,1)
 - l'a priori de Jeffreys qui correspond également à une loi Beta de paramètres $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
 - la loi de Pareto de paramètre γ en utilisant une transformation

Les résultats de ces différentes méthodes seront présentés dans le chapitre suivant. On analysera également la sensibilité des modèles aux paramètres en input. Viendra ensuite l'étape de backtesting afin d'apprécier le niveau de calibration par rapport aux données disponibles.

Chapitre 4

Application des méthodes et mesure de performance

4.1 Calibrage par intervalle de confiance

En premier lieu, nous allons tester l'hypothèse d'indépendance entre la survenance des défauts et l'appartenance à une classe de risque donné. Nous sommes dans un cas de distribution discrète et *non paramétrique* car aucun postulat de loi n'a été fait sur la variable modélisant le nombre de défaut. On optera pour le test du χ^2 d'indépendance et le test de Cramer qui s'appuie sur la statistique du test (voir annexe).

Définition 14 : (*Test du χ^2 d'indépendance*)

Soient C et D deux variables aléatoires modélisant respectivement la classe de risque et la survenance ou non du défaut.. Le test d'indépendance du χ^2 permet de mesurer l'absence de lien statistique entre ces deux variables, sur la base des données observées représentées dans un tableau de contingence. Les hypothèses nulle et alternative sont:

$$\begin{aligned} H_0 &: C \text{ et } D \text{ sont indépendantes} \\ H_a &: C \text{ et } D \text{ ne sont pas indépendantes} \end{aligned}$$

La p-value obtenue ne permet pas de conclure à l'indépendance au seuil de 5%. Il faut noter que certains effectifs de la table de contingence ne respectent pas la contrainte d'application du test du χ^2 d'indépendance ($n \geq 5$). Pour plus de précision, on calcule de le V de Cramer.

Définition 15 : (*Test du V de Cramer*)

Le test de Cramer permet de mesurer l'intensité des relations entre les variables dont l'indépendance est testée dans le test du χ^2 associé. Étant donné que ce dernier s'appuie sur la taille de l'échantillon et le degré de liberté, le test de Cramer ou V de Cramer reprend les mêmes éléments et se présente comme suit:

$$V \text{ de Cramer} = \sqrt{\frac{\chi^2}{N * DDL}}$$

où N représente la taille de l'échantillon

DDL le degré de liberté

χ^2 la statistique du test du Khi-deux associé.

Sur nos données, on obtient une statistique à 0.059. On conclut à une relation très faible entre la survenance des défauts et l'appartenance à la classe de risque. On pourra ainsi procéder à l'application

de la méthode, les hypothèses étant vérifiées. Bien que l'hypothèse d'indépendance ne soit pas confirmée par le test, on s'appuiera sur la conclusion du V de Cramer pour appliquer la méthode de calibrage par intervalle de confiance.

Dans sa construction, cette méthode permet de prendre en compte les différentes combinaisons de nombre de défauts observés parmi le nombre de contreparties par classe, par le biais du coefficient binomial. La répartition par classe de risque présentée dans le chapitre 2, nous indiquent déjà que les coefficients binomiaux seront très élevés, le nombre de défaut étant très faible par rapport au nombre de contreparties.

Le nombre important de contreparties incite à procéder à une approximation par la loi Normale ou la loi de Poisson. Néanmoins, nous allons procéder dans un premier temps à la mise en place de ladite méthode afin d'en observer les résultats. Une indication sur la validité d'un point de vue métier de la PD calibrée est le rapport entre cette PD et le taux de défaut (DR^1) observé. Généralement, le modèle prévoit une probabilité de défaut une à une fois et demie supérieure au taux de défaut. Le tableau ci-après présente les résultats du calibrage par intervalle de confiance à un niveau de confiance **95%** :

Classe de risque	Taux de défaut (en%)	PD calibrée (en %)	Rapport $\frac{PD}{DR}$
1	0,008	-	-
2	0,014	-	-
3	0,026	-	-
4	0,008	-	-
5	0,157	-	-
6	0,432	1,740	4,1
7	0,707	2,573	3,6
8	3,734	4,481	1,2

Table 4.1 – PD calibrées par segment : Approche par intervalle de confiance

Les équations associées à chacun des cinq premiers segments n'ont pas de solution. En effet, du fait de la limite de calcul du logiciel (de l'ordre de 10^{308}), le coefficient binomial qui est le premier terme de chaque membre de l'équation tend vers l'infini. Ceci s'explique par la structure du portefeuille qui comporte un nombre important de contreparties et un nombre très faible de défauts. En ce qui concerne les trois dernières classes de risque, 6, 7 et 8, on obtient des PD calibrées en moyenne 2 fois plus grandes que les taux de défauts observés. Afin de remédier à cette difficulté, on propose d'approcher les valeurs infinies par la meilleure estimation possible.

4.1.1 Approximation des valeurs infinies par la meilleure estimation possible

Les coefficients binomiaux ayant une croissance exponentielle, la plus grande valeur **finie** des combinaisons de $\binom{n_i^*}{k}$ peut être considérée comme la meilleure et la plus conservatrice estimation des coefficients binomiaux infinis. En imputant selon ce principe les valeurs manquantes, on obtient des PD calibrées très conservatrices sur les premiers segments (jusqu'à 26 fois plus élevée que le taux de défaut observé).

1. default rate

Classe de risque	Taux de défaut (en%)	PD calibrée (en %)	Rapport $\frac{PD}{DR}$
1	0,008	0,200	26,7
2	0,014	0,338	23,5
3	0,026	0,400	14,9
4	0,082	0,516	6,3
5	0,157	0,914	5,8
6	0,432	1,740	4,1
7	0,707	2,573	3,6
8	3,734	4,481	1,2

Table 4.2 – PD calibrées par segment : Approche par intervalle de confiance (corrigé)

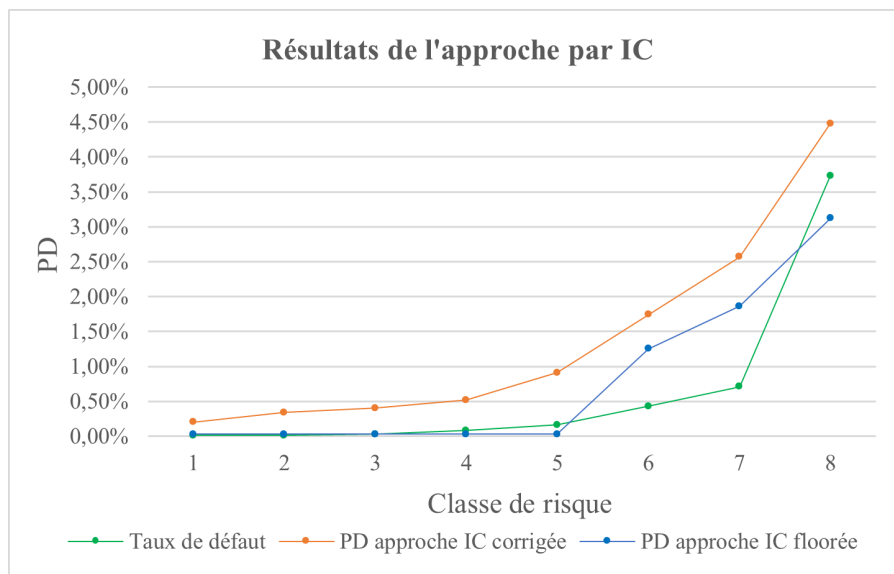
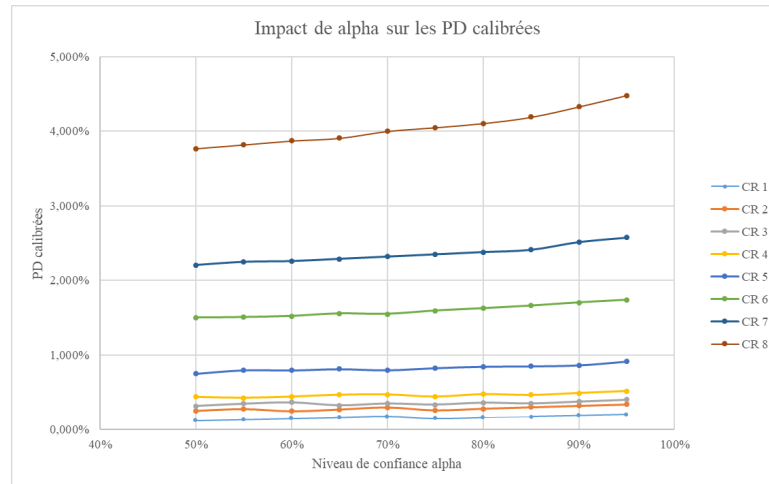


Figure 4.1 – Résultats de l'approche par intervalle de confiance

Nous remarquons que les PD calibrées sont très, voire trop conservatrices. Les premiers segments sur lesquels le calcul n'étaient pas faisable donnent des PD très élevées. On comprend que la structure du portefeuille, a un impact sur l'application de la méthode. Les coefficients binomiaux sont très grands sur les premiers segments. Cette méthode est plus adaptée sur des portefeuille low-default avec très peu d'observations au sein de chaque segment. Étudions la sensibilité des résultats au paramètre α , le seuil d'erreur.

4.1.2 Sensibilité de la PD au niveau de confiance $1 - \alpha$

Les résultats précédemment présentés sont obtenus à un niveau de confiance de $1 - \alpha = 95\%$. Il est intéressant d'observer l'évolution des PD calibrées par segment de risque selon le niveau de confiance choisi. Cela nous permettra d'apprécier la sensibilité de la méthode et du portefeuille à cet élément clé de la méthode de calibrage par intervalle de confiance. La figure ci-dessous présente les résultats graphiques pour $1 - \alpha$ allant de 50% à 95%.

Figure 4.2 – PD calibrées par segment en fonction de α

Globalement, plus α augmente, plus le niveau de la PD calibrée est élevé. On remarque que l'impact reste moindre sur les classes risquées que sur les moins risquées. L'approche tend alors à être plus conservatrice sur les classes à faible risque de défaut.

4.2 Calibrage par approche bayésienne

4.2.1 Loi Beta (α, β) comme loi *a priori*

On se donne de calibrer les paramètres de la loi *a priori* $g_P(p)$ par classe de risque, en utilisant la méthode des moments sur l'historique de données. On construit pour chaque classe de risque, une sous-base comportant les 5 années. Une nouvelle variable **taux de défaut observé** est créée. Elle reprend pour chaque contrepartie du segment, le taux de défaut observé sur l'année correspondante.

Exemple : Considérons la classe de risque 7. Les taux de défaut annuels sont :

Années	Taux de défaut (en %)
2013	0.85
2014	0.83
2015	0.91
2016	0.24
2017	0.60

Table 4.3 – Taux de défauts annuels - CR 7

Ainsi, dans la sous-base créée, toutes les contreparties ayant eu un défaut en 2013, auront la nouvelle variable renseignée à 0.85%. On applique les formules pour trouver α et β à partir de la moyenne et de la variance empiriques. Les paramètres calibrés sont :

La méthode de simulation utilisée est la simulation MCMC. Les résultats sont :

Classe de risque	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
1	0,30	4026,47
2	0,25	1750,01
3	0,62	2320,93
4	0,42	514,85
5	3,11	1973,29
6	2,85	655,77
7	8,41	1181,22
8	58,82	1516,17

Table 4.4 – Estimation $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ loi Beta

Classe de risque	Taux de défaut (en%)	PD calibrée (en %)	Rapport $\frac{PD}{DR}$
1	0,020	0,008	2,61
2	0,018	0,014	1,24
3	0,026	0,026	1,00
4	0,157	0,083	1,92
5	0,162	0,160	1,03
6	0,428	0,432	0,99
7	0,699	0,713	0,99
8	3,737	3,752	1,00

Table 4.5 – PD calibrées par segment : Approche Bayésienne (*Loi Beta* (α, β))

Nous pouvons remarquer que les probabilités obtenues sont très proches des taux de défaut observés. Les résultats sont satisfaisants sur les segments 1, 2 et 4. Afin de vérifier les hypothèses d'application de la méthode MCMC pour la simulation, on utilise le `kpss.test` pour déterminer si la série est stationnaire. Le test sera présenté en annexe. Les p-value calculées permettent de conclure à la stationnarité de la série, pour chaque classe de risque. De plus, on observe les autocorrélations partielles des deux premières classes de risque. L'ensemble des graphiques d'autocorrélations partielles sera également présenté en annexe.

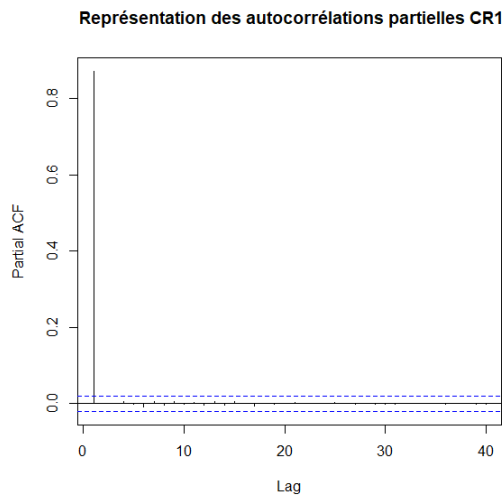


Figure 4.3 – Auto-corrélations partielles CR1

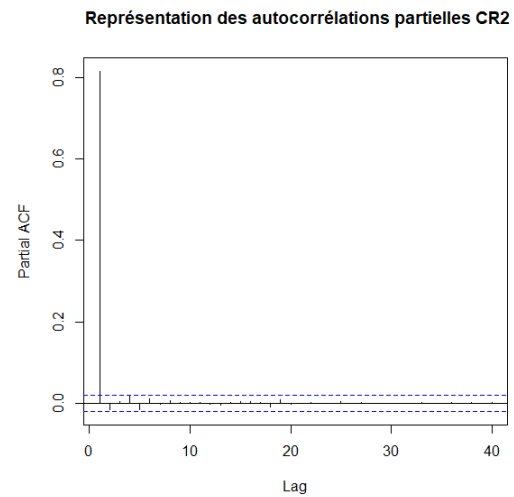


Figure 4.4 – Auto-corrélations partielles CR2

Sur les figures, les deux lignes horizontales représentent l'intervalle de confiance autour de zéro. Il est utilisé pour conclure sur la significativité du test de nullité des autocorrélations partielles. Nous observons qu'un seul pic dépasse de chaque intervalle. L'hypothèse de Markov est vérifiée. Chaque simulation ne dépend que de la simulation précédente.

4.2.2 Loi de Jeffreys comme loi *a priori*: Loi Beta (0, 5; 0, 5)

Les paramètres étant déjà connus, nous utiliserons cette loi à travers deux méthodes de calcul de la PD : l'une par simulation de Monte-Carlo par Chaîne de Markov, l'autre en prenant le meilleur estimateur possible de P , c'est-à-dire l'espérance de la loi *a posteriori*. En utilisant la simulation MCMC, on a :

Classe de risque	Taux de défaut (en%)	PD calibrée (en %)	Rapport $\frac{PD}{DR}$
1	0,008	0,002	0,2
2	0,014	0,022	1,5
3	0,026	0,047	1,8
4	0,082	0,077	0,9
5	0,157	0,163	1,0
6	0,432	0,416	0,9
7	0,707	0,421	0,5
8	3,734	3,712	0,9

Table 4.6 – PD calibrées par segment : Approche Bayésienne (Loi *Jeffreys*) : Simulation MCMC

Lorsqu'on calcule la PD comme l'espérance de la loi *a posteriori*, les résultats sont :

Classe de risque	Taux de défaut (en%)	PD calibrée (en %)	Rapport $\frac{PD}{DR}$
1	0,008	0,009	1,2
2	0,014	0,021	1,5
3	0,026	0,033	1,2
4	0,082	0,087	1,1
5	0,157	0,163	1,0
6	0,432	0,449	1,0
7	0,707	0,729	1,0
8	3,734	3,756	1,0

Table 4.7 – PD calibrées par segment : Approche Bayésienne (Loi *Jeffreys*) : Meilleur estimateur

Le choix de l'a priori de Jeffreys, correspondant à une loi Beta(0, 5; 0, 5) produit de meilleurs résultats lorsqu'on calcule la PD comme espérance de la loi *a posteriori* dont les paramètres sont connus. Néanmoins, les probabilités obtenues ne sont pas assez conservatrices. Elles restent relativement proches des taux de défaut observés. Pour augmenter le conservatisme de cette approche, on se propose d'utiliser non pas le nombre de défaut observé, mais la **la borne supérieure de l'intervalle de confiance** autour de cette valeur. C'est l'un des moyens de mettre un add-on, sans s'éloigner des observations faites. Les probabilités obtenues sont meilleures à celles précédemment calculées :

Classe de risque	Taux de défaut (en%)	PD calibrée (en %)	Rapport $\frac{PD}{DR}$
1	0,008	0,013	1,8
2	0,014	0,079	5,5
3	0,026	0,047	1,8
4	0,082	0,127	1,6
5	0,157	0,237	1,5
6	0,432	0,513	1,2
7	0,707	1,040	1,5
8	3,734	3,874	1,0

Table 4.8 – PD calibrées par segment : Approche Bayésienne (Loi *Jeffreys*) : MCMC avec add-on

Au vu de ces résultats, on retient que pour l'utilisation de l'a priori de Jeffreys comme loi *a priori*, la meilleure option est la simulation par Monte-Carlo par Chaîne de Markov, en considérant la borne supérieure de l'intervalle de confiance autour du nombre de défaut observé.

4.2.3 Loi Uniforme comme loi *a priori*: Loi Beta (1; 1)

Pour l'application du choix de la loi Uniforme, nous avons suivi les mêmes étapes que dans le cas de la loi de Jeffreys. Ainsi, les résultats pour l'application de la méthode MCMC sont :

Classe de risque	Taux de défaut (en%)	PD calibrée (en %)	Rapport $\frac{PD}{DR}$
1	0,008	0,026	3,5
2	0,014	0,014	1,0
3	0,026	0,039	1,5
4	0,082	0,103	1,3
5	0,157	0,169	1,1
6	0,432	0,434	1,0
7	0,707	1,796	1,1
8	3,734	3,19	0,8

Table 4.9 – PD calibrées par segment : Approche Bayésienne (Loi *Uniforme*) : Simulation MCMC

La meilleure estimation de la PD pour la loi Uniforme donne:

Classe de risque	Taux de défaut (en%)	PD calibrée (en %)	Rapport $\frac{PD}{DR}$
1	0,008	0,011	1,5
2	0,014	0,029	2,0
3	0,026	0,040	1,5
4	0,082	0,092	1,1
5	0,157	0,170	1,1
6	0,432	0,465	1,1
7	0,707	1,751	1,1
8	3,734	3,777	1,0

Table 4.10 – PD calibrées par segment : Approche Bayésienne (Loi *Uniforme*) : Meilleur estimateur

Enfin, la méthode avec la marge de conservatisme produit comme résultat :

Classe de risque	Taux de défaut (en%)	PD calibrée (en %)	Rapport $\frac{PD}{DR}$
1	0,008	0,030	4,0
2	0,014	0,099	6,9
3	0,026	0,093	3,5
4	0,082	0,091	1,2
5	0,157	0,326	2,1
6	0,432	0,961	2,2
7	0,707	1,147	1,6
8	3,734	4,826	1,3

Table 4.11 – PD calibrées par segment : Approche Bayésienne (Loi *Uniforme*) : MCMC avec add-on

Le constat est le même que précédemment. La probabilité de défaut de chaque classe de risque est conservatrice par rapport au taux de défaut. Le rapport $\frac{PD}{DR}$ est meilleur avec l'add-on, pour la plupart des classes de risque. On retiendra la simulation par MCMC avec l'add-on pour l'utilisation de la loi Uniforme.

4.3 Loi de Pareto comme loi a priori (TVE)

Comme nous l'avons présenté dans le chapitre précédent, le principe de cette approche est de passer par une transformation de la variable P modélisant la probabilité de défaut. Son but est de permettre l'utilisation de la loi de *Pareto*. Il s'agit d'une distribution à queue lourde et on s'attend à ce que la queue lourde aide à capturer les faibles taux de défauts lorsque λ tend vers l'infini. Les résultats de la procédure de simulation sont les suivants :

Classe de risque	Taux de défaut (en%)	PD calibrée (en %)	Rapport $\frac{PD}{DR}$
1	0,008	0,011	1,5
2	0,014	0,027	1,9
3	0,026	0,040	1,5
4	0,082	0,112	1,4
5	0,157	0,197	1,3
6	0,432	0,543	1,3
7	0,707	0,863	1,2
8	3,734	3,914	1,0

Table 4.12 – PD calibrées par segment : Approche Bayésienne (Loi *Pareto*)

Sur les trois premiers segments, les résultats semblent satisfaisants. La PD calibrée est relativement plus élevée que les taux de défauts observés sur l'historique. Sur les segments restants, elle reste encore très proche du taux de défaut. En résumé, les meilleurs résultats sont ceux obtenus en utilisant l'a priori de Jeffreys, la loi Uniforme et la loi de Pareto. Graphiquement, ils se présentent comme suit :

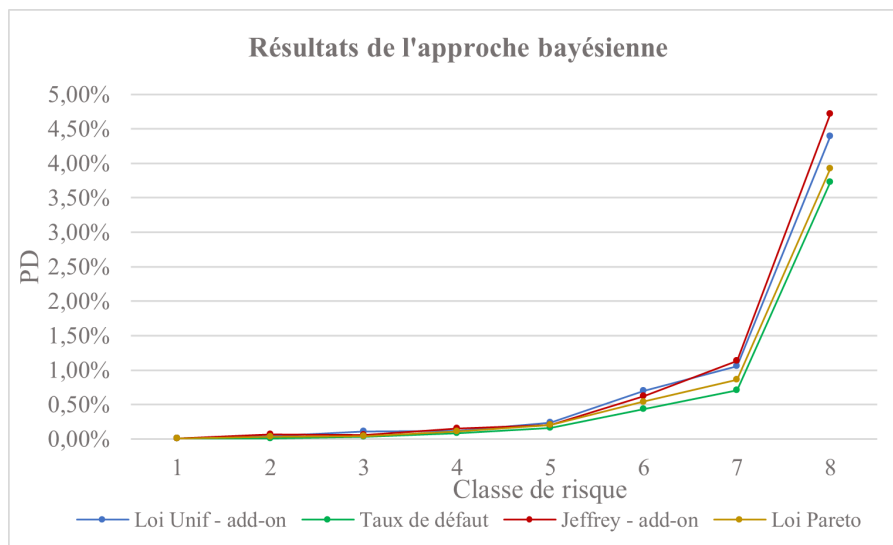


Figure 4.5 – Résultats de l'approche bayésienne

En résumé

Au vu de ces résultats, la meilleure approche pour le calibrage de la probabilité de défaut du portefeuille ici étudié est l'approche bayésienne en utilisant la loi Uniforme comme loi *a priori*. Elle produit des PD calibrées conservatrices lorsqu'on applique un add-on en utilisant la borne supérieure de l'intervalle de confiance au moment de la simulation. On retiendra cette approche. Le backtesting du modèle permettra de valider ce choix.

Chapitre 5

Backtesting des modèles

5.1 Objectif du backtesting des modèles

Il s'agit de s'assurer au vu d'une ou des années supplémentaires d'expérience interne, du maintien de la pertinence de ces modèles. Nous disposons ici deux deux années d'exercice pour évaluer la qualité des résultats des modèles. Dans cette section, seront présentés les axes et les méthodes de backtesting ainsi que les résultats des exercices réalisés, notamment sur le modèle PD des Communes et Groupements à Fiscalité Propre (GFP). Ces axes sont: le calibrage, la discrimination et la stabilité.

5.2 Axes de backtesting

5.2.1 Calibrage

Pour un segment donné, le calibrage est bon si la PD calibrée est égale au taux de défaut observé. Toutefois, et pour des raisons prudentielles, la PD est calibrée de manière à être égale au taux de défaut à long terme, augmentée d'une marge de prudence. En conséquence, la méthodologie de validation à mettre en œuvre ne devrait générer une alerte que si le taux de défaut observé dépasse significativement la PD calibrée.

Le calibrage de la PD est analysé par classe de risque, par année, ainsi que sur les données agrégées sur plusieurs années (à long terme: ensemble de données hors modélisation) et sur l'ensemble du portefeuille regroupant plusieurs compartiments. Un ensemble de tests permettent de déterminer si cet excès est statistiquement significatif ou non.

Les institutions financières soumises aux modèles bâlois ont l'obligation de réaliser le test de Vasicek pour apprécier le niveau de PD calibré. Pour un classe de risque donnée, soit DR le taux de défaut observé sur l'année backtestée et PD la probabilité de défaut calibrée . Les hypothèses nulle et alternative du test sont:

$$H_0 : DR > PD$$

$$H_a : DR \leq PD$$

Le modèle de Vasicek à un facteur donne asymptotiquement le quantile suivant pour le taux de défaut observé :

$$q(\alpha) = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho} * \Phi(\alpha)}{\sqrt{1 - \rho}} \right)$$

avec :

- $\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$: la fonction de répartition cumulative de la loi normale standard
- Φ^{-1} son inverse
- $\rho = 0.06 * \frac{1 - e^{-50*PD}}{1 - e^{-50}} + 0.12 * \left[1 - \frac{1 - e^{-50*PD}}{1 - e^{-50}}\right]$: le facteur de corrélation entre les actifs qui est fixé par Bâle II.

La mise en place du test se fait par une simulation de Monte Carlo décrite comme suit :

1. Générer une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ qui représente le facteur commun aux rendements de tous les actifs
2. Générer un vecteur aléatoire $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ de taille n (n étant le nombre d'observations dans l'historique. Y représente la part idiosyncratique des rendements de tous les actifs.
3. Calculer les rendements standardisés de la firme :

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \end{bmatrix} = \sqrt{\rho}X + \sqrt{1-\rho} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

4. Définir le niveau de rendement T en dessous duquel le défaut survient, conformément au modèle tel que : $T = \Phi^{-1}(PD)$
5. Calculer le taux de défaut moyen sur l'échantillon généré comme suit :

$$DR = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Z_i \leq T)}{n}$$

Une approche de traffic lights est adoptée pour l'interprétation des résultats. Le résultat des tests statistiques est une p-value. Elle est calculée à partir de l'estimation de Monte Carlo :

$$p - value = \frac{\sum_{i=1}^{Nbsim} \mathbb{I}(ND_{obs} > n * DR_i) + \frac{1}{2}(ND_{obs} = n * DR_i)}{Nbsim} \quad (5.1)$$

Intervalles (en %)	Couleurs	Conclusion
[0 ; 10]		PD significativement supérieure au taux de défaut observé
[10 ; 70]		Pas de différence significative entre le PD et le taux de défaut
[70 ; 90]		Rejet de l'hypothèse alternative avec un niveau de confiance bas
[90 ; 95]		Rejet de l'hypothèse alternative avec un niveau de confiance moyen
[95 ; 100]		Rejet de l'hypothèse alternative avec un niveau de confiance élevé

Table 5.1 – Traffic light pour l'interprétation de la p-value - Test de Vasicek

5.2.2 Discrimination

La méthodologie d'évaluation de la discrimination dépend du nombre de défauts (le nombre de défaut doit être différent de 0). Lorsque cela est possible, les tests statistiques sont effectués pour chaque année ainsi que sur les données agrégées sur plusieurs années (à long terme: ensemble de données hors modélisation).

Il est nécessaire que le pouvoir discriminant du système de notation soit maintenu au fil du temps. En effet, il est évident que si le pouvoir discriminant diminue de manière significative, la fiabilité

de l'estimation de la PD diminue également. Le pouvoir discriminant peut être résumé grâce à une seule valeur, la zone située sous la courbe de ROC (AUROC). Le ROC (**receiver operating characteristic**) est une mesure de la performance d'un classificateur binaire, c'est-à-dire d'un système qui a pour objectif de catégoriser des éléments en deux groupes distincts sur la base d'une ou plusieurs des caractéristiques de chacun de ces éléments. L'AUROC se situe entre 0,5 (dans le cas d'un classificateur aléatoire) et 1 (en cas de discrimination parfaite). Il est interprété comme suit :

AUROC (en %)	Interprétation
[50 ; 70[Discrimination faible
[70 ; 80[Discrimination acceptable
[80 ; 90[Excellente discrimination
[90 ; 100]	Discrimination exceptionnelle

Table 5.2 – Traffic light pour l'interprétation de l'AUROC

Pour évaluer si le système de notation dépasse de manière significative un classificateur aléatoire, une approche statistique est adoptée. Cela est nécessaire pour pouvoir déterminer si la différence est statistiquement significative ou non et avec quel niveau de confiance. L'hypothèse nulle testée est la suivante :

$$\begin{aligned} H_0 &: AUROC_Y \leq AUROC_{ref} \\ H_a &: AUROC_Y > AUROC_{ref} \end{aligned}$$

La statistique de test sous l'hypothèse nulle est :

$$Z = \frac{AUROC_{ref} - AUROC_Y}{se(AUROC_{ref} - AUROC_Y)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

où $se(AUROC_{ref} - AUROC_Y) = \sqrt{se(AUROC_{ref})^2 + se(AUROC_Y)^2}$
L'erreur standard (standard error) est calculée comme suit :

$$se(AUROC) = \sqrt{\frac{AUROC(1 - AUROC) + (N_D - 1)(Q_1 - AUROC^2) + (N_H - 1)(Q_2 - AUROC^2)}{N_D N_H}} \quad (5.2)$$

où :

- N_D le nombre de contreparties en défaut
- N_H le nombre de contreparties saines
- $Q_1 = \frac{AUROC}{2 - AUROC}$ et $Q_2 = \frac{2 \times AUROC^2}{1 + AUROC}$

En désignant par z la réalisation de la variable aléatoire Z , on calcule la p-value du test comme suit :

$$p - value = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathcal{N}\left(\frac{AUROC_{ref} - AUROC_Y}{se(AUROC_{ref} - AUROC_Y)}\right) \quad (5.3)$$

5.2.3 Stabilité

Enfin, il s'agit de s'assurer de la stabilité de la population (et de ses caractéristiques), par rapport à l'échantillon ayant servi de base à la calibration initiale. Les critères-clés d'appréciation interne du risque des contreparties - retenus initialement - ne doivent ainsi pas être fondamentalement remis en cause par des évolutions institutionnelles ou réglementaires, liées à leur secteur d'activité/marché de référence (présentes ou anticipées). La stabilité sera évaluée au moyen de deux critères :

1. L'**indice de stabilité** : il sert à de mesurer l'importance des décalages entre les distributions par segment, sur deux années consécutives et par rapport à la période de référence.
2. Les **matrices de migration** : permettent de quantifier les migrations annuelles entre les différents segments. La répartition de la population est d'autant plus stable que les taux de non-migrations (sur la diagonale) sont proches de 100%.

L'indice de stabilité

On cherche à étudier l'évolution annuelle de la répartition de la population de clients dans les classes de risque. Les distributions annuelles sont alors comparées avec la distribution de référence. La distribution de référence peut être soit la distribution de l'année précédente, soit celle calculée au moment du développement du modèle. Plus le nombre de classes de risque est élevé, plus la comparaison est difficile. On se donne d'utiliser un indice de stabilité, couramment utilisé pour résumer les écarts de distribution. Il se définit comme suit :

Soit $H_r = \frac{M_r}{M}$ (resp. $K_r = \frac{N_r}{N}$) la part d'observation du segment r de la période de référence (resp. période de test). Soit R le nombre de segments. L'indice de stabilité est :

$$\text{Indice de stabilité} = \sum_{r=1}^R (K_r - H_r) \times \left[\ln \left[\max \left(K_r, \frac{1}{2N} \right) \right] - \ln \left[\max \left(H_r, \frac{1}{2M} \right) \right] \right] \quad (5.4)$$

Intervalles	Couleurs	Conclusion
$[0 ; 10[$		Différence non significative
$[10 ; 25[$		Différence peu significative
$[25 ; \infty[$		Différence très significative

Table 5.3 – Traffic light pour l'interprétation de l'indice de stabilité

5.3 Résultats des backtesting

5.3.1 Données de backtesting

Les données de test couvre les années 2018 et 2019 en année de défaut. Le taux de défaut observé et calculé sur cette période sera comparé aux probabilités de défaut calibrées retenues au chapitre précédent: la probabilité calibrée par intervalle de confiance, les probabilités calibrées en utilisant l'approche bayésienne avec la loi de Jeffrey, la loi Uniforme et la loi de Pareto. Les données relatives à la période de test se présentent comme suit :

Classe de risque	Nombre d'observations	Taux de défaut (en %)
1	7529	0,013
2	2567	0,000
3	2854	0,000
4	4126	0,097
5	3348	0,119
6	1108	0,181
7	620	0,645
8	456	2,412
Total	22608	0,115

Nous pouvons observer l'absence de défaut sur la classe de risque 2 et la classe de risque 3. Sur la base des trois axes précédemment introduit, nous allons comparer les taux de défaut observés sur la période 2018-2019 aux probabilités calibrées.

5.3.2 Résultats des test de calibration

Les tableaux suivants présentent les résultats des tests de calibration des Notes modèles Communes et GFP.

Les résultats des tests pour l'approche par intervalle de confiance sont présentés ci-après. Nous rappelons que les probabilités de défaut avait été jugées trop conservatrices au vu du rapport $\frac{PD}{DR}$.

Total 2018 - 2019				
CR	# défauts	Taux défaut	PD calibrée	p value
1	1	0,01%	0,20%	0,00%
2	0	0,00%	0,34%	0,00%
3	0	0,00%	0,40%	0,00%
4	4	0,10%	0,52%	0,00%
5	4	0,12%	0,91%	0,00%
6	2	0,18%	1,74%	0,00%
7	4	0,65%	2,57%	0,50%
8	11	2,41%	4,48%	1,00%
Total	26	0,12%		

Table 5.4 – Résultats du test de calibration - PD IC

Sur toutes les classes de risque, la p-value permet de conclure à un conservatisme du modèle. Ce résultat pouvait être attendu au vu de l'appréciation qui a été faite des résultats suite à la mise en place du modèle. Les probabilités de défaut étant trop conservatrices, cette approche ne sera pas retenue en priorité.

Pour la méthode bayésienne, commençons par présenter les résultats du test en utilisant l'a priori de Jeffrey comme loi a priori. Il convient de préciser qu'il s'agit de l'amélioration de la méthode par ajout d'une marge de conservation (avec l'intervalle de confiance autour de la valeur simulée).

Total 2018 - 2019				
CR	# défauts	Taux défaut	PD calibrée	p value
1	1	0,01%	0,02%	18,50%
2	0	0,00%	0,05%	9,74%
3	0	0,00%	0,11%	1,02%
4	4	0,10%	0,16%	5,14%
5	4	0,12%	0,22%	3,34%
6	2	0,18%	0,78%	2,06%
7	4	0,65%	0,99%	15,50%
8	11	2,41%	4,14%	0,01%
Total	26	0,12%		

Table 5.5 – Résultats du test de calibration - PD Approche bayésienne Loi de Jeffrey-addon

Nous pouvons tirer les mêmes conclusions que précédemment. Le test de Vasicek à un facteur utilisé ici permet de dire que la PD couvre suffisamment les taux de défaut. De plus, les probabilités calibrées qui seront utilisées pour déterminer le niveau de fonds propres sont moins importantes que l'approche précédente. Ceci permettra d'obtenir un niveau de fonds propres plus cohérent avec la structure réelle du portefeuille.

En ce qui concerne la loi Uniforme, nous avons pu constater que son utilisation dans l'approche bayésienne, combinée avec l'ajout d'une marge de conservatisme, produisait de très bon résultats.

Total 2018 - 2019				
CR	# défauts	Taux défaut	PD calibrée	p value
1	1	0,01%	0,01%	25,43%
2	0	0,00%	0,04%	15,14%
3	0	0,00%	0,08%	6,57%
4	4	0,10%	0,15%	30,57%
5	4	0,12%	0,21%	20,37%
6	2	0,18%	1,02%	0,57%
7	4	0,65%	1,15%	36,10%
8	11	2,41%	5,31%	0,08%
Total	26	0,12%		

Table 5.6 – Résultats du test de calibration - PD Approche bayésienne Loi Uniforme avec add-on

Les résultats montrent que la PD est relative proche des taux de défaut sur la période 2018-2019, sans le dépasser. Les écarts sur les classes de risque 4 et 7 sont relativement plus petits que sur les autres classes de risque. Cela témoigne du fait que cette approche se rapproche le mieux du portefeuille. Néanmoins, il convient de relever que la probabilité sur le dernier segment est relativement élevée. A priori ce sera celle qui sera retenue en priorité. Nous allons finir en présentant l'utilisation de la loi de Pareto.

Les observations sont les mêmes que précédemment. De plus, la probabilité sur la classe de risque 8 est moins importante que sur les résultats de la loi Uniforme. Le test de discrimination nous permettra de mieux apprécier les résultats.

Total 2018 - 2019				
CR	# défauts	Taux défaut	PD calibrée	p value
1	1	0,01%	0,01%	26,86%
2	0	0,00%	0,03%	12,86%
3	0	0,00%	0,04%	6,86%
4	4	0,10%	0,11%	26,57%
5	4	0,12%	0,20%	5,33%
6	2	0,18%	0,54%	2,29%
7	4	0,65%	0,86%	1,71%
8	11	2,41%	3,91%	1,00%
Total	26	0,12%		

Table 5.7 – Résultats du test de calibration - PD Approche bayésienne Loi de Pareto

5.3.3 Résultats du test de discrimination

Le tableau suivant présente les résultats du test d'AUROC des notes modèles Communes et GFP par rapport au modèle aléatoire :

AUROC aléatoire			
Année de défaut	AUROC	SE	p value
2018	85,28%	6,94%	24,23%
2019	89,48%	5,64%	21,63%
Total	87,50%	4,40%	0,00%

Table 5.8 – Résultats du test de discrimination

Les AUROC calculés sur les deux années de test 2018 et 2019 sont compris entre 80% et 90%. En d'autres termes, on peut conclure à une excellente discrimination du modèle. Le pouvoir discriminant est significativement meilleur que celui d'un modèle aléatoire. La tendance observée est confirmée sur la période totale backtestée (ligne **Total**). Ainsi sur cette période, le pouvoir discriminant du modèle est bien significativement supérieur à celui d'un modèle aléatoire. En conclusion, le pouvoir discriminant du modèle est jugé satisfaisant.

5.3.4 Analyse de la stabilité

Dans un premier temps, nous présenterons l'indice de stabilité. Le tableau ci-dessous présente l'indice de stabilité du modèle entre 2 années consécutives et par rapport à la période de référence.

	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Année précédente		0,975%	0,561%	0,746%	0,660%	0,180%	0,075%
Année de référence						1,725%	2,159%

Table 5.9 – Résultats de l'indice de stabilité

Par rapport à l'année 2013, l'indice témoigne d'une forte stabilité dans la distribution des observations par classes de risque. D'année en année, ce constat est vérifié. La distribution des contreparties

reste stable sur toute la période. La stabilité observée entre les années 2018 et 2019 est confirmée sur la période de référence. Cette observation est attendue du fait de l'étude de représentativité. Pour rappel, nous avons conclu à une représentativité des données historiques par rapport aux données de test. Pour confirmer cela, nous pouvons étudier les matrices de migration moyennes. Les matrices de migration annuelles sont présentées en annexe.

Classe de risque	1	2	3	4	5	6	7	8
1	82,94%	9,99%	4,64%	1,72%	0,31%	0,11%	0,22%	0,06%
2	27,80%	33,07%	24,52%	12,12%	1,63%	0,28%	0,31%	0,26%
3	10,05%	19,47%	35,07%	29,98%	4,38%	0,33%	0,28%	0,45%
4	3,32%	6,05%	19,00%	49,17%	20,34%	1,18%	0,26%	0,68%
5	1,74%	1,91%	4,03%	22,62%	57,55%	9,81%	1,19%	1,15%
6	1,35%	0,96%	1,20%	5,66%	29,80%	48,74%	10,50%	1,80%
7	2,52%	2,02%	2,23%	3,13%	4,78%	17,90%	57,40%	10,02%
8	0,46%	0,73%	1,69%	5,24%	9,84%	4,92%	11,62%	65,51%

Table 5.10 – Matrice de migration annuelle

En moyenne, les taux de non migration sont élevés sur les classes de risque 1, 5, 7 et 8 (supérieurs à 50%). Si on considère les migrations à une classe au dessus et une classe en dessous, la stabilité reste relativement bonne.

En résumé

Le processus de backtesting a pour but de permettre d'apprécier la qualité du modèle, vis-à-vis des données d'après période de modélisation. Les données de test portent sur les années 2018 et 2019. Le backtesting se fait en trois phases : la **calibration**, la **discrimination** et la **stabilité**. La première phase vise à comparer la probabilité de défaut calibrée au taux de défaut observé sur la période de test. De l'application de la méthodologie présentée, il ressort que les modèles retenus ont produit des probabilités statistiquement jugées conservatrices (voire trop ; ceci constitue une vraie limite des modèles utilisés). Les p-value appartiennent aux deux premiers intervalles du trafic light (entre 0% et 70%). Néanmoins, il convient de préciser que certaines approches, le test marche un peu trop bien. Le modèle retenu en priorité est l'approche bayésienne avec utilisation de la loi Uniforme (add-on).

La seconde phase, la discrimination, a pour objectif de comparer la qualité discriminante du modèle à un classifieur aléatoire. Il en ressort que le modèle a une bonne capacité de discrimination (AUROC à 87% sur les deux années cumulées). Pour finir, la phase de stabilité correspond à la comparaison des contreparties entre les classes de risque sur la période de référence et sur la période de test, et ceci, d'une année sur l'autre. Elle est divisée en deux parties : l'indice de stabilité et les matrices de migration. Sur cet dernier axe d'analyse, on peut conclure à une bonne stabilité au cours du temps des données du portefeuille.

Conclusion

Les accords de Bâle 2 du 1^{er} Janvier 2006, présentent trois piliers auxquels les établissements de crédit doivent se conformer pour remplir les exigences de l'autorité bancaire. Le premier pilier vise à assurer un capital réglementaire minimal conformément aux risques de crédit, de marché et opérationnel auxquels sont exposées les banques. Ces dernières ont ainsi pour but de modéliser les paramètres utilisés dans l'estimation de ce capital minimum. Il s'agit de : la **probabilité de défaut**, la **perte en cas de défaut** et l'**exposition au défaut**. Pour rappel, la probabilité de défaut est la probabilité qu'un emprunteur ne respecte pas ses obligations financières. Les banques et autres institutions de crédit souhaitent mettre en place des modèles performants pour l'évaluation de ce paramètre sous l'approche avancée. Cette modélisation devient difficile à mettre en place lorsque le portefeuille considéré est un portefeuille ayant un nombre de défauts très faible. Cela expose à un problème de manque de données pour la mise en place d'un modèle statistique robuste.

C'est dans cette perspective que sont étudiées les méthodes alternatives de calibrage de la probabilité de défaut pour un low default portfolio. Dans un premier temps, une étude de représentativité a permis de comparer les données de modélisation et les données de test disponibles. Il en ressort que statistiquement, le portefeuille de modélisation représente bien le portefeuille sur lequel sera appliqué le modèle calibré. Une fois cette étape remplie, nous avons pu présenter les deux principales approches utilisées sur les LDP. Il s'agit de l'approche par intervalle de confiance de Dirk et Tasche et de l'approche bayésienne.

En ce qui concerne l'approche par intervalle de confiance, nous concluons que les PD calibrées sont très conservatrices. On comprend que la structure du portefeuille, a un impact sur l'application de la méthode. En effet, cette méthode est plus adaptée sur des portefeuilles low-default avec très peu d'observations au sein de chaque segment. L'approche bayésienne quant à elle offre une certaine flexibilité dans le choix de la loi *a priori*, permettant de proposer plusieurs solutions à la modélisation. La meilleure approche pour le calibrage de la probabilité de défaut du portefeuille ici étudié est l'approche bayésienne en utilisant la loi Uniforme comme loi *a priori*. Elle produit des PD calibrées conservatrices lorsqu'on applique un add-on. D'un point de vue métier, l'approche par intervalle de confiance reste plus facile à mettre en place et produit des résultats tout aussi satisfaisants.

Le processus de backtesting permettant d'apprécier la qualité des différents modèles s'est fait en trois phases : la **calibration**, la **discrimination** et la **stabilité**. La première phase vise à comparer la probabilité de défaut calibrée au taux de défaut observé sur la période de test. De l'application de la méthodologie présentée, il ressort que les modèles retenus ont produit des probabilités statistiquement jugées conservatrices (voire trop ; ceci constitue une vraie limite des modèles utilisés). La seconde phase, la discrimination, a pour objectif de comparer la qualité discriminante du modèle à un classifieur aléatoire. Il en ressort que le modèle a une bonne capacité de discrimination. Pour finir, la phase de stabilité correspond à la comparaison de la répartition des contreparties entre les classes de risque sur

la période de référence et sur la période de test, et ceci, d'une année sur l'autre. Sur cet dernier axe d'analyse, on peut conclure à une bonne stabilité au cours du temps des données du portefeuille.

Bien que les probabilités de défaut calibrées soient statistiquement validées, il convient de préciser les limites des modèles utilisés. En effet, l'approche par intervalle de confiance a tendance à surestimer la probabilité de défaut, notamment lorsque le nombre de contreparties est très élevé. Cette approche est répandue pour le calibrage des LDP mais devrait rester à l'appréciation des usagers. L'approche bayésienne qui vise à apporter plus de précision représente une bonne alternative à la précédente. Elle consiste à proposer une loi pour les données historiques et à en calibrer les paramètres. On comprend que les résultats dépendent du bon choix de cette loi, et le calibrage des paramètres est directement impacté par la disponibilité ou non de données. Dans le cadre d'un portefeuille comme celui étudié dans ce document, les taux de défaut ne sont pas calculés par contrepartie mais par classe de risque. Ceci représente une limite à la bonne estimation des paramètres des lois choisies.

Pour améliorer la qualité du modèle, il serait intéressant de déterminer un taux de défaut par contrepartie. Cela demanderait un travail de suivi de la survenance du défaut plus fin mais permettrait d'avoir des taux de défaut plus granulaires. Les paramètres des lois a priori pourraient ainsi être mieux calibrés. Aussi, il serait intéressant de conduire l'étude jusqu'à l'étape de calcul de la somme des actifs pondérés (RWA) afin d'étudier l'impact du niveau de la PD calibrée sur les exigences en fonds propres. Ceci pourrait apporter une appréciation métier, en complément de l'appréciation quantitative faite par backtesting.

Bibliographie

- [1] Laurent Balthazar. From basel 1 to basel 3. In *From Basel 1 to Basel 3: The integration of State-of-the-Art risk modeling in banking regulation*, pages 209–213. Springer, 2006.
- [2] Arthur Charpentier. Modèles de prévision-séries temporelles. *Paris, France*, 2012.
- [3] EY. New definition of default what banks need to do by the end of 2020. https://assets.ey.com/content/dam/ey-sites/ey-com/en_gl/topics/emeia-financial-services/ey-new-definition-of-default.pdf.
- [4] Nabil Iqbal and Syed Afraz Ali. Estimation of probability of defaults (pd) for low default portfolios: an actuarial approach. In *ERM Symposium*, volume 76, 2012.
- [5] Romane Le Tallec. Techniques alternatives de modélisation de la probabilité de défaut pour une banque de détail. 2019.
- [6] Nicolas LECLERCQ and Jules MICHEL. Mémoire présenté devant le jury de l’ensae en vue de l’obtention du diplôme d’actuaire ensae et de l’admission à l’institut des actuaires.
- [7] Philippe TROUSSARD Muriel TIESSET. Acpr : Capital réglementaire et capital économique. *France*, 2005.
- [8] Christian Robert. *Le choix bayésien: Principes et pratique*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [9] Dirk Tasche. The art of probability-of-default curve calibration. *Journal of Credit Risk*, 9(4):63–103, 2013.
- [10] Dirk Tasche and Katja Pluto. Estimating probabilities of default for low default portfolios. *Available at SSRN 635301*, 2004.
- [11] Edward Stevens Venter. *Probability of default calibration for low default portfolios: revisiting the Bayesian approach*. PhD thesis, Stellenbosch: Stellenbosch University, 2016.
- [12] Ilker Yildirim. Bayesian inference: Gibbs sampling. *Technical Note, University of Rochester*, 2012.

Liste des figures

1	Résultats de l'approche par intervalle de confiance	6
2	Résultats de l'approche bayésienne	7
3	Confidence interval based approach results	10
4	Bayesian approach results	11
1.1	Description des trois piliers de la norme Bâle II	25
1.2	Utilisation des paramètres de risque de crédit dans Bâle II	29
2.1	Représentation graphique des ratios qualitatifs	38
2.2	Ratio R1 (modèle & test)	38
2.3	Ratio R2 (modèle & test)	38
2.4	Ratio R3 (modèle & test)	39
2.5	Calcul de l'ISV - Ratio R_1	40
2.6	Calcul de l'ISV - Ratio R_2	40
2.7	Calcul de l'ISV - Ratio R_3	41
2.8	Répartition des contreparties par segment (modèle et test)	41
2.9	Calcul de l'ISV par classe de segment	42
3.1	Approche de calibrage par intervalle de confiance: Principe d'homogénéité	47
3.2	Résumé de l'approche bayésienne	49
3.3	Exemples de densités de loi Beta pour différents α, β	51
3.4	Transformation de p pour utilisation de la TVE	59
4.1	Résultats de l'approche par intervalle de confiance	67
4.2	PD calibrées par segment en fonction de α	68
4.3	Autocorrélations partielles CR1	70
4.4	Autocorrélations partielles CR2	70
4.5	Résultats de l'approche bayésienne	73
A.1	Répartition du capital par type de pertes	94
A.2	Autocorrélations partielles CR1	96
A.3	Autocorrélations partielles CR2	96
A.4	Autocorrélations partielles CR3	96
A.5	Autocorrélations partielles CR4	96
A.6	Autocorrélations partielles CR5	97

A.7	Autocorrélations partielles CR6	97
A.8	Autocorrélations partielles CR7	97
A.9	Autocorrélations partielles CR8	97

Liste des tableaux

1	Taux de défaut historiques moyens par classe de risque	5
2	Historical default rate per risk class	9
1.1	Taux de défaut historiques moyens - Portefeuille corporate (1970-2005)	28
1.2	Taux de défaut historiques moyens par classe de risque	28
2.1	Statistiques descriptives des variables qualitatives	34
2.2	Statistiques descriptives des variables quantitatives	35
2.3	Traffic light pour l'interprétation des p-values	35
2.4	Traffic light pour l'interprétation de l'ISV	37
2.5	Résultats des tests de Student, de KS et de Cramer Von Mises	39
3.1	Données disponibles par classe de risque après la segmentation	44
4.1	PD calibrées par segment : Approche par intervalle de confiance	66
4.2	PD calibrées par segment : Approche par intervalle de confiance (corrigé)	67
4.3	Taux de défauts annuels - CR 7	68
4.4	Estimation $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ loi Beta	69
4.5	PD calibrées par segment : Approche Bayésienne (<i>Loi Beta</i> (α, β))	69
4.6	PD calibrées par segment : Approche Bayésienne (<i>Loi Jeffreys</i>) : Simulation MCMC	70
4.7	PD calibrées par segment : Approche Bayésienne (<i>Loi Jeffreys</i>) : Meilleur estimateur	71
4.8	PD calibrées par segment : Approche Bayésienne (<i>Loi Jeffreys</i>) : MCMC avec add-on	71
4.9	PD calibrées par segment : Approche Bayésienne (<i>Loi Uniforme</i>) : Simulation MCMC	72
4.10	PD calibrées par segment : Approche Bayésienne (<i>Loi Uniforme</i>) : Meilleur estimateur	72
4.11	PD calibrées par segment : Approche Bayésienne (<i>Loi Uniforme</i>) : MCMC avec add-on	72
4.12	PD calibrées par segment : Approche Bayésienne (<i>Loi Pareto</i>)	73
5.1	Traffic light pour l'interprétation de la p-value - Test de Vasicek	76
5.2	Traffic light pour l'interprétation de l'AUROC	77
5.3	Traffic light pour l'interprétation de l'indice de stabilité	78
5.4	Résultats du test de calibration - PD IC	79
5.5	Résultats du test de calibration - PD Approche bayésienne Loi de Jeffrey-addon . . .	80
5.6	Résultats du test de calibration - PD Approche bayésienne Loi Uniforme avec add-on	80
5.7	Résultats du test de calibration - PD Approche bayésienne Loi de Pareto	81
5.8	Résultats du test de discrimination	81

5.9	Résultats de l'indice de stabilité	81
5.10	Matrice de migration annuelle	82
A.1	Tableau de contingence	95
A.2	Matrice de migration 2016-2017	98
A.3	Matrice de migration 2017-2018	98
A.4	Matrice de migration 2018-2019	98

Annexes

Annexe A

A.1 Présentation des deux autres piliers de Bâle II

A.1.1 Pilier 2

Le pilier 2 établit un processus de surveillance prudentielle. Il vient compléter et renforcer le pilier 1. Il comporte : l'analyse par la banque de l'ensemble de ses risques y compris ceux déjà couverts par le pilier 1 ; le calcul par la banque de ses besoins de fonds propres au titre du capital économique ; la confrontation par le contrôleur bancaire de sa propre analyse du profil de risque de la banque avec celle conduite par la banque elle-même, en vue d'adapter son action prudentielle, que ce soit via des fonds propres supérieurs aux exigences minimales ou toute autre technique appropriée.

En effet, en complément du capital réglementaire dont la définition est fournie par le pilier 1 de la norme, les banques proposent elles-mêmes une définition de leur capital économique en fonction de l'environnement dans lequel elles évoluent. Ainsi, la détermination du capital économique aide à mieux gérer les risques, et oblige les banques à définir leurs perspectives d'évolution. L'instauration d'une discipline budgétaire interne favorise également l'optimisation de l'allocation des ressources, par le biais d'enveloppes attribuées, en fonction d'un objectif de rentabilité interne, avec des conséquences positives sur la stabilité du système, si l'établissement est par nature systémique

On peut définir le capital économique comme le capital nécessaire pour couvrir au maximum les pertes potentielles à un niveau de confiance et pour un horizon de temps donnés. Il est calculé par les banques à l'aide de modèles internes et permet d'améliorer l'allocation des ressources. Le pilier 2, au nombre de ses mesures, proposent une approche pour le capital économique permettant de satisfaire les exigences du régulateur. Cette approche permet de couvrir les pertes inattendues (et exceptionnelles), pour tous les risques auxquels est exposée la banque, y compris ceux qui ne sont pris en compte par le pilier 1.

On peut citer comme risques nouvellement pris en compte dans ce pilier : risque de crédit y compris le risque de concentration, risque de marché, risque opérationnel, risque de taux du portefeuille bancaire, risque de liquidité, autres risques notamment le risque de réputation et le risque stratégique.

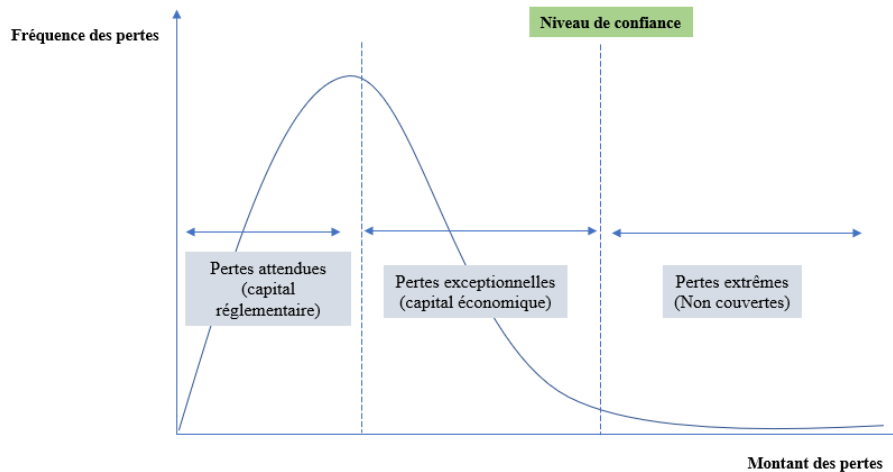


Figure A.1 – Répartition du capital par type de pertes

A.1.2 Pilier 3

Le pilier 3 concerne la discipline de marché. Il vise à améliorer la transparence financière des banques, en leur imposant de communiquer les informations nécessaires pour permettre à des tiers d'apprécier l'adéquation de leurs fonds propres. Une meilleure discipline de marché en est espérée. Ces nouvelles exigences faciliteront la comparabilité des méthodes des risques et des niveaux de risques supportés par les institutions bancaires. L'objectif sous-jacent est d'uniformiser les pratiques bancaires en matière de communication financière et de faciliter ainsi la lecture des informations comptables et financières des banques d'un pays à l'autre.

A.2 Rappel sur les tests statistiques

A.2.1 Test du Khi^2 d'indépendance

Considérons deux variables aléatoires mesurées sur la même population. On cherche à vérifier si ces variables aléatoires sont indépendantes. On peut définir la notion d'indépendance comme suit : si le fait de connaître le résultat d'une ne donne aucune information sur le résultat de la deuxième, alors il y a **indépendance**.

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si :

$$\mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) = \mathbb{P}(X = x) * \mathbb{P}(Y = y)$$

Sur la population, la réalisation des deux variables peut être présentée à l'aide du **tableau de contingence** suivant :

S'il y a indépendance, on devrait avoir :

$$\frac{o_{ij}}{o} \approx \frac{o_{i.}}{o} * \frac{o_{.j}}{o}$$

Posons $e_{ij} = \frac{o_{i.} \times o_{.j}}{o}$ la fréquence attendue pour les modalités i et j s'il y avait indépendance. La statistique du test du Khi-deux est donnée par :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^k \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \quad (\text{A.1})$$

X / Y	mod 1 ...	mod j	
mod 1	o_{11}	o_{ij}	$o_{1.}$
.			
.			
mod i	o_{i1}	n_{ij}	$o_{i.}$
	$o_{.1}$	$o_{.j}$	o

Table A.1 – Tableau de contingence

où k et m sont respectivement les nombres de classe (ou de modalité) des variables X et Y . Sous H_0 , la statistique de test suit une loi du Khi-deux à $(m - 1)(k - 1)$ degrés de liberté. On rejette alors l'hypothèse nulle si la statistique calculée est supérieure ou égale à la valeur tabulée correspondant au degré de liberté et à un niveau α de confiance.

A.3 Compléments sur les résultats des méthodes

A.3.1 KPSS Test : stationnarité

Le test de Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (KPSS test) permet de déterminer si une série temporelle est stationnaire d'une moyenne ou d'une tendance linéaire, ou si elle est non stationnaire du fait d'une racine unique. On dit qu'une série (X_t) est stationnaire si ses propriétés probabilistes (telles que la moyenne, la variance) sont les mêmes que celle de la série (X_{t+h}) pour tout entier h . Les hypothèses nulle et alternative du KPSS test sont :

$$H_0 : \text{la série est stationnaire}$$

$$H_a : \text{la série n'est pas stationnaire}$$

Le KPSS test basé sur un modèle de régression linéaire composé de trois éléments :

- une tendance β
- une marche aléatoire r_t
- une erreur ϵ_t

Soit X_t a série, l'équation de la régression linéaire s'écrit :

$$X_t = r_t + \beta t + \epsilon_t$$

Lorsque la série est stationnaire, l'intercept sera fixe ou la série sera stationnaire autour d'une constante. Les coefficients sont estimés par la méthode des moindres carrés ordinaires.

A.3.2 Approche bayésienne

Dans le cadre de l'utilisation de la méthode bayésienne, on cherche à vérifier les hypothèses d'utilisation du Monte-Carlo par Chaîne de Markov. Les autocorrélations partielles des huit classes de risques sont représentées ci-après:

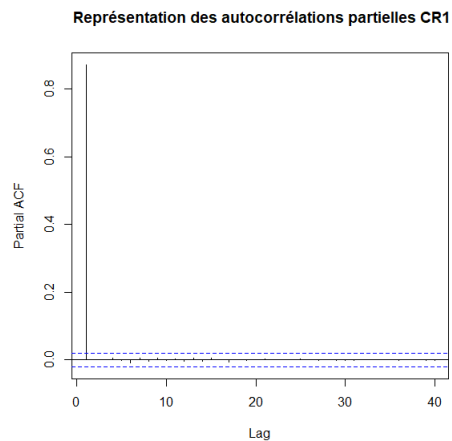


Figure A.2 – Autocorrélations partielles CR1

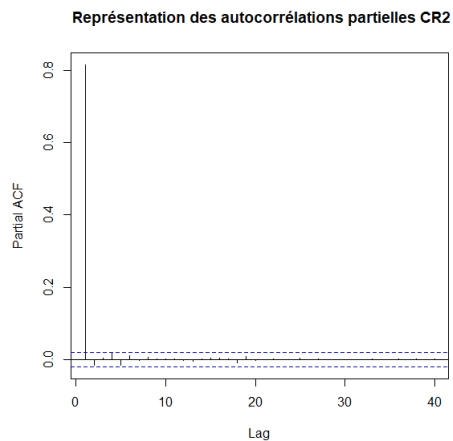


Figure A.3 – Autocorrélations partielles CR2

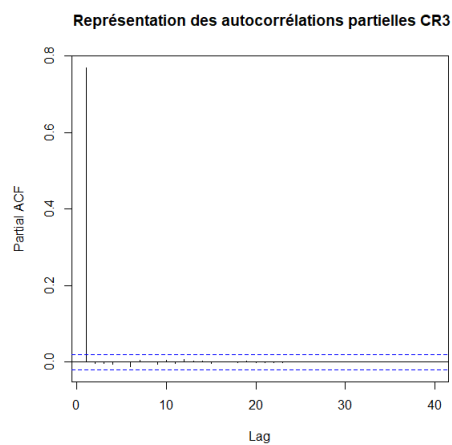


Figure A.4 – Autocorrélations partielles CR3

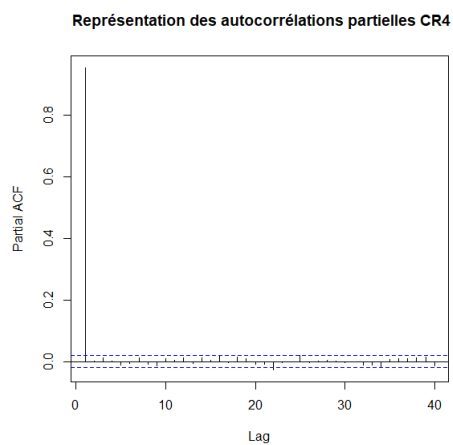


Figure A.5 – Autocorrélations partielles CR4

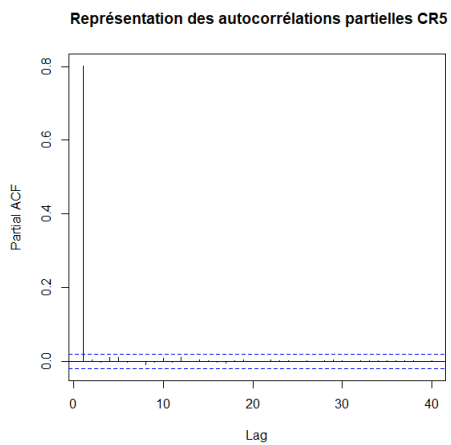


Figure A.6 – Autocorrélations partielles CR5

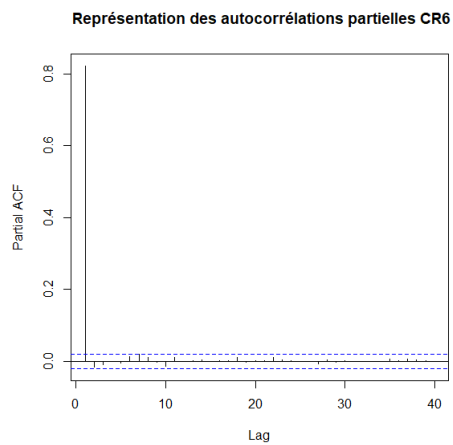


Figure A.7 – Autocorrélations partielles CR6

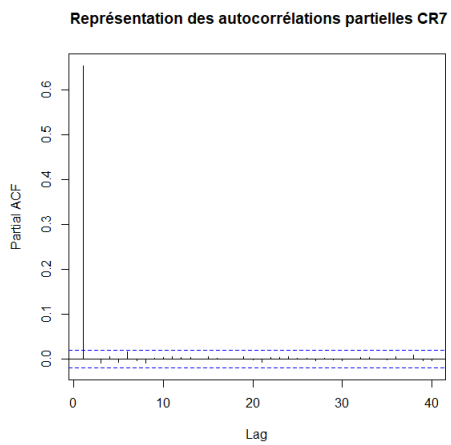


Figure A.8 – Autocorrélations partielles CR7

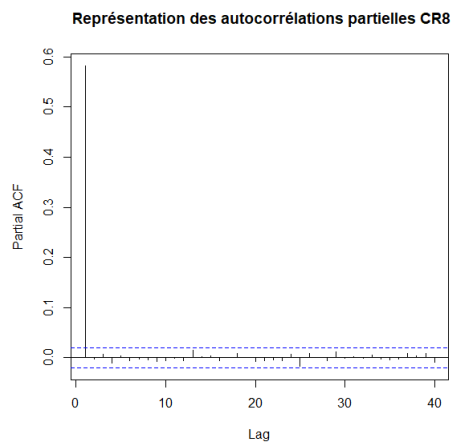


Figure A.9 – Autocorrélations partielles CR8

A.4 Compléments sur les backtesting des résultats

A.4.1 Matrice de migration

Classe de risque	1	2	3	4	5	6	7	8
1	81,48%	10,87%	5,01%	2,14%	0,21%	0,11%	0,09%	0,09%
2	26,60%	32,87%	23,90%	14,46%	1,55%	0,31%	0,31%	0,00%
3	7,55%	18,46%	37,13%	31,40%	4,41%	0,42%	0,28%	0,35%
4	2,27%	5,34%	20,03%	50,53%	19,71%	1,16%	0,26%	0,69%
5	1,18%	0,93%	3,04%	21,09%	61,60%	10,30%	0,99%	0,87%
6	1,63%	0,91%	0,36%	3,27%	29,76%	52,27%	10,16%	1,63%
7	3,27%	2,76%	3,52%	3,52%	4,27%	21,36%	52,26%	9,05%
8	0,00%	0,57%	0,85%	8,52%	13,35%	6,25%	8,52%	61,93%

Table A.2 – Matrice de migration 2016-2017

Classe de risque	1	2	3	4	5	6	7	8
1	83,22%	10,25%	4,41%	1,45%	0,27%	0,16%	0,22%	0,03%
2	27,51%	33,65%	23,42%	12,95%	1,70%	0,17%	0,26%	0,34%
3	8,49%	22,60%	34,67%	30,21%	3,44%	0,22%	0,00%	0,37%
4	2,54%	5,34%	20,05%	50,69%	20,16%	0,58%	0,16%	0,48%
5	0,70%	1,40%	3,24%	23,32%	59,66%	9,34%	1,02%	1,33%
6	1,82%	0,36%	0,91%	3,10%	28,47%	55,66%	8,39%	1,28%
7	2,64%	1,32%	0,33%	2,97%	3,63%	20,79%	60,73%	7,59%
8	0,75%	1,13%	2,64%	7,17%	13,58%	4,15%	13,21%	57,36%

Table A.3 – Matrice de migration 2017-2018

Classe de risque	1	2	3	4	5	6	7	8
1	82,60%	10,33%	4,52%	1,55%	0,31%	0,14%	0,52%	0,03%
2	27,67%	34,63%	23,51%	11,38%	1,44%	0,34%	0,42%	0,59%
3	9,22%	21,88%	38,49%	26,22%	3,13%	0,38%	0,08%	0,61%
4	2,43%	6,20%	18,70%	51,60%	19,42%	0,72%	0,15%	0,77%
5	1,03%	1,55%	3,16%	23,95%	60,88%	7,17%	0,90%	1,36%
6	0,37%	0,18%	0,92%	4,42%	29,83%	53,59%	9,58%	1,10%
7	2,80%	1,05%	1,05%	1,75%	3,50%	20,63%	61,54%	7,69%
8	0,50%	0,50%	3,47%	4,46%	6,93%	5,94%	14,85%	63,37%

Table A.4 – Matrice de migration 2018-2019