

**Mémoire présenté devant l'Université de Paris-Dauphine
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine
et l'admission à l'Institut des Actuaires
le 8 avril à 15h30**

Par : Raphaël AROULE

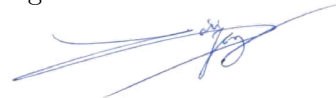
Titre : Approche d'agrégation de contrats d'assurance en Model Points et impact sur la projection ALM

Confidentialité : Non Oui (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaires :*

Entreprise :
Nom : KPMG SA
Signature :



*Membres présents du Jury du Certificat
d'Actuaire de Paris-Dauphine :*

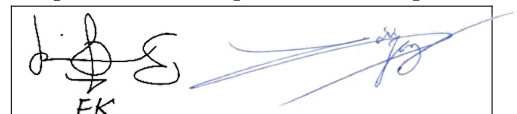
Directeurs de Mémoire en entreprise :
Noms : Loïc Seitz
Elisée Kaboré
Signature :



*Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise



Bibliothèque :

Signature du candidat



Résumé

La nouvelle norme IFRS 17 Contrats d'assurance publiée en mai 2017 par l'IASB (*International Accounting Standard Board*) entrera en vigueur au 1er janvier 2023. Elle s'ajoute aux nombreuses évolutions réglementaires et économiques de ces dernières années dans le monde de l'assurance. Celles-ci amènent les assureurs à modifier ou même refonder leurs outils actuariels, afin de répondre aux enjeux réglementaires, comptables et financiers. Ainsi, des modèles de projection complexes doivent être développés par les assureurs pour avoir une vision prospective sur plusieurs points : l'approche comptable et fiscale en norme française (« *French gaap* »), les études *Asset and Liability Management* (ALM) et de rentabilité produit, l'approche *Embedded Value*, les normes IFRS et Solvabilité II. Ces différentes visions demandent aux assureurs de valoriser leurs engagements et leurs résultats futurs. C'est pourquoi être capable d'estimer ses engagements « *Best Estimate* » (BE) en juste valeur, de manière régulière, précise et flexible est un défi majeur pour les assureurs. Afin d'évaluer précisément ses risques et contrôler sa rentabilité, l'utilisation d'un modèle ALM de projection actif-passif est une solution : il permet la valorisation économique du passif en projetant les flux futurs d'une compagnie d'assurance.

Néanmoins, ce type de modèle implique la réalisation de nombreux calculs actuariels et financiers. Il est ainsi nécessaire d'effectuer des projections de milliers de scénarios contrat par contrat, qui demandent un temps de calcul non négligeable. Plusieurs méthodes sont utilisées sur le marché pour optimiser le coût de tels modèles : par exemple le *Flexing*. Cette solution modélise le BE indépendamment de l'actif. Ensuite, il intègre les résultats des projections des engagements du passif dans un modèle actif afin de considérer les interactions actif-passif. Ce système réduit le temps de calcul grâce à des approximations sur la gestion ALM, par l'utilisation de ratios d'ajustement. Par conséquent, les flux de passif sont déterministes et ne permettent pas de modéliser le taux de participation aux bénéfices et les rachats dynamiques par exemple. Par ses inconvénients, la méthode *Flexing* ne semble pas satisfaire complètement les assureurs, qui recherchent une méthode alternative.

L'agrégation des contrats en une seule et même police représentative, appelée « *Model point* », est une autre solution pour l'optimisation du temps de calcul. En effet, par la construction de *model points* pertinents, les calculs actuariels et financiers d'un modèle ALM peuvent être considérablement réduits, tout en limitant au maximum les erreurs de calcul.

Le présent mémoire a pour ambition de développer un modèle intelligent de création de *model points*. Deux objectifs sont fixés : la compression maximale du portefeuille initial en respectant les directives et une minimisation de l'erreur de calcul du *Best Estimate*. Ce mémoire propose ainsi une étude de l'épargne et de la valorisation sous IFRS 17 et Solvabilité II, une analyse de la modélisation actif-passif d'un portefeuille épargne et plus particulièrement une étude en profondeur des différents algorithmes de *clustering* et de leurs paramètres afin de trouver le meilleur modèle d'agrégation des contrats possible.

Mots-clés : *Model-point*, *ALM*, *Best Estimate*, *projection*, *valorisation*, *agrégation*, *algorithme*, *partitionnement*, *clustering*, *IFRS 17*, *Solvabilité II*.

Abstract

IFRS 17 Insurance Contracts was issued on 18 May 2017 by the International Accounting Standards Board (IASB) and will be applied on 1 January 2021. It comes in addition to other numerous regulatory changes and economic developments in recent years in the insurance world. Those are leading insurers to change or even reshape their actuarial tools, to meet regulatory, accounting, and financial issues. Thus, sophisticated projection modeling must be developed by insurers to have a forward-looking vision on several points: French GAAP, Asset and Liability Management and profitability studies, the Embedded Value, IFRS, and Solvency standards. These different visions require insurers to value their commitments and their future results. Therefore being able to value the Best Estimate regularly, precisely, and flexibly is a major challenge for insurers. In order to accurately assess its risks and control its profitability, the use of an ALM projection model is a solution: it allows the projection of future cash flows and thus liability economic valuation.

Nevertheless, this kind of model involves numerous actuarial and financial calculations. It is necessary to make projections of thousands of scenarios contract by contract, which requires a significant computing time. Several methods are used on the market to optimize the calculation of such models: for instance Flexing method. This solution models the BE independently of the asset. Then, it integrates the results of the liability commitments projections into an asset model to consider the asset-liability interactions. This system reduces computation time thanks to ALM management approximation, through the use of adjustment ratios. Therefore, the liability cash flows are deterministic and do not allow modeling the profit-sharing rate and dynamic purchases for example. Due to its drawbacks, the Flexing method does not seem to completely satisfy insurers, who are looking for an alternative method. The grouping of contracts into a single representative policy, called "Model point", is another solution for optimizing calculation time. In fact, by building relevant model points, the actuarial and financial calculations of an ALM model can be considerably reduced, while limiting calculation errors as much as possible.

This report aims to develop an intelligent model for creating model points. Two objectives are set: maximum compression of the initial portfolio while respecting the guidelines and minimization of the calculation error of the Best Estimate. This study proposes to study saving contracts, IFRS 17 and Solvency 2 valuation, Asset and Liability modeling of a saving contract portfolio but also especially an in-depth analysis of various clustering algorithm and their parameters to find the best aggregation model possible.

Keywords : Model-point, ALM, Best Estimate, projection, valuation, aggregation, algorithm, clustering, IFRS 17, Solvency 2.

Note de Synthèse

The International Accounting Standards Board (IASB) est sur le point de mettre à profit près de 20 années de discussions et de recherches avec le remplacement de la norme IFRS 4 par une nouvelle norme internationale comptable *IFRS 17 Insurance Contracts*. L'organisme international semble avoir réussi à développer une norme qui permettra une meilleure comparabilité des états financiers mais aussi une uniformisation des méthodes comptables utilisées. Dans le but d'harmoniser les approches utilisées par les assureurs à l'international, la norme IFRS 17 va imposer au monde de l'assurance de nouvelles règles de valorisation des contrats d'assurance et de présentation des comptes IFRS 17.

Déjà régi par plusieurs normes comme Solvabilité 2, les assureurs ont développé de nombreux modèles afin de calculer les estimateurs requis. C'est pourquoi la solution idéale serait de réutiliser ces modèles dans le but de répondre aux exigences d'IFRS 17. Cependant, même si certains éléments peuvent avoir un équivalent dans d'autres normes, les assureurs sont dans l'obligation de modifier leur approche pour intégrer de nouvelles composantes. Par exemple, la norme IFRS 17 introduit la Marge de Service Contractuelle (CSM) correspondant aux profits futurs attendus d'un contrat, ou encore une segmentation des contrats d'assurance différente.

Les modèles actuariels actuellement utilisés par les assureurs n'étant pas encore adaptés à l'introduction de la nouvelle norme comptable ainsi les assureurs doivent revoir leur méthodologie. Ce qui nous intéresse plus particulièrement dans ce mémoire est la nouvelle segmentation proposée par IFRS 17, la constitution des *model points* devra se plier aux trois niveaux de segmentation défini par la norme internationale.

Modélisation ALM

Les engagements de l'assureur vis-à-vis des assurés le soumettent à plusieurs risques qu'il doit maîtriser et donc modéliser. C'est pourquoi la gestion actif-passif est primordiale au sein d'une compagnie d'assurance. Celle-ci se fait par une stratégie *Asset and Liability Management (ALM)* et l'utilisation d'un modèle ALM pour projeter ses flux d'actif et de passif. Ainsi, un assureur peut maximiser ses rendements financiers et ajuster son adossement actif-passif pour être à même de répondre à ses engagements futurs. Cependant, un tel modèle de gestion actif-passif requiert un grand nombre de simulations, ce qui est problématique pour une compagnie d'assurance qui dispose de millions de contrats. Les temps d'exécution engendrés sont trop importants, encourageant ainsi les assureurs à se tourner vers de nouvelles approches.

Méthodes de modélisation ALM

La méthode de modélisation à laquelle nous allons nous intéresser à travers ce mémoire est l'approche dite *Model point*. Elle consiste à réduire le nombre de données de passif en entrée du modèle ALM. Pour cela, elle regroupe plusieurs contrats d'assurance entre eux qui formeront un *cluster*, celui-ci sera représenté de la manière la plus fidèle par un seul contrat fictif qui est appelé *model point*.

Les contrats regroupés sous un même *cluster* doivent avoir les caractéristiques les plus similaires possibles afin de limiter la perte d'information et la segmentation. L'approche classique rencontrée dans la littérature consiste à regrouper les contrats d'assurances qui ont des caractéristiques importantes similaires. Ainsi, les contrats correspondant à des âges et des anciennetés identiques, sont regroupés ensemble. Dans ce mémoire, les *model points* sont construits grâce à des algorithmes de partitionnement appliqués aux vecteurs de sortie des contrats. Cette nouvelle approche est inspirée par les travaux réalisés par Pierre-Olivier Goffard [GOFFARD, 2015a].

Objectifs

Pour estimer le BEL déterministe, nous avons effectué une simulation déterministe qui donnera ainsi une première estimation de la performance des *model points*.

Nous centrons notre étude sur un portefeuille de contrats d'épargne. Une maille divise le portefeuille en 356 groupes, l'agrégation des contrats d'assurance peut se faire seulement au sein de ces groupes. Nous nous sommes concentrés sur un groupe de 7232 lignes, demandant un temps de calcul de 13 minutes et 10 secondes. Le temps de calcul correspond au temps nécessaire à la détermination du BEL déterministe par les calculs et les projections du modèle ALM.

L'erreur correspond à la valeur absolue de la différence entre la valeur exacte du BEL déterministe et la valeur de BEL déterministe obtenue après agrégation du portefeuille divisée par la valeur exacte du BEL déterministe :

$$\varepsilon = \left| \frac{BEL\ déterministe_{agrégation} - BEL\ déterministe_{exact}}{BEL\ déterministe_{exact}} \right|,$$

Le premier objectif est de déterminer l'algorithme de partitionnement permettant de réduire au maximum l'erreur sur le BEL déterministe tout en permettant d'augmenter au maximum la réduction du temps de calcul et ainsi permettre de compresser au maximum le portefeuille. Le deuxième objectif est d'obtenir des meilleurs résultats, sur les deux critères évoqués ci-dessus, que la compagnie partenaire. Nous résumons dans le tableau 1 ci-dessous les résultats obtenus par les *model points* de la société partenaire.

NOMBRE DE MODEL POINTS	ERREUR SUR LE BEL DÉTERMINISTE	TEMPS DE CONSTRUCTION DES MODEL POINTS	TEMPS DE CALCUL DU MODÈLE ALM
68	0,294%	30 minutes	100 secondes

TABLE 1: Caractéristiques des model points du partenaire

Pour atteindre nos objectifs, nous avons utilisé des vecteurs de sortie appliqués à des algorithmes de partitionnement, ces deux éléments centraux de notre étude seront expliqués dans la suite.

Démarche utilisée

Vecteurs de sortie

Un vecteur de sortie d'un contrat correspond aux probabilités que ce contrat arrive à son terme

sur un horizon de projection fixé. La fin du contrat peut être engendrée soit par le décès de la tête assurée, soit par le rachat du contrat par l'assuré. Ainsi, le vecteur de sortie de chaque contrat est calculé en fonction d'une table de mortalité dépendant de l'âge de la tête assurée et d'une table de rachat dépendant de l'ancienneté de l'assuré. La formule utilisée pour la probabilité de sortie d'un contrat i au cours de l'année $T - 1 \rightarrow T$, notée $p_i(T - 1, T)$, est :

$$p_i(T - 1, T) = \left[\prod_{j=1}^{T-1} (1 - p_i(j - 1, j)) \right] [1 - (1 - r_i(T - 1, T))(1 - d_i(T - 1, T))],$$

avec $r_i(T - 1, T)$ la probabilité de rachat par l'assuré du contrat i au cours de l'année $T - 1 \rightarrow T$; $d_i(T - 1, T)$ la probabilité de décès de la tête assurée par le contrat i au cours de l'année $T - 1 \rightarrow T$. Chaque contrat est ainsi caractérisé par un vecteur de sortie, qui forme une trajectoire dans le temps. En traçant cette trajectoire pour chaque ligne de la base de données, on obtient une visualisation graphique du portefeuille.

Une visualisation graphique d'un des groupes a été construite grâce aux vecteurs de sortie construits pour chaque ligne associée à ce groupe, comme représentée en figure 1 avec une distinction des trajectoires faite en 20 *clusters*.

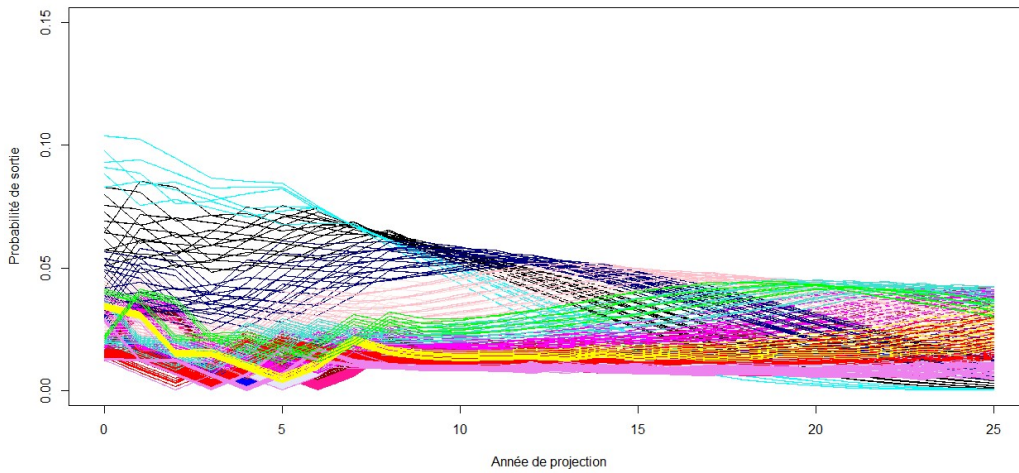


FIGURE 1: Trajectoires associées au groupe

L'ensemble des vecteurs de sortie d'un groupe constituera l'entrée des algorithmes de partitionnement.

Algorithmes de partitionnement

L'objectif d'un algorithme de partitionnement est d'affecter à chaque élément donné en entrée un *cluster*. Dans notre étude, le but est donc d'affecter à chaque contrat du portefeuille, plus précisément à chaque ligne de la base initiale, un *cluster*.

- La première approche est d'utiliser une méthode par partition, qui segmente l'ensemble des contrats en un nombre de *clusters* k fixé au préalable. Cette technique construit les *clusters* de manière itérative en optimisant un certain critère de qualité. Nous utilisons l'algorithme le plus utilisé et efficace qui est la méthode des K-Means. Le critère d'arrêt de l'algorithme est la stabilité des *clusters* ou un nombre d'itération maximal atteint.

Cette approche est simple à implémenter, et les résultats obtenus sont facilement interprétables. De plus, elle permet de traiter des grandes bases de données. Cependant, cette méthode demande un choix initial du nombre de *clusters* à construire, et est dépendante de cette initialisation. Finalement, l'approche détermine une segmentation qui est optimale localement, plusieurs exécutions sont nécessaires pour trouver la partition optimale globale.

- La deuxième approche est d'utiliser une méthode hiérarchique qui segmente l'ensemble des contrats sous forme d'arbre représentant une hiérarchie entre eux. Nous utilisons l'algorithme le plus connu en partitionnement hiérarchique, la méthode de classification hiérarchique ascendante CAH.
Cette approche construit un résultat clair avec un arbre hiérarchique appelé dendrogramme, offrant une bonne visibilité sur le nombre de *model points* à construire. Cependant, elle semble être limitée pour le traitement de grandes bases de données.
- La troisième approche est d'utiliser successivement la méthode des K-Means et la méthode CAH. Cette approche permet de s'affranchir de la limite de la méthode hiérarchique qui est peu adaptée au traitement de bases de données volumineuses. En effet, comme nous l'avons évoqué précédemment, l'algorithme des K-Means permet d'analyser un grand nombre d'éléments donnés en entrée. Son utilisation avant l'algorithme CAH est donc bénéfique.
- La dernière approche utilisée est d'appliquer successivement la méthode des K-Means, la méthode CAH et une nouvelle fois la méthode des K-Means. Grâce à cette approche, chaque algorithme apporte son avantage au processus :
 - Premièrement, l'utilisation de l'algorithme des K-Means permet d'analyser une base de données volumineuse ;
 - L'utilisation de l'algorithme CAH permet de déterminer les k représentants initiaux avec lesquels le second algorithme des K-Means va commencer.

Choix du nombre de *model points*

Le choix du nombre de *model points* à construire occupe une place centrale dans l'efficacité des algorithmes. Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'inertie intra-classe. Pour déterminer la meilleure segmentation, l'inertie intra-classe doit être minimisée. Pour cela, on calcule pour chaque partitionnement en un certain nombre de *model points* k , le pourcentage d'inertie total I_T représenté par l'inertie intra-classe I_W , φ^k défini par :

$$\varphi^k = \frac{I_W^k}{I_T},$$

L'idée générale est de trouver « le coude » de la courbe modélisant φ^k en fonction du nombre de *model points* k . Si φ^k atteint un plateau à partir d'un nombre de *model points* donné k , ce nombre est optimal au sens du critère d'optimisation de l'inertie intra-classe. La figure 2 montre l'évolution du pourcentage d'inertie total I_T représenté par l'inertie intra-classe I_W en fonction du nombre de *model points*. Le critère utilisé est un pourcentage d'inertie total I_T de 5% représenté par l'inertie intra-classe I_W .

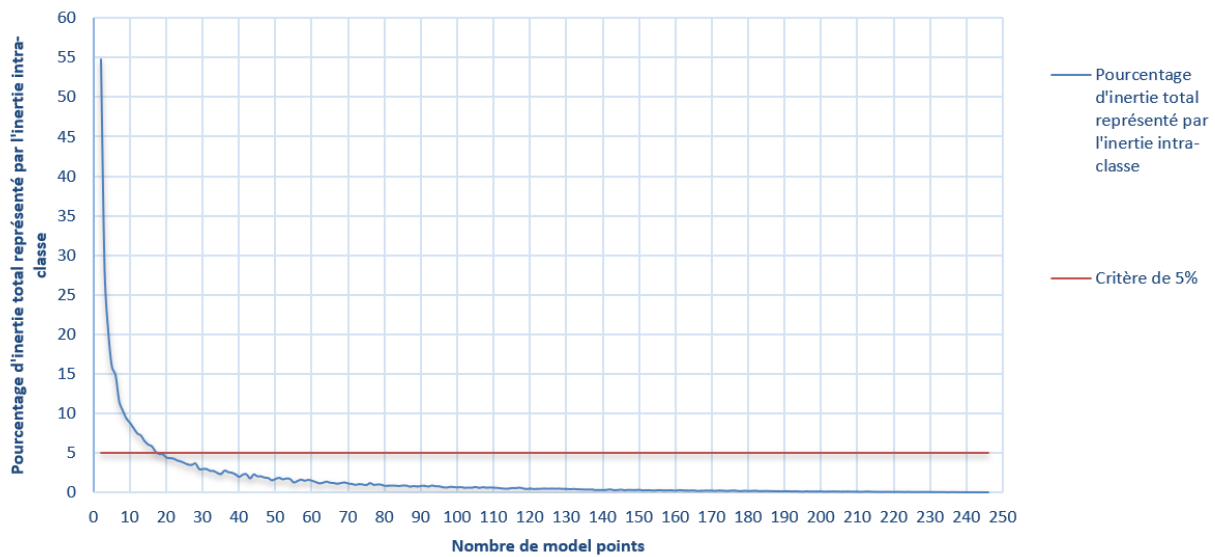


FIGURE 2: Optimisation de l'inertie intra-classe

Le meilleur compromis du nombre de *clusters* est de 18.

Après avoir obtenu le nombre de *model points* optimal, l'objectif est maintenant d'appliquer nos algorithmes de partitionnement au voisinage de cette valeur afin de trouver le nombre de *model points* permettant de minimiser l'erreur ε sur le BEL déterministe.

Comparaison avec une approche classique

Le BEL déterministe a été déterminé en utilisant deux approches :

- L'approche classique, consistant à donner en entrée de l'algorithme les variables âge, sexe et ancienneté ;
- L'approche utilisée dans ce mémoire, consistant à donner en entrée de l'algorithme les vecteurs de sortie.

L'objectif est de savoir si l'approche utilisée dans ce mémoire est plus efficace que l'approche classique utilisée dans la littérature. Cette comparaison s'est faite en construisant 68 *model points*. L'erreur sur le BEL déterministe induite est de :

- 0,026% avec l'approche classique ;
- 0,008% avec notre approche.

Le résultat est clair : notre approche induit une erreur sur le BEL déterministe plus de deux fois inférieure à celle engendrée par l'approche classique. Cette comparaison confirme l'efficacité de l'approche utilisée.

Impact sur le BEL déterministe et réduction du temps de calcul

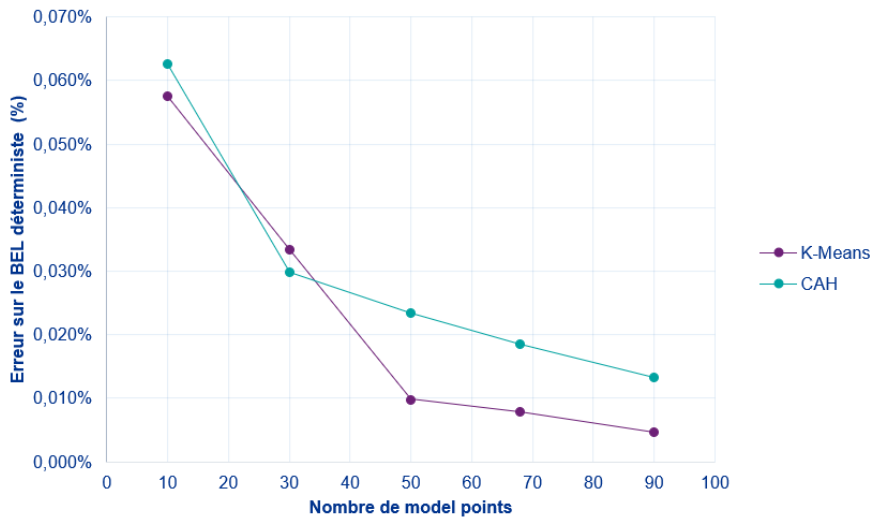
Temps de construction des model points

Premièrement, les temps de construction des *model points* des deux algorithmes se situent toujours

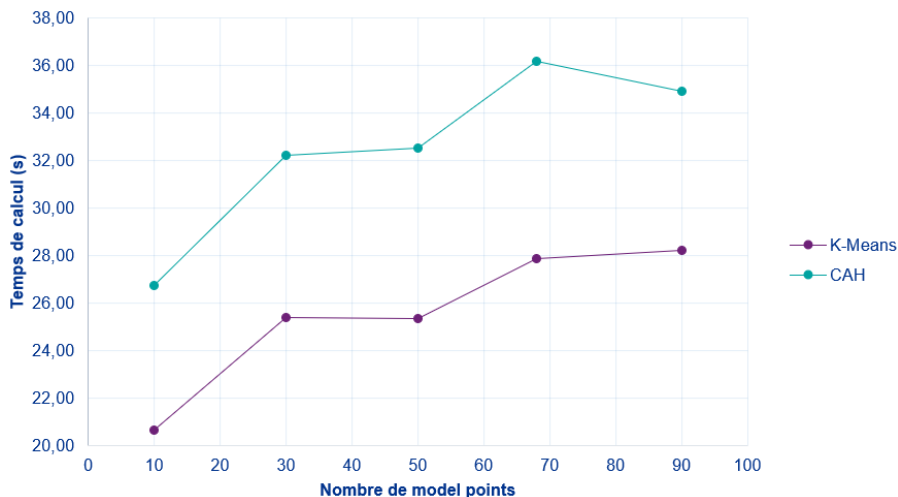
entre 25 et 35 secondes. Comparé aux 30 minutes de construction des *model points* du partenaire, le temps de construction de nos *model points* est largement inférieur, permettant une construction des *model points* rapide. De plus, les temps de construction des *model points* des deux méthodes de partitionnement engendrent des temps de construction des *model points* similaires et ne semblent pas dépendre de l'évolution du nombre de *model points*. Aucune différence significative ne permet de départager les deux méthodes.

Erreur sur le BEL déterministe et temps de calcul du modèle ALM

La figure 3 représente l'erreur sur le BEL déterministe et le temps de calcul nécessaire à la détermination du BEL déterministe par le modèle ALM, en fonction du nombre de *model points* construits par les algorithmes K-Means et CAH.



(a) Erreur sur le BEL déterministe



(b) Temps de calcul ALM

FIGURE 3: Erreur sur le BEL déterministe (a) et temps de calcul ALM (b) en fonction du nombre de model points construits par les algorithmes K-Means et CAH

Tout d'abord, de manière évidente, plus le nombre de *model points* composant la base agrégée est

grand, plus l'erreur sur le BEL déterministe diminue. De plus, l'erreur sur le BEL déterministe calculée avec les *model points* des deux algorithmes est toujours inférieure à 0,070% et est donc largement inférieure à l'erreur de 0,294% induite par les *model points* du partenaire. L'approche K-Means est plus efficace que l'approche CAH en permettant une erreur sur le BEL déterministe équivalente pour les plus forts taux de compression et une erreur près de deux fois inférieure pour les plus faibles taux de compression.

L'augmentation du nombre de *model points* dans la base agrégée augmente le temps de calcul. Les temps de calcul des deux algorithmes se situent toujours dans un certain intervalle de temps entre 20 et 37 secondes, permettant une exécution du modèle ALM plus rapide que lors de l'utilisation des *model points* du partenaire et ses 100 secondes de temps de calcul. Finalement, l'approche K-Means engendre des temps de calcul toujours inférieurs à l'approche CAH.

Combinaisons d'algorithmes

Le tableau 2 ci-dessous récapitule les résultats obtenus par les combinaisons d'algorithmes.

COMBINAISON	NOMBRE DE MODEL POINTS	ERREUR SUR LE BEL DÉTERMINISTE	TEMPS DE CONSTRUCTION DES MODEL POINTS	TEMPS DE CALCUL DU MODÈLE ALM
K-MEANS + CAH	68	0,005%	26 secondes	25 secondes
K-MEANS + CAH + K-MEANS	68	0,008%	27 secondes	26 secondes

TABLE 2: Résultats associés aux combinaisons d'algorithmes

Les deux combinaisons produisent d'excellentes performances : les erreurs engendrées sur le BEL déterministe avec les *model points* des deux combinaisons sont minimales et largement inférieures à l'erreur de 0,294% induite par les *model points* du partenaire. De plus, que ce soit pour la construction des *model points* ou les calculs du modèle ALM, les temps de calcul des deux méthodes sont réduits et largement inférieurs aux temps associés aux *model points* du partenaire. Finalement, en comparant les résultats obtenus pour une compression à 68 *model points*, les méthodes combinatoires sont plus performantes que l'algorithme CAH et aussi performantes que l'algorithme de K-Means. En terme de temps de calcul, les résultats des approches combinatoires sont similaires aux algorithmes seuls.

Conclusion

Le nombre optimal de *model points* dépend de l'objectif final recherché par la compagnie d'assurance. Un niveau minimal d'erreur et un certain taux de compression du portefeuille sont souvent souhaités. Suite à nos études sur l'erreur sur le BEL déterministe et le temps de calcul associés à un nombre de *model points*, nous pouvons trouver un compromis entre ces deux critères : l'utilisation de l'algorithme K-Means et la création de 50 *model points* ou l'utilisation de la combinaison K-Means + CAH et la création de 68 *model points*.

Application à un groupe plus volumineux

Maintenant que la comparaison des différents algorithmes de partitionnement a été faite, et que le meilleur algorithme à utiliser est déterminé, l'objectif est de savoir si le traitement d'un plus grand nombre de données affectera l'efficacité de l'approche utilisée.

Le nouveau groupe du portefeuille choisi est ainsi composé de plus de lignes que le groupe précédent : 82 990 lignes.

Le groupe disposant de dix fois plus de lignes, le temps de calcul du modèle ALM est logiquement impacté et est d'autant plus important en atteignant 2 heures 36 minutes et 27 secondes. En utilisant ce groupe, l'impact sur l'évaluation du BEL déterministe va pouvoir être évalué tout comme le gain de temps permis par l'utilisation des *model points*.

Les résultats des précédentes parties nous avaient montré que l'algorithme des K-Means était le plus efficace, ainsi nous avons construit 157 *model points* avec cette méthode.

Le temps de calcul du modèle ALM est considérablement réduit en compressant le groupe à 157 *model points*, en passant de deux heures à 38 secondes, permettant une réduction de près de 99,6%.

Par rapport à la compression précédente sur un groupe moins volumineux, l'erreur sur le BEL déterministe se trouve tout de même dans le même ordre de grandeur, se maintenant en dessous de la barre d'erreur de 0,01%. L'application à un plus grand nombre de ligne n'affecte pas l'efficacité du modèle d'agrégation.

Afin de pouvoir comparer avec les *model points* actuellement utilisés par la société partenaire, nous comparons dans le tableau 3 les résultats obtenus avec les *model points* du nouveau groupe.

	NOMBRE DE MODEL POINTS	ERREUR SUR LE BEL DÉTERMINISTE	TEMPS DE CALCUL DU MODÈLE ALM
PARTENAIRE	157	0,060%	38 secondes
K-MEANS	157	0,002%	38 secondes

TABLE 3: Caractéristiques des model points du partenaire

L'erreur sur le BEL déterministe est divisée par 30 grâce à l'utilisation de notre approche. Le résultat est clair : l'approche utilisée se montre plus efficace, que ça soit donc pour un groupe restreint ou un groupe plus volumineux.

Application à l'ensemble du portefeuille

Par la suite, la démarche utilisée pour un groupe du portefeuille devra être appliquée à l'ensemble des groupes constituant le portefeuille. Cependant, la problématique sur le nombre de *model points* optimal n'est pas nécessairement primordiale. En effet, le temps d'exécution des projections ALM impose une première contrainte sur le nombre de *model points* à construire pour l'ensemble du portefeuille. De plus, chaque groupe étant de volume différent, le nombre de *model points* optimal associé à chaque groupe varie. La solution serait ainsi de définir un certain nombre de *model points* pour chaque groupe en fonction d'un certain critère, comme par exemple la proportion de provision mathématique représentée par le groupe. Le modèle d'agrégation final correspond à l'automatisation de la démarche pour chaque groupe composant le portefeuille tout en définissant le nombre de *model points* pour chaque groupe selon un certain critère.

Synthesis note

The International Accounting Standards Board IASB is about to make the most advantage of 20 years of research with the replacement of the IFRS 4 standard by the new International Financial Reporting Standard: IFRS 17 Insurance Contracts. The international board appears to have been successful in developing a standard that will improve financial records comparability but also will enable standardization of accounting methods. To harmonize international approaches used by the insurers, the standard will impose the insurance market new regulations for policies' valuations and for IFRS 17 accounts' presentation.

Already regulated by numerous standards such as Solvency 2, insurers have developed several models to determine required estimators. Hence ideally insurers could reuse these models to meet the requirements of IFRS 17. However, although some components may have an equivalent in other standards, insurers are forced to modify their approach to integrate new components. For instance, IFRS 17 introduces the Contractual Service Margin CSM equal to expected future profits of a policy, or a different segmentation of policies.

Actual actuarial models used by insurers are not adapted to the introduction of the new IFRS 17 standard, insurers are forced to reconsider their methodology. Our main concern in this thesis is the new segmentation of policies suggested by IFRS 17, the creation of model points will have to adapt to the three levels of segmentation defined by the standard.

ALM Modeling

The insurer's commitments to the insured subject him to several risks he has to control and thus model. Hence, Asset and Liability Management (ALM) is necessary for insurance companies. It requires a strategy and the use of an ALM model to project asset and liability cash flows. In that way, an insurer can maximize his financial return and control asset-liability matching to meet future demands. Nevertheless, this kind of ALM model requires a huge number of stochastic simulations, which is problematic for a portfolio of millions of contracts. Computing time is too long and insurers are searching for alternative approaches.

ALM modeling alternative methods

Through this thesis, we will focus on another method, the Model point approach. It consists of reducing the number of liabilities inputs of the ALM model. To this end, insurance policies are aggregated to constitute a cluster, which is represented as faithful as possible by a virtual contract called model point. Contracts of the same cluster should have characteristics as similar as possible to limit the loss of information and segmentation. The classical approach mentioned in literature, consists of aggregating policies having the same key characteristics. That is, policies that have identical age and seniority are grouped together. In this study, model points are built thanks to the clustering algorithm applied to surrender vectors of contracts. This new method has been inspired by the study

of Pierre-Olivier Goffard [Goffard, 2015a].

Objectives

To estimate deterministic BEL, a deterministic simulation was done, giving us an immediate impression of the model points' performance.

We will focus our study on a saving contracts portfolio. The portfolio is divided into 356 group units, due to qualitative variables and model points' format. The aggregation of insurance policies can only be done in those 356 group units. We focused on one group of 7232 rows, needing 13 minutes and 10 seconds of calculation time. The calculation time is the time required by the ALM model to determine deterministic BEL.

The deterministic BEL error is the absolute value of the difference between exact deterministic BEL calculated with the entire portfolio and deterministic BEL calculated with the aggregated portfolio, divided by exact deterministic BEL calculated with the entire portfolio:

$$\varepsilon = \left| \frac{\text{Deterministic BEL}_{\text{aggregation}} - \text{Deterministic BEL}_{\text{exact}}}{\text{Deterministic BEL}_{\text{exact}}} \right|,$$

The first goal is to determine the clustering algorithm enabling us to minimize the deterministic BEL error as much as possible but also maximizing time reduction as much as possible and then enables us to compress as much as possible the portfolio. The second goal is to get better results than the partner company in those two criteria defined above. The figure 1 resumes the partner company results.

NUMBER OF MODEL POINTS	DETERMINISTIC BEL ERROR	MODEL POINTS CONSTRUCTION TIME	MODEL ALM CALCULATION TIME
68	0,294%	30 minutes	100 seconds

Table 1: Characteristics of the partner model points

To achieve our goals, we used surrender vectors applied to clustering algorithms, those two main components are explained below.

Process used

Surrender vector

A contract's surrender vector corresponds to probabilities that this contract expires during a fixed projection horizon. The end of the contract could be caused by the death of the insured or the full purchase of the contract. Thus, the surrender vector associated with each contract depends on a mortality table which depends on the insured's age, and depends on a purchase table which depends on the insured's seniority.

The formula is used to determine a surrender probability associated to a contract i and the year $T - 1 \rightarrow T - 1$, is :

$$p_i(T-1, T) = \left[\prod_{j=1}^{T-1} (1 - p_i(j-1, j)) \right] [1 - (1 - r_i(T-1, T))(1 - d_i(T-1, T))],$$

with $r_i(T-1, T)$ the purchase probability of contract i during year $T-1 \rightarrow T$; $d_i(T-1, T)$ the death probability of contract i during year $T-1 \rightarrow T$. Each contract is characterized by a surrender vector, who constitutes a time trajectory. A graphical representation of the portfolio is obtained thanks to the time trajectory of each contract. A graphical representation of a part of the portfolio is showed in the figure 1 below.

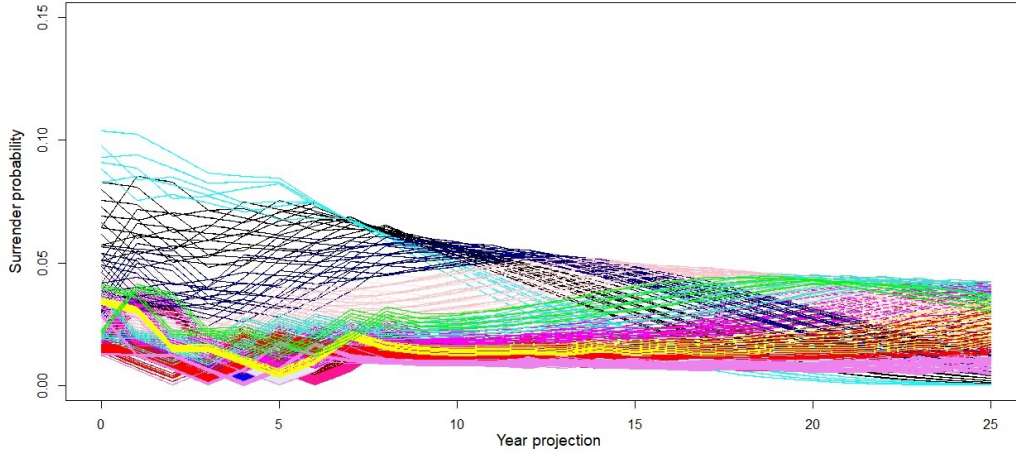


Figure 1: Trajectories associated to the group

A segmentation divides the portfolio in subgroups, the aggregation of contracts can be done only within each group. All surrender vector of the portfolio of a group are inputs of clustering algorithms.

Clustering algorithms

The goal of a clustering algorithm is to assign to each input component, a cluster. In our study, the goal is to assign to each portfolio's contract, particularly to each component of the database, a cluster.

- The first approach consists of using partitioning methods, which divide all contracts into k clusters, where k is fixed in advance. This method aggregates contracts iteratively by optimizing a quality criterion. We use the most used widely adopted algorithm the K-Means method. We can resume the K-Means method through the algorithm below:

The shutoff parameter of the algorithm is the stability of clusters or a maximal number of iterations reached.

This approach is simple to implement and the results obtained can be interpreted easily. This method also enables the process of large-scale databases. Nevertheless, the initial choice of the number of clusters to build affects highly the further development of the algorithm. Finally, this approach finds a segmentation which is a local solution, to find the global solution several running are needed.

- The second approach consists of using hierarchical methods that divide all contracts as a tree

structure, representing a hierarchy between them. We use the hierarchical agglomerative clustering HAC. We can resume the HAC method through the algorithm below:

A hierarchical tree structure is built providing good visibility of the number of clusters to form, contracts that are close in this structure are more likely to be assigned to the same cluster. Finally, this approach seems to be limited to process large-scale databases.

- The third approach consists of using two steps in sequence: firstly K-Means method and after HAC algorithm. This approach enables us to get away from the limitation of HAC to process large-scale databases. Indeed, as we noted above, the K-Means algorithm enables the process of large-scale databases, his use before HAC is beneficial.
- The last approach used consists of using three steps in sequence: firstly K-Means method, secondly HAC, and finally K-Means algorithm. This combination enables each algorithm to offer its practical advantage :
 - The use of K-Means in the first step enables large-scale databases processing ;
 - The use of HAC in the second step enables to determine the initial k representative policies with whom the K-Means algorithm in step 3 will start.

Choosing the number of model points

The efficiency of clustering algorithms highly depends on the choice of the number of model points to be formed. In this study, we focus on the sum of within-cluster inertia. To determine the best segmentation, the sum of the within-inertia cluster must be minimized. To this end, for each grouping in k model points, the percentage of total inertia I_T represented by the sum of within-cluster inertia I_W , rated φ^k is :

$$\varphi^k = \frac{I_W^k}{I_T},$$

The general idea is finding « the elbow » of the graph giving φ^k as a function of the number of model points k . When φ^k stops decreasing giving a number of model points k , the optimal number is reached.

The figure 2 below shows the graph giving φ^k as a function of the number of model points. The criterion used is a 5% percentage of total inertia I_T represented by the sum of within-cluster inertia I_W .

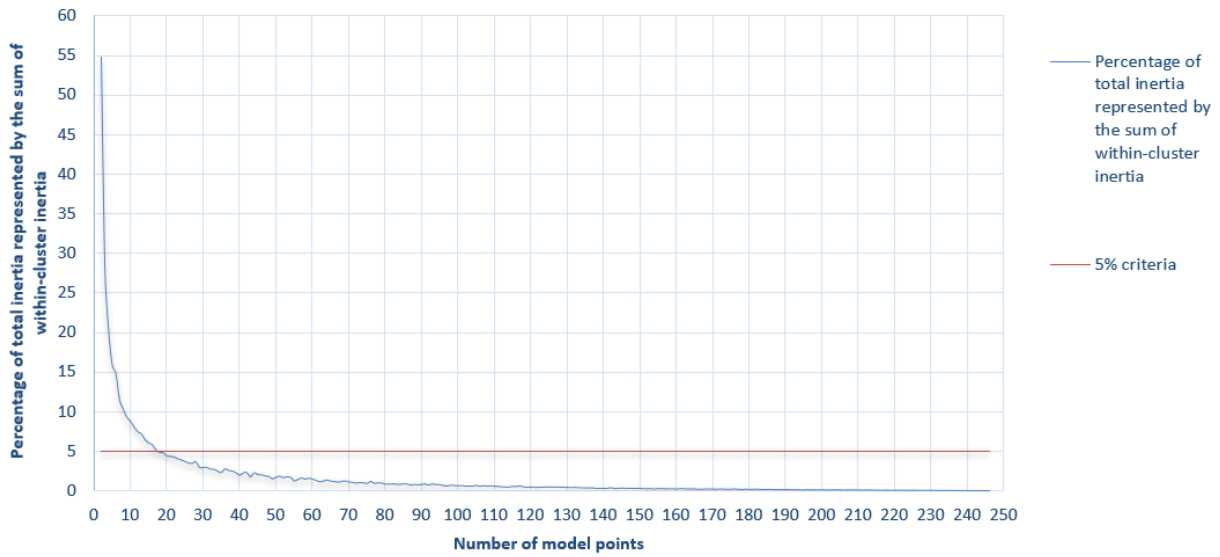


Figure 2: Optimization of the sum of within-cluster inertia

The optimal number of model points obtained is 18.

After obtaining the optimal number of model points, the goal is to apply clustering algorithms in the vicinity of the optimal number of model points, to find the number of model points permitting a minimization of the deterministic BEL error ε .

Comparison with classical approach

Deterministic BEL was determined using two approaches :

- The classical approach of using variables such as age, sex, seniority;
- The approach of using surrender vectors.

The goal is to determine if the approach used in this study is more efficient than the classical approach evoked in the litterature. To compare both methods, 68 model points were built. Deterministic BEL error induce is:

- 0,026% with the classical approach;
- 0,008% with ou approach.

Clearly, our approach leads to deterministic BEL error two times lower than the level of the classical approach. This comparison confirms the efficiency of our approach.

Deterministic BEL impact and calculation time reduction

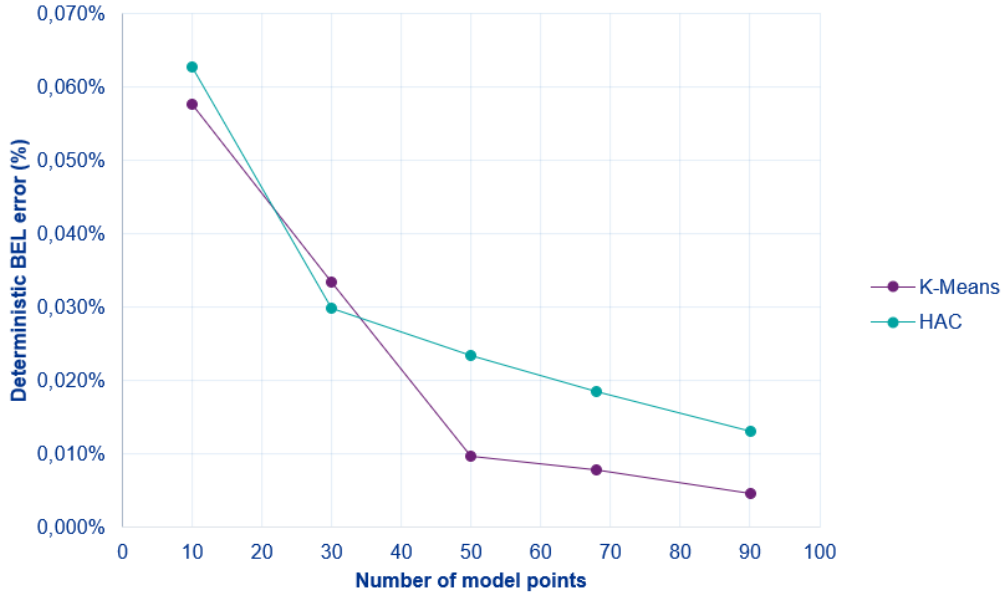
Time of model points construction

Firstly, model points construction times for both algorithms range between 25 and 35 seconds. Compared to the 30 minutes of the partner, the time is considerably lower, enabling a fast construction of model points. Moreover, both algorithms lead to similar time of construction, which are not depending on the number of model point. There is no significant difference between both algorithms

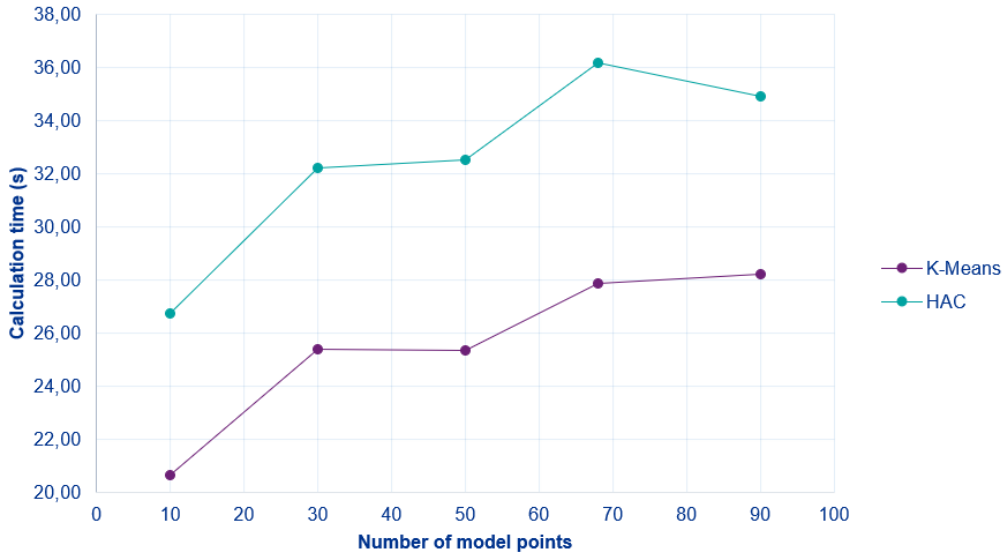
to distinguish them.

Deterministic BEL error and calculation time

The figure 3 below shows deterministic BEL error ε and calculation time as a function of the number of model points developed by K-Means and HAC algorithms.



(a) Deterministic BEL error



(b) Calculation time of ALM model

Figure 3: Deterministic BEL error and calculation time of ALM model as a function of the number of model points developed by K-Means and HAC algorithms

First of all, logically the more model points are developed by algorithms, the more deterministic BEL error is minimized. Moreover, using model points developed by K-Means and HAC algorithms causes deterministic BEL error always below 0,070 % and thus considerably lower than the 0,294 %

deterministic BEL error caused by partner model points. The K-Means algorithm is more efficient than the HAC algorithm, enabling an equivalent deterministic BEL error for high compression, and a deterministic BEL error more than two times lower for low compression.

The increase of the number of model points logically increase also the calculation time. Calculation time for both algorithms always ranges between 20 and 37 seconds, leading to a faster execution of the ALM model than with the use of the partner model points and his 100 seconds time. Finally, K-Means algorithm always leads to calculation time lower than those induce by HAC algorithm.

Algorithms combinations

The figure 2 below resumes the result obtained by algorithm combinations.

COMBINATION	NUMBER OF MODEL POINTS	DETERMINISTIC BEL ERROR	TIME OF MODEL POINTS CONSTRUCTION	CALCULATION TIME
K-MEANS + HAC	68	0,005%	26 seconds	25 seconds
K-MEANS + HAC + K-MEANS	68	0,008%	27 seconds	26 seconds

Table 2: Results of algorithm combinations

Both combinations offer excellent results: errors induced are negligible and significantly lower than the 0,294% deterministic BEL error induced by partner model points. Moreover, both model points construction time and calculation time engendered by both methods are reduced and lower than times of the partner model points. Finally, by comparing results obtained for 68 model points, combinations methods outperform the HAC algorithm, and as competitive as the K-Means method. In terms of calculation time, every approach is similar.

Conclusion

The optimal number of model points depends on the final goal of the insurer. A minimum error and a compression rate of the portfolio are often requested. Thanks to our study of deterministic BEL error and calculation time reduction, we can find a compromise between those criteria: either the use of the K-Means algorithm with 50 model points formed or the use of the combination K-Means + HAC algorithms with 68 model points formed.

Application to a larger group

The best algorithm to use determined, the goal is to evaluate the influence of the volume of the group over our approach and the deterministic BEL error.

The new group studied is composed of more rows than the previous group : 82 990 rows.

The group is composed of ten times more rows, thus calculation time is logically impacted and increased, reaching 2 hours 36 minutes and 27 seconds. Studying this group, the impact on the deterministic BEL determination will be evaluated as the time saving.

Previous results show us that K-Means algorithm is the more efficient, thus we built 157 model points thanks to this method.

Calculation time is considerably reduced thanks to the compression of the database in 157 model points, reducing from two hours to 38 seconds, enabling a 99,6% time reduction.

Compared to previous compression of the less voluminous group, deterministic BEL error is also below the symbolic 0,01% error. Application of the aggregation model to a larger group is not affecting his efficiency.

To compare our model points to the partner ones, we resume the result obtained with the new group in the table 3 below.

	NUMBER OF MODEL POINTS	DETERMINISTIC BEL ERROR	CALCULATION TIME OF THE ALM MODEL
PARTENAIRE	157	0,060%	38 secondes
K-MEANS	157	0,002%	38 secondes

Table 3: Partner model points characteristics

Deterministic BEL error is divided by 30 thanks to our approach. Clearly, the approach studied is more efficient, whether it is for small or large group.

Applying the process to the whole portfolio

The process used to a group of the portfolio, has to be applied to every group of the portfolio. Nevertheless, the problematic raised by the optimal number of model points is not crucial. Indeed, ALM simulations' computing time impose a first constraint in the number of model points to be formed for the whole portfolio. More over, each group of the segmentation has different number of policies, thus the optimal number of model points varies. Defining a certain number of model points for each group as a function a certain criterion, such as the ratio of mathematical provision represented by the group, could be a solution. The final aggregation model corresponds of the automatization of the process for each group of the segmentation, while defining the optimal number of model points for each group depending on a certain criterion.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Loïc Seitz, directeur de l'entité Actuariat chez KPMG France, pour sa confiance, son écoute et son implication dans la réussite de ce mémoire.

J'adresse mes chaleureux remerciements à mes deux encadrants chez KPMG, Elisée Kaboré pour ses nombreux conseils, son investissement sans faille et l'aide précieuse apportée tout au long de la rédaction de ce mémoire et Ghassane Laanaiti pour son soutien et sa confiance.

Je remercie également Messieurs Christophe Dutang et Philippe Lenca, mes tuteurs académiques pour l'encadrement et l'aboutissement de ce mémoire.

Je tiens à remercier tout le corps professoral de l'Université Paris Dauphine et l'IMT Atlantique pour la richesse, la qualité et la diversité de l'enseignement reçu ainsi que pour m'avoir donnée la chance d'effectuer cette formation en actuariat.

Enfin, je ne saurais conclure cette section sans vivement remercier ma famille, ma copine, mes amis et mes collègues pour leur soutien tout au long de cette belle aventure.

Table des matières

Résumé	3
Abstract	4
Note de Synthèse	5
Synthesis note	13
Remerciements	21
Table des matières	23
Introduction	27
1 Épargne et valorisations	29
1.1 L'épargne	29
1.1.1 Présentation générale de l'assurance-vie	29
1.1.2 Principes et objectifs de l'épargne	30
1.1.3 Description d'un contrat d'épargne	34
1.2 Valorisation d'un portefeuille épargne dans le cadre d'IFRS 17	39
1.2.1 Présentation d'IFRS 17	39
1.2.2 Valorisation sous IFRS 17	41
1.2.3 Modèles	43
1.2.4 Comparaison IFRS 17 vs Solvabilité 2	46
2 Modèle ALM et méthodes de modélisation	49
2.1 Modélisation Actif-Passif d'un portefeuille épargne	49
2.1.1 Principes	49

2.1.2	Générateur de scénarios économiques GSE	53
2.1.3	Actif	55
2.1.4	Passif	56
2.1.5	Interaction Actif-Passif	62
2.2	Méthode de modélisation des flux de passif	66
2.2.1	Objectifs	66
2.2.2	Flexing	67
2.2.3	Introduction à l'approche Model point	71
2.2.4	Comparaison	75
3	Agrégation des contrats en Model point	77
3.1	Théorie sur le partitionnement	77
3.1.1	Présentation	77
3.1.2	Définitions	77
3.1.3	Mesures de proximité	80
3.1.4	Mesures d'évaluation	81
3.2	Algorithme de partitionnement	84
3.2.1	Problématiques	84
3.2.2	Méthodes hiérarchiques	85
3.2.3	Méthodes non hiérarchiques	89
4	Application	95
4.1	Données	95
4.1.1	Présentation des contrats modélisés	95
4.1.2	Variables	96
4.1.3	Hypothèses	99
4.1.4	Vecteurs de probabilités de sortie	99
4.2	Démarche	100
4.2.1	Comparaison avec une approche classique	101
4.2.2	Recherche du nombre de model points optimal	102
4.2.3	Impact sur le BEL déterministe	104
4.2.4	Application à un groupe plus volumineux	107

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	25
4.2.5 Application à l'ensemble du portefeuille	108
Conclusion	109
Bibliographie	111
A Annexes	113
A.1 Théorème de Huygens	113
A.2 Dendrogrammes associés à différents indices d'agrégation de Huygens	114

Introduction

Le secteur de l'assurance est caractérisé par l'inversion du cycle de production, ainsi le prix du produit, appelé prime d'assurance, est fixé avant que ne soit connu le coût, c'est-à-dire le montant de la prestation versée. Dans ces conditions, l'assureur doit s'assurer que son tarif est suffisant et être en mesure d'honorer ses engagements. Par conséquent, il est primordial pour une compagnie d'assurance de valoriser économiquement son passif, qui plus est sur le long terme, ce qui n'est pas chose aisée.

D'autre part, le monde de l'assurance est aujourd'hui dans une période d'évolution considérable de la réglementation, qui de surcroît demande une attention particulière aux risques inhérents à l'activité assurantielle. Ainsi, les organismes assureurs sont en perpétuelles recherches de progrès sur leur transparence et leur communication pour refléter l'image la plus fidèle de leurs engagements.

C'est dans cette dynamique que la nouvelle norme comptable internationale IFRS 17 entrera en vigueur au 1^{er} Janvier 2023. L'implémentation de cette norme demande déjà aux assureurs une grande réflexion en termes de recherche, modélisation et traitement des données.

Ce nouveau cadre réglementaire impose aux organismes assureurs, tout comme pour Solvabilité 2, d'utiliser des modèles actuariels pour estimer en juste valeur leurs engagements. Cependant, IFRS 17 intègre de nouveaux principes de valorisation qui imposent aux assureurs une approche différente que nous verrons dans ce mémoire.

Dans ce contexte réglementaire, il est primordial de modéliser les interactions actif-passif grâce à un modèle *Asset and Liability Management* ALM. Ce type de modèle permet de modéliser les contrats d'assurance vie en prenant en compte les risques liés au passif (décès, rachats, etc.) et les risques liés à l'actif (marché, taux, etc.). Cependant, cet outil requiert un nombre de calculs et de simulations très important, qui devient problématique pour un portefeuille de millions de contrats. Pour pallier à cette problématique, la méthode *Flexing* est une alternative très utilisée par les organismes d'assureurs. Néanmoins, par la perte d'informations et les approximations dans les résultats obtenus, un changement de méthode est souhaité par les assureurs. Le marché de l'assurance procède actuellement à un changement de stratégie, en abandonnant le *Flexing* pour une méthode dite *full ALM*.

Dans ce mémoire, nous allons présenter une approche dite « *Model point* » qui va permettre d'effectuer toutes les modélisations actif-passif pour un portefeuille de contrats d'épargne. Plus précisément, cette méthode consiste à regrouper des contrats en un seul et même contrat représentatif appelé *model point*. Les projections des scénarios et la stratégie ALM seront inchangées, mais le portefeuille sera considérablement réduit en un nombre restreint de *model points*, ce qui diminuera les temps de calcul. Ce mémoire a pour objectif de trouver la meilleure méthode d'agrégation des contrats d'assurance en *model points*, qui permettrait une minimisation de l'erreur de calcul du *Best Estimate* BE et une diminution des temps d'exécution.

Ce mémoire est composé de quatre parties. Premièrement, nous présenterons les principales caractéristiques de l'épargne, le contrat support de notre mémoire, et les principaux concepts de la

valorisation sous IFRS 17 et Solvabilité 2. Dans une deuxième partie seront évoquées la modélisation actif-passif et deux méthodes au service de cette modélisation, le *Flexing* et l'approche *Model point*. Dans un troisième temps, nous étudierons la théorie du partitionnement et les différents algorithmes de clustering, qui serviront de base à la dernière partie du rapport. Celle-ci aura pour objectif d'étudier les données à notre disposition et d'appliquer nos modèles d'obtention des *model point* sur un portefeuille d'épargne en analysant les résultats obtenus et en les comparant aux résultats de la société partenaire.

Chapitre 1

Contrats d'épargne et valorisation sous IFRS 17 et Solvabilité 2

1.1 L'épargne

Nous nous appuyons sur le support du cours d'Antoine Taveneaux [TAVENEAUX, 2019] pour présenter l'assurance-vie et l'épargne.

1.1.1 Présentation générale de l'assurance-vie

Définitions

L'opération d'assurance

« L'opération d'assurance est l'opération par laquelle un organisme, l'assureur, s'engage à exécuter une prestation au profit d'une autre personne, le bénéficiaire, en cas de réalisation d'un événement aléatoire, le risque, en contrepartie du paiement d'une somme, la prime. » [TAVENEAUX, 2019]

L'assurance-vie

« Toute opération comportant des engagements dont l'exécution dépend de la durée de la vie humaine autre que les activités visées aux branches 22,23 et 26. » [CODE DES ASSURANCES, 2020a] Les branches 22, 23 et 26 correspondent respectivement aux « Assurances liées à des fonds d'investissement », « Opérations tontinières » et « Toute opération à caractère collectif définie à la section I du chapitre Ier du titre IV du livre IV [du Code des Assurances] ».

Le contrat

Les relations entre les parties sont définies par un contrat d'assurance. « Le contrat d'assurance, par essence aléatoire, comporte, moyennant l'octroi d'une prime, la couverture d'un risque et l'exécution d'une prestation en cas de réalisation du risque. » [TAVENEAUX, 2019] Certaines caractéristiques comme par exemple le taux d'intérêt technique ou la tarification sont précisées dans le contrat.

Garanties

L'assurance vie fait naître des engagements dont l'exécution dépend de la durée de la vie humaine. Il existe deux grandes familles de garanties : les garanties en cas de vie et les garanties en cas de décès.

- *Les garanties en cas de vie*

Si la personne assurée est toujours en vie à une date donnée dans le contrat alors un paiement lui est dû, ce qui constitue une garantie en cas de vie. Par exemple, la retraite est une garantie en cas de vie. Les contrats en cas de vie sont des contrats pouvant être individuels ou collectifs, qui dans le deuxième cas sont souscrits par une entreprise ou une association. Le principe de ces contrats est basé sur la capitalisation financière et viagère des primes versées par l'assuré. Ils permettent ainsi à l'assuré de disposer d'un droit différé d'une sortie en rente ou capital à l'échéance du contrat s'il est toujours en vie. Les produits d'épargne et de retraite sont les principaux contrats en cas de vie.

- *Les garanties en cas de décès*

Si la personne assurée décède avant le terme du contrat, alors un paiement lui est dû, ce qui constitue une garantie en cas de décès. Par exemple, l'assurance emprunteur est une garantie en cas de vie. Celle-ci correspond au déclenchement d'un remboursement du capital restant dû si l'emprunteur décède. Les contrats en cas de vie sont des contrats pouvant être individuels ou collectifs, qui dans le deuxième cas sont souscrits par une entreprise ou une association. Lorsqu'ils sont souscrits lors d'un emprunt, il s'agit d'une assurance emprunteur. Ils garantissent une sortie en rente ou capital au bénéficiaire dans le cas du décès de la tête assurée avant l'échéance du contrat. On distingue deux types de garanties en cas de décès : une garantie temporaire (comme pour l'assurance emprunteur) et une garantie vie entière (comme pour une assurance obsèques).

1.1.2 Principes et objectifs de l'épargne

Définition

Un contrat d'épargne est un contrat qui contient les deux garanties : en cas de vie et en cas décès. L'aléa de ce type de contrat repose sur le moment de remboursement des sommes, l'échéance du contrat est aléatoire et dépend de la durée de vie de la tête assurée. Ainsi le contrat d'épargne n'est pas un placement purement financier car celui-ci prend fin lorsque l'assurée décède. Deux paramètres sont primordiaux dans la modélisation d'un tel contrat : le rendement financier et la mortalité.

Objectifs

Le succès des produits d'épargne s'explique par plusieurs paramètres :

- Mutualisation du risque ;
- Protection sociale ;
- Système de retraite par répartition limitée ;
- Protection de ses proches en cas de décès ;

- Une fiscalité attractive ;
- Flexibilité : sortie en capital ou en rente ;
- Avances possibles.

Fiscalité

L'attractivité de l'assurance-vie s'explique particulièrement par la fiscalité des contrats d'assurance vie. Un contrat d'assurance-vie représente une créance sur un assureur, juridiquement il n'est donc pas assimilable à la détention d'un actif. Historiquement, un contrat d'assurance-vie représentait un moyen de protection, il n'est donc pas légitime de le taxer. [TAVENEAUX, 2019] Pour ces raisons, l'assurance-vie bénéficie d'une fiscalité avantageuse. Le dispositif fiscal concerne l'impôt sur le revenu et l'impôt sur les successions. La fiscalité de l'assurance-vie évolue depuis quelques dizaine d'années, et les nombreuses mesures adoptées au fil des années ont réduit quelques avantages fiscaux de l'assurance-vie. A noter que le principe de la non-rétroactivité est appliqué, c'est-à-dire que les réformes fiscales ne sont pas directement appliquées à l'épargne déjà constituée à la date de la réforme mais s'appliquent seulement aux opérations futures.

Fiscalité sur le revenu

Le dispositif fiscal qui s'applique aux contrats d'assurance-vie vise à favoriser l'épargne de longue durée. Nous avons construit le tableau 1.1 résumant les avantages de la fiscalité des produits d'assurance-vie en cas de rachat [FÉDÉRATION FRANÇAISE DE L'ASSURANCE, 2018].

IMPOSITION DES GAINS				
Ancienneté du contrat	Produits concernés par l'imposition	Primes versées jusqu'au 27 septembre 2017	Primes versées après le 27 septembre 2017	
			Encours total des contrats de l'assuré < 150 000€	Encours total des contrats de l'assuré > 150 000€
Avant 4 ans	Ensemble des produits	52,2%	30%	
Entre 4 et 8 ans		32,2%		
Après 8 ans avant abattements*	Produits issus des primes < 150 00€	17,2%	17,2%	17,2%
	Produits issus des primes > 150 00€			30,0%
Après 8 ans après abattements*	Produits issus des primes < 150 00€	24,7%	24,7%	24,7%
	Produits issus des primes > 150 00€			30,0%

*En cas de rachat du contrat après 8 ans, le souscripteur du contrat bénéficie d'un abattement annuel sur les produits de 4 600 euros pour une personne seule et de 9 200 euros pour un couple marié ou pacé soumis à imposition commune.

FIGURE 1.1: Fiscalité sur le revenu avantageuse des produits d'assurance-vie en cas de rachat

Fiscalité sur les successions

Une fiscalité particulière est appliquée pour les successions. Considérons le cas des successions de parents à enfants. A partir d'un montant de référence, les droits de successions sont calculés par tranche et par héritier, comme le récapitule la figure 1.2a. [TAVENEAUX, 2019] La figure 1.2b [TAVENEAUX, 2019] résume les différences faites selon la date des versements (à noter que les plus-values sont exonérées et seules les primes entrent dans le calcul).

Montant des droits par héritier							
Tranche	0€ à 100K€	100K€ à 108K€	108K€ à 112K€	112K€ à 116K€	116K€ à 652K€	903K€ à 1906K€	Plus de 1906K€
Imposition	0%	10%	15%	20%	30%	40%	45%

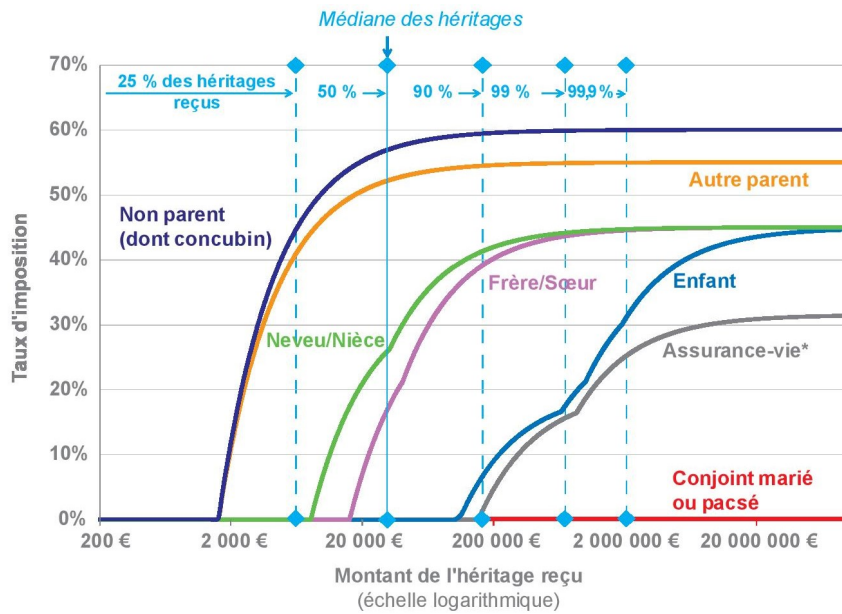
(a) Montants des droits par tranche et par héritier

Versements effectués avant les 70 ans du souscripteur	Versements effectués après les 70 ans du souscripteur
Application d'un abattement de 152 500 € par bénéficiaire	Abattement de 30 500 € sur l'ensemble des bénéficiaires
Prélèvement de 20% jusqu'à 700 000 €	Droits de succession dus sur la fraction des primes excédant 30 500 €
Prélèvement de 31.25% au-delà de 700 000 €	

(b) Traitement fiscal selon la date des versements correcte

FIGURE 1.2: Fiscalité sur les héritages avantageuse

De plus, on remarque sur le graphique 1.3 [DHERBÉCOURT, 2017], que l'assurance-vie offre les taux d'imposition les plus attractifs sur les héritages reçus, ce qui explique en partie le succès des contrats d'assurance-vie.



* Quel que soit le lien de parenté entre le défunt et le bénéficiaire, hors versements après 70 ans. Les versements après 70 ans font l'objet d'un abattement de 30 500 euros par défunt. Les versements antérieurs à 1998 sur des contrats ouverts avant 1991 sont totalement défiscalisés.

FIGURE 1.3: Fiscalité avantageuse de l'assurance-vie

Aujourd'hui une part très importante de l'assurance vie correspond en réalité à de l'activité d'épargne, l'assurance en cas de vie pure n'existe pas en France. La figure 1.4 [TAVENEUX, 2019] montre que l'épargne représente près de 73% (51% + 22%) des cotisations de l'assurance-vie.

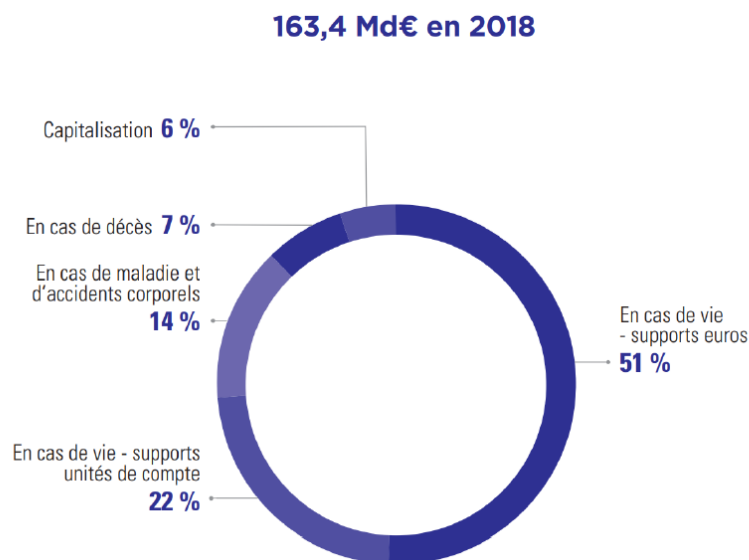


FIGURE 1.4: Cotisations par type d'assurance-vie

1.1.3 Description d'un contrat d'épargne

Les acteurs

Différents acteurs régissent l'opération d'assurance :

- L'assureur, couvrant le risque ;
- Le souscripteur, la personne signant le contrat et s'engageant à payer la prime ;
- L'assuré, courant le risque ;
- Le bénéficiaire et/ou un tiers, la/les personne(s) recevant la prestation ;
- Possibilité d'avoir d'autres acteurs preneurs de risques à qui l'assureur cède le risque (par exemple un réassureur).

Les supports

Les contrats assimilables à de l'épargne peuvent prendre essentiellement deux formes :

- Les encours peuvent s'exprimer en euros (le capital est alors souvent garanti) ;
- Les encours peuvent aussi s'exprimer comme des unités de compte (comme par exemple des parts d'OPCVM, dont la valeur n'est a priori pas garantie).

Les caractéristiques de ces deux supports sont résumées dans le tableau 1.1 [TAVENEUX, 2019].

	CONTRAT EN EUROS	CONTRAT EN UNITÉS DE COMPTE (UC)	CONTRAT MULTI-SUPPORTS
DESCRIPTION	Les montants des garanties et des primes sont exprimés en euros	Le montant des garanties est exprimé en unité d'investissement, les unités de compte, qui peuvent être un nombre de parts dans un OPCVM, des parts de SCI, etc	Le montant des garanties fait référence à un ou plusieurs supports en UC et un support en euro
GARANTIE DE L'ASSUREUR	Le nombre d'euros	Le nombre d'UC, par leur valeur	Le nombre d'euros pour la part du contrat en euro et le nombre d'UC pour la part du contrat en UC
RISQUE FINANCIER PORTÉ PAR	L'assureur	L'assuré	L'assureur pour la partie en euro et l'assuré pour la partie en UC

TABLE 1.1: Différents types de supports de l'épargne

- ***Les contrats en euros***

Les contrats d'épargne en euros fonctionnent de telle façon que :

- Le souscripteur dépose des fonds (paiement de la prime) ;
- L'assureur place les fonds, généralement une part importante des placements sont des obligations d'état ou d'entreprises ;
- Chaque année l'assureur verse une part des revenus financiers des placements et prélève des frais de gestion, de plus il s'engage à verser aux assurés un taux minimum garanti (voir partie TMG) ;
- Quand l'assuré le souhaite, il retire son capital et les intérêts.

Ce fonctionnement engendre un retard des taux de revalorisation de l'assurance vie par rapport aux taux de marché : quand les taux baissent cela prend du temps avant que le rendement de l'assurance vie soit impacté.

- ***Les contrats en Unités de Compte (UC)***

Les unités de comptes correspondent à des parts de divers supports : actions, obligations, SICAV, FCP, valeurs mobilières ou immobilières, etc. L'ensemble des supports éligibles sont explicités par le Code des Assurances (articles L.331-1 et R.331-1). Les contrats en UC n'ont donc pas le même référentiel que les contrats en euros, ils correspondent eux à un portefeuille d'unités de comptes qui dépendent de l'évolution du marché financier. La performance sera donc très sensible aux cours des supports choisis sur le marché. De plus, comme le souscripteur investit dans une part d'un actif risqué, il porte donc le risque. Le rendement espéré sur les contrats en UC est plus élevé que celui sur les contrats en euros mais le risque en capital existe sur les contrats en UC. Contrairement aux contrats en euros, l'investissement de l'assuré n'est pas garanti, seul le nombre d'unités de comptes est garanti. Ainsi, l'assurée peut se retrouver avec un capital final inférieur à la cotisation initiale versée. L'assureur prélève annuellement des frais de gestion. Le gestionnaire de l'actif prélève des frais dont une part est rétrocédée à l'assureur.

- ***Les contrats multi-supports***

Les contrats multi-supports correspondent à des contrats dont le portefeuille est mixte : une part est investie sur un fond en euros, l'autre part est investie sur différents supports UC. La proportion de chaque part peut être arbitrée par le souscripteur ou bien certains assureurs proposent des options d'arbitrages automatiques entre les fonds euros et les UC (par exemple pour vendre automatiquement une UC si elle se dévalorise trop).

Les caractéristiques

- ***La durée du contrat***

Un contrat d'épargne n'a pas de durée légale, la durée initiale est fixée librement et est renouvelable par tacite reconduction. Pour bénéficier au maximum des avantages de la fiscalité sur les contrats d'épargne, les assurés conservent généralement leur contrat d'une durée supérieure à 8 ans car pour les contrats ouverts depuis plus de 8 ans, une exonération d'impôts jusqu'à 4600€ de plus-values réalisés par an est appliquée. Le contrat arrive à son terme en cas de rachat total ou de décès de la tête assurée.

- **Les cotisations**

Les cotisations sont les sommes investies par l'assuré dans un contrat d'épargne, qui sont versées à l'assureur selon plusieurs formes possibles :

- Une prime unique : versement d'une prime unique par l'assurée au moment de la souscription du contrat d'assurance ;
- Des primes périodiques programmées : versements de manière périodique d'une prime (par exemple annuelle, semestrielle ou trimestrielle). La fréquence de versement et le montant de la prime sont fixés à la souscription du contrat d'assurance ;
- Des versements libres : versement d'un montant minimum à la souscription du contrat d'assurance suivi de plusieurs versements dont la fréquence et le montant ne sont pas fixés préalablement.

- **Frais**

Les assureurs adoptent une structure de chargement qui reflète au mieux la structure des frais, plusieurs types de frais existent comme on peut le voir dans le tableau 1.2 [TAVENEUX, 2019]

FRAIS D'ACQUISITION	Commercialisation, commissions, préparation des dossiers, etc.
FRAIS DE GESTION DES CONTRATS	Encaissement des primes et comptabilisation, relation client, etc.
FRAIS DE GESTION FINANCIÈRE	Frais d'arbitrages liés aux contrats multi-supports, etc.
FRAIS GÉNÉRAUX	Directeur général, comptabilité générale, etc.

TABLE 1.2: Plusieurs catégories de frais

- **Prélèvements sociaux**

Des cotisations sociales sont appliquées au taux en vigueur sur les gains générés par le contrat. Dans le cas des contrats euros, ces prélèvements sont appliqués à chaque capitalisation annuelle, alors que pour les contrats en UC ils sont appliqués lors d'un retrait partiel ou total.

Options et garanties

- **Taux minimum garanti (TMG)**

Le taux minimum garanti concerne les contrats d'épargne en euros, les assureurs s'engagent à garantir aux assurés un rendement minimum à leur épargne sur une durée déterminée et quels

que soient les conditions de marché. Ce taux peut être fixe ou peut varier annuellement.

L'arrêté du 7 juillet 2010 s'appliquant depuis le 1er août 2010 impose quelques contraintes sur l'établissement du TMG :

- Il ne doit pas dépasser 85% du rendement des actifs de l'assureur sur les 2 dernières années ;
- Il doit être garanti sur une durée supérieure ou égale à 6 mois ;
- Il doit être calculé annuellement ;
- Les autres produits d'assurance ne doivent pas être handicapés par la revalorisation des contrats incluant un TMG ;
- Il est plafonné par un indice dépendant de la conjoncture des marchés obligataires.

Le TMG constitue une garantie aux assurés notamment contre une chute des taux. Son choix est donc complexe et stratégique, il doit permettre à l'entité de faire face à la concurrence et attirer de nouveaux souscripteurs tout en étant capable de générer des rendements financiers à la hauteur de ses engagements.

• *Participations aux bénéfices (PB)*

La participation aux bénéfices s'applique aux contrats en euros. Les bases réglementaires de provisionnement prudentes (tables de mortalité, taux technique maximum plafonné) impliquent en moyenne des bénéfices techniques et financiers probables qui seront à partager avec les assurés via la participation aux bénéfices. Depuis 1967, la réglementation impose un niveau minimum de participation aux bénéfices. Des clauses contractuelles peuvent bonifier le mécanisme de participation aux bénéfices en prévoyant des reversements complémentaires. Il convient de distinguer la PB contractuelle de la PB réglementaire.

Minimum de PB réglementaire

Le calcul se fait au niveau de l'entreprise d'assurance et non contrat par contrat. Le calcul suit le principe général suivant : la rémunération globale de la compagnie est au plus égal à 10% du résultat technique et 15% du résultat financier (hors produits financiers sur fonds propres). À noter que la totalité du déficit technique peut être imputée aux assurés (ou reportée sur l'exercice suivant si le résultat financier est insuffisant) au contraire du déficit financier qui ne peut être imputé aux assurés.

PB contractuelle

Le calcul peut se faire au niveau du contrat ou d'un ensemble de contrat. Une analyse précise des clauses contractuelles doit donc être réalisée lors de la souscription. La somme des participations contractuelles est dans la plupart des compagnies supérieure à la participation réglementaire.

Modalités d'attribution de la PB

L'assureur a plusieurs moyens pour attribuer la PB aux assurés :

- Par attribution directe ;
- Par l'augmentation des prestations futures, à travers l'augmentation des provisions ;
- Par la diminution des primes ;

- Par attribution différée ;
- Par la mise en réserve au sein de la provision pour participations aux bénéfiques (PPB) : il s'agit du montant des participations aux bénéfiques attribuées aux bénéficiaires du contrat lorsque ces bénéfiques ne sont pas payables immédiatement après la liquidation de l'exercice qui les produit. Un délai de 8 années est imposé pour l'attribution de la participation aux bénéfiques incorporée à la PPB.

Le mécanisme de PPB permet de faire face aux résultats en baisse sur certaines années, en comblant les mauvais rendements par l'attribution d'une partie de la PPB offrant ainsi une rémunération stable au cours du temps.

- ***L'option de rachat***

« Le droit de rachat » du souscripteur est écrit dans l'article L.132-23 du Code des Assurances [CODE DES ASSURANCES, 2020b]. Un assuré a le droit de racheter son contrat s'il a besoin de liquidités ou si le contrat n'est, à ses yeux, plus aussi intéressant qu'avant. Le rachat de son contrat peut prendre deux formes : partiel ou total. Dans le cas d'un rachat partiel, le contrat continue de s'exercer, dans le cas d'un rachat total, le contrat prend fin. Lors d'un rachat total, l'assureur doit verser à l'assuré sa provision mathématique qui correspond à l'ensemble des engagements de l'assureur envers l'assuré. Cependant, le droit au rachat est soumis à certaines conditions. L'assuré peut racheter son contrat d'assurance, sans possibilité d'opposition de l'assureur, après avoir cotisé au moins 15% des primes prévues dans les termes du contrat soit deux primes annuelles. L'organisme doit ensuite procéder au versement de la valeur de rachat du contrat sous deux mois maximum.

Risques

Pour les contrats en euros, le risque est porté par l'assureur car il doit verser des intérêts en fonction du capital investi par les assurés. Ainsi l'organisme est confronté à plusieurs risques financiers.

- ***Risque actions***

En cas de baisse des actions, les investissements de l'assureur seront impactés tout comme les contrats des assurés. Des rendements financiers en baisse peuvent entraîner une baisse des taux servis aux assurés. Si cette baisse est significative, une vague de rachat des contrats peut se produire et engendrer des pertes pour l'assureur.

- ***Risque de taux***

- Dans un environnement de taux durablement bas, le réinvestissement des obligations arrivant à maturité se fera sur de nouvelles obligations délivrant des rendements plus faibles. Ainsi à cause de rendements insuffisants, l'assureur peut se trouver dans l'incapacité de faire face à ses engagements et aux taux garantis à ses assurés ;
- Dans un environnement de hausse des taux, les taux proposés par les contrats de l'assureur seront très peu compétitifs par rapport à ceux du marché. Ce manque d'attractivité peut entraîner une vague de rachat des assurés, voulant investir dans des produits plus rémunérateurs. Dans ce cas de figure, l'assureur peut être contraint à réaliser des moins-values par la vente d'obligations.

- *Autres risques*

L'assuré peut également être confronté à d'autres risques divers :

- Mauvaise prévision des paramètres financiers (essentiellement le taux d'actualisation) qui va engendrer une perte de fonds propres par un décalage entre actif et passif (le rendement de l'actif n'est pas à la hauteur du taux d'actualisation du passif) ;
- Mauvaise estimation de la mortalité de la population assurée ;
- Comportement des assurés comme par exemple les rachats ;
- Aléa dans la sinistralité de la population (la mutualisation ne permet jamais d'avoir une sinistralité exactement égale à la moyenne attendue).

1.2 Valorisation d'un portefeuille épargne dans le cadre d'IFRS 17

1.2.1 Présentation d'IFRS 17

Principes

La nouvelle norme IFRS 17 [THE INTERNATIONAL ACCOUNTING STANDARDS BOARD (THE BOARD), 2017] est une norme comptable pour les contrats d'assurance, qui a pour objectif de créer un unique référentiel pour valoriser économiquement les passifs des organismes assureurs. Publiée le 18 mai 2017, elle s'appliquera dès le 1er janvier 2023 et viendra remplacer la norme IFRS 4. Contrairement à la norme actuelle IFRS 4 qui permet aux organismes assureurs d'utiliser les normes comptables locales, IFRS 17 permettra d'homogénéiser les méthodes de comptabilisation à une échelle internationale.

L'IFRS 17 reflète le point de vue de l'IASB selon lequel un contrat d'assurance combine des éléments à la fois d'un produit financier et d'un contrat de services.

Les objectifs d'IFRS 17 sont nombreux :

- La création d'un référentiel commun pour tous les organismes assureurs afin d'harmoniser les pratiques et la comptabilisation des passifs en valeur économique dans le but de favoriser la comparabilité des assureurs ;
- Avoir une cohérence avec la valorisation des autres éléments tels que les actifs. En effet sous la nouvelle norme IFRS 9, les actifs sont valorisés soit en valeur de marché soit au coût amorti. La valorisation des contrats d'assurances en valeur de marché sous IFRS 17 est donc plus cohérente avec la valorisation des actifs sous IFRS 9, et perfectionnera l'équilibre actif-passif ;
- L'amélioration de la vision économique du passif, de la communication financière par la publication de ces rapports IFRS 17, et d'une meilleure conception du business.

Champ d'application

La norme IFRS 17 est une norme internationale qui s'appliquera, d'après l'article 3 de la norme [THE INTERNATIONAL ACCOUNTING STANDARDS BOARD (THE BOARD), 2017], aux éléments suivants :

- Les contrats d'assurance (y compris les traités de réassurance) que l'organisme émet ;
- Les traités de réassurance que l'organisme détient ;
- Les contrats d'investissement avec participation discrétionnaire à condition que l'organisme émette aussi des contrats d'assurance.

À noter que pour les organismes assureurs européens cotés ou émettant de la dette cotée, cette norme sera obligatoire. En Europe, l'application de la norme Solvabilité 2 étant bien ancrée dans les travaux des assureurs, l'implémentation de la norme IFRS 17 pourra être mieux appréhendée même si la charge de travail et le coût d'implémentation sur les modèles actuariels est significatif.

Segmentation du portefeuille

Les contrats d'assurance doivent être agrégés par groupe de contrats selon certains critères précis pour appliquer les calculs IFRS 17. Le premier regroupement se fait par portefeuille de contrats d'assurance, qui selon la norme « est constitué de contrats d'assurance qui comportent des risques similaires et sont gérés ensemble ». Ensuite, les contrats d'assurance sont regroupés par année, c'est-à-dire par génération dite cohorte, afin de distinguer les générations profitables des générations non profitables dans chaque regroupement. Le fait de ne pas agréger des contrats commercialisés à des années différentes constitue une maille fine à prendre en compte. Enfin, les contrats doivent être regroupés selon leur rentabilité.

Pour cela, trois catégories de rentabilité doivent être identifiées :

- Les contrats onéreux à l'origine ;
- Les contrats non-onéreux à l'origine mais à fort risque de devenir onéreux ;
- Les contrats profitables à risque nul de devenir onéreux.

Pour résumer, le regroupement des contrats d'assurance doit se faire selon une segmentation en trois niveaux : portefeuille de contrats, cohorte et rentabilité, schématisé par la figure 1.5 [NELDER et WEDDERBURN, 1972]. Ces nouvelles notions amenées par IFRS 17 imposent des problématiques majeures dans l'implémentation : la valorisation des passifs des contrats d'assurance à une granularité plus fine des données et une maille de calcul différente démultiplient le volume de données à traiter. Cette segmentation du portefeuille est d'une grande complexité, les organismes assureurs doivent modifier voire refonder leurs modèles actuariels pour répondre à ces problématiques.

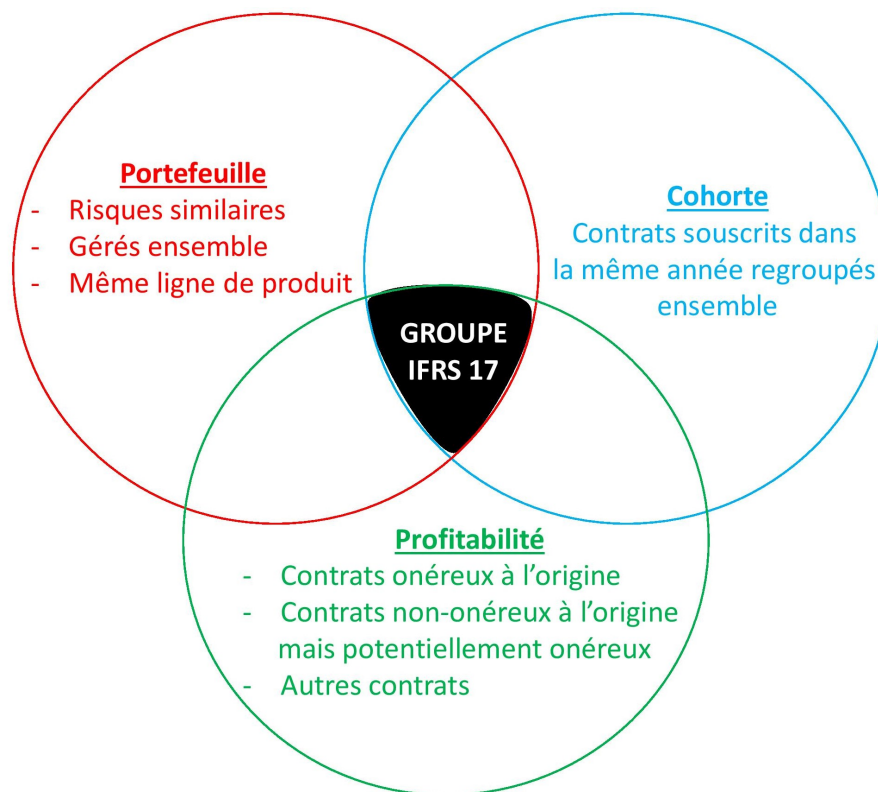


FIGURE 1.5: Segmentation sous IFRS 17

1.2.2 Valorisation sous IFRS 17

La norme IFRS 17 prévoit trois modèles de valorisation des passifs des contrats d'assurance qui sont fonctions du type et de la durée des contrats. Les trois méthodes indépendantes sont : la méthode *Building Block Approach* BBA, la méthode *Premium Allocation Approach* PPA et la méthode *Variable Fee Approach* VFA.

Nous allons présenter les éléments importants de valorisation, à l'aide de l'étude ACTUARIS, 2017.

Eléments de valorisation

- ***Present Value of Futur Cash-Flows PVFC***

La valeur actuelle probable des engagements PVFC : correspond à l'estimation moyenne probable des flux de trésorerie futurs générés, en valeur actualisée. Sous Solvabilité 2, le BE correspond à la meilleure estimation des flux comptables, ainsi le PVFC est différent du BE. Les flux de trésorerie désignent les mouvements de liquidités entrants ou sortants générés au cours de l'exercice comptable alors que les flux comptables ne désignent pas une réelle transaction financière, mais des écritures comptables qui équilibrent le bilan. Pour estimer les flux de trésorerie futurs, les cash-flows suivants sont identifiés :

- Engagements de l'assureur ;
- Engagements de l'assuré ;

- Frais ;
- Taxes ;
- Rachats ;
- Contre-assurance ;
- Réassurance.

Ces flux doivent être cohérents avec les valeurs de marché et doivent être projetés sans constitution de marge. Chaque élément listé représente un flux futur probable qui doit être estimé pour chaque regroupement de contrats en termes de probabilité, de montant et de date de survenance. À noter que la norme impose que seuls les frais attribuables aux contrats d'assurance doivent être utilisés pour les calculs de provisions. C'est une nouveauté par rapport à Solvabilité 2. Hormis cette particularité, les cash-flows utilisés pour les calculs de valorisation des contrats sont ceux déjà présents dans les modèles actuariels.

- ***Ajustement pour risque (Risk Adjustment RA)***

Le *Risk Adjustment RA* correspond à la rémunération du risque non financier lié à l'incertitude relative à l'estimation des flux de trésorerie futurs. C'est donc le risque non financier du risque d'assurance, hormis le risque opérationnel lié aux transactions futures. L'IASB n'a pas fixé d'approche sur le calcul du RA, mais il existe deux grandes approches : l'approche coût du capital et l'approche quantile (var ou tvar).

Deux composantes doivent être calculées dans le bilan : une marge pour risque brut de réassurance et une marge pour risque liée aux éléments de cession.

- ***Marge de service contractuelle (Contractual Service Margin CSM)***

La *Contractual Service Margin* est un nouvel élément au bilan qui reflète les profits effectués par l'assureur au fur et à mesure de la couverture. Elle correspond aux profits futurs attendus du contrat. Il s'agit du bénéfice non gagné attendu d'un contrat, donc plus ou moins le profit que nous prévoyons de faire si nos hypothèses se confirment. C'est l'argent qui reste si nous prenons :

$$CSM = CashFlows^{Attendu} - SortieCashFlows^{Attendue} - MargePourRisque$$

À l'initialisation, la CSM est évaluée une première fois :

- Si $CSM < 0$: une perte initiale est reportée au résultat par prudence comptable ;
- Si $CSM > 0$: la CSM est dotée du bénéfice du groupe de contrats d'assurance non comptabilisée en résultats.

Ensuite, pour chaque valorisation future, la CSM est ajustée en fonction des variations des charges d'intérêts, des services d'assurances fournis et des chargements relatifs aux services futurs. Cette composante doit toujours être positive, et devient nulle au-delà de la période de couverture du contrat. Si ce total est négatif, alors nous allons avoir une composante de perte *Loss Component* au lieu du CSM, cela vaut pour les contrats onéreux. Elle est constatée en produit au rythme de son amortissement sur la période de couverture.

- ***Actualisation***

Pour évaluer la valeur temps de l'argent, les flux futurs doivent être soumis à une actualisation. IFRS 17 offre la liberté à l'organisme de déterminer la courbe de taux. Celle-ci doit vérifier deux conditions :

- Cohérence avec le marché ;
- Cohérence avec les caractéristiques des contrats et du passif d'assurance.

Pour être en accord avec ces deux conditions, la norme propose deux approches :

- Pour les cash-flows non dépendants des rendements des actifs, l'approche *Bottom-up* : utilisation d'une courbe des taux sans risque ajustée d'une prime d'illiquidité ;
- Pour les cash-flows dépendant des rendements des actifs, l'approche *Top-down* : utilisation d'une courbe des taux de marché ajustée du risque de crédit.

Ces deux approches sont résumées en figure 1.6 [PELTIER, 2018].

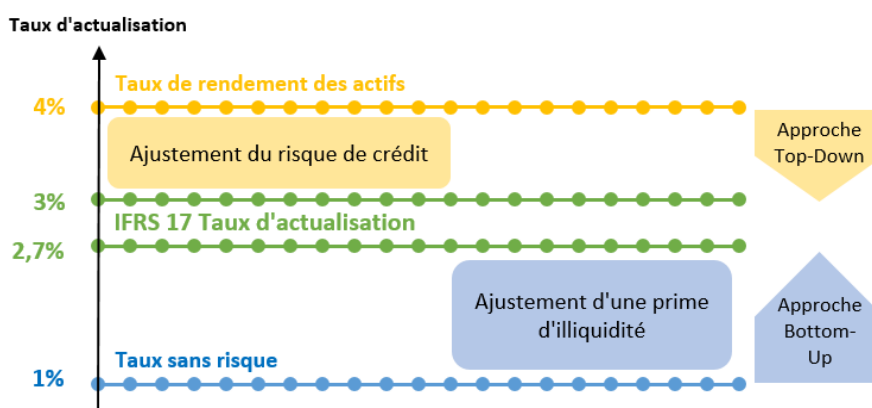


FIGURE 1.6: Actualisation sous IFRS 17

Les deux courbes obtenues par ces deux méthodes mettent en avant la prime d'illiquidité. Que ce soit par la première ou la deuxième méthode, la courbe obtenue est similaire et reflète la prime d'illiquidité.

Finalement on obtient le PVFC par actualisation selon une courbe des taux sélectionnée et sommation des flux annuels. À chaque clôture, le taux d'actualisation est recalculé.

1.2.3 Modèles

La passif d'une compagnie d'assurance peut être valoriser grâce à différents modèles, que nous allons présenter avec l'aide du cours PRAS, 2019 et de l'étude P. WOZNIAK et A. HUPERT, 2019.

La méthode BBA

La méthode *Building Block Approach* BBA est le modèle général par défaut qui permet l'évaluation des provisions de l'ensemble des contrats d'assurance. Celles-ci sont découpées en trois composantes présentées précédemment :

- La valeur actuelle des cash-flow futurs ;
- L'ajustement pour risque ;
- La Marge de service contractuelle.

Le bilan avec cette méthode a donc la structure schématisée dans le tableau 1.3.

VALEUR ACTUELLE DES CASH-FLOWS FUTURS (PVFC)	PASSIFS DES CONTRATS D'ASSURANCE SOUS IFRS 17
AJUSTEMENT POUR RISQUE (RA)	
MARGE DE SERVICE CONTRACTUELLE (CSM)	

TABLE 1.3: Bilan sous BBA

La méthode PAA

Cette méthode est une simplification du modèle par défaut, qui peut être appliquée par l'organisme pour l'évaluation d'un groupe de contrats d'assurance si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- Lorsque la période de couverture est inférieure à un an ;
- Lorsque l'assureur peut prouver que le résultat de la PAA n'est pas différent de celui de BBA.

La façon de calculer le passif d'assurance une fois qu'un assuré a déclaré un sinistre n'est pas différente, la seule différence est pour la période de couverture. Avec le PAA, il existe une méthode simplifiée, comparable à la façon dont les assureurs le font actuellement. La méthode est similaire à la constitution d'une provision pour prime non acquise tandis qu'avec le BBA, les flux de trésorerie, l'actualisation, l'ajustement du risque et le CSM sont calculés.

La méthode VFA

Le modèle général n'est pas adapté aux contrats d'assurance avec participations aux bénéfices directes. L'approche VFA est à utiliser pour ces contrats d'assurance dont l'objet principal consiste en une prestation de gestion d'actifs comme les contrats d'épargne par exemple. Sur ces contrats, le profit de l'assureur provient de la marge financière qu'il prélève sur le portefeuille de placements sous-jacents : la « *variable fee* ».

Ainsi, la CSM est ajustée en fonction de l'impact des chocs financiers sur le revenu des assureurs et plus généralement l'impact de l'environnement économique. La sensibilité de la rentabilité des contrats « directement participatifs » aux conditions du marché est captée par le modèle VFA.

L'assureur s'attend à ce qu'une partie du bénéfice des éléments sous-jacents soit versée au souscripteur, tandis que le montant versé au souscripteur dépend de l'élément sous-jacent. Au début du contrat, VFA ressemble à BBA, seules les années suivantes il existe des différences de flux de trésorerie (en partie pour le souscripteur) et le CSM ne reflète pas le bénéfice non gagné par l'assureur, car une partie de celui-ci appartient également au souscripteur. Finalement, la volatilité des résultats nets est réduite grâce à cette méthode.

Comparaison

Nous comparons ces différents modèles dans le tableau 1.4 (P. WOZNIAK et A. HUPERT, 2019).

	BBA	VFA	PAA
CONTRATS	Modèle par défaut	Contrats liés à des actifs sous-jacents	Contrats de courte durée (moins d'un an)
EXEMPLES	Rentes	Contrat en UC avec bénéfiques	Epargne
PASSIF POUR SINISTRES NON SURVENUS	PVFC + RA + CSM	Valeurs futures actifs – Variable fee + RA + CSM	Similaire à la provision pour prime non acquise
PASSIF POUR SINISTRES SURVENUS	PVFC + RA	PVFC + RA	PVFC + RA
CONTRATS D'ASSURANCE ÉMIS	OUI	OUI	OUI
RÉASSURANCE DÉTENUE	OUI	NON	OUI

TABLE 1.4: Comparaison des différentes méthodes

On remarque que les différences entre ces trois méthodes sont principalement les contrats traités, le passif pour sinistres non survenus et si la réassurance détenue est prise en compte ou non. Concernant ces trois critères, on remarque que les modèles VFA et PAA sont une simplification du modèle général BBA.

1.2.4 Comparaison IFRS 17 vs Solvabilité 2

Malgré de nombreux principes en commun entre les deux normes IFRS 17 et Solvabilité 2, des différences persistent et doivent être prises en compte pour l'adaptation des modèles actuariels avec les données adéquates. La problématique est d'associer de façon optimale les deux réglementations pour permettre une automatisation des processus de production des rapports comptables et prudentiels tout en réduisant les temps et les coûts des études. Les similarités et dissimilarités des bilans comptables des deux réglementations sont schématisées dans les tableau 1.5.

Solvabilité 2		
Actifs	Passifs	
ACTIFS EN VALEUR DE MARCHÉ	FONDS PROPRES	Capital excédentaire
		SCR
	PROVISIONS TECHNIQUES	MCR
		Marge pour risque
		BE

IFRS 17		
Actifs	Passifs	
ACTIFS EN VALEUR DE MARCHÉ	FONDS PROPRES	Capitaux propres
		CSM
	PROVISIONS TECHNIQUES	Marge pour risque
		BE

TABLE 1.5: Comparaison des bilans

On remarque des différences entre le passif des bilans Solvabilité 2 et IFRS 17 :

- Les flux et la méthode d'actualisation de ces flux utilisée pour le calcul du BE sont différents ;
- La marge pour risque n'est pas nécessairement la même pour les deux normes, les méthodes de calculs peuvent être différentes ;
- Une marge en plus est considérée dans les provisions techniques sous IFRS 7 avec la CSM.

Nous allons voir maintenant une comparaison des caractéristiques globales des deux normes dans le tableau 1.6.

		Solvabilité 2	IFRS 17
OBJECTIFS		Gestion des risques et exigences en capital	Communication financière
ECHELLE		Actifs, Passifs, Fonds propres, Capital requis	Transparence, mesures, présentation et rapports sur le passif d'assurance
PORTÉE		Européenne	Internationale
DÉBUT DU CONTRAT		Date d'engagement	Date le plus tôt entre : le début de la couverture, la réception de la première prime et la date à laquelle le contrat devient onéreux
CONTRAT COURTE DURÉE		Pas de traitement spécifique	Approche simplifiée PAA
SEGMENTATION		Groupes homogènes de risques	Groupe de contrats : Portefeuille X Cohorte X Profitabilité
REPORTING		Rapports prudentiels et de gestion des risques (QRT, SFRCR, ORSA)	Reporting bilantiel
PÉRIODE DE REPORTING		Trimestriel	Semestriel et annuel en général (selon les sociétés)
PROFITS FUTURS		Reconnus immédiatement en fonds propres	Amortis sur la période de couverture des contrats
CALCUL	<i>Vision</i>	BE	
	<i>Marge pour risque</i>	Formule standard	Méthode à définir par l'entité
DES	<i>Actualisation</i>	Calculé net de réassurance	Calculé de manière décompensée
	<i>Frais d'acquisition</i>	Courbe des taux EIOPA Ajustement de volatilité	Approche Bottom-up ou Top-down telle qu'elle reflète les spécificités du passif actualisé
PROVISIONS	<i>Versements libres sur les contrats d'épargne</i>	Prise en compte de l'intégralité des frais	Les frais rattachables au contrat ne sont pas définis précisément par IFRS 17. Prise en compte dans le BE des frais attribuables aux contrats et frais d'acquisition amortis sur la durée de couverture
TECHNIQUES	<i>Frontière des contrats</i>	Pas pris en compte	Pris en compte
	<i>Frontière des contrats</i>	Contrats comptabilisés à la date d'engagement	Contrats comptabilisés au démarrage de la garantie pour les contrats non-onéreux

TABLE 1.6: Comparaison globale

Nous remarquons plusieurs similitudes et divergences entre les deux normes dans le tableau 1.6.

Tout d'abord concernant la prise en compte des flux, deux similarités sont à noter :

- L'estimation de la valeur actuelle des flux futurs se fait de la même façon : en respectant le principe de juste valeur et le caractère *Market Consistent* ;
- Cette évaluation ne tient pas compte dans les deux cas d'une marge de prudence et est réalisée en tenant compte des hypothèses prospectives et des dernières données disponibles à la date de valorisation.

Cependant pour la norme IFRS 17 et le calcul du BE associé, seulement les frais directement rattachables aux contrats d'assurances sont utilisés.

De plus, le concept de réévaluation de la tarification régit la frontière des contrats dans les deux normes. Néanmoins, la frontière de contrats utilisée sous Solvabilité 2 pourrait ne pas être satisfaisante sous IFRS 17 pour représenter la vision business des contrats d'assurance et avoir un impact direct sur leur rentabilité.

Finalement, on remarque aussi des similitudes dans l'actualisation des flux :

- Celle-ci doit permettre dans les deux cas de modéliser la valeur temps de l'argent ;
- L'actualisation des flux doit être cohérente avec les valeurs de marché observées des actifs financiers qui ont des caractéristiques similaires à celles des contrats d'assurance ;
- L'approche *Bottom Up* peut être utilisée dans les deux normes.

Contrairement à la norme Solvabilité 2, la norme IFRS 17 permet l'utilisation d'une autre méthode d'actualisation des flux : l'approche *Top Down*.

Chapitre 2

Modèle ALM et méthodes de projection des flux de passif

2.1 Modélisation Actif-Passif d'un portefeuille épargne

2.1.1 Principes

Définition et objectifs

Un modèle *Asset and Liability Management* ALM est un modèle de projection des flux d'actif et de passif permettant la gestion des interactions entre l'actif et le passif d'une compagnie d'assurance. Un modèle actif-passif est propre à chaque compagnie d'assurance vie et son implémentation a plusieurs objectifs :

- Maximiser les rendements financiers ;
- Optimiser l'adossement actif-passif afin d'être en mesure de répondre à ses engagements futurs envers les assurés et les bénéficiaires.

Le modèle prend en compte les engagements contractuels, les hypothèses de mortalité et de rachats dynamiques, mais aussi les politiques financières, d'investissement, de revalorisation et de participation aux bénéfices pour adosser de manière optimale l'actif et le passif d'une entité. Plus précisément, un modèle ALM intègre :

- La valorisation des flux du passif : primes, provisions techniques, collecte ;
- La valorisation des flux de l'actif : produits financiers, évolution de l'actif grâce à des générateurs de scénarios économiques ;
- Les hypothèses biométriques : tables de mortalité ;
- Les hypothèses comportementales : lois de rachat, arbitrage, versements libres ;
- La stratégie financière : politique d'investissement, de revalorisation, de participation aux bénéfices et de marges.

Un modèle ALM va permettre à une compagnie d'assurance de maîtriser ses risques en disposant d'une vision prospective des interactions actif-passif.

Cet outil permet de répondre à plusieurs demandes :

- Calculs d'indicateurs réglementaires : *Best Estimate* BE, *Solvency Capital Requirement* SCR, *Minimum Capital Requirement* MCR, *Embedded Value* EV, *Value of In Force* VIF par exemple ;
- Réalisation de tests de sensibilité : stress-test, reverse stress-test, bilan et indicateurs en scénario stressé ;
- Pilotage de la situation financière : simulation des résultats et de la rentabilité provisionnels.

Par exemple, un objectif majeur sous Solvabilité 2 est d'évaluer le BE sur un horizon de projection. Pour cela, il est nécessaire d'estimer les flux futurs de trésorerie. C'est pourquoi le modèle actif-passif projette les comptes de résultats et les bilans comptables sur plusieurs années fixées à partir d'un portefeuille initial, de plusieurs hypothèses et de différents scénarios économiques.

Le fonctionnement du modèle ALM est décrit sur la figure 2.1. La projection des bilans et comptes de résultats se fait grâce au portefeuille initial et à plusieurs scénarios économiques. Cette projection se fait sur un horizon donné et permet finalement de déterminer le BE de l'entité grâce aux résultats obtenus.

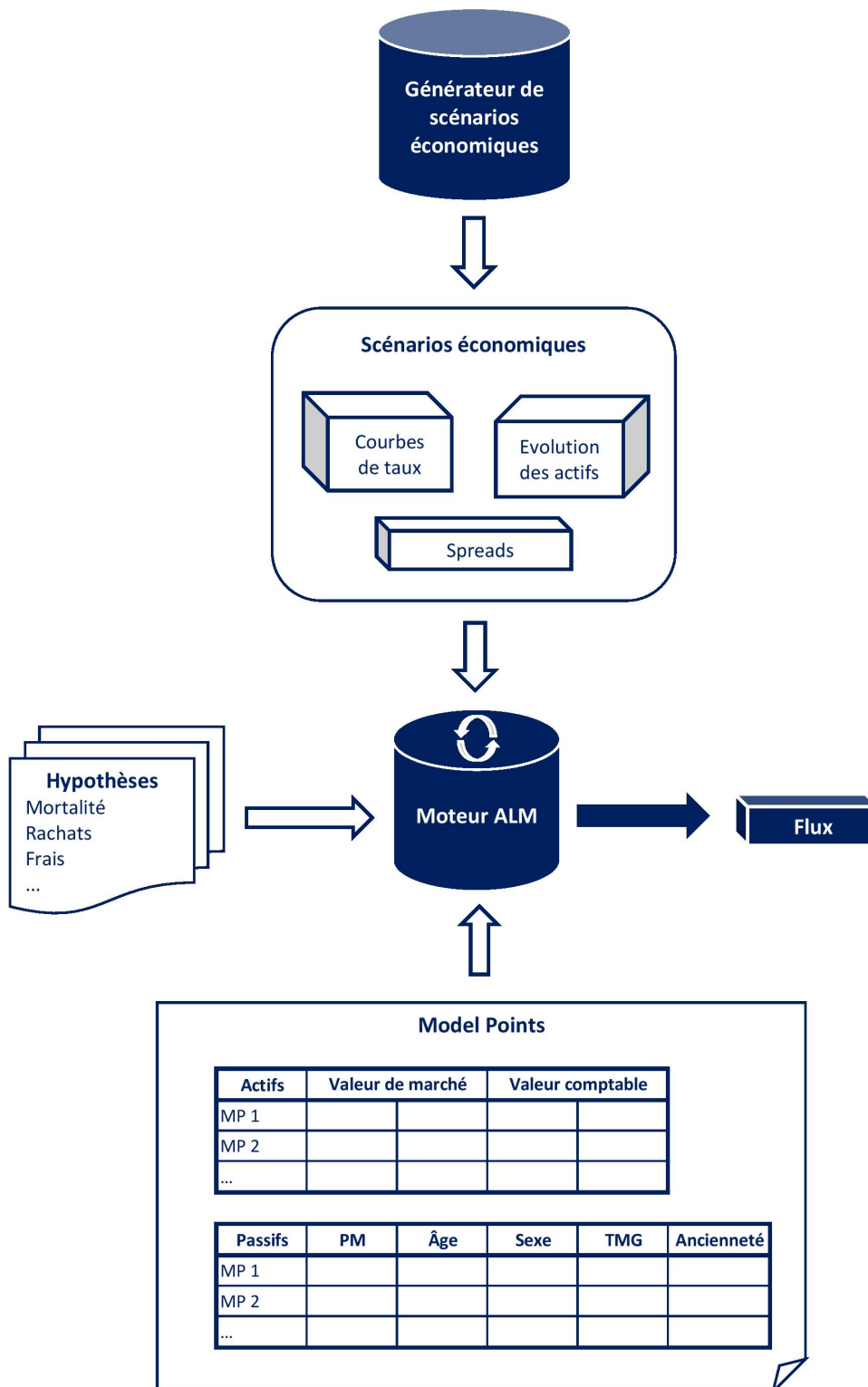


FIGURE 2.1: Fonctionnement d'un modèle de gestion Actif-Passif

Fonctionnement et algorithme d'un modèle ALM

Le fonctionnement et l'algorithme d'un modèle ALM nécessitent la compréhension de plusieurs étapes propres à la construction des éléments comptables, que nous allons présenter avec l'aide des travaux de TICHIT, 2019. L'objectif d'un modèle ALM est de connaître les cash-flows d'une entité sur un horizon de temps donné, ce qui permettra de construire les bilans et comptes de résultat futurs. Un tel modèle permet ainsi la projection des flux de trésorerie de la compagnie d'assurance sur plusieurs années et pour plusieurs scénarios.

- *Projection sur une année*

Il est d'abord important de comprendre quelles sont les étapes permettant au modèle ALM de déterminer quelles sont les flux de trésorerie de l'entité sur une année de projection fixée et pour un scénario donné. Cette notion est la base de l'algorithme ALM.

Une année de projection correspond à la période allant du 1er janvier au 31 décembre, ainsi l'évaluation des engagements se fait au 31 décembre.

Ils existent 5 étapes clés lors de la projection des flux de trésorerie sur une année :

1. Évolution du portefeuille financier par le calcul des produits financiers ;
2. Calcul de l'assiette de trésorerie par le calcul des encaissements et décaissements ;
3. Réallocation d'actifs ;
4. Gestion du portefeuille par la revalorisation des contrats ;
5. Construction du compte de résultat et du bilan.

Ces étapes peuvent être associées à trois grandes parties dans la projection d'un bilan comptable sur une année :

1. Début d'année : Projection du portefeuille financier de l'entité sur un an, plus précisément les produits financiers sont calculés ;
2. Milieu d'année : Calcul des prestations dues aux décès et aux rachats liés aux contrats d'épargne, réallocations des actifs et modélisation des différentes provisions ;
3. Fin d'année : Revalorisation des contrats par le calcul de la PB et des taux servis. Le compte de résultat et le bilan comptable sont finalement calculés.

Les différentes étapes sont détaillées dans la figure 2.2.

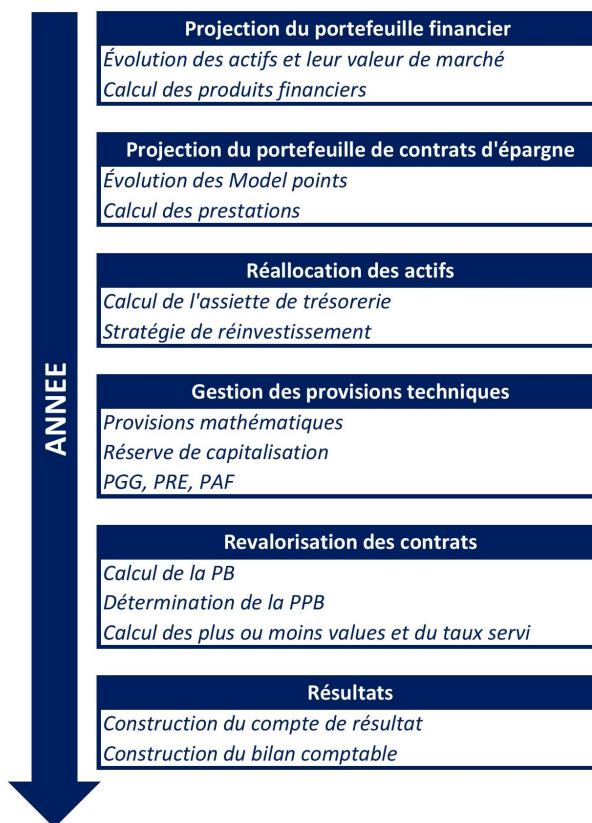


FIGURE 2.2: Projection sur 1 an des éléments comptables au sein du modèle ALM

- *Projection sur N années*

Le principal objectif d'un modèle ALM est de projeter les flux de trésorerie sur N années afin de pouvoir déterminer les bilans et les comptes de résultat sur un horizon donné.

Il est nécessaire de disposer d'un générateur de scénarios économiques pour pouvoir disposer d'un nombre assez grand de scénarios pour effectuer les calculs stochastiques.

2.1.2 Générateur de scénarios économiques GSE

Un générateur de scénarios économiques permet de générer de manière stochastiques plusieurs scénarios économiques, qui eux-mêmes retranscrivent l'évolution d'indicateurs économiques et financiers sur un horizon de projection donné. Pour une compagnie d'assurance vie, les contrats sont directement liés à l'environnement économique car leurs durées de vie est fortement dépendante de l'évolution des différents indicateurs financiers et économiques. Ainsi, cet outil est une partie fondamentale d'un modèle ALM. Nous allons présenter l'environnement, les classes de risque et les contraintes d'une telle modélisation par GSE, à l'aide du cours de GUBERT, 2019.

- **Environnement et modélisation**

On distingue deux grands types de générateurs de scénarios économiques :

- Générateur risque historique : afin de modéliser l'évolution des actifs en univers réel, les scénarios sont générés sous la probabilité historique.
Des données historiques d'une ancienneté cohérente avec l'horizon de projection permettent une estimation des paramètres des modèles.
- Générateur risque neutre : les scénarios sont générés sous la probabilité risque neutre.
Une mesure de probabilité Q définie telle que Q est équivalente à la mesure de probabilité historique P et l'actif de référence actualisé est une Q -martingale. On appelle cette mesure une mesure de probabilité risque neutre.
Le marché vérifie ainsi la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage (A.O.A) : l'impossibilité de réaliser un gain sans risque à partir d'un investissement initial nul. Les assureurs utilisent ces mesures pour les différents risques financiers auxquels ils sont exposés.
En comparaison avec la logique utilisée en finance de marché pour déterminer le prix d'une couverture optionnelle, le GSE est utilisé afin de déterminer lui aussi un prix. L'approche *Market Consistent* impose aux assureurs à capturer le prix des risques financiers en s'appuyant sur des prix de produits financiers pour évaluer les passifs d'assurance.
Ainsi, pour chaque référentiel des estimateurs doivent être calculés sous la probabilité risque neutre :
 - * Le référentiel Solvabilité II : *Best Estimate* et *Risk Margin* ;
 - * Le référentiel MCEV (*Market Consistent Embedded Value*) ;
 - * Les normes IFRS 17 : *Fulfilment Cash Flows, Risk Adjustment*.

- **Classes de risque et structure du modèle**

Plusieurs facteurs de risques peuvent être modélisés, ce qui différencie les modèles financiers composant les GSE.

Ainsi, généralement on distingue :

- Les modèles composites : chaque risque est traité individuellement avant une agrégation ex post, généralement via une copule gaussienne ;
- Les modèles intégrés : les risques sont liés entre eux par le biais de variables de référence (par exemple inflation, taux).

ils existent d'autres approches différentes, par exemple la plupart des modèles de place étant structurés autour d'un modèle de taux.

Dans la pratique, les facteurs de risque considérés sont les suivants :

- Taux d'intérêt court nominaux (et risque de change si plusieurs monnaies) ;
- Indices actions ;
- Prix des actifs immobilier ;
- Risque de spread (décomposé parfois entre le risque de défaut et le risque de liquidité) ;
- Inflation.

Cependant, en pratique les risques de spread et de change ne sont pas toujours modélisés, ce qui pour le spread au moins est une approximation forte.

- **Contrainte et modélisation**

Les modèles de taux sont généralement au coeur des GSE dans la mesure où les autres classes d'actifs dépendent du processus de taux (stochastique) dans un environnement "risque neutre". Le cadre *Market Consistent* mais aussi la norme Solvabilité 2 imposent plusieurs contraintes aux modèles de taux :

- Une réplication de la structure par terme des taux d'intérêts (par exemple les courbes EIOPA) ;
- Reproduire les prix des produits dérivés (*caps, floors, swaptions, etc.*) observés sur des marchés suffisamment profonds, liquides et transparents ;
- Les caractéristiques des produits de taux considérés pour le calibrage des modèles doivent être en cohérence avec la structure des options et garanties du passif. Cela peut conduire à utiliser les modèles complexes capables de reproduire des prix en dehors de la monnaie.

2.1.3 Actif

Une compagnie d'assurance investit dans plusieurs types d'actifs pour pouvoir répondre à ses engagements vis à vis de ses assurés et leurs contrats d'épargne. Nous allons décrire ces différents actifs dans cette partie.

Les grandes catégories d'actifs

Pour la comptabilisation des actifs, le Code des Assurances [CODE DES ASSURANCES, 2020a] définit deux classes : les actifs amortissables et les actifs non-amortissables.

- **Actifs amortissables**

La plupart de ces actifs sont des obligations, ces titres obligataires ont un revenu fixe ou variable et une valeur de remboursement connue. La valeur comptable d'un actif amortissable est modifiée chaque année, pour comptabiliser la dépréciation d'un tel titre due à la tombée des coupons, un amortissement est fait.

- **Actifs non amortissables**

L'ensemble des actifs amortissables est défini dans l'Article R342-10 du Code des assurances [CODE DES ASSURANCES, 2020d]. La valeur comptable d'un actif non amortissable est son prix d'achat ou de revient.

Les différentes classes d'actifs

- **Les obligations**

Les obligations sont des titres de créance qui sont émis soit par des États ou des entreprises. Elles sont cotées sur les marchés financiers à une valeur variant selon l'évolution des courbes des taux, et elle peuvent être revendues. Ces obligations peuvent être à taux fixe ou à taux variable. La différence est dans le coupon perçu au court de la durée de vie de l'obligation, celui-ci est

fixe ou variable, ainsi les flux futurs sont connus ou variables en fonction d'une courbe de taux de référence.

Plusieurs paramètres viennent régir une obligation :

- Le nominal qui est le montant unitaire d'adossement des coupons ;
- Le taux d'intérêt nominal qui est la rémunération perçue par l'assureur investissant dans l'obligation ;
- Les conditions de remboursement propres à l'obligation : valeur et date de remboursement.

Plusieurs autres paramètres caractérisent une obligation comme par exemple l'échéancier des coupons.

L'obligation est un actif amortissable dont la valeur comptable est modifiée chaque année par la tombée du coupon. Ainsi, plus on s'approche de la maturité de l'obligation plus la valeur nette comptable d'une obligation doit tendre vers la valeur de remboursement de l'obligation. Un taux d'amortissement permet de vérifier cette propriété.

- **Actions**

Une action est un titre de propriété qui correspond à des parts du capital d'une entreprise. Cet actif permet de récolter une partie des dividendes, qui sont les revenus produits par la société, au prorata des parts de l'action détenue. Le GSE permet de modéliser l'évolution d'un tel actif à travers un indice qui produit un certain rendement. La modélisation de l'action se fait grâce à sa valeur comptable et sa valeur de marché.

- **Immobilier**

Un actif immobilier est un titre qui évolue en fonction de nombreux critères comme par exemple la localisation du bien, et qui est modélisé selon un indice dont le rendement est produit par le GSE. Sa valeur comptable et de marché caractérisent cet actif.

- **Monétaire**

L'actif monétaire est la classe d'actif représentant les liquidités de l'entreprise. Cet actif est placé chaque année au taux sans risque de maturité 1 an.

2.1.4 Passif

La passif d'une compagnie d'assurance-vie est composé de plusieurs éléments détaillés dans le support du cours d'Antoine Taveneaux [TAVENEUX, 2019].

Fonds propres

Les fonds propres correspondent à la part détenue par les propriétaires qui peuvent être des actionnaires, des partenaires par exemple. On peut distinguer dans les fonds propres, deux éléments :

- Les capitaux propres correspondant aux capitaux versés par les actionnaires ;
- La somme des résultats générés par l'entreprise qui n'ont pas été distribués.

Provisions techniques

- *Provision mathématique*

La provision mathématique PM est le poste du passif le plus important en terme de volume. Elle représente la dette probable de l'assureur vis-à-vis des assurés. À la souscription, il existe par construction un équilibre entre les engagements respectifs de l'assureur et de l'assuré. Selon l'article R.331-3 du Code des assurances CODE DES ASSURANCES, 2020c, la provision mathématique est la « différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et les assurés ». Cette définition réglementaire n'est pas complète car elle ne précise pas que la différence doit être calculée non sur les valeurs actuelles mais sur les valeurs actuelles probables. La différence entre la VAP des engagements de l'assureur (paiement des prestations futures, frais et charges associés) et la VAP des engagements de l'assuré (paiement des primes futures) correspond à la PM. Grâce à cette méthode, les changements de base de provisionnement (tables de mortalité, loi de maintien en incapacité ou invalidité, taux technique, chargements, etc.) peuvent être pris en compte.

$$PM = VAP_{Assureur} - VAP_{Assuré}.$$

La réglementation impose que la provision mathématique vérifie quelques propriétés. Ainsi la PM :

- est calculée tête par tête ;
- est individuelle ;
- ne peut être inférieure à la valeur de rachat du contrat ;
- ne peut être négative ;
- tient compte (pour les contrats à primes périodiques) des changements destinés aux frais d'acquisition dans l'engagement du payeur de primes ;
- vérifie le principe de prudence : « Les provisions mathématiques doivent être calculées d'après des taux d'intérêt au plus égaux à ceux retenus pour l'établissement des tarifs. » [CODE DES ASSURANCES, 2020c].

Dans notre cadre d'étude d'un contrat d'épargne, la valeur actuelle probable des engagements prises par l'assuré est nulle, la provision mathématique est donc égale à la valeur actuelle probable des engagements pris par l'assureur qui est égale aux primes reçues et investies ainsi que les revalorisations passées. Finalement, la provision mathématique est égale à la valeur actuelle probable de l'épargne.

Pour calculer la provision mathématique de l'ensemble du portefeuille des assurés $PM(t)$, il faut connaître la fonction de répartition des assurés dans le portefeuille $f(x)$ qui est une fonction de l'âge de l'assuré x . On obtient :

$$PM(t) = \int PM(x, t) df(x).$$

- *Provision pour participation aux bénéfices (PPB)*

La provision pour participation aux bénéfices correspond au « montant des participations aux bénéfices attribuées aux bénéficiaires de contrats lorsque ces bénéfices ne sont pas payables immédiatement après la liquidation de l'exercice qui les a produit » [CODE DES ASSURANCES, 2020a].

- **Réserve de capitalisation**

La réserve de capitalisation correspond à une « réserve destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu » [CODE DES ASSURANCES, 2020a]. En cas de vente d'obligations (hors obligations à taux variable), le montant de ce versement ou de ce prélèvement est calculé de manière à ce que le taux actuariel du titre après versement ou prélèvement soit égal au taux actuariel à l'achat.

Pour résumer, deux actions peuvent être faites :

- Verser dans la réserve de capitalisation un montant égal à la différence entre le prix de vente et la valeur nette comptable de l'obligation ;
- Prélever à la réserve de capitalisation (dans la mesure où elle n'est pas épuisée) un montant égal à la différence entre la valeur nette comptable de l'obligation et le prix de vente.

Par exemple, considérons une obligation qui :

- Verse un coupon c chaque fin d'année ;
- A une valeur de remboursement de R à la date n ;
- A une valeur d'achat de A en 0.

Rappelons que le taux actuariel à l'achat de cette obligation est le taux r_a qui vérifie :

$$A = \sum_{i=1}^n c (1 + r_a)^{-i} + R (1 + r_a)^{-n}.$$

La surcote/décote de ce titre obligataire à la date m est donnée par :

$$SD_m = \left(\sum_{i=m+1}^n c (1 + r_a)^{-(i-m)} + R (1 + r_a)^{-(n-m)} \right) - A.$$

Supposons que l'obligation soit cédée au prix E en m .

Si on a :

$$E \geq A + SD_m = \sum_{i=m+1}^n c (1 + r_a)^{-(i-m)} + R (1 + r_a)^{-(n-m)}.$$

Alors la réserve de capitalisation est dotée du montant :

$$E - (A + SD_m) = E - \sum_{i=m+1}^n c (1 + r_a)^{-(i-m)} + R (1 + r_a)^{-(n-m)}.$$

Sinon, il est prélevé sur cette même réserve de capitalisation le montant :

$$(A + SD_m) - E = \sum_{i=m+1}^n c (1 + r_a)^{-(i-m)} + R (1 + r_a)^{-(n-m)} - E.$$

Lors de la vente d'un titre obligataire, l'opération est appliquée au titre le plus ancien (*First In First Out* FIFO).

- **Provision globale de gestion PGG**

Dans le Code des assurances CODE DES ASSURANCES, 2020a, la PGG est nommée « provision de gestion » mais elle est couramment appelée « provision globale de gestion ». Cette provision est « destinée à couvrir les charges de gestion futures des contrats non couvertes par ailleurs » [CODE DES ASSURANCES, 2020a]. Cette provision correspond à :

- La différence entre les valeurs actuelles probables des ressources et des charges de gestion (si cette différence est positive, la PGG est nulle) ;
- Un calcul par groupes homogènes de contrats (aucune compensation possible entre les contrats).

Les contrats dont les chargements de gestion sont insuffisants doivent faire l'objet d'une PGG.

- ***Provision pour aléas financiers PAF***

Cette provision est « destinée à compenser la baisse de rendement de l'actif » [CODE DES ASSURANCES, 2020a]. Elle est utilisée lorsque 80 % du rendement financier de la société est inférieur au taux technique moyen garanti sur les contrats (somme du montant total des intérêts techniques et du minimum contractuellement garanti de participation aux bénéfices). On détermine cette provision en calculant la différence entre deux éléments :

- Les provisions mathématiques recalculées sur la base d'un taux technique égal à un taux prudent qui peut être :
 - (i) 60 % du TME ;
 - (ii) Un taux compris entre 75 % et 100 % du TME (en fonction de la composition du portefeuille d'actifs) ;
 - (iii) Avec l'autorisation de l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution ACPR, un taux prudemment estimé du taux de rendement futur des actifs.
- Les provisions mathématiques comptables.

L'inconvénient de cette provision est qu'il n'y a pas de dimension prospective du risque de manque de revenu financier, impliquant la compagnie d'assurance à une gestion actif-passif permettant l'adéquation des ressources financières aux engagements.

- ***Provision pour risque d'exigibilité PRE***

La provision pour risque d'exigibilité est « destinée à faire face aux engagements dans le cas de moins-value de l'ensemble des actifs mentionnés à l'article R.343-10 du Code des assurances » [CODE DES ASSURANCES, 2020a]. En pratique il s'agit des valeurs non amortissables, hors obligations indexées sur l'inflation, tolérées en Article R. 343-9 du CODE DES ASSURANCES, 2020f et la PRE est calculée au global sur tous ces actifs.

Pour rappel, les actifs sont inscrits au bilan à leur valeur nette comptable.

Si les placements mentionnées en Article R. 343-10 CODE DES ASSURANCES, 2020e engendrent des moins-values latentes nettes globales (constatées lorsque la valeur nette comptable de ces placements est supérieure à leur valeur de réalisation), alors la PRE est constituée.

La dotation de la PRE peut être lissée dans le temps. La dotation annuelle à la PRE au titre de l'exercice est égale à la moins-value latente nette globale constatée sur ces placements divisée par la partie entière de la durée des passifs (qui est limitée à 8). Si l'entreprise est en difficulté, l'ACPR peut accélérer cette dotation.

- **Autres provisions**

On distingue par exemple :

- La provision pour frais d’acquisition reportés qui est « destinée à couvrir les charges résultant du report des frais d’acquisition » (inscrits à l’actif du bilan en fonction de la durée de vie résiduelle des contrats) [CODE DES ASSURANCES, 2020a];
- La provision pour égalisation qui est « destinée à faire face aux fluctuations de sinistralité afférentes aux opérations d’assurance de groupe contre le risque décès » [CODE DES ASSURANCES, 2020a].

Calcul du Best Estimate

Les provisions *Best Estimate* BE correspondent aux réserves financières qu’une compagnie d’assurance doit constituer pour faire face à ses engagements futurs. Ces réserves financières sont égales à la moyenne des valeurs actuelles des flux financiers sortants pondérés par leur probabilité d’occurrence sur un horizon de projection défini et fixé (en général 25 ou 30 ans). Ainsi, un modèle ALM doit projeter les cash-flows afin de valoriser les flux financiers en fonction des évolutions dans plusieurs domaines, économiques et démographiques par exemple.

Ainsi dans notre cas, pour un contrat d’épargne, un premier versement est effectué par l’assuré dès la souscription du contrat. L’assureur investit ce capital sur différents types d’actifs ce qui générera un rendement, fonction de l’évolution des marchés financiers. Pour répondre à son engagement envers l’assuré, à tout instant t la compagnie d’assurance doit être capable de verser un capital représentant la valeur de l’épargne de l’assuré. Cette valeur correspond au montant initial capitalisé en fonction des rendements financiers. D’après les travaux de GOFFARD, 2015b, on développe les calculs suivants. À un instant t donné, on a :

$$V(t) = V(0) \times \exp \left(\int_0^t r(u) du \right).$$

avec r un taux de rendement instantané; $V(0)$ le capital initial apporté par l’assuré à la souscription. Après actualisation, on obtient la valeur actuelle de l’épargne en t :

$$\begin{aligned} V(t)^{\text{Actualisé}} &= V(t) \times \exp \left(\int_0^t -a(u) du \right), \\ &= V(0) \times \exp \left(\int_0^t (r(u) - a(u)) du \right). \end{aligned}$$

avec a un taux d’actualisation instantané.

La modélisation des deux taux instantanés est faite grâce à des processus stochastiques.

Dans le cadre de notre étude des contrats d’épargne, l’arrivée d’un flux sortant peut être provoquée par trois situations :

- L’arrivée à la date d’échéance du contrat qui est fixée à la souscription. Pour la plupart des contrats, celle-ci est normalement renouvelée annuellement par tacite reconduction;
- Le décès de la tête assurée;
- Le rachat du contrat, partiel ou total, par l’assuré.

Les deux dernières situations ne sont pas déterministes. Pour pouvoir évaluer leurs probabilités, notons τ une variable aléatoire de densité f_τ correspondant à l'instant de sortie hors arrivée à maturité du contrat.

f_τ dépend de plusieurs caractéristiques influant sur les probabilités de décès et de rachat :

- La probabilité de décès dépend de l'âge et du sexe de l'assuré ;
- La probabilité de rachat dépend de l'ancienneté de l'assuré, de manière équivalente à sa date de souscription.

Seuls deux instants sont connus dans la modélisation :

- L'horizon de projection fixé dans le modèle ALM ;
- La date de maturité des contrats qui admettent un terme.

On suppose que ces deux instants sont confondus et égaux, on le note T . La variable aléatoire $\tau \wedge T$ correspond à l'instant de sortie et a pour loi de probabilité $dP_{\tau \wedge T}$.

$$dP_{\tau \wedge T}(t) = f_\tau(t) d\lambda(t) + F_\tau(t) \delta_T(t),$$

avec λ la mesure de Lebesgue sur $[0, T]$; δ_T la mesure de Dirac en T ; F_τ la fonction de survie de la variable aléatoire τ .

Le *Best Estimate Liabilities* BEL est défini à $t = 0$ par :

$$BEL(0, T) = E^{P_{\tau \wedge T} \otimes Q} \left(V^{Actualisé}(\tau \wedge T) \right),$$

avec Q une mesure de probabilité modélisant le taux d'actualisation.

Le BEL associé à un scénario financier F pour un contrat est donné par :

$$\begin{aligned} BEL^F(0, T) &= E^{P_{\tau \wedge T}} \left(V^{Actualisé}(\tau \wedge T | F) \right), \\ &= \int_0^\infty V(0) \times \exp \left(\int_0^t (r(s) - a(s)) ds \right) \times dP_{\tau \wedge T}(t), \\ &= \int_0^T V(0) \times \exp \left(\int_0^t (r(s) - a(s)) ds \right) \times f_\tau dt + F_\tau(T) \times V(0) \times \exp \left(\int_0^T (r(s) - a(s)) ds \right). \end{aligned}$$

La formule discrète du BEL est donnée par :

$$BEL^F(0, T) \approx \left[\sum_{t=0}^{T-1} p(t, t+1) \prod_{k=0}^t \frac{1+r(k, k+1)}{1+a(k, k+1)} + p(T) \prod_{k=0}^{T-1} \frac{1+r(k, k+1)}{1+a(k, k+1)} \right] \times SV(0),$$

avec $p(t, t + 1)$ la probabilité de sortie entre t et $t + 1$; $p(T)$ la probabilité qu'à la dernière année de projection, l'assuré n'ait pas quitté le portefeuille; $r(t, t + 1)$ et $a(t, t + 1)$ taux forward de rendement et d'actualisation respectivement, entre t et $t + 1$.

Les méthodes de Monte Carlo permettent de déterminer le BEL en générant des scénarios économiques sous Q et ensuite en calculant le BEL pour chaque scénario. L'estimation du BEL est la moyenne de tous les BEL calculés pour tous les scénarios générés.

Pour un seul contrat les méthodes de Monte Carlo sont efficaces et demande un temps d'exécution peu contraignant. Cependant pour un portefeuille de millions de contrats, ces méthodes demandent un temps d'exécution trop important.

L'approximation trouvée du BEL ci-dessus est communément utilisée pour répondre aux exigences Solvabilité 2. De nombreuses questions peuvent se poser sur la génération des scénarios économiques par le GSE mais aussi l'interaction entre le passif et l'actif ou encore les hypothèses utilisées. Pour notre modèle d'agrégation, tous les scénarios économiques, hypothèses et interactions entre actif et passif sont ceux utilisés par la compagnie partenaire, sans remise en question.

2.1.5 Interaction Actif-Passif

Évaluation des prestations

Dans le cadre de l'étude des contrats d'épargne, une compagnie d'assurance doit évaluer principalement deux prestations différentes : les décès et les rachats. Afin de déterminer le BE, il est primordial de prendre en compte l'évolution des comportements des assurés.

Dans le cas d'un décès ou d'un rachat total, l'intégralité du montant du contrat doit être versé à ses ayants droits, au contraire d'un rachat partiel. Les trois cas sont étudiés dans cette partie.

- **Prestations décès**

Selon le Code des Assurances [CODE DES ASSURANCES, 2020a], différentes tables de mortalité peuvent être utilisées. Celles-ci permettent de projeter les prestations dues aux décès. D'autre part, des tables d'expérience établies sur son portefeuille d'assurés peuvent être utilisées à la place des tables de mortalité, celles-ci permettant une projection plus précise des prestations liées aux décès.

On définit les prestations décès au cours de l'année t par :

$$Prestations^{Décès}(t) = \sum_{i=1}^N PM_i(t) \times q_i,$$

avec N : le nombre de *model points* du portefeuille; $PM_i(t)$: la provision mathématique en début d'année t pour le *model point* i ; q^i : la probabilité de décès du *model point* i .

- **Prestations rachats**

L'interaction actif-passif est en partie régie par les rachats que nous allons présenter dans cette partie, avec l'aide du cours de GUIBERT, 2019.

Les phénomènes de rachats sont importants pour :

- L'évaluation des engagements BE avec le *pricing* des options de rachat ;
- La segmentation du portefeuille ;
- La compréhension des comportements clients ;
- La prédiction des phénomènes de rachats massifs (problème de liquidité, impacts sur les profits, risque de réputation).

Par son hétérogénéité (motifs, caractéristiques des produits, environnement fiscal, comportements des assurés, etc.) et sa dépendance aux conditions de marché, ce phénomène est très complexe.

Les modèles traditionnels distinguent usuellement les rachats structurels (déterministes) et les rachats conjoncturels (stochastiques).

Rachats structurels

Les rachats structurels modélisent les besoins en trésorerie des assurés impliquant des sorties d'épargne par le rachat de leur contrat d'assurance. Ces rachats sont indépendants de la politique de revalorisation des contrats de la compagnie d'assurance et de l'évolution des marchés financiers. Ainsi, les rachats structurels modélisent de façon déterministe les comportements classiques des assurés.

Cette modélisation se fait grâce à une table de rachats, qui :

- Est propre à chaque entité ;
- Est construite à l'aide d'analyses statistiques sur les dernières années ;
- Associe à un individu une probabilité de rachat en fonction de son âge et son ancienneté.

À noter que la fiscalité des contrats d'épargne incite les assurés à ne pas racheter leur contrat avant leur huitième année d'ancienneté. C'est pourquoi on observe une augmentation des probabilités de rachats après la 8^{ème} année d'ancienneté du contrat.

La modélisation des rachats structurels dépend traditionnellement des facteurs suivants :

- Âge de l'assuré ;
- Ancienneté fiscale du contrat ;
- Niveau de frais, pénalités en cas de rachats ;
- Montant de l'épargne.

Rachats conjoncturels

Les rachats conjoncturels modélisent les arbitrages des assurés qui décident d'investir dans des placements plus performants. Contrairement aux rachats structurels, les rachats conjoncturels dépendent de la politique de revalorisation des contrats de la compagnie d'assurance et de l'évolution des marchés financiers. Ainsi, ces rachats modélisent de façon stochastique les comportements des assurés vis à vis de la situation économique. Une différence significative entre le taux

servi par leur contrat et le taux moyen de la concurrence incite les assurés à racheter leur contrat.

Il existe une approche proposée par l'ACPR [AUTORITÉ DE CONTRÔLE PRUDENTIEL ET DE RÉOLUTION, 2013] pour modéliser les rachats conjoncturels. Cette loi suppose que les rachats conjoncturels sont dépendants de l'écart entre le taux servi et un taux cible, qui est généralement le taux sans risque 10 ans.

On a ainsi :

$$q(r_c, r_s) = \begin{cases} RC_{max} & \text{si } r_s - r_c \leq \alpha \\ RC_{max} \frac{r_s - r_c - \beta}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha < r_s - r_c \leq \beta \\ 0 & \text{si } \beta < r_s - r_c \leq \gamma \\ RC_{min} \frac{r_s - r_c - \gamma}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma < r_s - r_c \leq \delta \\ RC_{min} & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des paramètres à fixer.

Les paramètres peut être interprétés comme :

- α est le seuil en-deçà duquel les rachats conjoncturels sont constants et fixés à RC_{max} . Ce n'est plus l'écart de taux qui explique le comportement des assurés ;
- β et γ sont respectivement les seuils d'indifférence à la baisse et à la hausse du taux servi. Entre ces 2 seuils, le comportement de l'assuré n'est pas modifié ;
- δ est le seuil au-delà duquel la diminution du taux de rachat structurel est constante et fixée à RC_{min} . Ce n'est plus l'écart de taux qui explique le comportement des assurés.

On remarque que les rachats dynamiques sont fonction de l'écart entre le taux servi r_s et le taux de revalorisation attendu r_c . Cet écart mesure la "satisfaction" des assurés.

En utilisant l'approche proposée par l'ACPR, les bornes de la loi des rachats conjoncturels est donnée en figure 2.3.

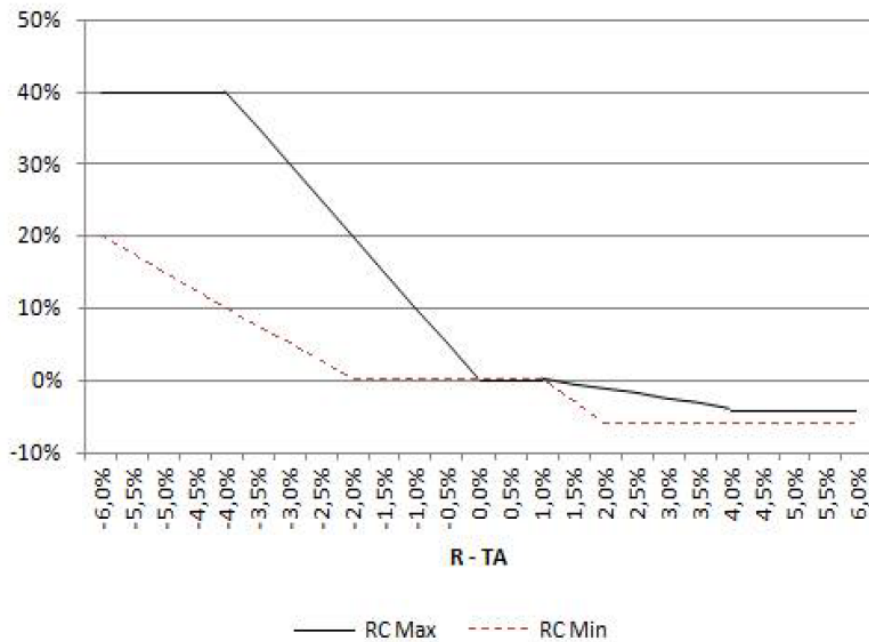


FIGURE 2.3: Bornes du modèle de rachat de l'ACPR

Réallocation des actifs

Tout au long des années de projection, l'allocation des actifs évolue pour tenir compte des flux de trésorerie entrants (produits financiers, etc.) et sortants (prestations décès et rachats, etc.) mais aussi des variations des valeurs de marché. Pour prévoir, contrôler et ajuster la composition et l'adéquation de l'ensemble de ses actifs et de ses passifs, qui est la base de la gestion actif-passif d'un organisme d'assurance vie, une réallocation du portefeuille financier est nécessaire. Pour cela, le calcul de l'assiette de trésorerie sur une année est primordial.

- *Assiette de trésorerie*

Au cours de l'année, plusieurs flux d'actif ou de passif ont eu lieu. L'assiette de trésorerie est composée de plusieurs flux différents : produits financiers (dividendes, coupons, etc.), remboursements des obligations à maturité, frais, prestations décès et rachats et leurs revalorisations. Ces flux sont résumés dans le tableau 2.1 [TICHIT, 2019].

ACTIF	PASSIF
ENCAISSEMENTS	
Produits financiers Dividendes Loyers Coupons Intérêts monétaires Remboursements Obligations à maturité	
DÉCAISSEMENTS	
Frais Produits financiers Valeurs de marché	Frais Prestations Gestion Prestations Décès Rachats Revalorisations

TABLE 2.1: Flux de trésorerie

On trouve l'assiette de trésorerie par la formule :

Assiette de trésorerie = Somme Encaissement - Somme Décaissement.

Une fois cet élément calculé, l'entité connaît le signe et le montant du flux qui va être ajouté à l'actif monétaire et va pouvoir établir sa stratégie de réinvestissement.

- *Réinvestissement*

Le réinvestissement se fait selon une certaine stratégie caractérisée par une allocation cible ou évolutive pour les différentes classes d'actifs. Cette stratégie permet à l'assureur de projeter ses risques de façon réaliste et ainsi de pouvoir les gérer et les contrôler. Ils existent des

stratégies statiques et dynamiques. La première correspond à une allocation cible, la seconde à une allocation évolutive dépendant de l'évolution de l'environnement économique permettant une projection plus efficace des objectifs d'une entité.

2.2 Méthode de modélisation des flux de passif

2.2.1 Objectifs

L'un des défis des modèles de projection actif-passif pour les grands portefeuilles de contrats d'épargne est le temps d'exécution. En effet, ces modèles nécessitent un grand nombre de simulations de Monte Carlo, afin de modéliser les interactions actif-passif comme les rachats ou les revalorisation de contrats. Ainsi, l'utilisation de ces modèles ALM demande des temps de calculs beaucoup trop importants pour un portefeuille à plusieurs millions de contrats, incitant les assureurs à répondre à cette problématique par des méthodes plus rapides et tout aussi efficaces.

Une première idée est de réduire le temps de calcul pour un contrat. Tout d'abord, il est possible de réduire le nombre de scénarios modélisés comme évoqué dans l'algorithme de L. DEVINEAU et S. LOISEL, 2009 inspiré par l'échantillonnage préférentiel. Il s'agit de sélectionner les scénarios économiques les plus pertinents pour pouvoir estimer les quantiles adéquats. L'estimation qui nous intéresse est celle de la valeur du BEL pour un portefeuille de contrats d'épargne, qui correspond à la valeur actuelle probable des cash flows futurs. C'est ainsi que Planchet et Nteukam T. NTEUKAM et F. PLANCHET, 2012 ont introduits une approche d'agrégation de l'ensemble des scénarios en quelques trajectoires caractéristiques associées à des probabilités d'occurrence qui sont adaptées aux calculs du BEL.

Une deuxième approche possible est celle développée par F. BONNIN et al., 2014, consistant à évaluer le BEL des contrats d'épargne par une formule analytique. Cette approximation se base sur l'évaluation de coefficients qui vont être appliqués aux provisions mathématiques pour déterminer le BEL.

L'approche qui nous intéressera plus particulièrement dans ce mémoire est la méthode d'agrégation des contrats d'assurance en *model point*. Elle consiste à regrouper des contrats d'assurances en un seul et même contrat représentatif du regroupement. Les simulations sont ensuite faites sur ce portefeuille agrégé donnant une approximation la plus juste possible. On s'intéresse plus particulièrement dans notre étude, aux calculs du BEL via un modèle ALM pour un portefeuille de contrats d'épargne. L'objectif est de répondre aux attentes de la compagnie d'assurance, qui a pour ambition de déterminer ses estimateurs IFRS 17 non plus par une méthode *Flexing* mais par une méthode *Full ALM*, c'est à dire avec des flux déterminés entièrement par le modèle ALM sans approximations. La méthode utilisée doit ainsi pouvoir être implémentée facilement, être facilement compréhensible, pouvoir s'appliquer à l'ensemble du portefeuille de contrats d'épargne, tout en appliquant des hypothèses empiriques et théoriques adéquates. De nombreuses compagnies d'assurance-vie sont confrontées au problème du temps d'exécution et cette étude a pour but d'apporter une approche pouvant résoudre ce problème.

Dans la suite, nous présenterons la méthode de modélisation des flux de passifs actuellement utilisée par la compagnie d'assurance, la méthode *Flexing*, et l'approche *Model point* au coeur de notre mémoire.

2.2.2 Flexing

En s'inspirant des travaux de OUADEIH, 2018, la méthode *Flexing* est présentée dans cette partie.

Présentation et principe

La méthode *Flexing* est une méthode de modélisation des flux de passif qui permet de répondre à des contraintes de données d'entrée et de temps d'exécution.

Cette approche se déroule en deux étapes :

- Une projection des flux de passif sur un scénario déterministe ;
- *Flexing* : les flux déterministes sont multipliés par un ratio d'ajustement.

Pour ce faire, elle projette selon un seul scénario déterministe les flux de passif des contrats en cours. Un modèle de projection de passif permet d'obtenir les flux de passif déterministes en projetant ligne à ligne les cash-flows. Plus précisément, ce sont des *model points* de passifs qui sont projetés, ceux-ci sont formés par regroupement de contrats selon plusieurs critères (TMG, type de contrat, taux de chargement, etc.). Ces *model points* réunis selon un même segment sont transformés en trajectoires déterministes par la projection déterministe faite selon des hypothèses fixées. Le principe de la méthode *Flexing* est d'ajuster les flux de passif déterministes en fonction de l'actif.

Cependant, les trajectoires obtenues en première étape sont indépendantes des conditions économiques, et ne permettent pas de modéliser tous les termes d'un contrat d'épargne. Ainsi en deuxième étape, pour palier ce manque, pour chaque flux de passif un coefficient multiplicateur d'ajustement est appliqué. Celui-ci est une fonction du rendement de l'actif. On dit que les flux de passifs vont être flexés c'est à dire ajustés, afin de modéliser les interactions avec les scénarios économiques et le comportement des assurés. Par cet ajustement, la participation aux bénéfices et les rachats dynamiques qui dépendent du taux de rendement du portefeuille d'actifs, sont pris en compte dans la provision mathématique déterministe.

Nous prendrons en compte dans la suite :

- Une participation aux bénéfices annuelle incorporée dans les provisions mathématiques ;
- Des rachats totaux conjoncturels dus à une hausse des taux de marché par rapport au taux servi.

On considère ici un contrat épargne à primes périodiques qui dans la trajectoire déterministe est revalorisé au taux technique moyen. L'assuré peut racheter son contrat totalement ou partiellement. Comme évoqué précédemment, un montant de participation aux bénéfices est incorporé dans les provisions mathématiques à chaque 31 décembre. On suppose de plus que le paiement des prestations se fait en milieu d'année, et le paiement des primes se fait immédiatement après le paiement des prestations.

Étape 1 : Création des flux de passifs déterministes

Cette première étape consiste à créer la série des flux de passif ligne à ligne selon un scénario financier déterministe. Plusieurs flux vont être créés pour chaque année de projection :

- Provisions mathématiques début de période ;
- Provisions mathématiques fin de période ;
- Prestations décès ;
- Prestations des maturités (Contrats arrivés à terme) ;
- Intérêts crédités au stock de contrats ;
- Intérêts crédités aux sorties ;
- Rachats partiels ;
- Rachats totaux ;
- Rachats structurels ;
- Nombre de polices en fin de période ;
- Primes brutes reçues ;
- Primes nettes ;
- Autres flux :
 - Montant des transferts ;
 - Pénalités de rachats ;
 - Arrérages ;
 - Versements programmés ;
 - Souscriptions ;
 - Versements libres ;
 - Les frais de gestion ;
 - Les commissions sur encours ;
 - Les commissions sur primes ;
 - Les frais d'acquisition.

Pour ces flux de passifs créés à l'origine, on adopte les notations suivantes :

- $Deces^{Det}(n)$: Flux de prestations décès déterministes de l'année n ;
- $Maturite^{Det}(n)$: Flux de prestations maturité déterministes de l'année n ;
- $RachatTot^{Det}(n)$: Flux de prestations rachats totaux déterministes de l'année n ;
- $RachatPart^{Det}(n)$: Flux de prestations rachats partiels déterministes de l'année n ;
- $PM^{Revalorise}(n)$: Provision mathématique revalorisée de l'exercice n ;
- $PM^{AvantRevalo}(n)$: Provision mathématique avant revalorisation de l'exercice n ;
- $Primes(n)$: Primes nettes de l'année n ;

Étape 2 : Flexing

Le principe de cette étape est d'ajuster les flux déterministes pour obtenir des flux de passif stochastiques. Pour cela, les flux déterministes sont multipliés par un ratio de *flexing* ou d'ajustement. Ce ratio est calculé par récurrence dans le modèle stochastique.

La formule générale en t est :

$$Flex(t) = \frac{PM^{Sto}(t)}{PM^{Det}(t)},$$

avec $PM^{Sto}(t)$ la PM fictive calculée dans le modèle ALM, cette PM reflète la PM qui aurait été calculée à l'étape précédente si on lui avait rajoutés les produits financiers distribués ; $PM^{Det}(t)$ la PM provenant de la première étape.

• Notations

- $Deces^{Sto}(n)$: Flux de prestations décès stochastiques de l'année n revalorisés au taux de PB de sortie ;
- $Maturite^{Sto}(n)$: Flux de prestations maturité stochastique de l'année n revalorisés au taux de PB de sortie ;
- $RachatTot^{Sto}(n)$: Flux de prestations rachats totaux stochastiques de l'année n revalorisés au taux de PB de sortie ;
- $RachatPart^{Sto}(n)$: Flux de prestations rachats partiels stochastiques de l'année n revalorisés au TMG ;
- $Deces_{PM}^{Sto}(n)$: Flux de prestations décès stochastiques de l'année n non revalorisé utilisé pour le calcul de la PM ;
- $Maturite_{PM}^{Sto}(n)$: Flux de prestations maturité stochastiques de l'année n non revalorisé utilisé pour le calcul de la PM ;
- $RachatTot_{PM}^{Sto}(n)$: Flux de prestations rachats totaux stochastiques de l'année n non revalorisé utilisé pour le calcul de la PM ;
- $RachatPart_{PM}^{Sto}(n)$: Flux de prestations rachats partiels stochastiques de l'année n non revalorisé utilisé pour le calcul de la PM ;

L'algorithme de calcul des ratios d'ajustement sont à pas périodique, souvent annuel.

• Ratios

Les ratios de *flexing* vont être calculés pour chaque simulation et chaque pas de temps pour ajuster les flux de passif déterministes en flux de passif stochastiques reflétant les hypothèses stochastiques.

Pour cela, trois ratios différents sont calculés :

- Le ratio R_{PB}^{Flex} associé aux rachats totaux, aux décès, aux arrivées à échéance, prestations capitalisées au taux de PB de sortie ;
- Le ratio R_{TMG}^{Flex} associé aux rachats partiels, prestations capitalisées au TMG uniquement ;

- Le ratio R_{NCFlex} associé au calcul de la PM avant revalorisation, assiette utilisée lors de la stratégie de calcul de taux servi, prestations non capitalisées ;

La valorisation des sorties totales est différente de la valorisation des sorties partielles. Les sorties totales sont revalorisées au taux de PB de sortie alors que les sorties partielles sont revalorisées au TMG.

- **Flux stochastiques**

Après avoir calculé les ratios de *flexing*, la multiplication des flux déterministes par les ratios d'ajustement nous permet d'obtenir les flux stochastiques.

Le ratio de *flexing* R_{PB}^{Flex} permet d'ajuster les sorties totales.

Pour les flux stochastiques revalorisés au taux de PB de sortie pour les sorties totales, on a :

$$\begin{aligned} Deces^{Sto}(n) &= R_{PB}^{Flex}(t)Deces^{Det}(n) \\ RachatTot^{Sto}(n) &= R_{PB}^{Flex}(t)RachatTot^{Det}(n) \\ Maturite^{Sto}(n) &= R_{PB}^{Flex}(t)Maturite^{Det}(n) \end{aligned}$$

Le ratio $R_{TMGFlex}$ permet d'ajuster les sorties partielles.

Pour les flux stochastiques revalorisés au TMG pour les rachats partiels, on a :

$$RachatPart^{Sto}(n) = R_{TMGFlex}(t)RachatPart^{Det}(n)$$

Le ratio R_{NCFlex} permet d'ajuster les sorties utilisées pour déterminer la PM avant revalorisation.

Pour les flux de prestations stochastiques non revalorisés utilisés pour le calcul de la PM, on a :

$$\begin{aligned} Deces_{PM}^{Sto}(n) &= R_{NCFlex}(t)Deces^{Det}(n) \\ RachatTot_{PM}^{Sto}(n) &= R_{NCFlex}(t)RachatTot^{Det}(n) \\ Maturite_{PM}^{Sto}(n) &= R_{NCFlex}(t)Maturite^{Det}(n) \\ RachatPart_{PM}^{Sto}(n) &= R_{NCFlex}(t)RachatPart^{Det}(n) \end{aligned}$$

- **Détermination de la provision mathématique**

La PM à utiliser pour le calcul de la participation aux bénéfiques est calculée grâce aux flux stochastiques. Celle-ci permet de déterminer la PM revalorisée en fin de période.

On obtient :

$$PM^{Revalorise}(n) = PM^{AvantRevalo}(n)(1 + TauxServi(n)),$$

avec :

$$PM^{AvantRevalo}(n) = PM^{Revalorise}(n-1) + Primes(n) - \rho,$$

et

$$\rho = RachatPart_{PM}^{Sto}(n) + Deces_{PM}^{Sto}(n) + RachatTot_{PM}^{Sto}(n) + Maturite_{PM}^{Sto}(n).$$

Résumé

Les étapes de la méthode *Flexing* sont illustrées en figure 2.5.

2.2.3 Introduction à l'approche Model point

Notre approche s'inspire des travaux développés par GOFFARD, 2015a.

Présentation

L'approche *Model point* a pour objectif de réduire le nombre de lignes de passifs en entrée du modèle ALM. Elle permet ainsi comme la méthode *Flexing* de réduire le temps de calcul, mais ici en créant des groupes de contrats homogènes et en les représentant par un seul contrat. Plus précisément, la méthode consiste à regrouper plusieurs contrats d'assurance en un seul et même contrat fictif appelé « *Model point* », qui doit représenter le regroupement de manière fidèle. La valeur initiale de l'épargne du *model point* créée est la somme des valeurs initiales de l'épargne de chaque ligne. Pour limiter la perte d'information engendrée par la création de *model point*, la segmentation et la compression du nombre de contrats, les polices regroupées ensemble doivent avoir des caractéristiques les plus proches possibles. Dans le cadre de notre étude, la notion de distance sera primordiale et des algorithmes de partitionnement basés sur cette métrique seront utilisés pour la création de *model points* représentant de manière équivalente la base de contrats initiale.

Principe

Notre étude se base sur la notion de vecteur de sortie d'un contrat, qui correspond aux probabilités que le contrat arrive à son terme (par le décès de la tête assurée, le rachat total du contrat, etc.) à chaque instant t sur un horizon de projection fixé (par exemple 25 ans). Chaque contrat est caractérisé par son vecteur de sortie qui forme une trajectoire dans le temps. En traçant cette trajectoire pour chaque contrat du portefeuille, on obtient une visualisation graphique du portefeuille. Le vecteur de sortie d'un contrat est une vision discrète de la fonction de densité de probabilité de sortie f d'un contrat. L'approche d'agrégation se fonde sur le fait que si n contrats admettent une même densité f , le *model point* regroupant ces n contrats admettra la même densité f . Ainsi, il découle que le BEL calculé pour le *model point* est égal à la somme des BEL des n contrats le formant.

$$BEL_{MP} = \sum_i^n BEL_i,$$

avec BEL_{MP} le BEL du *model point* et BEL_i le BEL du contrat i .

Notre étude est limitée aux contrats d'assurance vie épargne, or pour ce type de contrat, des vecteurs de sortie similaires sont associés à des contrats de même caractéristiques et à une année de souscription identique. Si les contrats sont regroupés seulement sur un critère d'égalité des vecteurs de sortie, l'évaluation du BEL qui sera faite avec ces *model points* sera exacte. Cependant, ces regroupements ne sont pas suffisants, le portefeuille agrégé sera toujours trop volumineux.

De plus, si les contrats sont regroupés seulement sur la proximité de leurs caractéristiques, le portefeuille agrégé ne permet pas non plus un taux de compression satisfaisant, il sera toujours trop

volumineux pour que les différentes et multiples simulations et valorisation du modèle ALM soient faites en un temps d'exécution réduit.

C'est pourquoi la création des *model point* est faite par l'utilisation de méthodes statistiques de classification appliquées aux vecteurs de sortie. Ainsi, le regroupement de contrats entre eux se fait si leurs vecteurs de sortie sont proches en terme de distance.

La création de *model point* se résume à une classification des données pointue qui permet de limiter l'erreur sur le BEL. Pour cela, la Classification Ascendante Hierarchique CAH et l'algorithme des *K-Means* sont utilisés. Ces algorithmes seront évoqués dans le chapitre 3.

La provision initiale des contrats est déterminante dans le calcul du BEL. Ainsi, un *model point* pas assez représentatif de son regroupement de contrats impliquera une erreur sur le BEL, qui sera d'autant plus importante si le *model point* représente une forte provision. La complexité du modèle ALM et la nécessité d'un temps de calcul réduit impose un taux de compression fixé. Le degré de liberté sur le choix du nombre de *model point* à produire est donc limité. L'objectif final est de trouver un nombre fixé de *model point* optimal.

Le portefeuille de la compagnie partenaire est composé de plusieurs produits associés à des garanties différentes. Il est impossible de regrouper entre elles deux lignes n'appartenant pas à une même garantie. Après avoir délimité le portefeuille en sous-portefeuilles, le modèle d'agrégation peut se faire. Au final, après l'obtention de sous-portefeuilles agrégés, leur concaténation permet d'obtenir le portefeuille final.

Probabilités de sortie

Nous allons expliquer dans cette partie une notion au centre de notre étude : les vecteurs de probabilités de sortie.

Considérons notre portefeuille comme un ensemble de contrats $\{x_i, i \in [1, n]\}$. Notre objectif est de créer k *model points* grâce à un modèle de construction basé sur des algorithmes de partitionnement. Pour que le modèle soit le plus efficace possible, les variables ainsi que la mesure de dissimilarité les plus pertinentes doivent être choisies. Pour pouvoir utiliser la propriété d'additivité du BEL, chaque contrat du portefeuille est représentée par un vecteur de sortie pour chaque scénario financier. Ainsi, en supposant N scénarios financiers F_1, \dots, F_N , on obtient pour chaque contrat i , la matrice représentative suivante :

$$M_i = \begin{pmatrix} p_i^{F_1}(0, 1) & \cdots & p_i^{F_1}(T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_i^{F_N}(0, 1) & \cdots & p_i^{F_N}(T) \end{pmatrix},$$

$$M_i = \begin{pmatrix} v^{F_1} \\ \vdots \\ v^{F_N} \end{pmatrix}.$$

Chaque contrat est donc représenté par une matrice de taille $N \times (T + 1)$. Pour déterminer les vecteurs de sorties v^{F_1}, \dots, v^{F_N} , il faut évaluer la mortalité et la probabilité de rachat associées au contrat pour chaque année de projection et chaque scénario financier. Comme nous l'évoquons dans la première partie de ce chapitre, pour les contrats d'épargne la loi de rachat est composée d'une loi

de rachat structurelle modélisant de façon déterministe les comportements classiques des assurés et d'une loi de rachat conjoncturelle modélisant de façon stochastique les comportements des assurés vis à vis de la situation économique. Par exemple, en figure 2.4 est affichée la loi de rachat total associée à un produit d'assurance particulier. Ce graphe représente l'évolution de la probabilité de rachat total en fonction de l'ancienneté.

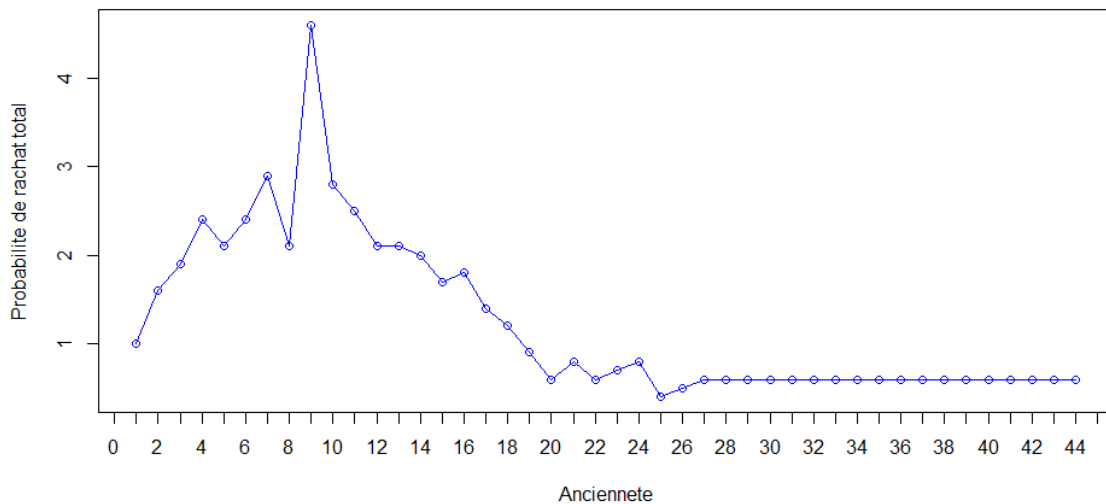


FIGURE 2.4: Loi de rachat total d'un produit

Sachant que le portefeuille a été délimité en sous-portefeuilles, pour permettre au modèle d'agrégation de travailler sur le regroupement de contrats appartenant à une même maille prédéfinie, en particulier plus fine que la maille produit, nous pouvons simplifier la matrice représentative M_i d'un contrat i définie précédemment. En effet, comme les contrats appartiennent à un même produit, les scénarios financiers ont un impact limité sur la proximité des contrats. Ainsi, pour un scénario financier donné, si deux contrats sont proches l'un de l'autre, alors c'est aussi le cas pour les autres scénarios financiers. Mathématiquement, nous avons pour deux contrats i et j :

Si pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $x_i^{F_k} \approx x_j F_k$ alors $\forall t \in \llbracket 1, N \rrbracket$ $x_i^{F_t} \approx x_j F_t$

La matrice représentative M_i de chaque contrat i , composée d'un vecteur de sortie v^{F_j} pour chaque scénario financier F_j , peut être simplifiée en un seul vecteur représentatif de chaque contrat i composé d'un seul vecteur de sortie pour un seul scénario financier.

On note ce vecteur :

$$V_i = (p_i(0, 1), p_i(1, 2), \dots, p_i(T - 1, T), p_i(T)).$$

À noter qu'utiliser un vecteur plutôt qu'une matrice permet également de stocker moins d'informations redondantes, de diminuer la demande en ressources mais surtout de permettre aux algorithmes de partitionnement et au modèle d'agrégation de calculer plus rapidement la solution finale.

Les probabilités de sortie sont calculées à partir d'une table de mortalité dépendant de l'âge de la tête assurée et d'une table de rachat dépendant de l'ancienneté de l'assuré et selon un scénario

financier ne prenant pas en compte les rachats dynamiques. Ainsi, seul les rachats structurels sont modélisés, et le principal facteur expliquant les comportements des assurés est la fiscalité appliquée aux contrats d'assurance vie.

Soit $p_i(T-1, T)$ la probabilité de sortie du contrat i au cours de l'année $T-1 \rightarrow T$.

La formule utilisée est :

$$p_i(T-1, T) = \left[\prod_{j=1}^{T-1} (1 - p_i(j-1, j)) \right] [1 - (1 - r_i(T-1, T))(1 - d_i(T-1, T))],$$

avec $r_i(T-1, T)$ la probabilité de rachat par l'assuré du contrat i au cours de l'année $T-1 \rightarrow T$; $d_i(T-1, T)$ la probabilité de décès de la tête assurée par le contrat i au cours de l'année $T-1 \rightarrow T$.

Les algorithmes de partitionnement vont ensuite trouver les k *clusters* optimaux, et construire le contrat représentatif du *cluster*, appelé *model point* : la théorie du partitionnement, les algorithmes utilisés et leur fonctionnement sont décrits en chapitre 3.

Modèle de projections et calculs

Le fonctionnement ici du modèle ALM est le même que celui décrit en partie « Fonctionnement et algorithme d'un modèle ALM » et est illustré sur la figure 2.1. La projection des bilans et comptes de résultats se fait toujours grâce à plusieurs scénarios économiques. Cependant, les calculs ne sont plus faits avec le portefeuille initial mais avec les *model points* créés. Ainsi, les calculs se sont plus fait contrat par contrat et ceux pour des millions de contrats, mais *model point* par *model point* et ceux pour quelques milliers de *model points*. Cette projection se fait toujours sur un horizon donné et permet de déterminer le *Best Estimate* de l'entité avec une certaine erreur qui est minimisée au maximum par la méthode.

2.2.4 Comparaison

Deux modélisations différentes

Les différentes étapes des deux méthodes sont détaillées dans la figure 2.5 [CARN, 2013].

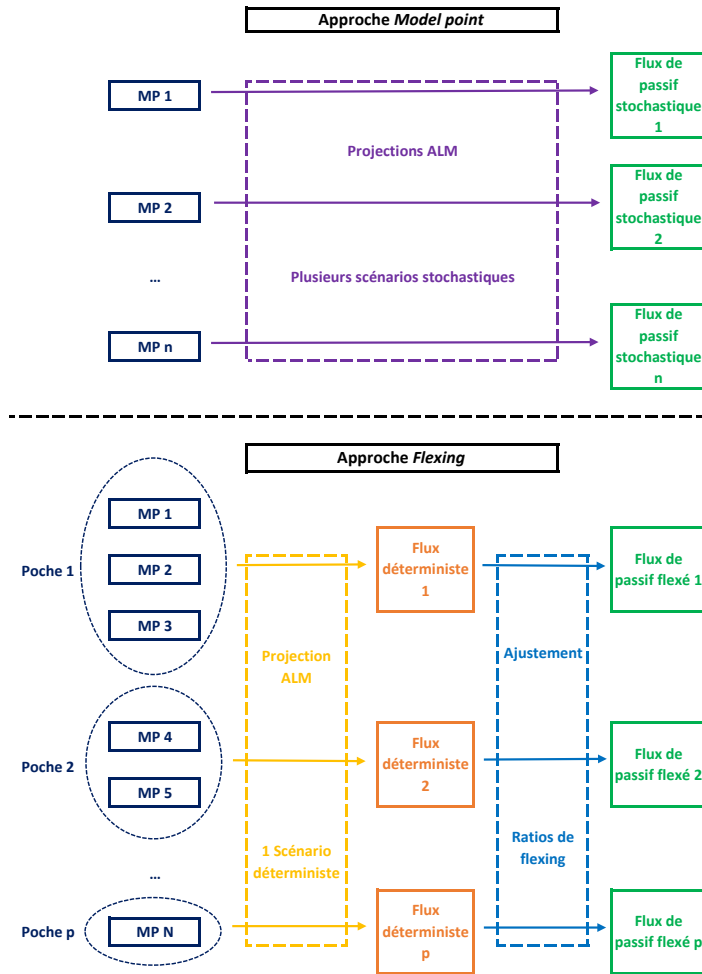


FIGURE 2.5: Étapes de modélisation ALM pour les approches Model Point et Flexing

On remarque que les deux approches permettent de faire face à des contraintes de temps d'exécution et de données d'entrée. Les deux méthodes utilisent des *model points* en entrée afin de limiter le nombre de projections, ce qui est d'autant plus le cas avec le *Flexing* qui effectue des projections seulement par poches de *model points*. Les deux approches permettent d'obtenir des flux de passifs en sortie, cependant les flux de passifs sont déterministes pour la technique de *Flexing* et non stochastiques comme le permet la technique de *Model point*. De plus, on remarque que l'approche *Flexing* est composée de deux étapes contrairement à l'approche *Model point* qui est composée d'une seule étape. Ainsi le *Flexing* impose en plus un traitement des *outputs* issus de la première étape de projection

ALM selon un seul scénario déterministe, et également un traitement des *inputs* qui doivent être ensuite ajustés par les ratios de *flexing*. La méthode *Model point* apparaît ainsi plus simple à mettre en place et à utiliser.

Avantages et inconvénients

Nous détaillons les avantages et les inconvénients de chaque méthode dans le tableau 2.2.

	AVANTAGES	INCONVÉNIENTS
FLEXING	Le temps d'exécution est considérablement réduit et constant	Les flux de passif sont validés par un proxy, ainsi ce sont des flux déterministes
MODEL POINTS	Les flux de passif sont projetés directement dans le modèle ALM, ainsi ce sont des flux de passif stochastiques et non déterministes	Le temps d'exécution peut être plus ou moins important selon le nombre de <i>model points</i> créés. Il est important de trouver le nombre optimal de <i>model points</i> permettant un temps d'exécution minimal tout en ayant une erreur sur le BE minimale

TABLE 2.2: Comparaison des deux méthodes

Il en résulte que si un nombre de *model points* permet à l'approche *Model point* de réduire considérablement le temps d'exécution tout en déterminant le BE de façon précise, cette méthode se distingue par l'utilisation du modèle ALM dans sa totalité et ainsi l'évaluation de "vrais" flux stochastiques.

Chapitre 3

Agrégation des contrats en Model point

3.1 Théorie sur le partitionnement

3.1.1 Présentation

Le partitionnement des données (*clustering* en anglais) a pour objectif de classer des éléments proches, selon un critère de ressemblance, dans des groupes homogènes. Le but est de regrouper les éléments les plus similaires entre eux, et de créer des groupes les moins similaires possibles. Cette approche est utilisée dans de nombreux domaines comme la géographie, la physique, la médecine, la biologie, le marketing, etc. Nous allons l'appliquer à notre domaine qui est l'actuariat en s'inspirant des résultats importants qui ont été obtenus par cette méthode : la segmentation des données, le traitement des images, la reconnaissance de formes par exemple.

Il est important de différencier la classification non supervisée appelée *clustering*, qui est notre domaine d'étude dans ce mémoire, de la classification supervisée. La classification non supervisée cherche à partir d'une relation de proximité, à ranger des données non étiquetées en groupes homogènes d'éléments proches. La classification supervisée cherche elle à déterminer la meilleure classe à des données étiquetées.

Ces éléments théoriques vont être défini dans la partie suivante, à l'aide de plusieurs ouvrages : L. LEBART et al., 2006, SAPORTA, 2011 et G. CELEUX et al., 1989.

3.1.2 Définitions

Nous allons définir plusieurs notions qui seront ensuite utilisées dans les algorithmes de partitionnement.

Soit un ensemble de n éléments $E = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$. L'objectif du partitionnement est de trouver les partitions optimales de E .

Partition

Un ensemble P est dit partition de E , si et seulement si $P = \{E_1, E_2, \dots, E_k\} \in 2^E$ tel que :

- 1) $\forall j \in \{1, 2, \dots, k\}, E_j \neq \emptyset$;
- 2) $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ et $\forall j \in \{1, 2, \dots, k\}, i \neq j : E_i \cap E_j = \emptyset$;
- 3) $\bigcup_{j=1}^k E_j = E$.

Hiérarchie

Une hiérarchie est un ensemble de parties de E issues d'une suite emboîtée de partitions.
Une famille H de parties de E (ensembles des objets à classer) est appelée hiérarchie sur E si :

- 1 Chaque partie dans H est non vide;
- 2 E et ses singletons, c'est à dire toutes les parties de la forme $\{x\}$ avec $x \in E$, sont dans H ;
- 3 Si A et B sont dans H , alors soit A et B sont disjointes, soit $A \subseteq B$, soit $B \subseteq A$.

Exemple :

Soit $E = \{v, w, x, y, z\}$ et sa hiérarchie

$H = \{\{v\}, \{w\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{v, w\}, \{y, z\}, \{v, w, x\}, \{v, w, x, y, z\}, E\}$. Pour illustrer une hiérarchie, un diagramme appelé dendrogramme est utilisé pour illustrer la proximité des éléments par la suite de partitions qui s'emboîtent.

Deux formats sont possibles pour le dendrogramme, comme on peut le voir en figure 3.1.

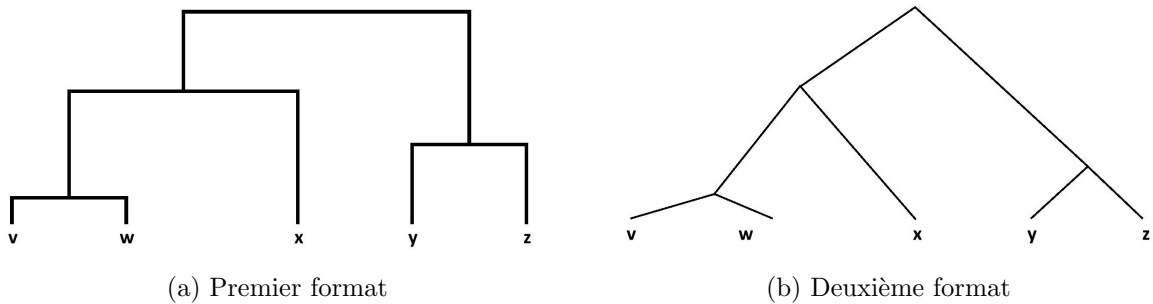


FIGURE 3.1: Deux formats de dendrogramme

Hiérarchie indicée

Une hiérarchie H est dite indicée si elle est munie d'une application $f : H \mapsto \mathbb{R}^+$ qui est compatible avec la relation d'inclusion, c'est à dire telle que :

$$\text{si } A \subset B \text{ alors } f(A) < f(B).$$

Exemple :

- 1) E et H défini comme auparavant ;
- 2) $f(\{v\}) = f(\{w\}) = f(\{x\}) = f(\{y\}) = f(\{z\}) = 0$
 $f(\{v, w\}) = 1$; $f(\{y, z\}) = 2$; $f(\{v, w, x\}) = 3$;
 $f(E) = 4$

Pour illustrer une hiérarchie indicée, un dendrogramme est également utilisé, il illustre la suite de partitions qui s'emboîtent mais aussi le niveau de proximité des éléments par la hauteur des branches. Le dendrogramme correspondant est en figure 3.2.

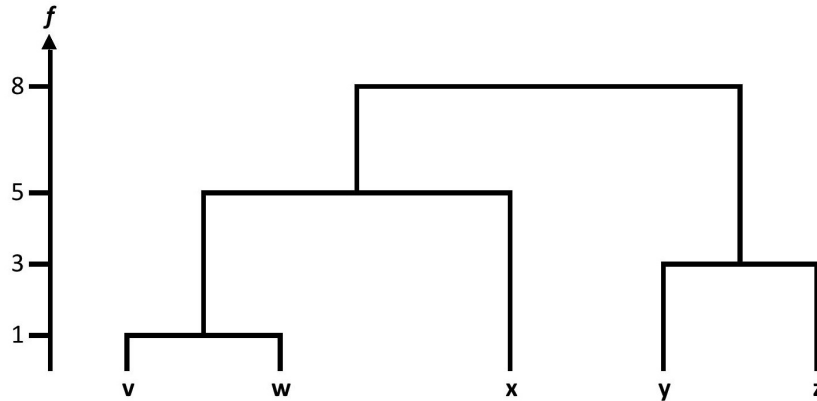


FIGURE 3.2: Dendrogramme

Pour obtenir la segmentation des éléments à partir d'une hiérarchie, une coupe horizontale est faite dans le dendrogramme. Dans le dendrogramme précédent, la segmentation à la hauteur $f = 6$ donne deux groupes $\{v, w, x\}, \{y, z\}$.

Centroïde ou Centre de gravité

Soit P une partition de E telle que $P = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$. Dans le cas où les valeurs x d'un ensemble E sont quantitatives, on définit g centroïde ou encore centre de gravité de E par :

$$g = \sum_{x \in E} p(x)x,$$

où $p(x)$ désigne le poids de l'objet x . En général, $p(x) = \frac{1}{n}$ avec $n = \text{card}(E)$.

On appelle g_j centroïde dans E tout point défini par :

$$g_j = \sum_{x \in E_j} \frac{p(x)}{p_j} x,$$

où $p_j = \sum_{x \in E_j} p(x)$ désigne le poids de la classe E_j g_j est le centre de gravité de la j ème classe E_j

Outlier

Un *outlier* est une valeur aberrante ou valeur extrême, c'est à dire une valeur qui sort de la norme de la distribution d'une variable. Cette observation dévie fortement des autres observations de la variable correspondante.

3.1.3 Mesures de proximité

Dans le domaine du partitionnement, la notion de distance est essentielle et est la base de plusieurs algorithmes de *clustering*. Le traitement des données et de leur relation dans un ensemble donné sont décrits et régis par cette notion de distance. Dans la partie suivante, plusieurs définitions sur les mesures de proximité sont définies et étudiées.

Similarité

Une mesure de similarité s est une application de $E \times E$ dans \mathbb{R}^+ telle que s est maximale en s_{\max} , et plus $s(x_i; x_j)$ est élevée, plus les descriptions de x_i et x_j sont similaires. Une mesure de dissimilarité peut être définie à partir d'une mesure de similarité telle que : $dis(x; y) = s_{\max} - s(x; y)$.

- *Mesure de similarité*

Une mesure de similarité sur E est une application $s : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ possédant les propriétés suivantes : $\forall x \in E, \forall y \in E$, avec $x \neq y$:

- $s(x; y) = s(y; x)$;
- $s(x; x) = s(y; y) = s_{\max} > s(x; y)$.

- *Indice de dissimilarité*

Une mesure de similarité sur E est dite un indice de dissimilarité sur E si et seulement si elle est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ possédant les propriétés suivantes : $\forall x \in E, \forall y \in E$, avec $x \neq y$:

- $d(x; y) = d(y; x)$;
- $d(x; x) = 0$.

- *Indice de distance ou écart*

Un indice de dissimilarité sur E est un indice de distance sur E si et seulement si il est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ possédant la propriété suivante :

$$d(x; y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

- *Distance*

Un indice de dissimilarité sur E est une distance sur E si et seulement si il est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ possédant les propriétés suivantes :

- $d(x; y) = 0 \Rightarrow x = y$;
- $d(x; y) \leq d(x, z) + d(y, z) \forall (x, y, z) \in E^3$.

- *Distance ultramétrique*

Une distance sur E est une distance ultramétrique sur E si et seulement si elle est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ possédant la propriété suivante :

- $d(x_i; x_j) \leq \max \{d(x_i, x_k), d(x_j, x_k)\} \forall (x_i, x_j, x_k) \in E^3$.

Cette distance est très utilisée dans les méthodes de partitionnement et de classification.

- **Hierarchies indicées et ultramétriques**

Il existe une équivalence entre les hiérarchies indicées et les ultramétriques :

- (1) Toute hiérarchie indicée (H, f) permet de définir une ultramétrique : à tout x, y , on associe

$$d_H(x, y) = f(A_{x,y}),$$

où $A_{x,y}$ désigne la plus "petite" classe (au sens de l'inclusion) contenant x et y ;

- (2) Réciproquement, à toute ultramétrique d on peut associer une hiérarchie indicée qui induit d . Il suffit d'appliquer l'algorithme de la Classification Ascendante Hiérarchique (voir chapitre IV) avec le lien simple, au tableau de données contenant d .

Conclusion : l'ensemble des hiérarchies indicées est en bijection avec l'ensemble des ultramétriques.

Exemples de distances

Après avoir défini la notion de distance, nous allons étudier plusieurs distances qui peuvent être utilisées dans les algorithmes de partitionnement.

- **Distance Manhattan**

La distance la plus utilisée est la distance de Manhattan. Celle-ci vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^p, d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^p |x_i - y_i|^q \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Cas particuliers :

- Distance Manhattan : $q = 1 \Rightarrow d = d_1, d_1(x, y) = \sum_{i=1}^p |x_i - y_i|$;
- Distance Euclidienne : $q = 2 \Rightarrow d = d_2, d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^p |x_i - y_i|^2}$;
- Distance Tchebychev : $q = \infty \Rightarrow d = d_\infty, d_\infty(x, y) = \max |x_i - y_i|, i \in [1, p]$.

- **Distance Mahalanobis**

La distance Mahalanobis utilise une matrice de variance/covariance :

$$d(x, y) = \sqrt{(x - y)^T S^{-1} (x - y)}.$$

où S est la matrice de variance/covariance.

3.1.4 Mesures d'évaluation

Plusieurs indices permettent d'évaluer la performance d'une méthode de partitionnement. Ces indices utilisent la notion de similarité / dissimilarité évoquée dans la partie précédente, pour réussir à extraire la meilleure segmentation en groupes.

Indice Silhouette

On note S l'indice silhouette défini par :

$$\forall x_i \in E, S(x_i) = \frac{b(x_i) - a(x_i)}{\max\{b(x_i), a(x_i)\}},$$

avec $a(x_i)$ la dissimilarité moyenne entre tous les éléments x_i et les éléments du groupe contenant x_i ; $b(x_i)$ le minimum des dissimilarités moyennes entre tous les éléments x_i et tous les éléments qui n'appartiennent pas au groupe contenant x_i ; $S(x_i) \in [-1; 1]$.

- $S(x_i) \Rightarrow 1$, alors x_i appartient au groupe approprié $G(x_i)$;
- $S(x_i) \Rightarrow 0$, alors x_i se trouve entre deux groupes;
- $S(x_i) \Rightarrow -1$, alors $G(x_i)$ n'est pas approprié à x_i .

De cet indice, on définit :

- L'indice Silhouette d'un groupe :

$$\forall G_i \in P, S(G_i) = \frac{\sum_{x_i \in C_i} S(x_i)}{|C_i|}.$$

Elle permet de distinguer les éléments qui sont appropriés au groupe concerné des autres éléments inappropriés.

- L'indice Silhouette globale d'une partition P :

$$S(P) = \frac{\sum_{G_i \in P} S(G_i)}{k}.$$

Pour déterminer la meilleure segmentation, l'indice de Silhouette global doit être maximisé.

Inerties

Pour mesurer la performance et la qualité d'une méthode de partitionnement, les indices inertiels sont très utilisées.

- ***Inertie par rapport à un point***

L'inertie I_a du nuage des n points de E par rapport à un point $a \in E$ est :

$$I_a = \sum_{i=1}^n w_i d_M^2(x_i, a).$$

- ***Inertie totale***

Elle est égale à la somme des carrés des distances au centre de gravité g pondérée par le poids $p(x)$ souvent égale à $\frac{1}{n}$ avec $n = \text{card}(E)$.

$$I_T = \sum_{x \in E} p(x) d^2(x, g).$$

- **Inertie intra-classe**

Elle est égale à la somme des inerties de chaque classe I_j pondérée par le poids p_j le poids de la classe E_j :

$$I_W = \sum_j p_j I_j = \sum_j p_j \sum_{x \in E_j} \frac{p(x)}{p_j} d^2(x, g_j) = \sum_j \sum_{x \in E_j} p(x) d^2(x, g_j).$$

Elle permet d'évaluer le degré d'homogénéité au sein d'un même *cluster*. Dans un algorithme de partitionnement qui a pour objectif de trouver la meilleure partition possible, l'inertie intra-classe doit être minimisée : plus celle-ci est petite, plus les éléments d'un même *cluster* sont similaires entre eux.

- **Inertie inter-classe**

Elle est égale à la somme des carrés des distances des centres de gravité de chaque classe avec le centre de gravité de E pondérée par le poids p_j le poids de la classe E_j :

$$I_B = \sum_j p_j d^2(g_j, g).$$

Elle permet d'évaluer le degré d'hétérogénéité entre les *clusters*. Dans un algorithme de partitionnement qui a pour objectif de trouver la meilleure partition possible, l'inertie inter-classe doit être maximisée : plus celle-ci est grande, plus les *clusters* sont dissimilaires entre eux.

On remarque que l'objectif est donc de minimiser l'inertie intra-classe et de maximiser l'inertie inter-classe. La décomposition de l'inertie totale développée dans la partie suivante, va nous permettre de réunir ces deux optimisations en une seule.

- **Théorème de Huygens**

Si g est le centre de gravité de E , on a :

$$\forall a \in E, I_a = I_g + \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) d_M^2(a, g).$$

La démonstration est en section A.1.

- **Décomposition de l'inertie totale**

On a $I_T = I_W + I_B$

preuve :

On considère g_j le centre de gravité de la j ème classe E_j . D'après le théorème de Huygens, l'inertie I_g du nuage des points de E_j par rapport au centre de gravité de E , $g \in E$, est :

$$I_g = I_{g_j} + \sum_{i \in C_j} w_i d_M^2(g, g_j),$$

avec $\sum_{i \in C_j} w_i = \mu_j$

Ce qui donne :

$$\sum_{i \in C_j} w_i d_M^2(x_i, g) = \sum_{i \in C_j} w_i d_M^2(x_i, g_j) + \mu_j d_M^2(g, g_j).$$

En sommant cette égalité pour $j = 1$ à K , on obtient :

$$\sum_j^K \left(\sum_{i \in C_j} w_i d_M^2(x_i, g) \right) = \sum_j^K \left(\sum_{i \in C_j} w_i d_M^2(x_i, g_j) \right) + \sum_j^K \mu_j d_M^2(g, g_j).$$

D'où le résultat :

$$I_T = I_W + I_B.$$

- **Critère d'optimisation inertiel**

Comme nous l'avons évoqué précédemment, d'une part l'objectif est d'obtenir des *clusters* tels que les éléments dans chaque *cluster* soient les plus proches les uns des autres, en formant un *cluster* le plus homogène possible. D'autre part, le but est de former des *clusters* les moins proches possible les uns des autres, en cherchant la plus grande hétérogénéité entre les *clusters*. Or, plus les éléments à l'intérieur d'un *cluster* sont proches les uns des autres en terme de distance, plus le *cluster* est homogène, ce qui se traduit par une inertie intra-classes plus faible. De même, plus les *clusters* sont loin les uns des autres en terme de distance, plus les *clusters* sont hétérogènes entre eux, ce qui se traduit par une inertie inter-classe plus élevée.

Ce double objectif revient à un but commun : minimiser l'inertie intra-classe I_W .

3.2 Algorithme de partitionnement

Plusieurs algorithmes de partitionnement vont être détaillés dans cette partie inspirée par la thèse de FOUCAL, 2011.

3.2.1 Problématiques

Théorie du problème du partitionnement

Le partitionnement de données est aussi appelé *clustering*, et correspond à une méthode statistique qui affecte à chaque élément un *cluster*. La forme du résultat du processus de *clustering* peut être une partition ou une hiérarchie.

Le problème du partitionnement de données est de construire à partir d'un ensemble fini E de n éléments, tel que $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, une partition $P = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\forall i \in [1, k]$, C_i un *cluster* tel que :

$$C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k = P,$$

$$\forall (i, j) \in [1, k]^2, i \neq j \ C_i \cap C_j = \emptyset.$$

On distingue le partitionnement de la classification au simple fait que le nombre de *clusters* à former k est fixé à l'avance dans le cas d'une classification et non dans le cas d'un partitionnement.

Enjeux de l'algorithme

L'algorithme recherché doit répondre à plusieurs problématiques :

- *Complexité*

Le temps d'exécution doit être minimisé. Pour cela, la complexité de l'algorithme doit pouvoir faire face à de grandes bases de données, et permettre un temps de calcul le plus faible possible. Naturellement, l'algorithme qui présentera le temps d'exécution le plus faible sera le plus intéressant pour la création des *model points*.

- *Les paramètres en entrée*

Plusieurs algorithmes requièrent le choix d'un ou plusieurs paramètres en entrée, qui sont plus ou moins déterminants dans l'efficacité de l'algorithme. Déterminer quelle serait la valeur optimale pour chacun des paramètres peut s'avérer compliqué pour certains algorithmes. Les paramètres de l'algorithme doivent être maîtrisés et parfaitement assimilés pour pouvoir l'exploiter au maximum.

- *Le format du partitionnement*

Chaque algorithme ne produit pas forcément des résultats de même nature. Les résultats peuvent se présenter sous plusieurs formes possibles :

- Arbre de classification, ou Dendrogramme ;
- *Clusters* sans traitement des données irrégulières ou *outliers* ;
- *Clusters* avec traitement des données irrégulières ou *outliers*.

3.2.2 Méthodes hiérarchiques

Les méthodes de partitionnement hiérarchiques segmentent les données sous forme d'arbre représentant une hiérarchie entre elles. Plus les données sont proches dans l'arbre, plus les données sont proches en terme de distance. On s'intéresse ici aux méthodes de *clustering* appliquant une hiérarchie stricte, au sens de la définition énumérée en partie 3.1.2.

La méthode de partitionnement hiérarchique peut s'appliquer sous deux approches différentes :

- Approche agglomérative connue sous le nom de Classification Hiérarchique Ascendante CAH : Cette méthode considère à l'initialisation que chaque élément est un *cluster* à lui tout seul. À chaque étape, l'algorithme regroupe les deux *clusters* les plus proches en terme de distance, pour former un nouveau *cluster* résultat de l'agglomération. Lorsqu'il reste plus qu'un *cluster* constitué de l'ensemble des éléments, l'algorithme est terminé.

- Approche divisive connue sous le nom de Classification Descendante Hiérarchique CDH :
De manière inverse, cette méthode considère à l'initialisation que tous les éléments forment un seul et même *cluster*. À chaque étape, l'algorithme divise le(s) *cluster(s)* en enlevant l'élément le plus loin en terme de distance de tous les autres éléments de son *cluster*, pour former un deux nouveaux *clusters* résultats de la division. Lorsque chaque *cluster* est constitué d'un seul et unique élément, l'algorithme est terminé.

À la fin de l'exécution de l'algorithme, CAH ou CDH, on obtient soit :

- Une hiérarchie : une succession de partitions emboîtées ;
- Une hiérarchie indicée : chaque nouveau *cluster* est « indicé » par valeur de l'indice d'agrégation (voir prochaine section) pour les 2 éléments réunis.

Un arbre hiérarchique est finalement construit. Cet arbre aussi appelé dendrogramme (voir partie 3.1.2) permet de visualiser de manière précise chaque étape de l'algorithme et la proximité entre les éléments.

L'approche ascendante est plus rapide que l'approche descendante. Si on considère qu'ils existent n *clusters* à une étape i quelconque, il existe $\frac{n(n-1)}{2}$ possibilités de regroupement pour le CAH, contrairement au CDH et ses $2^{n-1} - 1$ possibilités de division. Nous nous concentrerons sur l'approche agglomérative qui est la plus utilisée et la plus simple.

Indice d'agrégation de la CAH

La notion au centre du problème de partitionnement hiérarchique ascendant est la similarité entre les *clusters*. Pour déterminer la proximité entre chaque élément, le calcul de la dissimilarité entre chaque élément est non ambigu. Cependant, pour déterminer la proximité entre chaque *cluster*, le calcul de la dissimilarité entre chaque *cluster* est ambigu et nécessite une précision qui est l'indice d'agrégation.

L'indice d'agrégation δ est une règle de calcul pour estimer la « dissimilarité » entre deux *clusters* déjà existants en tenant compte des dissimilarités entre les objets de C_1 et de ceux de C_2 . Cet indice fixe les base du calcul des dissimilarités entre les *clusters*, et influence la hiérarchie obtenue par l'algorithme.

Formellement, δ est une application de $P(E) \times P(E)$ dans \mathbb{R}_+ , avec $\delta(C_1, C_2) = \delta(C_2, C_1)$ qui se calcule en tenant compte des dissimilarités $d(x_1, x_2)$, avec $x_1 \in C_1$ et $x_2 \in C_2$.

Plusieurs indices peuvent être utilisés :

- ***L'indice du saut minimal (lien simple)***

Deux *clusters* C_1 et C_2 sont séparés d'une distance δ_{min} définie par :

$$\delta_{min}(C_1, C_2) = \min_{x_1 \in C_1, x_2 \in C_2} d(x_1, x_2).$$

On parle de distance minimale entre les *clusters*.

- **L'indice du saut maximal (lien complet)**

Deux *clusters* C_1 et C_2 sont séparés d'une distance δ_{max} définie par :

$$\delta_{max}(C_1, C_2) = \max_{x_1 \in C_1, x_2 \in C_2} d(x_1, x_2).$$

On parle de distance maximal entre les *clusters*.

- **L'indice du lien moyen**

Deux *clusters* C_1 et C_2 sont séparés d'une distance δ_{moy} définie par :

$$\delta_{moy}(C_1, C_2) = \frac{1}{n_{C_1} n_{C_2}} \sum_{x_1 \in C_1, x_2 \in C_2} d(x_1, x_2),$$

avec n_{C_1} et n_{C_2} les effectifs de C_1 et C_2 . On parle de distance moyenne entre tous les éléments de C_1 et tous les éléments de C_2 .

- **L'indice des centres de gravité**

Deux *clusters* C_1 et C_2 sont séparés d'une distance δ_g définie par :

$$\delta_g(C_1, C_2) = d(g_1, g_2),$$

avec g_1 et g_2 les centres de gravité de C_1 et C_2 . On parle de distance entre les centres de gravité de C_1 et de C_2 .

- **L'indice de Ward (la variance)**

Deux *clusters* C_1 et C_2 sont séparés d'une distance δ_{Ward} définie par :

$$\delta_{Ward}(C_1, C_2) = \frac{|C_1||C_2|}{|C_1| + |C_2|} d^2(g_1, g_2),$$

avec g_1 et g_2 les centres de gravité de C_1 et C_2 , et $|C_1|$ et $|C_2|$ les effectifs de C_1 et C_2 . Cette distance représente la perte d'inertie inter-classe résultant de la réunion de C_1 et C_2 .

On remarque que la somme des niveaux d'agrégation de la hiérarchie ainsi indicée est égale à l'inertie totale.

Tous ces indices sont intéressants, et peuvent être appliqués à l'algorithme CAH que nous allons détailler ci-dessous.

Algorithme de la CAH

Soit E un ensemble de n éléments à classer et muni d'une dissimilarité $d : E \times E \Rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que $\forall (x, y), d(x, y) = d(y, x) \geq d(x, x) = 0$. On considère l'indice d'agrégation δ entre les *clusters*.

L'algorithme se déroule selon les étapes suivantes :

Entrées :

- Base de données de n contrats ;
- d distance ;

début

- (1) Initialisation : H est formée des n singletons de E et f vaut 0 sur chaque singleton ;
- (2) Agrégation : On réunit les 2 éléments de H qui sont les plus proches au sens de δ parmi les éléments de H qui n'ont pas déjà été réunis : soit C_1 et C_2 les deux éléments réunis ;
- (3) Mise à jour : On calcule les valeurs de δ entre le nouveau *cluster* $C_1 \cup C_2$ formé et les autres *clusters* non agrégés. $f(C_1 \cup C_2)$ est définie comme étant égale à $\delta(C_1, C_2)$;
- (4) Test d'arrêt : Si le nouveau *cluster* formé à l'étape (2) est E alors l'algorithme s'arrête, sinon il reprend à l'étape (2) ;

fin**Algorithme 1 : Algorithme CAH****Exemple**

On considère l'ensemble $E \in \mathbb{R}^2$ tel que $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

On pose $x_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} 14 \\ 19 \end{pmatrix}$, $x_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $x_6 = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$.

On considère la dissimilarité d comme la distance euclidienne. On détermine le tableau 3.1 des distances entre chaque élément.

$d(x_i, x_j)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	4.1	2.2	15.3	8.5	7.2
x_2		0	3.2	15.7	4.5	9.4
x_3			0	13.6	7.1	6.4
x_4				0	16.3	9.1
x_5					0	12.4
x_6						0

TABLE 3.1: Tableau des distances

Pour chaque indice d'agrégation, les dendrogrammes obtenus diffèrent, comme on peut le voir sur les figures en annexes.

Conclusion

Les méthodes de partitionnement hiérarchiques construisent un résultat clair qui offre une grande liberté dans le choix du nombre de *model points* à construire. Néanmoins, cette approche a ses limites :

- Les *clusters* formés sont à améliorer ;
- Le choix du critère d'arrêt.

3.2.3 Méthodes non hiérarchiques

Méthodes par partition

Les méthodes par partition segmentent l'ensemble des données en un nombre de partitions k fixées au préalable. Un élément ne peut appartenir qu'à un seul *cluster* et un *cluster* ne peut être vide. L'approche par partition construit les *clusters* en optimisant un critère de qualité de manière itérative. L'optimum obtenu est généralement local, car le résultat dépend fortement de la partition initiale générée aléatoirement.

Nous nous intéresserons à deux types de méthodes : les k -centroïdes et les nuées dynamiques.

- *L'approche k -centroïdes*

- Méthode des centres mobiles

Développée par Forgy en 1965 [FORGY, 1965], elle semble être la première à avoir utilisé le principe des k -centroïdes. Ce principe consiste à définir à chaque étape, k éléments de E comme des représentants des k *clusters* à former. Chaque élément n'étant pas un représentant d'un *cluster*, est ensuite affilié au *cluster* auquel il est le plus proche, formant finalement k *clusters*. Initialement, ces k représentants sont tirés aléatoirement parmi l'ensemble des données de E . Ensuite à chaque étape, les nouveaux représentants des k *clusters* sont les k centres de gravité des k *clusters*. La méthode s'arrête lorsque les *clusters* ne changent pas, ou lorsque le nombre d'itération maximal fixé par l'utilisateur est atteint.

On peut résumer la méthode des centres mobiles par l'algorithme suivant :

Entrées :

- * Ensemble de données E de n lignes ;
- * k nombre de *clusters* voulu ;
- * d dissimilarité ;
- * N nombre d'itérations maximal.

début

- (1) Tirage aléatoire dans E des k représentants $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$;
- (2) Construction de la partition $P = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ en définissant le *cluster* E_j comme étant l'ensemble des éléments de E qui sont plus proches de c_j que tout autre représentant c_i avec $j \neq i$;
Cette étape correspond à la boucle suivante :

pour i allant de 1 à n **faire**

$$\text{index} = \arg \left\{ \min_{j \in [1, k]} d(x_i, c_j) \right\} ;$$

Affecter à x_i le *cluster* C_{index} ;

fin

- (3) Mise à jour des k représentants :

$$\forall j \in [1, k], c_j = \sum_{x \in E_j} \frac{p(x)}{p_j} x ;$$

c_j est le centre de gravité de C_j ;

fin

- (4) Répéter (2) et (3) tant que $P = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ change et le nombre d'itérations est inférieur à N ;
- (5) Retourner le résultat ;

Algorithme 2 : Algorithme des centres mobiles

Chaque solution trouvée est un optimum local pour le critère consistant à minimiser l'inertie intra-classe I_W .

En pratique, l'algorithme s'arrête si :

- * Le critère I_W inertie intra-classe cesse de décroître de façon sensible (lorsque la décroissance de I_W est inférieure à un seuil donné) ;
- * Un nombre maximal d'itérations N a été atteint.

Une méthode plus connue est la méthode des K-Means (K-Moyennes) qui est une version améliorée de la méthodes des centres mobiles.

– Méthode des K-Means

Développée par MacQueen en 1967 [MACQUEEN, 1967, les améliorations qu'elle apporte lui permettent d'être plus efficace. Elle se différencie par le calcul des centres de gravité : au lieu de l'effectuer après l'allocation de tous les éléments à un *cluster*, le calcul est fait après chaque allocation d'un élément à un *cluster*.

On peut résumer la méthode des K-Means par l'algorithme suivant :

Entrées :

- * Ensemble de données E de n lignes ;
- * k nombre de *clusters* voulu ;
- * d dissimilarité ;
- * N nombre d'itérations maximal ;

début

- (1) Tirage aléatoire dans E des k représentants $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$;
- (2) Construction de la partition $P = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ en définissant le *cluster* E_j comme étant l'ensemble des éléments de E qui sont plus proches de c_j que tout autre représentant c_i avec $j \neq i$;

Cette étape correspond à la boucle suivante :

pour i allant de 1 à n **faire**

$$\text{index} = \arg \{ \min_{j \in [1, k]} d(x_i, c_j) \}$$

Affecter à x_i le *cluster* C_{index} .

Mise à jour des k représentants :

$$\forall j \in [1, k], c_j = \sum_{x \in E_j} \frac{p(x)}{p_j} x$$

c_j est le centre de gravité de C_j ;

fin

- (3) Retourner le résultat ;

fin

Algorithme 3 : Algorithme des K-Means

Une seule itération permet à cette approche de déterminer la partition qui minimise le critère d'inertie intra-classe. Cette algorithme converge plus rapidement que celui des centres mobiles tout en donnant des résultats de meilleure qualité. Cependant, comme pour l'algorithme des centres mobiles, les résultats sont dépendants des représentants initiaux choisis aléatoirement et de l'ordre de traitement des éléments. Elle est aussi très sensible aux *outliers* et aux données irrégulières.

• **Conclusion sur les méthodes par partition**

La simplicité d'implémentation de l'approche des k-centroïdes et d'interprétation de ces résultats en font une méthode très intéressante. Les *clusters* obtenus sont facilement interprétables par la distance entre les éléments d'un *cluster* et le représentant de celui-ci. De plus, l'algorithme qui en découle est adapté au traitement de grandes bases de données, offrant une complexité de l'ordre de $O(kn)$. Enfin, un point important qui la différencie des méthodes hiérarchiques est que le partitionnement est remis en cause tout au long de l'algorithme et est amélioré constamment pour converger vers le résultat optimal.

Néanmoins, déterminer le nombre de *clusters* k en amont reste un choix difficile qui peut influencer fortement sur la qualité des résultats tout comme les représentants initiaux. La sensibilité aux

données irrégulières est un autre point noir pour cette approche, les centres de gravité étant des moyennes. Finalement, cette méthode détermine une partition qui est localement optimale en théorie, il est nécessaire d'exécuter plusieurs fois un tel algorithme pour trouver la partition se rapprochant le plus d'un optimal global.

Combinaison de l'algorithme des K-Means avec l'algorithme CAH

En utilisant successivement en deux étapes la méthode des K-Means et la méthode CAH, on s'affranchit de la limite de la méthode hiérarchique qui est peu adaptée au traitement de bases de données volumineuses. En effet, comme nous l'avons évoqué précédemment, l'algorithme des K-Means permet d'analyser un grand nombre d'éléments donnés en entrée. Son utilisation avant l'algorithme CAH est donc bénéfique.

Nous résumons le principe de cette combinaison dans le tableau 3.2.

ÉTAPE 1 : MÉTHODE DES K-MEANS INITIALE	Le but est de réduire le volume de la base de données en entrée. Pour cela, l'objectif de cette étape est de trouver une partition des n éléments de la base initiale en i clusters tel que i soit supérieur au nombre de clusters final k souhaité. L'objectif est d'obtenir un nombre de clusters permettant à l'algorithme CAH d'être applicable et efficace, soit un nombre inférieur à 1000
ÉTAPE 2 : MÉTHODE CAH	L'utilisation de l'algorithme CAH est possible avec la base agrégée obtenue en étape 1. Cette deuxième étape va permettre de définir les k clusters finaux de manière plus efficace que si l'algorithme CAH avait été appliqué à l'ensemble de la base initiale.

TABLE 3.2: Combinaison de l'algorithme des K-Means avec l'algorithme CAH

Double combinaison de l'algorithme des K-Means avec l'algorithme CAH

En utilisant successivement en trois étapes la méthode des K-Means, la méthode CAH et une nouvelle fois la méthode des K-Means, chaque algorithme apporte son avantage au processus :

- L'utilisation en premier de l'algorithme des K-Means permet d'analyser une base de données volumineuse ;
- L'utilisation deuxièmement de l'algorithme CAH permet de déterminer les k représentants initiaux avec lesquels l'algorithme des K-Means en étape 3 va commencer.

Nous résumons le principe de cette combinaison dans le tableau 3.3.

<p>ÉTAPE 1 : MÉTHODE DES K-MEANS INITIALE</p>	<p>Le but est de réduire le volume de la base de données en entrée. Pour cela, l'objectif de cette étape est de trouver une partition des n éléments de la base initiale en i <i>clusters</i> tel que i soit supérieur au nombre de <i>clusters</i> final k souhaité. L'objectif est d'obtenir un nombre de <i>clusters</i> permettant à l'algorithme CAH d'être applicable et efficace, soit un nombre inférieur à 1000</p>
<p>ÉTAPE 2 : MÉTHODE CAH</p>	<p>L'utilisation de l'algorithme CAH est possible avec la base agrégée obtenue en étape 1. Tout d'abord, cette deuxième étape va permettre à l'algorithme CAH d'être plus efficace en s'appliquant à une base réduite et non à l'ensemble de la base initiale. De plus, cette étape va permettre de définir les k représentants initiaux avec lesquels l'algorithme des K-Means en dernière étape va commencer. En effet, les k centres de gravité des k <i>clusters</i> trouvés seront les k représentants initiaux.</p>
<p>ÉTAPE 3 : MÉTHODE DES K-MEANS FINALE</p>	<p>Une utilisation finale de l'algorithme des K-Means permet de déterminer les k <i>clusters</i> finaux. Lors de l'initialisation, les k centres de gravité des k <i>clusters</i> trouvés seront les k représentants initiaux donnés en entrée de l'algorithme.</p>

TABLE 3.3: Double combinaison de l'algorithme des K-Means avec l'algorithme CAH

Chapitre 4

Application de modèles d'agrégation de contrats sur un portefeuille d'épargne

L'application est centrée sur la méthode de construction des *model points*, la compression du portefeuille initial et les temps de calcul induits par cette construction. L'objectif a été d'appliquer l'approche de construction des *model points* innovante décrite dans le chapitre 2, consistant à utiliser des vecteurs de sortie en entrée d'algorithmes de partitionnement présentés dans le chapitre 3. Suite à des contraintes opérationnelles, l'étude ne s'est pas faite sur un modèle stochastique, bien qu'il soit développé avant dans le mémoire. La comparaison des résultats a été effectuée à partir de simulations déterministes. Ainsi, les résultats pourraient en être affectés.

4.1 Données

4.1.1 Présentation des contrats modélisés

La base sur laquelle les travaux ont été effectués correspond au périmètre Épargne et Retraite Individuelle, et est composée des contrats en cours à la date d'inventaire du 31/12/2019. Cette base possède 2 804 304 lignes qui correspondent à un portefeuille de 917 466 contrats d'épargne et de retraite individuelle. Le portefeuille est composé majoritairement de contrats d'épargne individuelle.

Plusieurs produits composent ce portefeuille, dont les principaux (ceux représentant au moins 5% de la base chacun) sont énumérés en tableau 4.1. Ce tableau résume la proportion des principaux produits dans la base originelle et donne un ordre d'idée de leurs volumes.

PRODUIT	FRÉQUENCE	POURCENTAGE	FRÉQUENCE CUMULÉE	POURCENTAGE CUMULÉ
Produit A	349 588	12,5%	349 588	12,5%
Produit B	330 603	11,8%	680 191	24,3%
Produit C	314 296	11,2%	994 487	35,5%
Produit D	247 940	8,8%	1 242 427	44,3%
Produit E	205 918	7,3%	1 448 345	51,7%
Produit F	186 377	6,7%	1 634 722	58,3%
Produit G	144 117	5,1%	1 778 839	63,4%

TABLE 4.1: Proportion des principaux produits dans la base initiale

Ces différents produits sont caractérisés par un réseau de distribution. Il existe trois réseaux de distribution dans ce portefeuille : X, Y et Z. Le tableau 4.2 résume la proportion de chaque réseau de distribution dans la base originelle et indique leurs volumes.

RÉSEAU	FRÉQUENCE	POURCENTAGE	FRÉQUENCE CUMULÉE	POURCENTAGE CUMULÉ
Réseau X	2 091 234	74,57%	2 091 234	74,57%
Réseau Y	628 661	22,42%	2 719 895	96,99%
Réseau Z	84 409	3,01%	2 804 304	100,00%

TABLE 4.2: Proportion des réseaux de distribution dans la base initiale

En plus des mailles Produit et Réseau de distribution, les lignes sont caractérisées par d'autres variables de segmentation comme par exemple le support d'investissement (monosupport ou multisupport), la phase en cours du produit (phase d'épargne ou phase de rente), le niveau de participations aux bénéficiaires, etc. Lors des travaux de modélisation, neuf mailles ont été considérées. Ces neuf mailles sont importantes car elles vont limiter par la suite, notre taux de compression du portefeuille.

4.1.2 Variables

Caractéristiques du portefeuille

Les *model points* disposent d'un format bien précis à appliquer avant l'entrée dans le modèle ALM. Celui-ci est composé de 59 variables dont 31 variables par défaut, 15 variables qualitatives et 13 variables quantitatives. Les variables par défaut sont des variables dont leurs valeurs sont fixées.

Nous nous concentrons sur les variables qui ne sont pas par défaut.

Les vecteurs de probabilités de sortie que nous avons présentés en chapitre 2 dépendent de la loi de mortalité et la loi de rachat associées. La loi de mortalité est différente selon la maille Produit, la loi de rachat est différente selon la maille {Produit \times Réseau}. De plus, la loi de mortalité dépend de l'âge de la tête assurée et la loi de rachat dépend de l'ancienneté de la tête assurée. Les trajectoires formées par ces vecteurs de sortie dépendent de la répartition du portefeuille par âge et

par ancienneté. Plus précisément, l'hétérogénéité des trajectoires qui va être un élément déterminant dans les algorithmes de partitionnement pour le regroupement de contrats en *model point*, dépend des distributions de l'âge et de l'ancienneté du portefeuille. En effet, chaque trajectoire dépend du doublon {âge, ancienneté}. Plus le portefeuille est composé d'anciennetés différentes, plus le nombre de trajectoires de sortie sera important. Les algorithmes de partitionnement permettent de prendre en compte autant que possible l'hétérogénéité des données. Le modèle d'agrégation des contrats peut donc s'appliquer à n'importe quel portefeuille. Dans la suite, nous étudions les caractéristiques importantes du portefeuille.

L'histogramme 4.1 montre la distribution de l'âge au sein du portefeuille au moment l'extraction de la base.

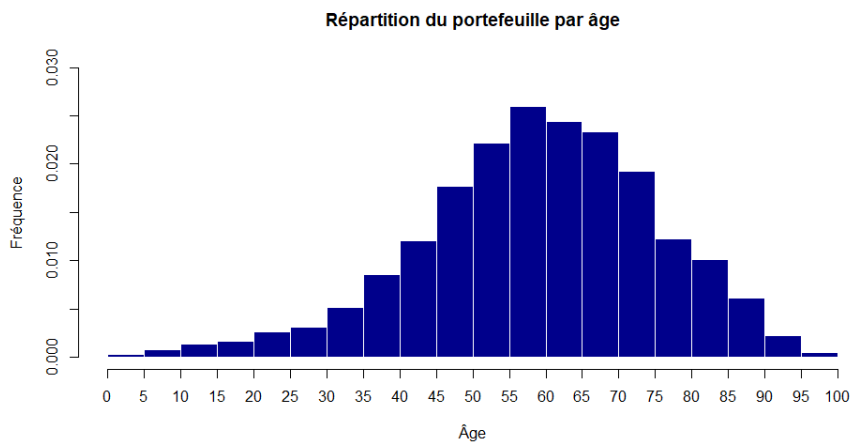


FIGURE 4.1: Répartition du portefeuille par âge

Le portefeuille est composé d'une population assurée d'âge moyen 59 ans. L'âge minimale est 0 année, indiquant un contrat que les parents ont souscrit pour leur enfant dès la naissance.

L'histogramme 4.2 montre la distribution de l'ancienneté au sein du portefeuille au moment de l'extraction de la base.

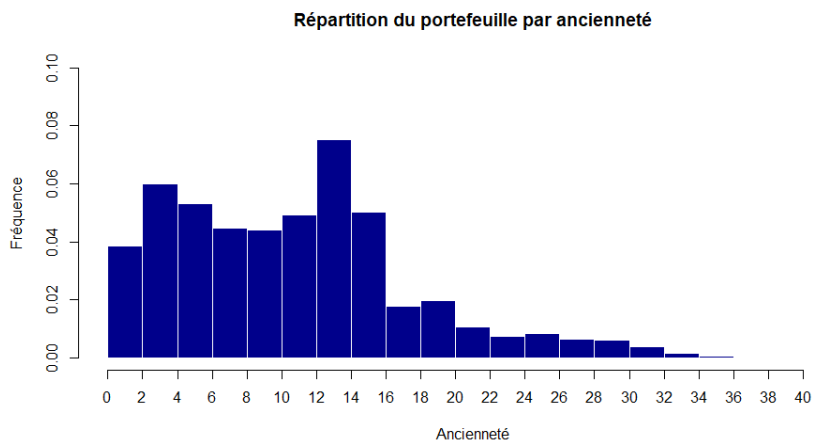


FIGURE 4.2: Répartition du portefeuille par ancienneté

Le portefeuille est composé d'une population assurée d'ancienneté moyenne 11 ans.

Segmentation du portefeuille

Tout d'abord, notre agrégation est limitée par deux variables qualitatives qui caractérisent chaque ligne de la base de données initiale :

- 1) *durecnt_r* correspondant à la détection des produits de rentes ;
- 2) *freq_pp_ms* correspondant à la fréquence des primes périodiques pour les produits en phase de capitalisation.

De plus, comme nous l'évoquions précédemment, il existe au total neuf mailles qui caractérisent chaque ligne de la base de données initiale. Ces neuf mailles sont caractérisées par douze variables. Au total, ce sont treize variables qui limitent les possibilités d'agrégation au sein de la base de données. Ces mailles constituent une contrainte supplémentaire dans notre agrégation car on ne peut pas agréger deux lignes caractérisées par des valeurs différentes pour l'une de ces variables. Afin de délimiter les groupes de lignes pouvant être agrégés entre eux, une variable *CODE_ID* a été construite.

Celle-ci doit être formée en repérant la combinaison de variables permettant l'identification de chaque ligne de la base, appelée clé primaire de la base. La clé primaire est la donnée qui permettra de déterminer de manière unique une ligne de la base. Une ou plusieurs variables peuvent composer la clé primaire. Cette clé permet à deux lignes distinctes de la base de ne pas avoir des valeurs identiques pour les variables définissant cette clé primaire. La clé primaire de la base table doit ainsi être composée des variables qui permettent d'identifier chaque ligne de la base.

Après étude de la base, la clé primaire est composée des sept variables :

- 1) *code_prod_m* ;
- 2) *code_res* ;
- 3) *fam_txit_r* ;
- 4) *fam_tga_ms* ;
- 5) *fam_txpb_m* ;
- 6) *fm_cgenc_m* ;
- 7) *fam_prof_m* ;

La variable *CODE_ID* a été créée par la concaténation de ces sept variables, c'est-à-dire que nous avons :

$$CODE_ID =$$

$$code_prod_m | code_res | fam_txit_r | fam_tga_ms | fam_txpb_m | fm_cgenc_m | fam_prof_m ,$$

Il en résulte 356 mailles distinctes. Suite à la création de cette variable, la compression maximale est maintenant de 356 *model points*, qui résulterait de la compression de chaque maille en un seul *model point*.

4.1.3 Hypothèses

Les travaux s'effectuent sur une base initiale correspondant à une date d'inventaire du 31/12/2019.

Les hypothèses requises pour la création des *model points* sont les hypothèses qui permettent la création des vecteurs de probabilités de sortie correspondant aux probabilités que le contrat arrive à son terme à chaque instant t sur un horizon de projection fixé T . L'horizon de projection est fixé à 25 ans. On considère deux facteurs pouvant amener le contrat à son terme : le décès de la tête assurée et le rachat total du contrat.

Ainsi, deux jeux hypothèses ont été utilisés pour notre étude :

- La table de mortalité associée à chaque ligne, indiquant la probabilité de décès en fonction de l'âge;
- La loi de rachat total associée à chaque ligne, indiquant la probabilité de racheter en fonction de l'ancienneté.

Ces tables d'hypothèses correspondent à une vision au 31/12/2019 comme la base initiale utilisée. Ces hypothèses sont associées à une maille {Produit \times Réseau} qui est une maille moins fine que celle utilisée (*CODE_ID*).

Concernant les hypothèses utilisées par le modèle ALM, elles ne sont pas modifiées et correspondent aussi à une vision au 31/12/2019.

4.1.4 Vecteurs de probabilités de sortie

Nous nous sommes concentrés sur un groupe de la maille *CODE_ID* en particulier. Il est lui aussi distribué selon les trois réseaux de distributions X, Y et Z. Dans la suite, les résultats présentés correspondent à ce groupe.

L'agrégation des lignes est basée sur la notion de vecteur de sortie d'un contrat comme décrit en chapitre 2. Pour chaque ligne i et pour chaque année de projection ($t \in [1, 25]$), la probabilité de sortie $p_i(t - 1, t)$ a été calculée selon la formule décrite en chapitre 2. Ainsi, chaque ligne de la base initiale, est caractérisée par son vecteur de sortie qui forme une trajectoire dans le temps. En traçant cette trajectoire pour chaque ligne de la base de données, on obtient une visualisation graphique du portefeuille. On peut voir en figure 4.3 une visualisation graphique du groupe, grâce aux vecteurs de sortie construits pour chaque ligne, avec une distinction des trajectoires faite en 20 *clusters*.

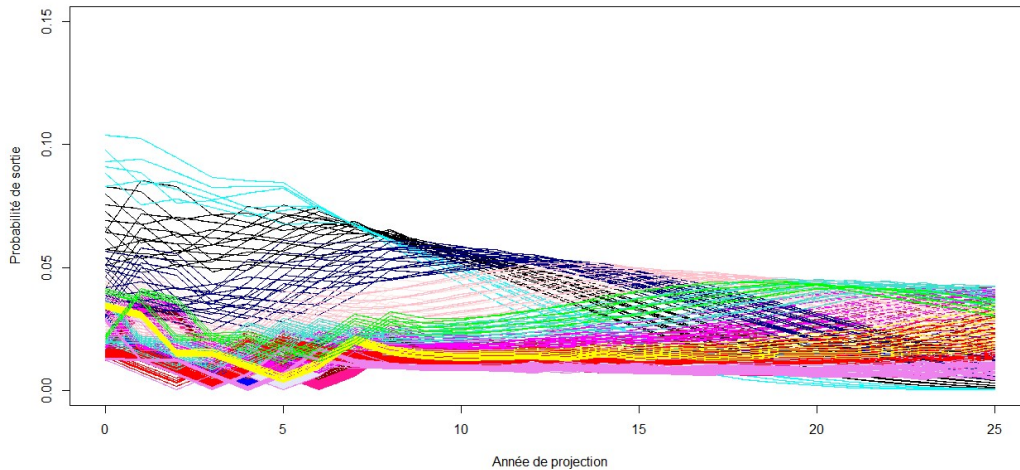


FIGURE 4.3: Trajectoires associées au groupe

4.2 Démarche

Pour estimer le BEL déterministe, nous avons effectué une simulation déterministe qui donnera ainsi une estimation de la performance des *model points*.

Les caractéristiques du groupe sont données dans le tableau 4.3. Nous définissons le temps de calcul comme le temps nécessaire pour la détermination du BEL déterministe par les calculs et les projections du modèle ALM.

NOMBRE DE LIGNES	TEMPS DE CALCUL
7232	13 minutes et 10 secondes

TABLE 4.3: Caractéristiques du groupe étudié

Nous définissons l'erreur comme la valeur absolue de la différence entre la valeur exacte du BEL déterministe et la valeur de BEL déterministe obtenue après agrégation du portefeuille divisée par la valeur exacte du BEL déterministe :

$$\varepsilon = \left| \frac{BEL\ déterministe_{agrégation} - BEL\ déterministe_{exact}}{BEL\ déterministe_{exact}} \right|.$$

Le premier objectif est de déterminer l'algorithme de partitionnement permettant de réduire au maximum l'erreur sur le BEL déterministe tout en permettant de réduire au maximum la réduction le temps de calcul et ainsi permettre de compresser au maximum le portefeuille. Le deuxième objectif est d'obtenir des meilleurs résultats, sur les deux critères évoqués ci-dessus, que la compagnie partenaire. Nous résumons dans le tableau 4.4 les résultats obtenus par les *model points* de la société partenaire.

NOMBRE DE MODEL POINTS	ERREUR SUR LE BEL DÉTERMINISTE	TEMPS DE CONSTRUCTION DES MODEL POINTS	TEMPS DE CALCUL DU MODÈLE ALM
68	0,294%	30 minutes	100 secondes

TABLE 4.4: Caractéristiques des model points du partenaire

Pour atteindre nos objectifs, nous allons chercher le nombre optimal k de *model points* et ensuite analyser les résultats fournis par les algorithmes défini en Chapitre 3.

4.2.1 Comparaison avec une approche classique

Tout d'abord, afin de comparer notre approche utilisant uniquement des vecteurs de sortie en entrée des algorithmes de partitionnement, le calcul du BEL déterministe a été fait en utilisant les deux approches. Ainsi, 68 *model points* ont été construits en utilisant les deux approches :

- L'approche classique, consistant à donner en entrée de l'algorithme les variables âge, sexe et ancienneté ;
- L'approche utilisée dans ce mémoire, consistant à donner en entrée de l'algorithme les vecteurs de sortie.

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 4.5 :

NOMBRE DE MODEL POINTS CONSTRUIT	ERREUR SUR LE BEL DÉTERMINISTE AVEC L'APPROCHE CLASSIQUE	ERREUR SUR LE BEL DÉTERMINISTE AVEC NOTRE APPROCHE
68	0,026%	0,008%

TABLE 4.5: Comparaison avec l'approche classique

Le résultat est sans appel : notre approche induit une erreur sur le BEL déterministe plus de deux fois inférieure à celle engendrée par l'approche classique. Cette comparaison confirme l'efficacité de l'approche utilisée.

4.2.2 Recherche du nombre de model points optimal

La question du nombre optimal de *model points* à choisir est centrale dans l'efficacité de nos algorithmes. Cette problématique a été longuement débattue dans la littérature et de nombreux indicateurs existent. Nous nous sommes concentrés sur l'inertie intra-classe et l'indice Silhouette que nous avons défini en Chapitre 3.

Inertie intra-classe

Pour déterminer la meilleure segmentation, l'inertie intra-classe doit être minimisée. Pour cela, on calcule pour chaque partitionnement en un certain nombre de *model points* k , le pourcentage d'inertie total I_T représenté par l'inertie intra-classe I_W , φ^k défini par :

$$\varphi^k = \frac{I_W^k}{I_T}.$$

L'idée générale est de trouver « le coude » de la courbe modélisant φ^k en fonction du nombre de *model points* k . Si φ^k atteint un plateau à partir d'un nombre de *model points* donné k , ce nombre est optimal au sens du critère d'optimisation de l'inertie intra-classe. La figure 4.4 montre l'évolution du pourcentage d'inertie total I_T représenté par l'inertie intra-classe I_W en fonction du nombre de *model points*. Le critère utilisé est un pourcentage d'inertie total I_T de 5% représenté par l'inertie intra-classe I_W .

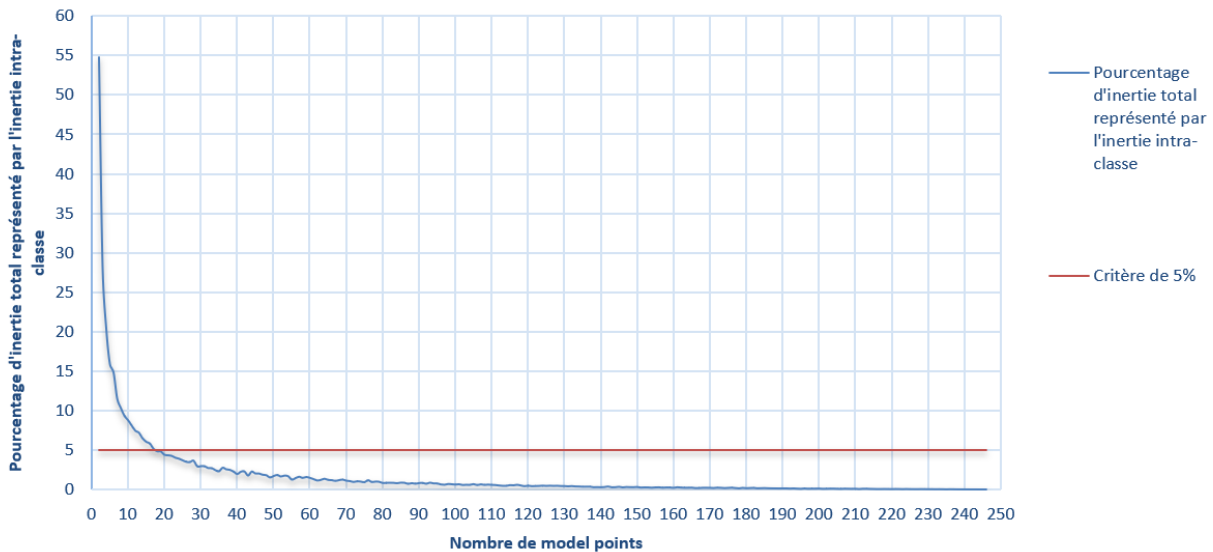


FIGURE 4.4: Optimisation de l'inertie intra-classe

Le meilleur compromis du nombre de *clusters* est de 18.

Indice Silhouette globale

Pour déterminer la meilleure segmentation, un autre indice est utilisé : l'indice Silhouette global. Cet indice doit être maximisé afin de trouver le nombre de *model points* optimal. La figure 4.5 montre l'évolution de l'indice Silhouette global en fonction du nombre de *model points*.

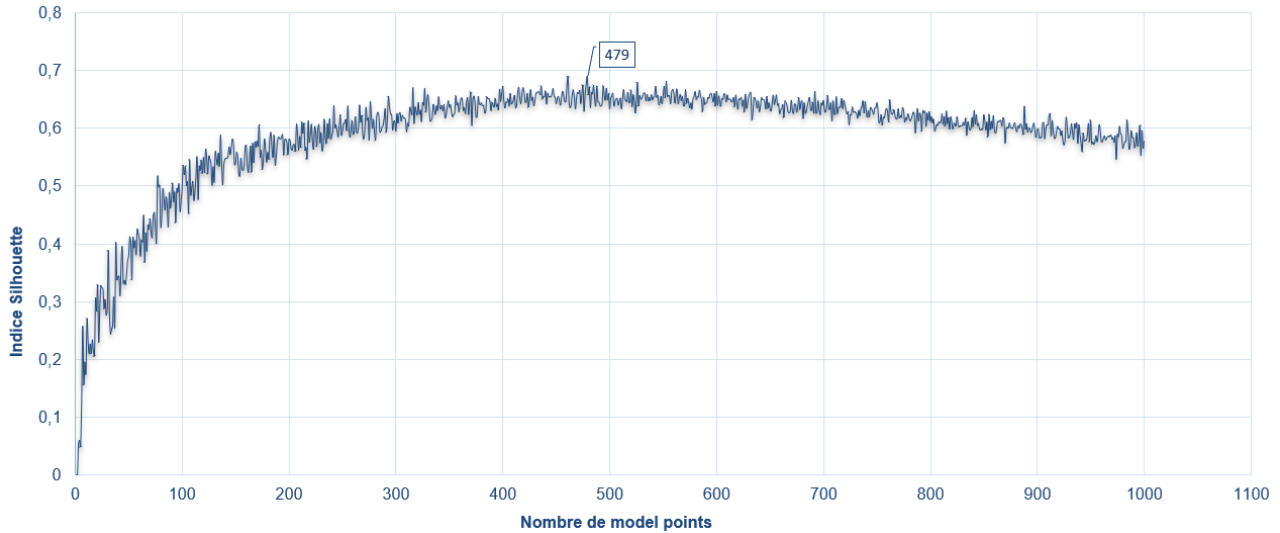


FIGURE 4.5: Maximisation de l'indice Silhouette global

Le meilleur compromis du nombre de *clusters* est de 479.

Conclusion

Les deux indicateurs étudiés n'estiment pas le même nombre de *model points* optimal à former. Les deux algorithmes de partitionnement que nous allons utiliser sont directement liés à l'inertie intra-classe, c'est pourquoi nous allons choisir dans la suite l'estimation de 18 *model points* donnée par l'optimisation de l'inertie intra-classe.

4.2.3 Impact sur le BEL déterministe

Après avoir obtenu le nombre de *model points* optimal par l'optimisation de l'inertie intra-classe, nous allons maintenant appliquer nos algorithmes de partitionnement au voisinage de cette valeur. Suite à la création des *model points*, nous allons ensuite calculer le BEL déterministe associé et l'erreur qui en découle.

Erreur sur le BEL déterministe

La figure 4.6 représente l'erreur ε sur le BEL déterministe en fonction du nombre de *model points* construits avec les algorithmes K-Means et CAH.

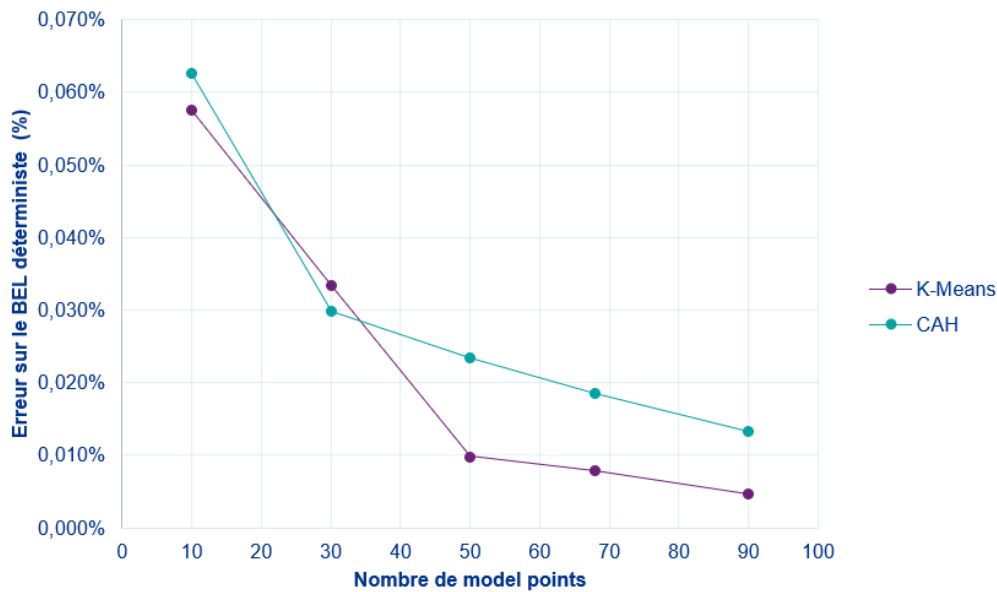


FIGURE 4.6: Erreur sur le BEL déterministe en fonction du nombre de model points construits par les algorithmes K-Means et CAH

Tout d'abord, on remarque de manière évidente, que plus le nombre de *model points* composant la base agrégée est grand, plus l'erreur sur le BEL déterministe diminue. De plus, on remarque que l'erreur engendrée par le calcul du BEL déterministe avec les *model points* des deux algorithmes est toujours inférieure à 0,070%. L'erreur induite est donc minime et largement inférieure à l'erreur de 0,294% induite par les *model points* du partenaire. Finalement, on remarque que l'approche K-Means par rapport à l'approche CAH permet une erreur sur le BEL déterministe équivalente pour les plus forts taux de compression et une erreur près de deux fois inférieure pour les plus faibles taux de compression.

Réduction du temps de calcul

Le tableau 4.6 représente le temps de construction des *model points* par les algorithmes K-Means et CAH en fonction du nombre de *model points* construits par ces algorithmes.

NOMBRE DE MODEL POINTS	TEMPS K-MEANS (s)	TEMPS CAH (s)
10	27	31
30	25	30
50	27	30
68	27	29
90	30	29

TABLE 4.6: Temps de construction des *model points* par les algorithmes K-Means et CAH en fonction du nombre de *model points* construits par ces algorithmes

Premièrement, on remarque que les temps de construction des *model points* des deux algorithmes se situent toujours entre 25 et 35 secondes. Comparé aux 30 minutes de construction des *model points* du partenaire, le temps de construction de nos *model points* est largement inférieur, permettant une construction des *model points* rapide. De plus, on remarque que les deux méthodes de partitionnement engendrent des temps de construction des *model points* similaires et ne semblent pas dépendre de l'évolution du nombre de *model points*. Aucune différence significative ne permet de départager les deux méthodes.

La figure 4.7 représente le temps de calcul nécessaire pour la détermination du BEL déterministe par le modèle ALM avec les *model points* construits par les algorithmes K-Means et CAH en fonction du nombre de *model points* construits par ces algorithmes.

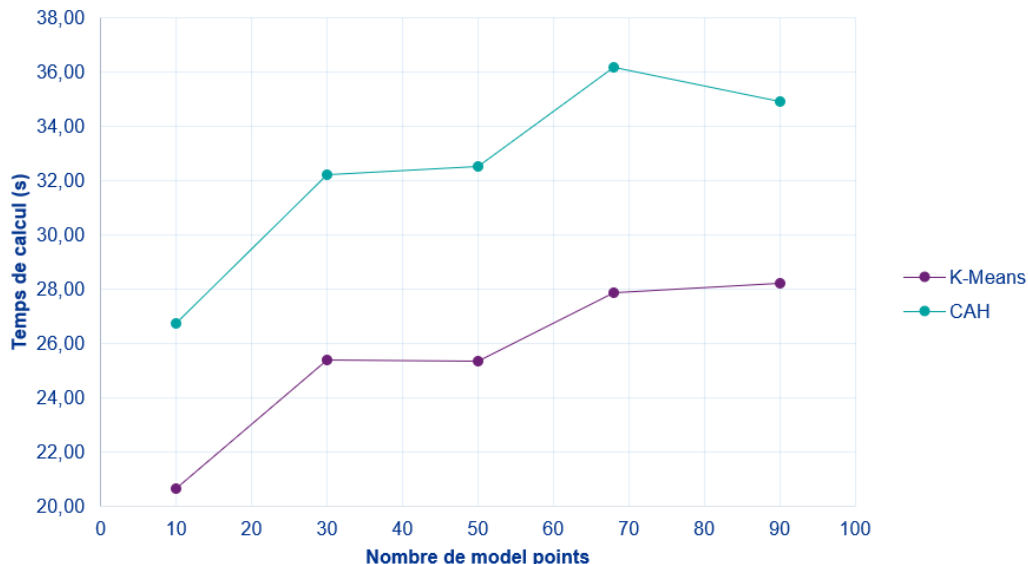


FIGURE 4.7: Temps de calculs ALM avec les *model points* construits par les algorithmes K-Means et CAH en fonction du nombre de *model points* construits par ces algorithmes

Logiquement, on note que l'augmentation du nombre de *model points* dans la base agrégée aug-

mente le temps de calcul. Les temps de calcul des deux algorithmes se situent toujours dans un certain intervalle de temps entre 20 et 37 secondes, permettant une exécution du modèle ALM plus rapide que celui avec les *model points* du partenaire et leurs 100 secondes de temps de calcul. Finalement, on remarque également que l'approche K-Means engendre des temps de calcul toujours inférieurs à l'approche CAH.

Résultats des méthodes combinatoires

Le tableau 4.7 récapitule les résultats obtenus par les combinaisons d'algorithmes.

COMBINAISON	NOMBRE DE MODEL POINTS	ERREUR SUR LE BEL DÉTERMINISTE	TEMPS DE CONSTRUCTION DES MODEL POINTS	TEMPS DE CALCUL DU MODÈLE ALM
K-MEANS + CAH	68	0,005%	26 secondes	25 secondes
K-MEANS + CAH + K-MEANS	68	0,008%	27 secondes	26 secondes

TABLE 4.7: Résultats associés aux combinaisons d'algorithmes

Les deux combinaisons produisent d'excellentes performances : les erreurs engendrées par le calcul du BEL déterministe avec les *model points* des deux combinaisons sont minimales et largement inférieures à l'erreur de 0,294% induite par les *model points* du partenaire. De plus, on remarque que les temps de calcul des deux méthodes, que ce soit pour la construction des *model points* ou les calculs du modèle ALM, sont réduits et largement inférieurs aux temps associés aux *model points* du partenaire. Finalement en comparant les résultats obtenus pour une compression à 68 *model points*, les méthodes combinatoires sont plus performantes que l'algorithme CAH et aussi performantes que l'algorithme de K-Means. En terme de temps de calcul, les résultats des approches combinatoires sont similaires aux algorithmes seuls.

Conclusion

Le nombre optimal de *model points* dépend de l'objectif final recherché par la compagnie d'assurance. Un niveau minimal d'erreur et un certain taux de compression du portefeuille sont souvent souhaités. Suite à nos études sur l'erreur sur le BEL déterministe et le temps de calcul associés à un nombre de *model points*, nous pouvons trouver un compromis entre ces deux critères : l'utilisation de l'algorithme K-Means et la création de 50 *model points* ou l'utilisation de la combinaison K-Means + CAH et la création de 68 *model points*.

4.2.4 Application à un groupe plus volumineux

Maintenant que nous connaissons le meilleur algorithme de partitionnement à utiliser, l'objectif est de savoir si le traitement d'un plus grand nombre de données affectera l'efficacité de l'approche utilisée.

Le nouveau groupe du portefeuille choisi est ainsi composé de plus de lignes que le groupe précédent, ses caractéristiques sont données dans le tableau 4.8.

NOMBRE DE LIGNES	TEMPS DE CALCUL
82 990	2 heures 36 mins 27 secs

TABLE 4.8: Caractéristiques du nouveau groupe

Ce groupe étant plus volumineux, le temps de calcul nécessaire lors de l'exécution du modèle ALM est d'autant plus important. Cet exemple va permettre d'évaluer le gain de temps permis par l'utilisation des *model points* et surtout de déterminer l'impact sur l'évaluation du BEL déterministe .

Les résultats des précédentes parties nous ont montré que, entre autres, l'algorithme des K-Means était très efficace, ainsi nous avons construit 157 *model points* avec cette méthode. Nous résumons dans le tableau 4.9 les résultats obtenu.

NOMBRE DE MODEL POINTS	ERREUR SUR LE BEL DÉTERMINISTE	TEMPS DE CALCUL DU MODÈLE ALM
157	0,002%	38 secondes

TABLE 4.9: Caractéristiques des model points construits

Logiquement, le temps de calcul du modèle ALM est considérablement réduit en compressant le groupe à 157 *model points*, en passant de deux heures à une quarantaine de secondes, permettant une réduction de près de 99,6%.

Si on compare maintenant l'application de notre approche sur un groupe plus volumineux que précédemment, on remarque que l'erreur sur le BEL déterministe se trouve dans le même ordre de grandeur, se trouvant maintenant en dessous de la barre d'erreur de 0,01%. L'application à un plus grand nombre de ligne n'affecte pas l'efficacité du modèle d'agrégation.

Afin de pouvoir comparer avec les *model points* actuellement utilisés par la société partenaire, nous comparons dans le tableau 4.10, les résultats obtenu avec le nouveau groupe.

	NOMBRE DE MODEL POINTS	ERREUR SUR LE BEL DÉTERMINISTE	TEMPS DE CALCUL DU MODÈLE ALM
PARTENAIRE	157	0,060%	38 secondes
K-MEANS	157	0,002%	38 secondes

TABLE 4.10: Caractéristiques des model points du partenaire

On remarque que l'erreur sur le BEL déterministe est divisée par 30 grâce à l'utilisation de notre approche. Il est clair que l'approche utilisée se montre plus efficace, que ce soit donc pour un groupe restreint ou un groupe plus volumineux.

4.2.5 Application à l'ensemble du portefeuille

Par la suite, la démarche utilisée pour un groupe composant la maille *CODE_ID* devra être appliquée à l'ensemble des groupes constituant la maille *CODE_ID*. Cependant, la problématique sur le nombre de *model points* optimal n'est pas nécessairement primordiale. En effet, le temps d'exécution des projections ALM impose une première contrainte sur le nombre de *model points* à construire pour l'ensemble du portefeuille. De plus, chaque groupe composant la maille *CODE_ID* étant de volume différent, le nombre de *model points* optimal associé à chaque groupe varie. La solution serait ainsi de définir un certain nombre de *model points* pour chaque groupe en fonction d'un certain critère, comme par exemple la proportion de provision mathématique représentée par le groupe. Le modèle d'agrégation final correspond à l'automatisation de la démarche pour chaque groupe composant la maille *CODE_ID*, tout en définissant le nombre de *model points* pour chaque groupe selon un certain critère.

Conclusion

L'objectif de cette étude a été de proposer une approche intelligente d'agrégation des contrats d'assurance en *model points*. Le mémoire est axé sur la méthode de construction des *model points*, la compression du portefeuille initial et les temps de calcul induits par cette construction. Après avoir étudié les principales caractéristiques de l'épargne, le contrat au coeur de notre mémoire, et les principaux concepts de la modélisation actif-passif, nous avons proposé et développé notre approche dite *Model point*.

Cette méthode de modélisation consiste à réduire le nombre de lignes de passif données en entrée du modèle ALM. Elle permet de regrouper plusieurs contrats d'assurance entre eux et ainsi de former des *clusters*. Ces différents *clusters* seront représentés de la manière la plus fidèle par un seul contrat fictif qui est appelé *model point*. Pour pallier aux contraintes de la segmentation, les contrats regroupés sous un même *cluster* doivent avoir les caractéristiques les plus similaires possibles. Notre approche est innovante en se différenciant de l'approche classique rencontrée dans la littérature. Celle-ci consiste à regrouper les contrats d'assurances qui ont des caractéristiques importantes similaires c'est à dire principalement les contrats correspondant des âges et des anciennetés identiques. Dans ce mémoire, les *model points* sont eux construits grâce à des algorithmes de partitionnement appliqués aux vecteurs de sortie des contrats.

La première étape a été de trouver différents algorithmes de *clustering* qui permettraient le meilleur modèle d'agrégation des contrats possible. L'objectif d'un algorithme de partitionnement est d'affecter à chaque élément donné en entrée un *cluster*. Le but est donc d'affecter à chaque contrat du portefeuille, plus précisément à chaque ligne de la base initiale, un *cluster*. Nous nous sommes concentrés sur les algorithmes K-Means et CAH, ainsi que les combinaisons de ces algorithmes.

La deuxième étape a été de définir un vecteur de sortie. Un vecteur de sortie d'un contrat correspond aux probabilités que ce contrat arrive à son terme sur un horizon de projection fixé. On a supposé que la fin du contrat pouvait être engendrée soit par le décès de la tête assurée, soit par le rachat du contrat par l'assuré. Ainsi, le vecteur de sortie de chaque contrat est calculé en fonction d'une table de mortalité dépendant de l'âge de la tête assurée et d'une table de rachat dépendant de l'ancienneté de l'assuré.

Après avoir défini les différents paramètres nécessaires à la construction d'un modèle d'agrégation des *model points*, le but a été d'évaluer la qualité des méthodes utilisées. Nous nous sommes concentrés sur un indicateur particulier : le BEL. Pour estimer le BEL déterministe, nous avons effectué une simulation déterministe afin de produire une première estimation de la performance des *model points*. Finalement, nous nous sommes concentrés sur un sous-groupe du portefeuille.

L'évaluation de la qualité des algorithmes utilisés s'est faite en deux étapes sur un sous-groupe du portefeuille, composé de 7232 lignes. Le premier objectif a été de déterminer l'algorithme de partitionnement permettant de réduire au maximum l'erreur sur le BEL déterministe tout en permettant de

compresser au maximum le portefeuille. Le deuxième objectif a été d'obtenir des meilleurs résultats ou d'améliorer les résultats de la compagnie partenaire, qui construit 68 *model points* pour le sous-groupe étudié, induisant une erreur sur le BEL déterministe de 0,294%.

Les résultats montrent que l'approche K-Means permet une erreur sur le BEL déterministe toujours inférieure à celle de l'approche CAH dans la majorité des cas. Cet algorithme permet ainsi de réduire au maximum l'erreur sur le BEL déterministe tout en permettant de compresser au maximum le portefeuille. De plus, l'erreur induite est largement inférieure à l'erreur de 0,294% induite par les *model points* du partenaire. Ainsi la méthode utilisée permet d'obtenir des meilleurs résultats que la compagnie partenaire.

Pour aller plus loin, nous avons testé des combinaisons d'algorithmes. Les résultats montrent que les deux combinaisons produisent d'excellentes performances. Les méthodes combinatoires sont plus performantes que l'algorithme CAH et aussi performantes que l'algorithme de K-Means. Ainsi, les erreurs engendrées par le calcul du BEL déterministe avec les *model points* des deux combinaisons sont aussi largement inférieures à l'erreur de 0,294% induite par les *model points* du partenaire.

L'objectif final recherché par la compagnie d'assurance est central dans la lecture des résultats. Un niveau minimal d'erreur et un certain taux de compression du portefeuille sont souvent souhaités. Suite à cette première étude, nous avons pu trouver un compromis entre ces deux critères : l'utilisation de l'algorithme K-Means et la création de 50 *model points* ou l'utilisation de la combinaison K-Means + CAH et la création de 68 *model points*.

L'objectif a été finalement de tester notre modèle d'agrégation le plus pertinent sur un sous-groupe plus volumineux de 82 990 lignes. Ce test a permis d'évaluer l'impact du volume du sous-groupe sur l'erreur sur le BEL déterministe. Les résultats montrent que l'erreur sur le BEL déterministe se trouve dans le même ordre de grandeur, en dessous de la barre d'erreur de 0,01%. L'application à un plus grand nombre de ligne n'a donc pas affecté l'efficacité du modèle d'agrégation. Grâce à l'utilisation de notre approche, l'erreur sur le BEL déterministe est divisée par 30 par rapport aux *model points* du partenaire. L'approche utilisée se montre ainsi plus efficace, que ce soit donc pour un groupe restreint ou un groupe plus volumineux.

Notre étude a donc montré que l'approche développée en utilisant des vecteurs de sortie en entrée d'algorithmes de partitionnement est pertinente et efficace. Elle permet de construire des *model points* à n'importe quelle maille, et ainsi obtenir des *model points* adaptés à la réglementation IFRS 17.

L'étude s'est limitée à deux sous-groupes et donc une petite partie du portefeuille, ce qui constitue l'une des principales limites des résultats obtenus. La démarche utilisée pour une partie du portefeuille devra être faite sur l'ensemble de celui-ci tout en continuant d'être aussi performante. Les temps de construction des *model points* pourraient devenir importants et limiter la performances des algorithmes en termes de réduction du temps de calcul total. Finalement, l'étude s'est concentrée sur le développement d'une approche de construction de *model points* innovante, pertinente et efficace.

Les pistes d'amélioration de la méthode présentée restent nombreuses. Une première piste pourrait être d'effectuer des simulations stochastiques, tout comme des tests de sensibilité tout en prenant en compte d'autres subtilités dans la construction des vecteurs de sortie telle que la distinction des rachats partiels et totaux. Comme autres pistes d'amélioration, il pourrait être envisagé, par exemple, de définir un certain nombre de *model points* pour chaque sous-groupe du portefeuille en fonction d'un certain critère, comme par exemple la proportion de provision mathématique représentée. L'utilisation de nouveaux algorithmes de partitionnement ou encore la détermination de la relation entre le nombre de *model points* construit et l'erreur induite seraient des améliorations bénéfiques au modèle d'agrégation.

Bibliographie

- ACTUARIS (2017). Infotech numéro 48, Introduction à la norme IFRS 17. Rapp. tech. Actuaris, Ad-dactis Group.
- AUTORITÉ DE CONTRÔLE PRUDENTIEL ET DE RÉOLUTION (2013). Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité II. <https://acpr.banque-france.fr/>.
- CARN, R. (2013). Le flexing en assurance-vie: principes, utilisations et application à des contrats d'épargne en euros. Mém. de mast. EURIA — EURO Institut d'Actuariat, Brest.
- CODE DES ASSURANCES (2020a). Légifrance.
- CODE DES ASSURANCES (2020b). Article L. 132-23. Légifrance.
- CODE DES ASSURANCES (2020c). Article R. 331-3. Légifrance.
- CODE DES ASSURANCES (2020d). Article R. 342-10. Légifrance.
- CODE DES ASSURANCES (2020e). Article R. 343-10. Légifrance.
- CODE DES ASSURANCES (2020f). Article R. 343-9. Légifrance.
- DHERBÉCOURT, C. (2017). Peut-on éviter une société d'héritiers ? Rapp. tech. France Stratégie.
- F. BONNIN, F. PLANCHET et M. JULLIARD (2014). Best estimate calculations of saving contracts by closed formulas : Application to the ORSA. *European Actuarial Journal* 4.1, p. 181-196.
- FORGY, E. (1965). Cluster Analysis of Multivariate Data : Efficiency Versus Interpretability of Classifications. *Biometric Society Meetings* 21.3, p. 768.
- FOUCHAL, S. (2011). Partitionnement d'objets complexes : méthodes et algorithmes. Thèse de doct. Université Paris 8, Paris.
- FÉDÉRATION FRANÇAISE DE L'ASSURANCE (2018). Le régime fiscal de l'assurance vie. <https://www.ffa-assurance.fr/infos-assures/le-regime-fiscal-de-assurance-vie>.
- G. CELEUX, E. DIDAY, G. GOVAERT, Y. LECHEVALIER et H. RALAMBONDRAINY (1989). Classification automatique des données. Dunod.
- GOFFARD, P. (2015a). Approximations polynomiales de densités de probabilité et applications en assurance. Thèse de doct. Université Aix-Marseille, Marseille.
- GOFFARD, P. (2015b). Optimisation de l'agrégation d'un portefeuille de contrat d'assurance vie. Rapp. tech. Université Aix-Marseille.
- GUIBERT, Q. (2019). Méthodes de simulation en assurance : simulation des risques financiers.
- L. DEVINEAU et S. LOISEL (2009). Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des "simulations dans les simulations " pour le calcul du capital économique Solvabilité II. *Bulletin Français d'Actuariat* 10.17, p. 188-221.
- L. LEBART, M. PIRON et A. MORINEAU (2006). Statistique Exploratoire Multidimensionnelle. Dunod.
- MACQUEEN, J. (1967). Some methods for classification and analysis of multivariate observations. *Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* 1.5, p. 281-297.
- NELDER, J. A. et WEDDERBURN, R. W. M. (1972). Generalized Linear Models. *Journal of the Royal Statistical Society*.

- OUADEIH, M. (2018). Implémentation d'une nouvelle méthode de modélisation des flux de passif d'un contrat Épargne dans un modèle ALM et comparaison avec la méthode "Flexing". Mém. de mast. ENSAE ParisTech, Palaiseau.
- P. WOZNIAK et A. HUPERT (2019). Introduction to IFRS 17. Rapp. tech. 3 Blocks.
- PELTIER, C. (2018). Présentation IFRS 17. Rapp. tech. <https://hal.archives-ouvertes.fr>.
- PRAS, I. (2019). Introduction to IFRS for insurer.
- SAPORTA, G. (2011). Probabilités, Analyse des données et Statistique, 3ème édition révisée. Technip.
- T. NTEUKAM et F. PLANCHET (2012). Stochastic evaluation of life insurance contracts : Model point on asset trajectories and measurements of the error related to aggregation. *Insurance :Mathematics and Economics* 51.3, p. 624-631.
- TAVENEAUX, A. (2019). Théorie de l'assurance-vie, Partie 1 : Introduction à l'assurance-vie.
- THE INTERNATIONAL ACCOUNTING STANDARDS BOARD (THE BOARD) (2017). IFRS 17 Insurance Contracts.
- TICHT, D. (2019). Construction d'un modèle ALM pour l'analyse de l'impact d'une remontée des taux sur la solvabilité d'un assureur vie. Mém. de mast. ENSAE ParisTech, Palaiseau.

Annexe A

Annexes

A.1 Théorème de Huygens

Si g est le centre de gravité de E , on a :

$$\forall a \in E, I_a = I_g + \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) d_M^2(a, g)$$

D'après la définition de l'inertie par rapport à un point a , on a :

$$I_a = \sum_{i=1}^n w_i \|x_i - a\|_M^2$$
$$I_a = \sum_{i=1}^n w_i \|x_i - g + g - a\|_M^2$$

M étant symétrique, on a :

$$I_a = \sum_{i=1}^n w_i \|x_i - g\|_M^2 + 2 \sum_{i=1}^n w_i (g - a)^t M (x_i - g) + \sum_{i=1}^n w_i \|g - a\|_M^2$$

$$I_a = I_g + \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) d_M^2(a, g) + 2 (g - a)^t M \sum_{i=1}^n w_i (x_i - g)$$

Or $\sum_{i=1}^n w_i (x_i - g) = 0$

On a donc :

$$I_a = I_g + \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) d_M^2(a, g)$$

A.2 Dendrogrammes associés à différents indices d'agrégation de Huygens

L'indice du saut minimal (lien simple)

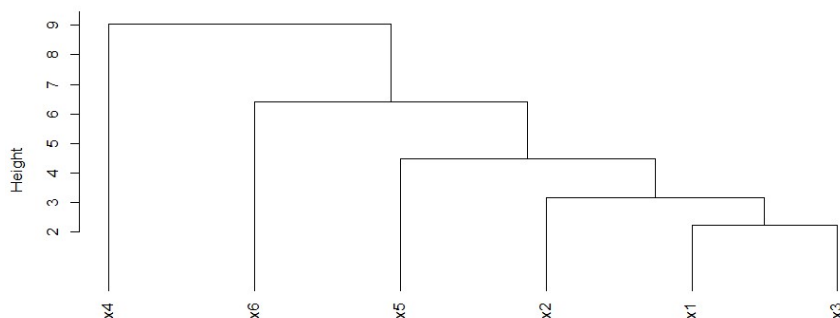


FIGURE A.1: Dendrogramme pour le lien simple

L'indice du saut maximal (lien complet)

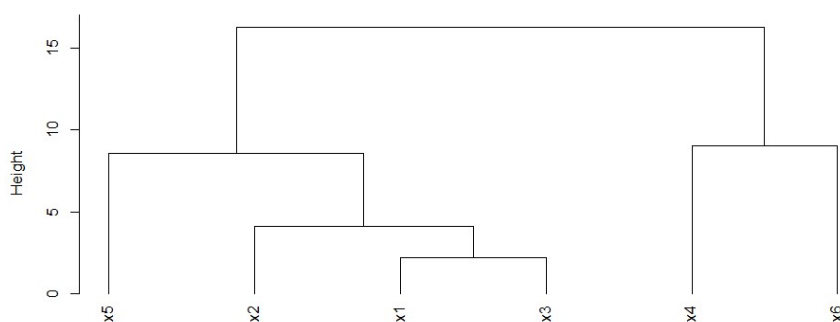


FIGURE A.2: Dendrogramme pour le lien complet

L'indice du lien moyen

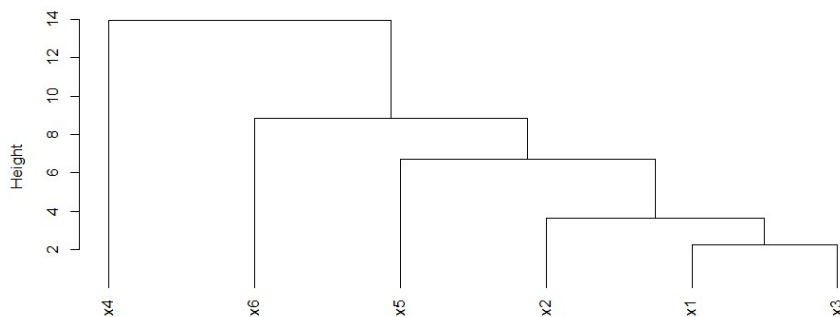


FIGURE A.3: Dendrogramme pour le lien moyen

L'indice des centres de gravité

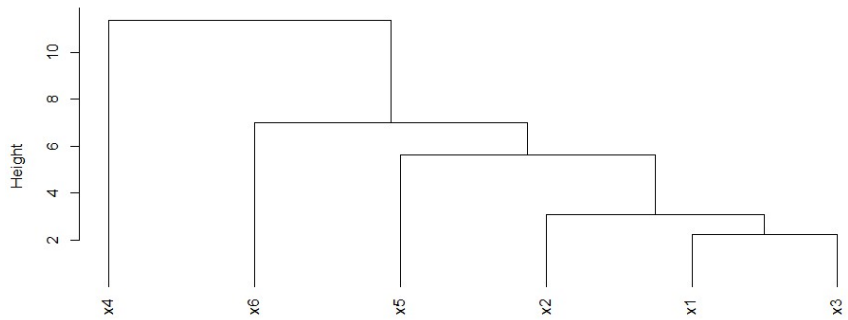


FIGURE A.4: Dendrogramme pour l'indice des centres de gravités

L'indice de Ward (la variance)

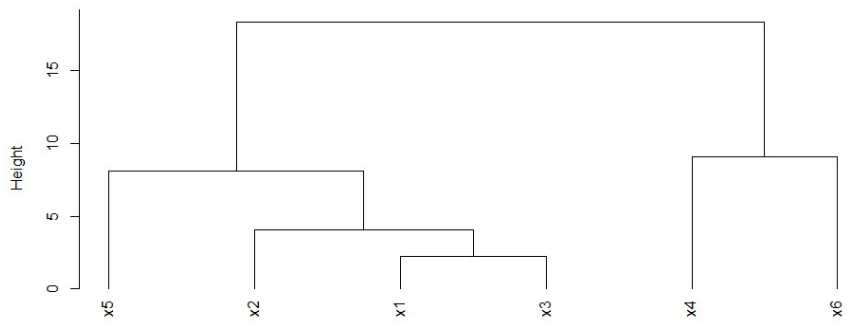


FIGURE A.5: Dendrogramme pour l'indice de Ward