

Mémoire présenté le : 27/02/2020
pour l'obtention du diplôme du Master Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaire

Par : Lokmane BENADJAL

Titre : Optimisation de la qualité des tables de scénarios économiques

Confidentialité : Non Oui (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaire :*

Entreprise :
Nom : SOGECAP
Signature :

Membres présents du Jury du Master

Directeur de Mémoire en entreprise :
Nom : Thomas DALLER

*Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents
actuaires (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise

Bibliothèque :

Signature du candidat

Résumé

La valorisation de certains contrats d'assurance repose sur l'utilisation d'un générateur de scénarios économiques risque-neutre. La validation des scénarios générés passe par des tests statistiques de martingalité et de market-consistency. L'erreur statistique associée aux tests de validation peut se traduire en incertitude sur les résultats des calculs ALM. De ce fait, la validation des scénarios doit faire l'objet d'une étude à chaque calcul.

L'objectif du mémoire est d'identifier, à différentes étapes du processus de génération des tables, des points permettant de réduire l'incertitude liée aux tests et de générer des scénarios en cohérence avec le passif de la compagnie. De la qualité de l'aléa aux ajustements appliqués au scénarios en passant par les choix effectués au calibrage, plusieurs pistes seront explorées afin d'améliorer la convergence des tests de validation du jeu de scénarios utilisé.

Mots-clés : Générateur de scénarios économiques, Tests de martingalité, Market-consistency, Validation des scénarios.

Abstract

The valuation of saving contracts requires the use of a risk neutral economic scenario generator. To validate the simulated scenarios, statistic tests of martingality and market-consistency are performed. The statistical error associated to the tests leads to an uncertainty in the ALM calculations. Therefore, a study aiming at validating the scenarios must be done at each simulation.

The main goal of this master thesis is to identify, at different steps of the process, key points that could reduce the statistical error of the tests and generate scenarios that are coherent with the liability of the company. The main leads to improve the quality of the tests are : the impact of the randomness used in the simulation, choices made during the calibration stage and the impact of adjustments made to scenarios.

Keywords : Economic scenario generator, martingality tests, market-consistency, Validation tests.

Note de Synthèse

La qualité d'un jeu de scénarios économiques risque-neutre s'apprécie principalement à travers l'analyse des tests de validation et la convergence des résultats. Dans le cadre de l'étude, la validation des scénarios générés passe par les tests de martingalité (on s'assure que la diffusion des actifs actualisés à chaque pas de temps, vu en $t = 0$ est une martingale) et de *market-consistency* (les scénarios permettent de retrouver les prix de marché des produits dérivés qui ont servi au calibrage des modèles).

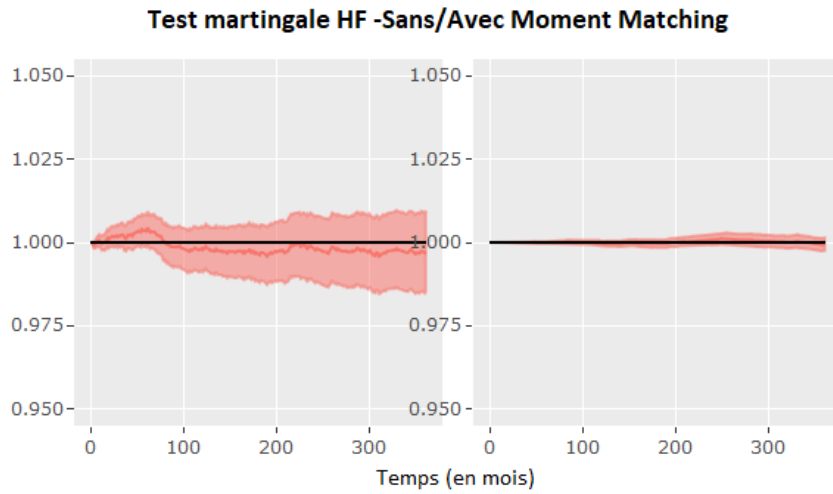
À différentes étapes du processus de génération des tables, des pistes permettant l'amélioration de la convergence des tests de validation sont étudiées.

Impact de la qualité de l'aléa utilisé sur la convergence des tests et des résultats

La génération des scénarios économiques nécessite l'utilisation de séquences aléatoires (pour les browniens qui interviennent dans la définition des modèles de diffusion). Pour cela, il est important de s'assurer de la qualité du générateur de nombres aléatoires utilisé. Une fois les séquences générées, certains ajustements effectués sur le jeu de nombres aléatoires généré montre la relation directe entre la qualité de l'aléa et la qualité des tests de validation des scénarios.

La correspondance des moments

Les variables aléatoires utilisées sont des gaussiennes centrées réduites. À chaque pas de temps et pour chaque modèle 1000 gaussiennes sont générées pour alimenter le brownien permettant la diffusion du modèle. Du fait du nombre limité de scénarios utilisés, la moyenne et la variance peuvent dévier de leurs valeurs théoriques (0 pour la moyenne et 1 pour la variance). Le retraitement des séquences à chaque pas de temps et pour chaque grandeur diffusée a un impact sur la convergence du test martingale. Par exemple, pour la diffusion de l'actif *hedge fund*, le test martingale au seuil 95% avec ou sans correspondance des moments (ou MM pour *moment matching*) est le suivant :



La moyenne de la valeur absolue de l'erreur est :

HF sans ajustement	HF avec ajustement
0.83	0.11

Des résultats similaires sont observés sur les tests martingales de tous les actifs. Cela illustre le fait que la qualité de l'ajustement de propriétés statistiques simples (les deux premiers moments) de la séquence de nombre utilisée impacte la qualité du test martingale.

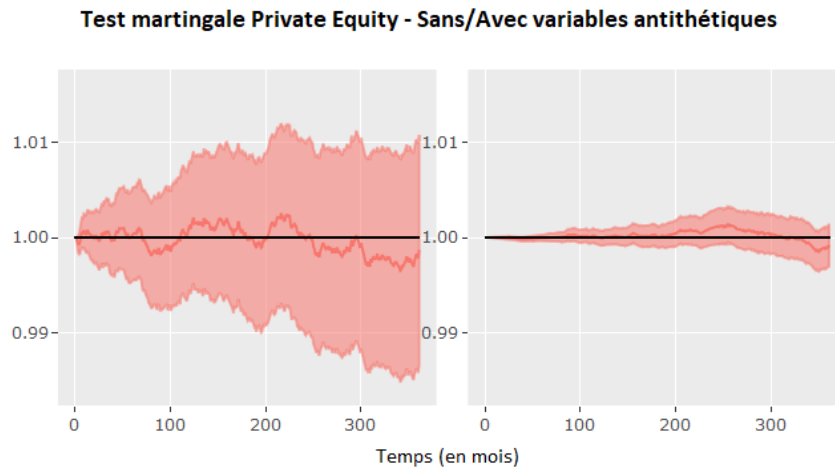
Variabes antithétiques

La formule permettant de construire un intervalle de confiance autour de l'estimateur de la moyenne pour le test martingale dépend, à seuil fixé, de l'écart-type σ et de du nombre de scénarios n .

$$\left[\hat{X} - q_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \hat{X} + q_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Il est possible de réduire l'incertitude en réduisant la variance σ ou en augmentant le nombre de scénarios.

La méthode des variables antithétiques est une technique de réduction de variance. Il s'agit de construire un nouvel estimateur ayant une variance plus petite que l'estimateur initial. L'application de cette méthode permet d'augmenter la précision des tests martingale, comme sur l'exemple du test sur l'actif *Private equity* au seuil 95% :



Utilisation d'un générateur quasi-aléatoire

On étudie par la suite l'utilisation d'une source différente d'aléa. La suite de Sobol est une suite déterministe ayant de remarquables propriétés d'uniformité. Cependant, la principale limite liée à l'utilisation de ces suites est la dimension. Étant donné que la dimension dans lequel les séquences aléatoires sont générées est particulièrement grande dans cette étude, l'utilisation des suites de Sobol est limitée dans le cadre de l'étude. Une approche hybride est proposée dans laquelle l'utilisation de la suite de Sobol est combinée à un générateur pseudo-aléatoire. Un changement de la source de l'aléa en passant à un générateur possédant de meilleures propriétés statistiques améliore la précision de l'estimation de la moyenne dans le test martingale. Le graphique suivant illustre les tests martingales de 10 tables (à gauche) utilisant des nombres pseudo-aléatoire pour la génération des taux et 10 tables (à droite) utilisant un générateur quasi-aléatoire :

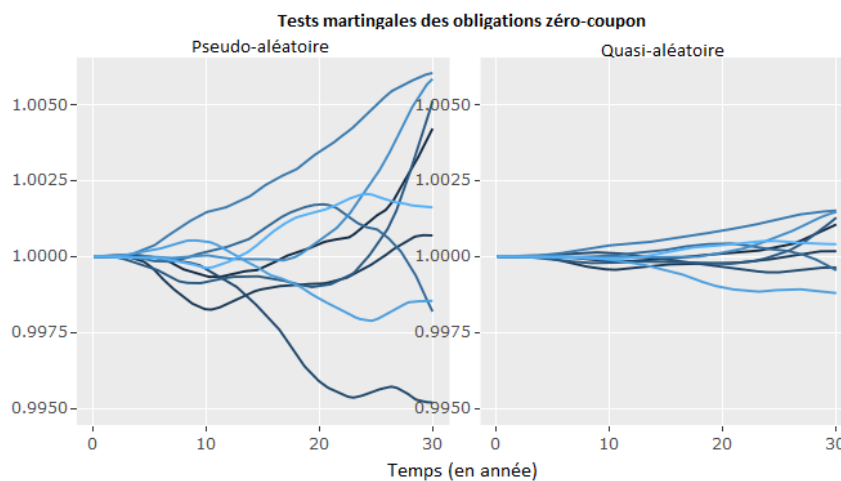


Figure - Tests de martingalité sur les prix des obligations zéro-coupon issus de 10 tables en changeant la source de l'aléa

Impact des choix effectués à l'étape du calibrage sur la convergence des tests

Le modèle de taux est calibré de manière à minimiser les écarts entre les volatilités implicites de marché des swaptions et les volatilités implicites reproduites par le modèle. Cependant, la nappe de volatilité (avec les différents tenors/maturités/strikes) ne peut être parfaitement ajustée par le modèle à sept paramètres.

La première étape des tests de *market-consistency* est de vérifier que les volatilités implicites reproduites par le modèle ne sont pas trop éloignées des volatilités de marché (le seconde étape étant que les volatilités implicites calculées à partir des scénarios générés correspondent aux volatilités implicites de marché).

Étant donné l'incapacité du modèle à capturer toute la surface de volatilités, il faut déterminer les zones de cette surface qu'il est important de répliquer avec le plus d'attention. Pour cela, plusieurs zones de swaptions sont choquées, et pour chaque choc, l'impact sur la NAV est mesuré. Cette méthode permet de déterminer à quelles zones de la matrice de volatilités implicites des swaptions les résultats sont sensibles.

Le graphique suivant illustre la sensibilité de la NAV à une variation de la volatilité implicite de +25%. Les zones les plus sombres correspondent à celles où un choc de la volatilité implicite implique les plus grandes pertes en terme de NAV.

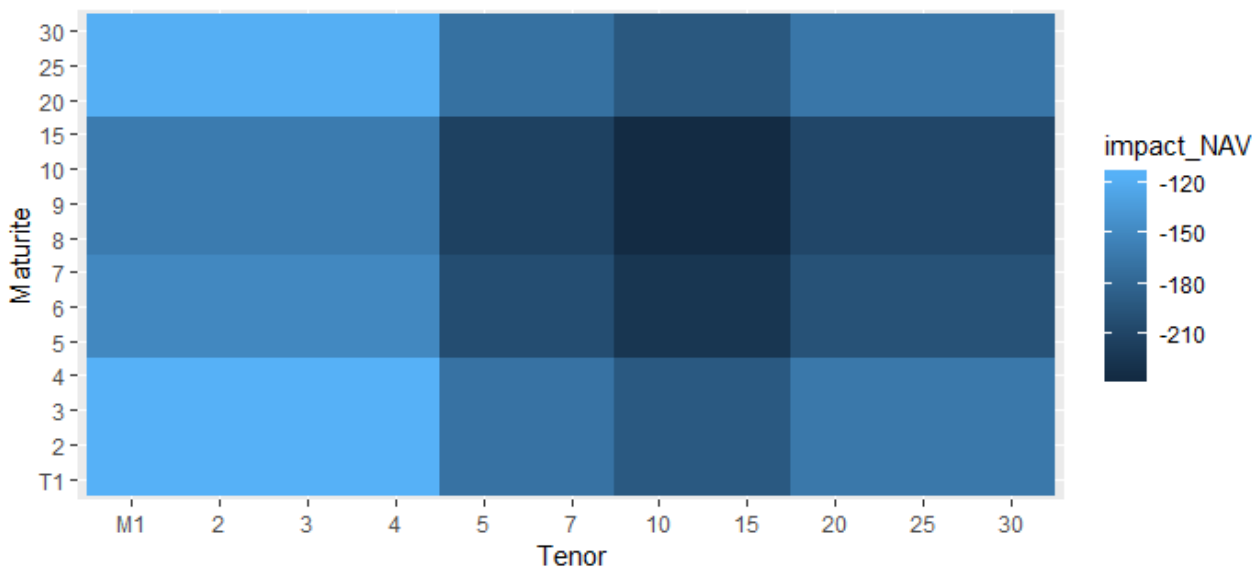


Figure - Heatmap de la matrice de volatilités implicites ATM avec les impacts sur la NAV en couleurs

Le calibrage avec plus d'attention se traduit par l'utilisation d'une matrice de poids permettant une meilleure précision sur certains points : $\sum_{i=1}^N \omega_i [IV_{marche_i} - \hat{IV}_i(\Phi)]$

Cette partie s'intéresse ensuite au choix du facteur de déplacement (*shift* ou *displacement parameter* et qui permet de forcer le modèle à générer des taux négatifs). Dans cette analyse, la justification du choix passe par : l'analyse de la qualité du calibrage pour chaque facteur de déplacement en situation

centrale, l'analyse de la robustesse du calibrage sur plusieurs situations de stress, étude de la qualité des tests martingales sur les zéro-coupons et analyse de la proportion de scénarios explosifs.

Les stress retenus pour l'étude sont les suivants : hausse des taux, baisse des taux, hausse de la volatilité et hausse de la volatilité combinée à une hausse des taux.

Le graphique suivant synthétise les tests de *market-consistency* en mesurant la qualité de l'ajustement des surfaces de volatilités issues des modèles aux données de marchés (en affichant la moyenne des écarts au carré) :

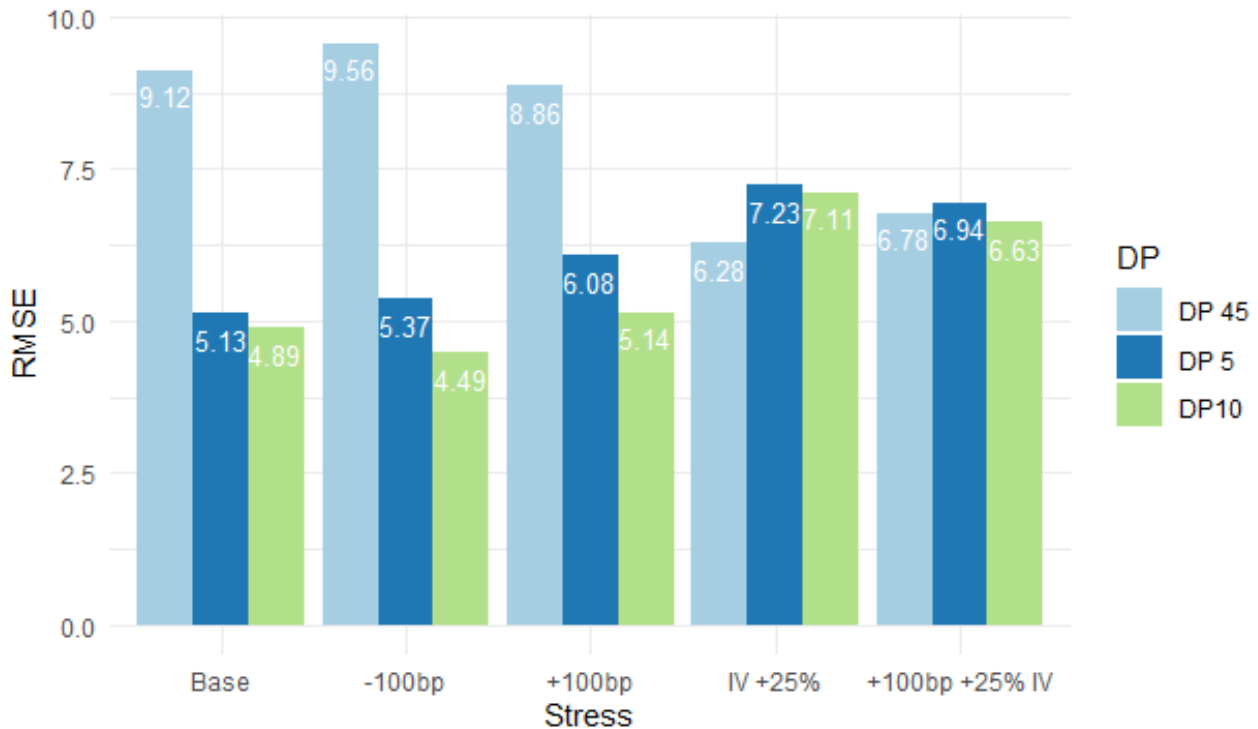


Figure - Comparaison des RMSE des différents facteurs de déplacement dans plusieurs situations de stress

L'observation des tests martingales et de la proportion de taux explosifs issus de la diffusion des taux conduit à retenir un facteur de déplacement fixé à 10%.

Impact de certaines déformations des scénarios sur la qualité des tests

Bien que l'interprétation d'un scénario isolé n'a pas de sens en univers risque-neutre, la diffusion stochastique de certaines variables d'intérêt peut être jugée aberrante sur certains points. En effet, certains scénarios explosifs peuvent poser des problèmes lors de leurs utilisations dans un modèle ALM. Une solution peut être d'appliquer un taux plafond que les scénarios ne peuvent excéder en les figeant à cette valeur, à condition que peu de scénarios ne soient concernées afin de ne pas trop perturber la distribution à chaque pas de temps. Cette partie s'attardera à analyser dans quelle mesure une telle déformation des scénarios perturbe les tests de validation.

L'observation des tests martingales sur les zéro-coupons sur 10 tables différentes avec et sans retraitement permet d'illustrer le fait que l'application d'un taux plafond conduit à une sur-estimation de l'estimateur de la moyenne des prix projetés :

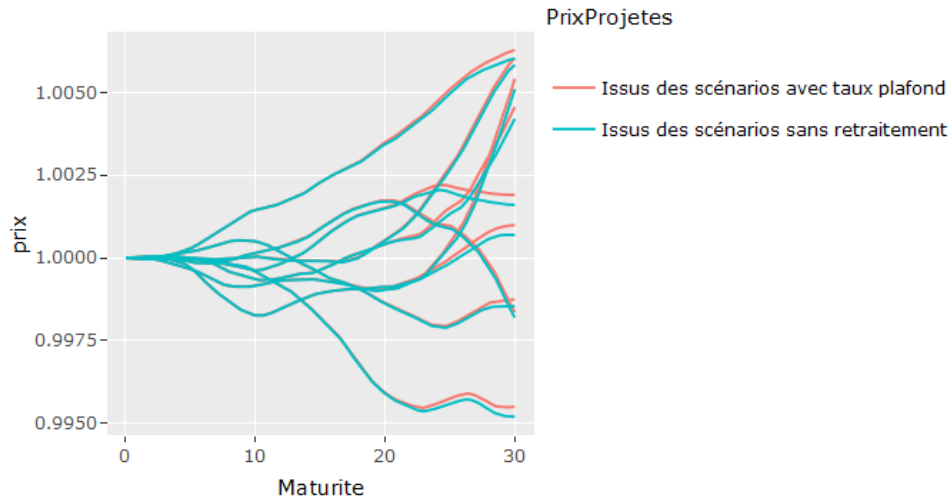


Figure - Tests martingales des 10 tables de scénarios avec/sans taux plafond

De la même manière, l'application d'un taux plancher (*floor*, fixé à -2% dans cet exemple), conduit à une sous-estimation de l'estimateur de la moyenne des prix projetés, ce qui impacte de manière directe les tests de martingalité des obligations zéro-coupon. De plus, cette déformation des trajectoires impacte également les tests de *market-consistency* des swaptions payeuses ayant les strikes les plus bas. Sur le graphique ci-dessous, on observe que l'application du taux plancher rehausse le taux moyen des scénarios les plus bas, cela impacte directement les NAV de ces scénarios.

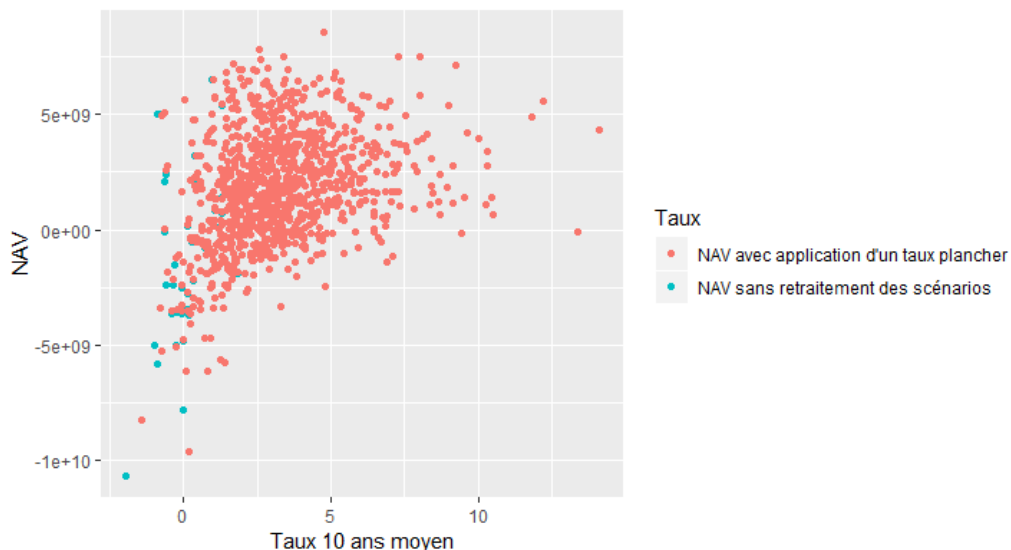


Figure - NAV issues des 1000 scénarios (avec/sans taux plancher) en fonction du taux moyen sur 30 ans de chaque scénario

Synthesis note

The quality of a set of risk-neutral economic scenarios is mainly measured by the analysis of validation tests and the convergence of the results. Two kinds of statistical tests are performed : martingale tests (to check whether the discounted diffusion of assets is a martingale) and market-consistency tests (to check whether the diffusion of the assets allow to recapture prices at $t = 0$ of the instruments used in the calibration process).

Different leads on how to better the convergence of validation tests will be examined at different stages of the scenario generation process.

Impact of the quality of the randomness on the convergence of validation tests

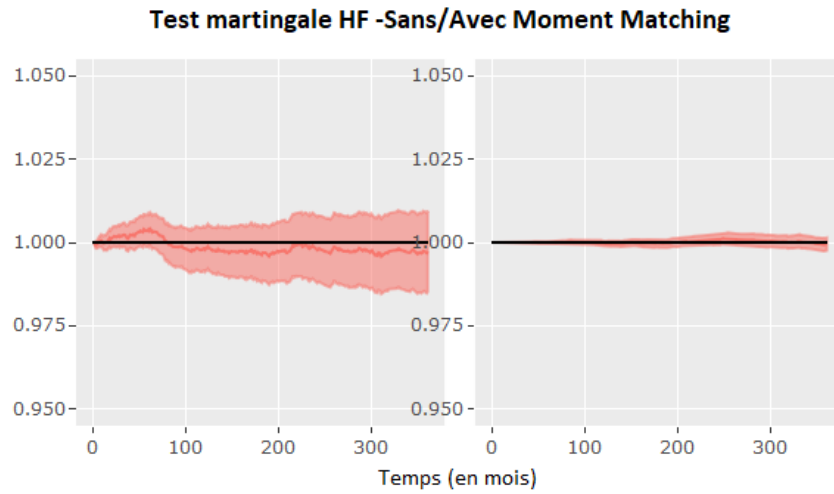
Generating economic scenarios requires the use of a random stream (for the brownians used in the diffusion models). Once the sequence of normal random variable is generated, some adjustments on this sequence can show the direct link between the quality of the randomness and the precision of validation tests.

Moment matching

At each time step and for each model, 1000 normal variables are generated to power the brownian motions to perform the simulation. Because of the limited number of scenarios, the mean and the variance (of the 1000 normal variables at each time step and for each model) can deviate from their theoretical value (0 for the mean and 1 for the variance). Moment matching is a method that corrects this deviation by centering and renormalizing the random number set. This adjustment brings the random numbers closer to their theoretical properties and has an impact on the convergence of the martingale test. For example, let's show the martingale test of the *hedge fund* asset with a threshold of 95% with or without moment matching :

The mean absolute error is :

HF without ajustement	HF with ajustement
0.83	0.11



Similar results are observed with the martingale tests of all assets. It shows that the adjustment of two simple statistical properties (the first two moments) has an impact on the quality of the martingale test.

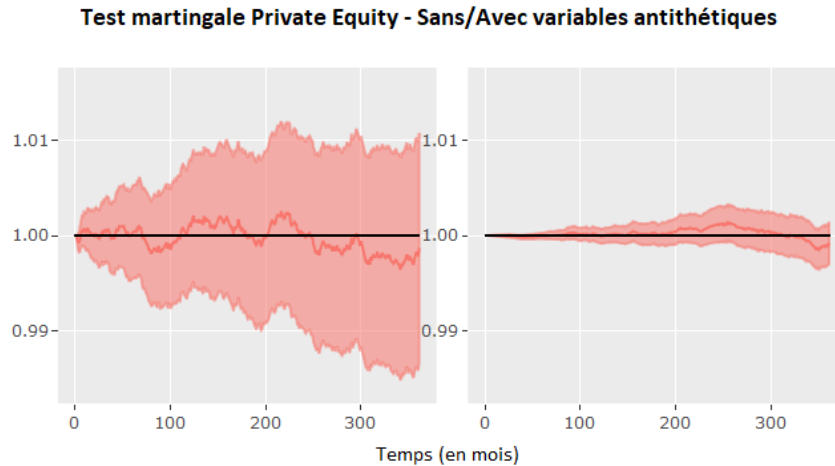
Antithetic variates

The formula used to define the confidence interval around the estimator for the martingale test depends on the standard error σ and the number of iterations n , for a set threshold.

$$\left[\hat{X} - q_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \hat{X} + q_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

It is possible to reduce uncertainty either by reducing the standard error σ or increasing the number of scenarios n .

Antithetic variates is a variance reduction technique. A new estimator of the mean is built, with a smaller variance. This method increases the accuracy of the martingale test, as it can be shown on the asset *private equity* :



Using a quasi-random generator

The use of a different source of randomness is investigated. Sobol sequence is a deterministic "quasi-random low discrepancy sequence", with remarkable properties of uniformity. However, the main limit is dimensionality. As the dimension in which we generate the random numbers in the ESG is high, the use of quasi-random generators can be limited. An hybrid approach can be a solution by blending the use of quasi-random and pseudo-random generators. Using a source of randomness with better property of uniformity leads to an increase of the martingale test's precision. The left chart shows the martingale tests from 10 sets of scenarios using pseudo-random numbers and the right one comes from 10 sets with quasi-random numbers.

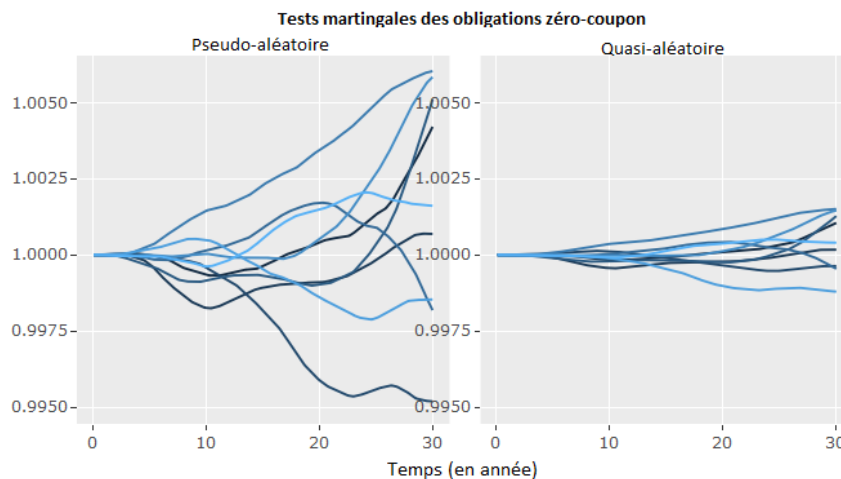


Figure - zero coupon bond martingale tests on 10 sets of scenarios with a change of the source of randomness

Impact of choices made at the calibration stage on the convergence of tests

Interest rate models are calibrated in a way to minimize the difference between market implied volatilities and implied volatilities computed from the model. However, implied volatility surface (with different tenors/maturities/strikes) can't be perfectly fitted by the model.

The first step of market-consistency validation tests is to check that the implied volatilities from the model are not too farther from market implied volatilities. Since the model is not able to perfectly fit the whole market surface, it is important to determine which part of the surface must be fitted with more care.

To do so, we successively stress different zones of the implied volatility surface and we measure the impact of each stress on on the Net Asset Value in order to evaluate which part of the implied volatility matrixes or liability are sensitive.

The following chart shows the sensitivity of the Net Asset Value to a change of implied volatility. The darkest zones are the ones where a +25% shock of the implied volatility leads to the biggest losses (in terms of NAV).

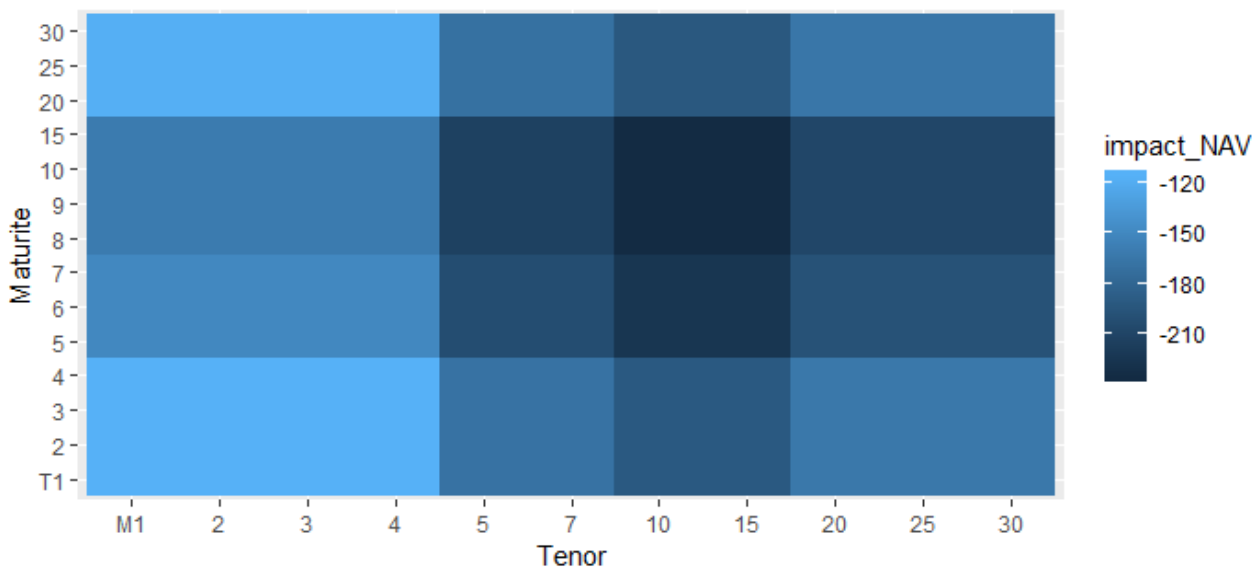


Figure - Heatmap of the ATM implied volatilities matrix with the impact on NAV

It is possible to choose the implied volatilities to calibrate with more attention by using a weighting matrix : $\sum_{i=1}^N \omega_i [IV_{marche_i} - \hat{IV}_i(\Phi)]$.

During the calibration stage, a displacement parameter is chosen. This parameter shifts the lognormal distribution to allow it to take negative values (to be consistent with the current economic environment). In a risk neutral framework, choosing this parameter is a trade-off between : the calibration's quality in a central scenario, the calibration's quality in stressed scenarios, zero coupon bond prices martingale test's quality and the proportion of explosive interest rates.

The stresses used to study the displacement parameter are : an increase of interest rates, a decrease of interest rates, an increase of implied volatility and a combined increase of rates and implied volatilities.

The following graph summarizes the market-consistency tests by measuring the quality of fit to market implied volatilities (RMSE between model and market implied volatilities) :

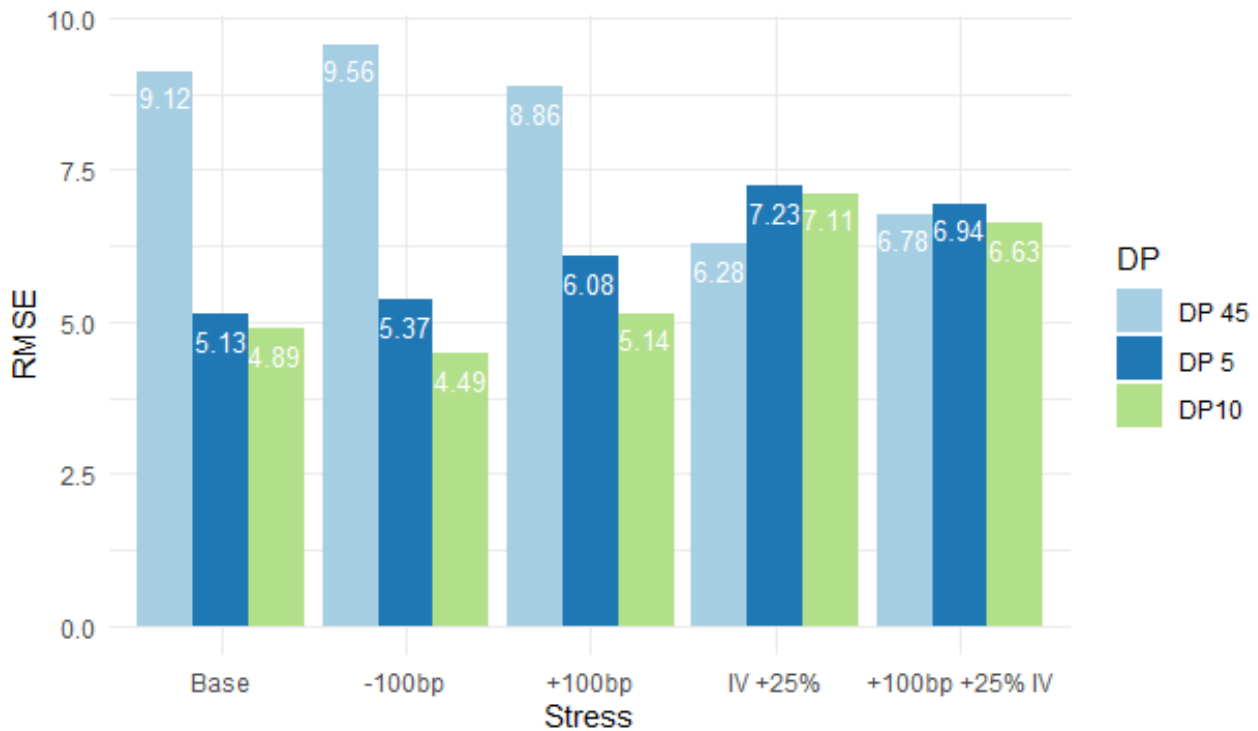


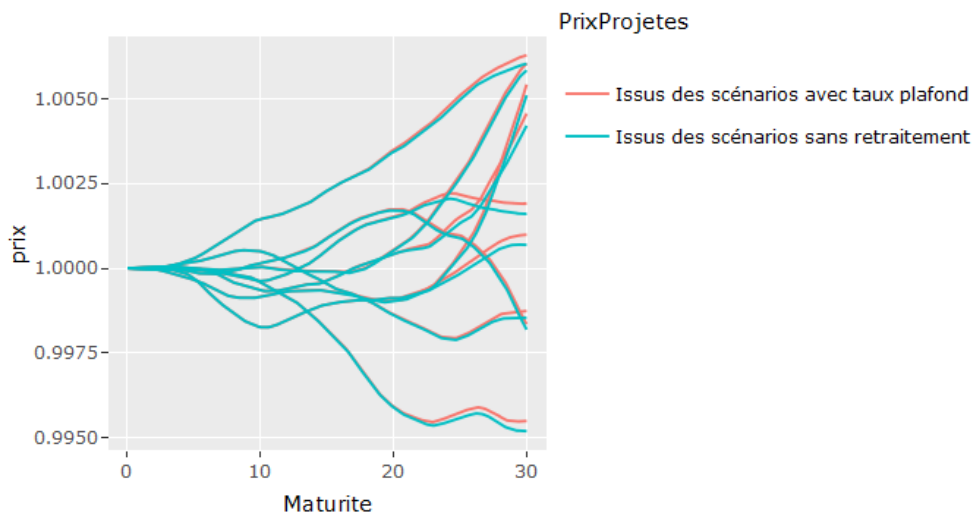
Figure - Comparaision of the RMSE with different displacement parameters in different situations of stress

The observation of martingale tests and the proportion of explosive rates lead to keep a displacement parameter of 10%.

Impact of bounding methods on the quality of validation tests

Even though the interpretation of an isolated scenario has no meaning in a risk neutral framework, the stochastic diffusion of some variables of interest can take aberrant values at some time steps. Those values can be problematic when used in an ALM tool. A solution can be to apply a cap the scenarios can't exceed. In this part, will observe how does this perturbation of the scenario degrades the validation tests.

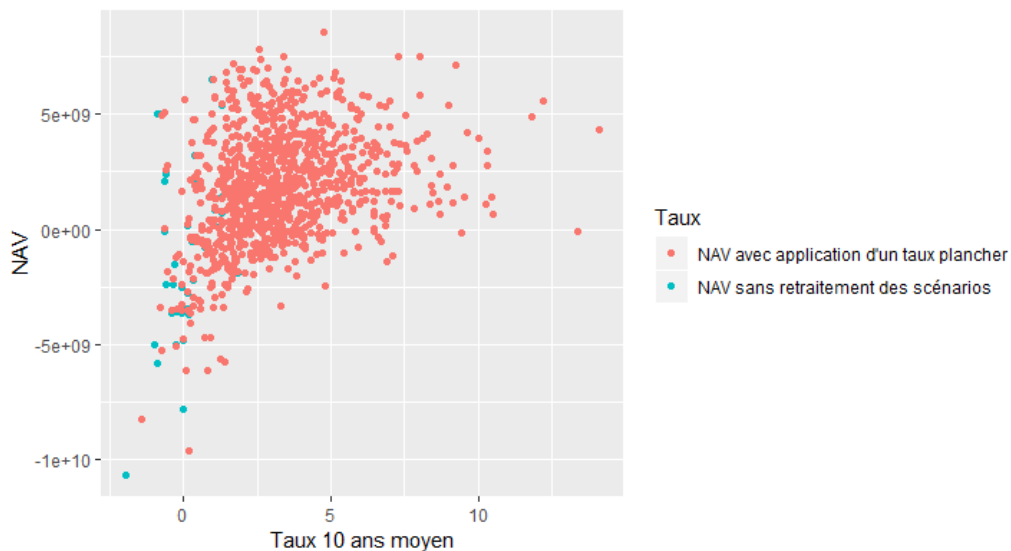
The observation of martingale tests on zero coupon bonds of 10 tables with and without the application of a cap shows that applying a cap results in an overestimation of the mean of projected prices :



Martingale test on 10 tables with and without a cap

In this graph, the tests are from 10 sets of scenarios tables where the rates have been capped at 15%. This level is deliberately low to see a bigger effect of the application of the cap. The global trend is always the same, and only a few extremes paths are affected. The impact on the Net Asset Value is also marginal.

Similarly, applying a floor to the rate diffusion (set to -2% in this example), leads to underestimate the mean of the projected prices in the martingale tests. This adjustment of the scenarios impacts the market-consistency tests of the swaptions with the lowest strikes. In the following chart, the Net Asset Value of each scenario is plotted ; the NAV of the scenarios affected by the floor (the ones with the lowest rates) is affected :



NAV of 1000 scenarios (with/without floor) against the average 10Y rate

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Thomas Daller pour son encadrement et sa disponibilité, ainsi que Romain Thion pour m'avoir donné l'opportunité d'effectuer mon stage et mon alternance au sein de son équipe.

Je tiens également à remercier Charline Mordelet pour ses conseils et sa disponibilité pour discuter de différentes problématiques liées au GSE.

Enfin, je remercie Nicolas Bousquet, mon tuteur académique, pour son encadrement et ses conseils.

Table des matières

Note de Synthèse	5
Synthesis note	11
Remerciements	17
Introduction	25
1 Présentation du générateur de scénarios économiques	27
1.1 Cadre réglementaire : Solvabilité 2	27
1.2 Les contrats d'épargne et leur structure optionnelle	27
1.3 Le générateur de scénarios économiques	28
1.3.1 Univers risque-neutre	28
1.3.2 Tests de validation	29
2 Qualité de l'aléa généré et impact sur la convergence	35
2.1 Description des méthodes de génération des séquences aléatoires	36
2.1.1 Wichmann & Hill	36
2.1.2 Génération multidimensionnelle	37
2.2 Transformation en variables gaussiennes corrélées	38
2.2.1 Transformation de Box-Muller	38
2.3 Traitement du jeu de nombres aléatoires pour une meilleure convergence des tests . . .	40
2.3.1 Correspondance des moments	40
2.3.2 Variables antithétiques	42
2.4 Nombre d'itérations	45
2.4.1 Convergence des tests martingales	45

2.4.2	Convergence des résultats	46
2.5	Quasi-aléatoire	49
2.5.1	Source de l'aléa	50
2.5.2	Taux de convergence	50
2.5.3	Uniformité des séquences	51
2.5.4	Dimension	52
2.5.5	Limites liées à la dimension	52
2.5.6	Application au GSE	56
3	Autour du calibrage du modèle de taux	59
3.1	Cadre mark-to-model	59
3.2	Produits dérivés de taux	59
3.2.1	Notations sur les taux	59
3.3	Modèle LMM+	61
3.4	Choix relatifs au calibrage	62
3.4.1	Choix de l'instrument	62
3.4.2	Niveau du strike	62
3.4.3	Facteur de déplacement	63
3.5	Surface de volatilité	67
3.5.1	Ajustement de la matrice de poids	68
4	Traitements appliqués aux scénarios	77
4.1	Scénarios stressés	78
4.2	Scénarios extrêmes	79
4.2.1	Scénarios explosifs	79
4.3	Cap et floor : limitation des scénarios extrêmes	81
4.3.1	Principe	81
4.3.2	Impact sur les tests de martingalité	81
4.3.3	Impact sur les tests de <i>market-consistency</i>	85
4.3.4	Impact sur les résultats	86
	Conclusion	91

TABLE DES MATIÈRES

21

Bibliographie

92

Table des figures

1.1	Processus de génération des scénarios	28
1.2	Test martingale sur l'immobilier au seuil 95%	31
1.3	Test de market-consistency des IV swaptions ATM - tenor 5 ans	32
1.4	Test de market-consistency des IV swaptions AFTM - Maturité 10 ans, tenor 10 ans	33
2.1	Génération des séquences gaussiennes corrélées	36
2.2	1000 tirages aléatoires uniformes à deux pas de temps différents	37
2.3	Transformation des variables uniformes en variables gaussiennes	39
2.4	Test martingale CAC sans/avec Moment Matching au seuil 95%	41
2.5	Test martingale Eurostoxx sans/avec Moment Matching au seuil 95%	41
2.6	Test martingale Hedge Fund sans/avec Moment Matching au seuil 95%	42
2.7	Test martingale PE sans/avec variables antithétiques	45
2.8	Convergence de la TVOG avec l'intervalle de confiance au seuil 95% associé	47
2.9	Zoom sur les 4000 derniers scénarios	48
2.10	Convergence de la NAV en fonction du nombre de scénarios	49
2.11	Génération de nombres aléatoires en 2 dimensions	50
2.12	Distribution de 1000 tirages uniformes	51
2.13	Distribution de 20000 tirages uniformes	52
2.14	Distribution de 1000 tirages de Sobol sur plusieurs dimensions	53
2.15	Distribution de 1000 tirages de Sobol sur les dimensions 11 et 36	54
2.16	Distribution de 1000 tirages de Sobol sur les dimensions 11 et 36	55
2.17	Tests de martingalité sur les prix des obligations zéro-coupon issus de 10 tables en changeant la source de l'aléa	56

3.1	Comparaison des RMSE des différents facteurs de déplacement dans plusieurs situations de stress	65
3.2	Quantiles 0.5% pour différents facteurs de déplacement	66
3.3	Quantiles 99.5% pour différents facteurs de déplacement	67
3.4	Volatilités implicites du tenor 5 ans pour toutes les maturités - choc 1	70
3.5	Volatilités implicites du tenor 15 ans pour toutes les maturités - choc 2	70
3.6	Volatilités implicites du tenor 10 ans pour toutes les maturités - choc 5	71
3.7	Volatilités implicites du tenor 10 ans pour toutes les maturités - choc 6	71
3.8	Volatilités implicites du tenor 10 ans pour toutes les maturités - choc 3	72
3.9	Volatilités implicites du tenor 10 ans pour toutes les maturités - choc 4	72
3.10	Chocs 7 à 14	73
3.11	Heatmap de la matrice de volatilités implicites ATM avec les impacts sur la NAV en couleurs	74
4.1	Diffusion stochastique du taux 10 ans sur 30 ans en pas mensuel	77
4.2	Quantiles de la diffusion du taux 10 ans	78
4.3	Quantiles de la diffusion du taux 10 ans	79
4.4	Focus sur un scénario extrême	80
4.5	Scénario 580	80
4.6	Application d'un taux plafond à un scénario explosif	81
4.7	Application d'un taux plafond à la diffusion du taux 10 ans	82
4.8	Test martingale avec intervalle de confiance à 95%	83
4.9	Test martingale avec intervalle de confiance à 95% de la table de scénario 5	84
4.10	Tests martingales des 10 tables de scénarios avec/sans taux plafond	85
4.11	Tests de market-consistency des swaptions de maturité 5 ans avec/sans floor	86
4.12	NAV des 1000 scénarios en fonction du taux moyen sur chaque scénario	87
4.13	NAV des 1000 scénarios avec/sans application d'un taux plancher	88
4.14	NAV des 1000 scénarios avec/sans application d'un taux plafond	89

Introduction

Dans le cadre prudentiel auquel sont soumis les entreprises d'assurance, l'actif et le passif doivent être évalués en juste valeur, c'est-à-dire en cohérence avec les prix de marché. Du fait des options et garanties sous-jacentes aux contrats d'épargne, la valorisation du passif en juste valeur passe par l'utilisation de scénarios stochastiques.

Ce mémoire identifie plusieurs leviers permettant d'optimiser la qualité des tables de scénarios générés. La convergence des scénarios risque-neutres se traduit d'une part par une convergence des tests de validation (tests martingales et tests de *market-consistency*) et d'autre part par la convergence de certains indicateurs (convergence du *Best Estimate*, de la valeur temps des options et garanties...). Plusieurs facteurs peuvent impacter cette convergence et feront l'objet d'études.

La génération des scénarios économiques passe par la génération de plusieurs séquences de nombres aléatoires (principalement utilisé pour générer les variables normales qui interviennent lors de la discrétisation des browniens sur lesquels reposent les modèles utilisés), la première partie s'attardera sur l'étude de la génération des séquences dites pseudo-aléatoires et sur l'étude de l'impact que peut avoir la qualité de cet aléa sur les résultats. Cette partie tentera également d'étudier la possibilité d'utiliser des séquences issues de générateurs dit quasi-aléatoires dans le GSE.

Les différents choix effectués au moment du calibrage ont un impact sur les résultats (voir [Armel & Planchet \(2018a\)](#), [Moody's \(2018\)](#) et [Devineau et al. \(2016\)](#)). Il est donc important que ces choix soient justifiés. La seconde partie s'attardera sur la justification du poids donné aux différents instruments utilisés lors du calibrage et sur la justification du choix de certains paramètres tels que le facteur de déplacement.

Les scénarios risque-neutres n'ont pas vocation à être interprétés de manière isolée. Cependant, différentes contraintes liées notamment l'utilisation des scénarios dans le modèle ALM peuvent mener à déformer certains scénarios jugés extrêmes dans un sens que l'on précisera. La troisième partie sera donc consacrée à l'étude de l'impact que ces déformations peuvent avoir sur la convergence des tests et sur les résultats.

Chapitre 1

Présentation du générateur de scénarios économiques

1.1 Cadre réglementaire : Solvabilité 2

La directive Solvabilité 2, en vigueur depuis 2016, impose un cadre réglementaire de calculs prudentiels aux assureurs et réassureurs européens.

Ce régime s'appuie sur une vision économique du bilan avec des prix en juste valeur (par opposition à la vision en coût historique), sur des exigences en capital plus en adéquation avec les risques auxquels sont exposées les compagnies et sur la définition d'une approche permettant de mieux appréhender les différents risques.

Dans l'approche Solvabilité 2, le bilan économique d'un assureur est composé d'actifs en valeur de marché dont les prix sont généralement observables et d'un passif (composé des fonds propres, d'une marge pour risque et du Best Estimate) qui n'est pas observable sur un marché profond et liquide, ce qui conduit à des techniques de valorisation financière.

1.2 Les contrats d'épargne et leur structure optionnelle

Les assureurs ont développé des offres de contrats d'épargne dans un contexte fiscal favorable qui incite les assurés à investir sur ces supports sur le long terme. Les primes perçues par l'assureur sont investies sur différents supports (financiers, immobiliers ou autres...).

Il existe différents types de contrats, plus ou moins risqués et offrant des rendements plus ou moins attractifs. Ces contrats disposent d'une structure optionnelle liée aux options et garanties sous-jacentes.

Les options liées aux comportements sont dues aux options de rachats qui permettent à l'assuré de racheter son contrat entièrement ou en partie et aux arbitrages permettant à l'assuré de modifier les supports sur lesquels ses contrats sont investis. Les options financières sont liées à la participation aux bénéfices : les assureurs valorisent les contrats en utilisant un intérêt technique prudent, ce dernier est complété par une participation aux bénéfices (qui est réglementée) qui dépend des résultats financiers de l'assureur.

1.3 Le générateur de scénarios économiques

L'actif et le passif sont étroitement liés, en particulier chez les compagnies d'assurance commercialisant des contrats d'épargne contenant des options et garanties qui dépendent directement des conditions économiques. Afin d'obtenir la meilleure estimation des flux futures et de valoriser ces options et garanties, il est primordial de disposer d'un outil permettant de diffuser des grandeurs économiques : le générateur de scénarios économiques, et d'un modèle pouvant prendre en compte les interactions entre l'actif et le passif : le modèle ALM.

Le générateur de scénarios est un outil permettant de diffuser des grandeurs économiques et financières d'intérêt. Les grandeurs diffusées dans le cadre de ce mémoire sont les taux nominaux, les taux réels, les indices actions CAC et Eurostoxx, un indice Private Equity, un indice Hedge Fund et un indice immobilier. Ces grandeurs sont projetées en pas de temps mensuel à horizon 30 ans (360 pas de temps).

L'objectif de l'utilisation du générateur est d'envisager le champ des possibles afin de valoriser les contrats d'épargne et de calculer le Best Estimate. Ces valorisations ne peuvent se faire de manière déterministe du fait de certaines options et garanties sous-jacentes au contrat et qui sont déclenchées suivant certaines situations économiques. Afin de réaliser ces calculs, les tables de scénarios économiques sont données en entrée d'un modèle de projection actif-passif.

1.3.1 Univers risque-neutre

L'univers risque-neutre est un univers fictif créé à des fins de valorisations. L'absence d'opportunité d'arbitrage, qui caractérise cet univers, introduit la martingalité des prix actualisés (au taux sans risque) des actifs, cette notion constitue un puissant outil de valorisation. La meilleure estimation que l'on peut faire de l'évolution future des actifs est leurs prix en date de simulation. Dans ce cadre, les simulations sont *market-consistent* c'est-à-dire qu'ils sont en cohérence avec les prix de marché.

Processus de génération des scénarios

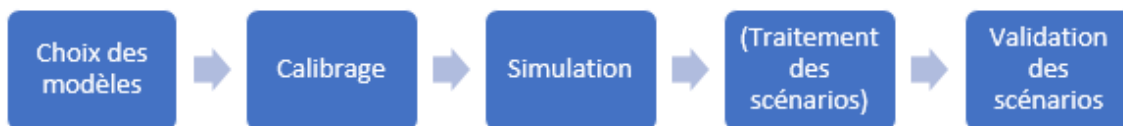


FIGURE 1.1 – Processus de génération des scénarios

1. Le mémoire [Belet \(2017\)](#) présente et justifie le choix des modèles utilisés dans le cadre du générateur de scénarios qui servira à l'étude. Les modèles retenus sont synthétisés dans le tableau suivant :

Facteurs de risques ou variables économique	Processus de diffusion
Taux d'intérêt nominaux	Libor Market Model Plus
CAC	Stochastic Volatility Jump Diffusion
Eurostoxx	Stochastic Volatility Jump Diffusion
Hedge Fund	Black-Scholes
Private Equity	Black-Scholes
Immobilier	Black-Scholes

2. Dans l'univers risque-neutre, le calibrage des paramètres se fait de manière à minimiser l'écart entre les volatilités implicites reproduites par le modèle et les volatilités implicites de marché. Il s'agit donc de minimiser une fonction objective :

$$\theta^* = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^N \omega_i (\text{Market}_i - \text{Model}(\text{parametres})_i)^2$$

Les paramètres optimisés sont donc ceux qui permettent de minimiser l'écart entre les prix de marché et les prix reproduits par le modèle. Le facteur ω_i permet de donner plus ou moins d'importance à certains instruments. Cette partie est traitée dans le chapitre 2.

3. L'étape de simulation permet de diffuser les facteurs de risques. L'utilisation des browniens dans les modèles de diffusion impose la génération préalable d'un jeu de nombres aléatoires. Cette partie est traitée dans le chapitre 1.
4. Dans certains cas, des contraintes opérationnelles peuvent imposer la modification de la trajectoire de certains scénarios, bien que cela puisse légèrement dégrader la qualité du jeu de scénarios.
5. La dernière étape est la validation des scénarios.

1.3.2 Tests de validation

La validation des tables de scénarios générées passe par l'application de deux types de tests : les tests martingales et les tests de market-consistency. Cette validation est obligatoire sous Solvabilité 2.

Tests martingales

Les tests martingales, réalisés après l'étape de simulation, permettent de s'assurer du caractère risque-neutre des tables de scénarios générées.

Rappelons que c'est le prix actualisé des actifs vu en $t = 0$ qui doit respecter les propriétés de martingalité. Cela correspond à vérifier l'égalité suivante pour des prix estimés à chaque pas de temps :

$$P(t = 0) = E^Q[\text{PrixEstimes}]$$

Avec :

- E^Q est l'espérance sous la probabilité risque-neutre
- $P(t = 0)$ le prix en 0 déduit de la courbe EIOPA

En appliquant le facteur d'actualisation de maturité correspondante des deux cotés de l'égalité, la partie de gauche de l'égalité devient égale à 1. Le test consiste à vérifier qu'à chaque pas de temps, l'estimateur de la moyenne des prix estimés actualisés des actifs vu en 0 ne sont pas trop éloignés de 1. À chaque pas temps, on calcule un estimateur des prix actualisés :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i$$

Avec n le nombre de scénarios générés.

La connaissance de la loi de cet estimateur permet la construction d'un intervalle de confiance à un seuil donné.

En effet, l'estimateur de la moyenne ne correspond pas forcément à la vraie moyenne de la loi dont est issu l'échantillon. Il est cependant possible de construire un intervalle autour de l'estimateur dans lequel la vraie moyenne μ a 95% de chances de se retrouver (ce seuil de 95% peut varier à souhait).

D'après le théorème central limite, l'estimateur de la moyenne ayant une variance connue $\sigma < \infty$ suit la loi suivante :

$$\sqrt{n} \frac{\hat{X} - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Il est alors possible de passer à l'écriture suivante :

$$\mathbb{P}\left(\hat{X} - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \hat{X} + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Avec $1 - \alpha$ le seuil du test, et $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ le quantile $1 - \frac{\alpha}{2}$ d'une loi normale centrée réduite. À partir de ce résultat, il est possible de construire un test de validation permettant d'accepter ou rejeter l'égalité ci-dessus.

La vérification de la martingalité des scénarios passe alors par la vérification du test statistique suivant H_0 :

$$\frac{\hat{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Avec :

- \hat{X} l'estimation de la moyenne des prix actualisés à un pas de temps donné
- μ est le prix théorique des actifs actualisés et vaut 1
- σ est l'écart-type
- n le nombre de simulations

La figure 1.2 illustre le test de martingalité sur l'actif immobilier.

À chaque pas de temps, la moyenne est estimée (sur les 1000 scénarios) et un intervalle de confiance autour de ces estimateurs est construit. La figure suivante illustre les résultats associés :

Le test valide la martingalité de la projection à tout pas de temps.

Tests de market-consistency

La valorisation market-consistent du passif est au cœur de différentes normes. Une interprétation de l'approche market-consistent est que la valeur du passif devrait être égale à ce qu'un assureur serait prêt à payer pour racheter les contrats de la compagnie. Cette approche peut être mise en place pour certains types de contrats simples. Mais pour un panier de contrats plus complexe contenant des

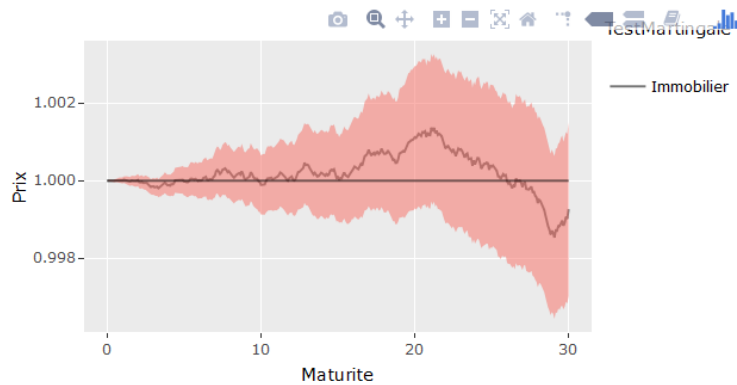


FIGURE 1.2 – Test martingale sur l’immobilier au seuil 95%

options et garanties, le passif est valorisé en utilisant une simulation stochastique car il n’existe pas de prix de marché observable pour ces passifs. Dans ce cas, un générateur de scénarios économiques utilisé avec un modèle de projection actif-passif permet de valoriser le passif.

Le caractère market-consistent d’un générateur de scénarios économiques est caractérisé par la capacité à reproduire les prix de marché d’instruments qui reflètent au mieux le passif que l’on souhaite valoriser. Les tests de market-consistency permettent de valider cette capacité du générateur de scénarios à reproduire ces prix.

Dans le cadre de l’étude, le générateur devra reproduire le prix d’instruments qui auront servi à son calibrage : les swaptions à différents maturité/tenor/strike et des calls sur les actifs modélisés.

Pour cela, trois prix sont comparés. L’objectif étant que les prix simulés ne soient pas éloignés des prix de marché :

1. Prix de marché
2. Prix théoriques que le modèle peut reproduire avec n paramètres déterminés de manière à pouvoir répliquer au mieux les prix de marché
3. Prix recalculés à partir des scénarios simulés

Tests de market-consistency sur les volatilités implicites des swaptions :

Teuguia (n.d.) donne la valeur des swaptions receveuses estimée à partir des scénarios :

$$S(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Df_i(0, t) [(1 - F_i(t, T)) - f_i(0, t, T) \sum_{j=1}^T F_i(t, j)]_+$$

Avec :

- $Df_i(0, t)$ le facteur d’actualisation du mois t vu en 0 pour un scénario i
- $F(0, t, t)$ le prix d’un forward vu en 0 de t à T
- N le nombre d’itérations
- $F(0, t, t)$ le taux forward vu en 0 de t à T

La différence entre le prix de marché et le prix reproduit par le modèle étant vérifiée pendant l’étape de calibrage, on affiche les prix issus du modèle et les prix recalculés à partir des scénarios.

La figure 1.3 illustre les résultats pour les volatilités implicites des swaptions à la monnaie avec un tenor fixé à 5 ans :

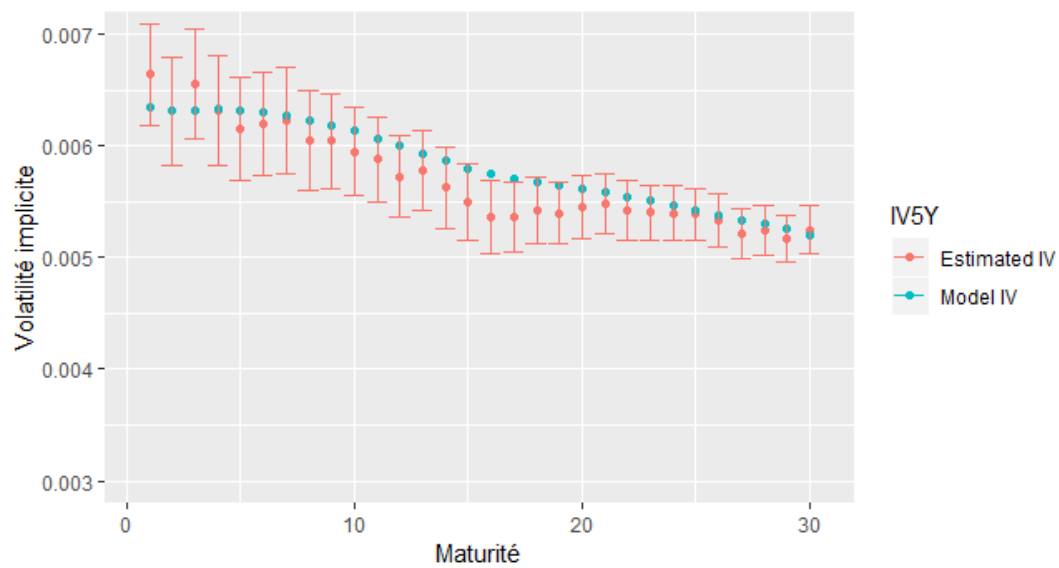


FIGURE 1.3 – Test de market-consistency des IV swaptions ATM - tenor 5 ans

Dans cet exemple, le test est validé pour toutes les maturités testées. Le même test est réalisé sur plusieurs tenors.

Le test est également réalisé en dehors de la monnaie. Pour afficher les résultats, le tenor et la maturité sont fixés et la volatilité implicite est recalculée à travers différents niveaux de strike. Les résultats des tests sont les suivants :

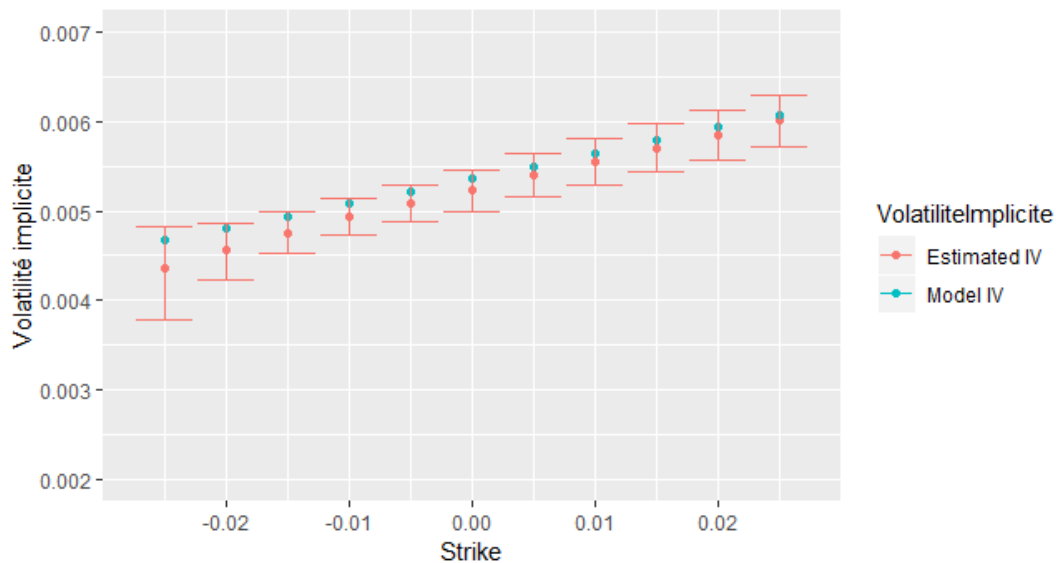


FIGURE 1.4 – Test de market-consistency des IV swaptions AFTM - Maturité 10 ans, tenor 10 ans

Dans cet exemple, le test est validé pour les différents niveaux de strike.

Ces tests de market-consistency des swaptions sont réalisés sur trois dimensions : maturité, tenor et strike. Il est important de garder en tête que l'étape préalable à ce test (et réalisée pendant l'étape de calibrage) est la comparaison des prix de marché avec les prix issus du modèle. Si l'écart est trop grand, il est impératif de revoir l'étape de calibrage du modèle.

De la même manière, des tests de market-consistency sont réalisés sur le CAC et l'EUROSTOXX, en vérifiant que la diffusion permet de retrouver les prix des calls utilisés lors du calibrage.

Pour les actifs dont on ne dispose pas de produits dérivés permettant de calibrer le modèle (comme l'immobilier de notre portefeuille par exemple), les tests de market-consistency ont moins d'intérêt.

Chapitre 2

Qualité de l'aléa généré et impact sur la convergence

L'utilisation des modèles de diffusion stochastiques impose, par définition, de disposer d'une source génératrice d'aléa pouvant jouer le rôle des variables aléatoires qui interviennent dans la définition des modèles. Dans le cadre du générateur de scénarios économiques, l'utilisation des browniens nécessite de disposer de tirages gaussiens indépendants qui seront corrélés à souhait par la suite.

La génération d'une suite de nombres parfaitement aléatoires n'est pas possible en pratique, mais de nombreux procédés existent afin de disposer d'une source aléa plus ou moins satisfaisante (dans un sens que nous précisons). Le générateur de nombres aléatoires doit posséder certaines propriétés :

- La reproductibilité : l'idée est de pouvoir retomber sur les mêmes résultats si tous les éléments en entrée sont les mêmes. En réalité, le caractère aléatoire d'un générateur algorithmique réside entièrement dans le choix de la graine : le fait de fixer la graine doit permettre d'obtenir la même séquence de nombre aléatoires. Cela permet de vérifier et comparer les résultats.
- L'indépendance : les séquences de nombres aléatoires générées doivent être indépendantes, afin que les modèles que nous voulons garder indépendants le reste et que l'on puisse corrélérer certains modèles au niveau souhaité. Chaque nombre doit donc être indépendant de ceux générés avant et après lui.

Initialement, les nombres générés seront uniformément distribués sur $[0,1]$ et seront ensuite transformés en variables gaussiennes corrélées. Ces séquences aléatoires générées seront de la forme :

$$U_i \sim U(0, 1)$$

Avec R_i indépendant de R_j pour tout i, j .

La génération de l'aléa utilisé dans le GSE commence donc par la génération de variables uniformes indépendantes dans $[0,1]$. En réalité, le tirage se fait dans un intervalle ouvert (pour éviter les valeurs infinies lors du passage à des variables gaussiennes). Ces nombres sont ensuite transformés en variables gaussiennes en utilisant l'algorithme de Box-Muller (ou en variables suivant une loi de Poisson pour la modélisation des sauts du modèle SVJD). Une fois les variables générées, on spécifie la structure de dépendance que l'on supposera entièrement contenue dans la matrice de corrélation. On obtient alors un jeu de nombres aléatoires prêts à être utilisés pour la diffusion stochastique.

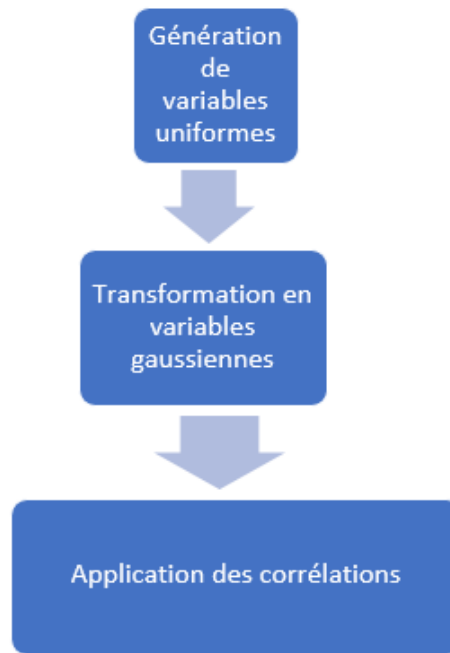


FIGURE 2.1 – Génération des séquences gaussiennes corrélées

2.1 Description des méthodes de génération des séquences aléatoires

2.1.1 Wichmann & Hill

Ce générateur de nombre pseudo-aléatoires a été développé par Wichmann & Hill en 1982. L'algorithme s'appuie sur trois générateurs ayant une structure modulaire produisant une suite de nombre entiers tels que :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 171x_n \text{ mod } 30269 \\ y_{n+1} = 172y_n \text{ mod } 30307 \\ z_{n+1} = 170z_n \text{ mod } 30323 \end{cases}$$

L'initialisation de la récurrence nécessite trois états initiaux que l'on appelle "la graine".

Les nombres aléatoires sont ensuite obtenus en prenant la partie décimale de la somme renormalisée des trois termes :

$$u_n = \left(\frac{x_n}{30269} + \frac{y_n}{30307} + \frac{z_n}{30323} \right)$$

(u_n) appartenant à $[0,1]$ est une séquence qui semble uniformément répartie mais qui est entièrement déterminée par la donnée des trois graines.

Le tirage aléatoire de 1000 variables uniformes en pas de diffusion à des pas de temps différents entre les facteurs de risques *Rendements CAC* et *Volatilité taux nominaux* donne :

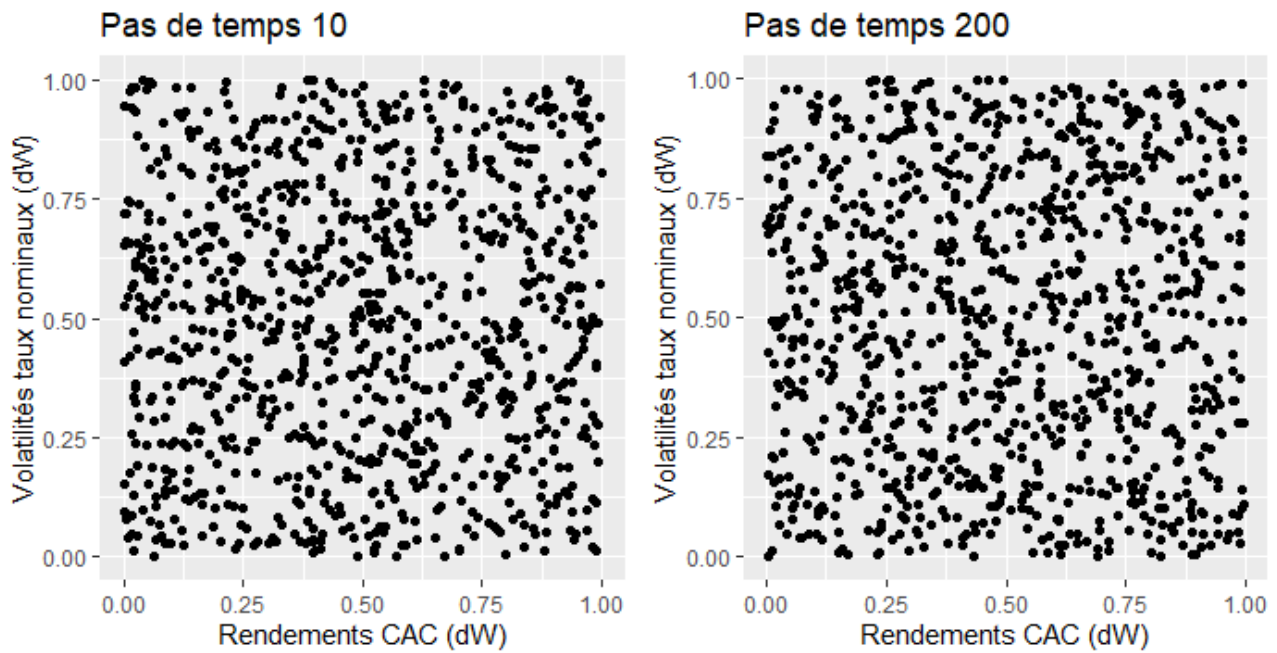


FIGURE 2.2 – 1000 tirages aléatoires uniformes à deux pas de temps différents

2.1.2 Génération multidimensionnelle

Les algorithmes présentés fournissent une séquence de nombres aléatoires. L'utilisation des variables aléatoires dans le générateur de scénarios économiques se fait au niveau de différents pas de temps et différents modèles. C'est donc en réalité des séquences aléatoires qui évoluent parallèlement à la fois au niveau du temps et au niveau des modèles à chaque itération :

Itération	Période	Variable 1	...	Variable n
1	1	X	...	X
1	2	X	...	X
1	3	X	...	X
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	360	X	...	X
2	1	X	...	X
2	2	X	...	X
2	3	X	...	X
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2	360	X	...	X
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1000	1	X	...	X
1000	2	X	...	X
1000	3	X	...	X
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1000	360	X	...	X

La génération des nombres aléatoires se fait de gauche à droite et de haut en bas dans un tableau de la même forme que celui présenté ci-dessus.

Deux méthodes sont proposées pour générer n séquences distinctes supposées indépendantes :

1. Générer une grande séquence d'une seule traite, et la séparer en n sous-suites. Chaque nombre généré étant par construction indépendant du nombre précédent et de celui qui suit, c'est n séquences supposées indépendantes qui sont construites.
2. Utiliser n graines différentes afin de générer n séquences distinctes. Cependant, la nécessité de pouvoir reproduire les séquences générées pose un problème pratique car il faut donc être capable de retrouver les graines qui ont été utilisées. Une manière de contourner ce problème est présentée dans la section suivante.

Dans le cadre du GSE, la deuxième méthode présente l'avantage d'être insensible à la durée de projection : en fixant la graine pour chaque itération, si la durée de projection passe de 30 à 40 ans, alors les 30 premières années auront toujours le même jeu de nombres aléatoires que pour la première simulation. Alors que si une graine unique est utilisée et que l'on change la durée de projection, le jeu de nombre aléatoire associé à chaque pas de temps sera décalé et les résultats complètement différents. Cette reproductibilité des résultats facilite les études et les analyses de changement.

Afin de mettre en place la méthodologie d'utilisation d'une graine par itération, plusieurs séquences uniformes sont produites en choisissant différentes graines. Pour chaque modèle et chaque pas de temps, la graine est choisie comme fonction du nom du modèle et du numéro de l'itération. La méthode s'appuie sur l'utilisation d'une fonction de hachage (SHA512) qui associe une signature numérique unique à une chaîne de caractère donnée. Mis à part l'avantage de l'insensibilité à la durée de projection, les propriétés des séquences obtenues en sortie sont équivalentes.

2.2 Transformation en variables gaussiennes corrélées

Jusqu'ici, les méthodes proposées permettent d'obtenir des séquences uniformes indépendantes. L'objectif de cette partie est de transformer les variables uniformes en variables gaussiennes, de pouvoir appliquer les corrélations souhaitées et de proposer des méthodes permettant de disposer d'un jeu de nombres aléatoires plus « performant » (dans un sens que l'on précisera).

2.2.1 Transformation de Box-Muller

Les modèles de diffusion contiennent des browniens et imposent donc l'utilisation de variables aléatoires gaussiennes. Il faut donc disposer d'une méthode permettant de transformer les séquences uniformes indépendantes en séquences normales.

L'idée derrière la transformation de Box-Muller est d'imaginer deux échantillons gaussiens X et $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ dans un plan cartésien, et de représenter ces points en coordonnées polaires (on verra que cela fera apparaître des variables uniformes). Les points en coordonnées polaires étant déterminés par la distance à l'origine et l'angle θ .

Concernant la distance à l'origine, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ et donc $R^2 = X^2 + Y^2$. La somme de deux variables normales indépendantes suit une loi de χ^2 à deux degrés de liberté, qui suit elle-même une loi $Gamma(1, \frac{1}{2})$, qui est elle-même équivalente à une loi exponentielle $Exp(1/2)$. Or, une variable ex-

ponentielle pouvant être exprimée comme le logarithme d'une variable uniforme, on a : $R^2 \sim -2 \log(U_1)$ avec $U_1 \sim Unif(0, 1)$

Concernant l'angle theta,

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{R^2}{2}}$$

Ainsi, avec la donnée de R^2 , la distribution jointe de X et Y suit une loi uniforme. Alors, à partir du moment où l'égalité $X^2 + Y^2 = R^2$ est vérifiée, (X,Y) peut être n'importe quel point de rayon R , on a alors $\theta = 2\pi U_2$ avec $U_2 \sim U(0, 1)$. En passant aux coordonnées cartésiennes, on a :

$$X = R \cos(\theta) = \sqrt{-2 \log U_1} \cos(2\pi U_2)$$

$$Y = R \sin(\theta) = \sqrt{-2 \log U_1} \sin(2\pi U_2)$$

En appliquant cette transformation au nuage de point uniforme (les 1000 itérations du pas de temps 3 entre les modèles pour le rendement CAC et la volatilité des taux nominaux), on obtient le nuage suivant sur lequel on peut observer les distributions marginales :

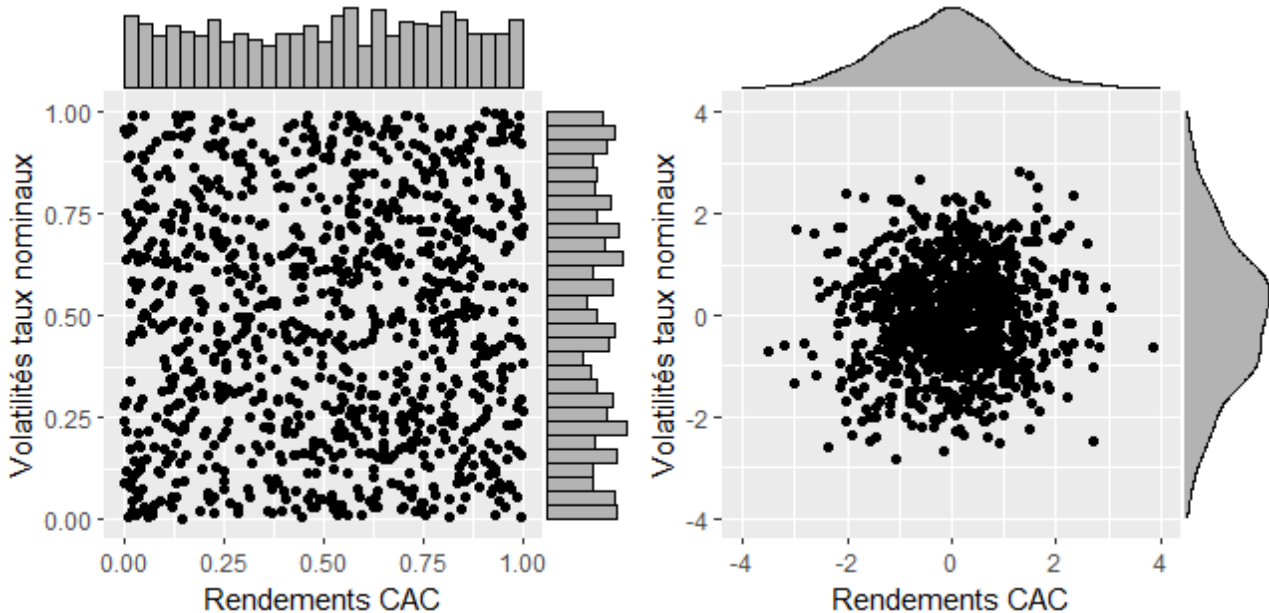


FIGURE 2.3 – Transformation des variables uniformes en variables gaussiennes

On peut voir que la question du nombre d'itérations peut être posée, celle-ci sera traitée plus tard.

Les séquences aléatoires de chaque facteur de risques sont ensuite corrélées en appliquant la décomposition de Cholesky.

2.3 Traitement du jeu de nombres aléatoires pour une meilleure convergence des tests

2.3.1 Correspondance des moments

Lors d'une simulation, on ne peut générer qu'un nombre fini de scénarios, il se peut donc que certaines approximations liées à l'échantillonnage aient lieu. Les propriétés statistiques des séquences gaussiennes générées peuvent différer des propriétés théoriques. Par exemple, pour 1000 itérations, la moyenne d'une séquence gaussienne peut être légèrement supérieure ou inférieure à 0. De même pour la variance qui peut différer de 1. Ces déviations peuvent biaiser les simulations en s'éloignant des propriétés théoriques dans un cadre idéal.

Une idée peut être de corriger les deux premiers moments au niveau de chaque pas de temps et de chaque modèle, et d'observer l'impact sur les résultats.

Ajustement de la moyenne : Cet ajustement se fait en soustrayant la moyenne globale à l'ensemble des nombres : à chaque pas de temps, et pour chaque modèle, on calcule la moyenne μ à travers toutes les simulations, et on la soustrait à l'ensemble de l'échantillon.

Ajustement de la variance : Cet ajustement permet de renormaliser la distribution de l'échantillon pour que la variance soit égale à 1.

Par exemple, en appliquant cette méthodologie à chaque facteur de risques du pas de temps 2 (1000 tirages pour chacun des 51 facteurs de risques), les moments les plus éloignés des valeurs théoriques sont les suivant :

	1000 tirages pour le brownien associé au dividende immobilier au pas de temps 2	1000 tirages pour le brownien associé au rendement Eurostoxx au pas de temps 3
Moyenne	0.066	0.008
Variance	1.013	1.11

Ces deux séquences seront donc retraitées (soustraction et renormalisation) afin de retomber sur les valeurs théoriques attendues.

Impact de la correspondance des moments sur les tests de martingalité

On affiche les tests avec les intervalles de confiance associés, en observant seulement l'erreur relative en valeur absolue de la valeur estimée à chaque pas de temps par rapport à la valeur attendue avec ou sans la correspondance des moments (ou *Moment Matching*) en distance L^1 :

Pour les tests sur le CAC, l'Eurostoxx, et les HF, on peut clairement voir que la correction des deux premiers moments des nombres aléatoires permet d'obtenir de meilleurs tests martingales :

2.3. TRAITEMENT DU JEU DE NOMBRES ALÉATOIRES POUR UNE MEILLEURE CONVERGENCE DES

CAC sans ajustement	CAC avec ajustement
5.83	3.64

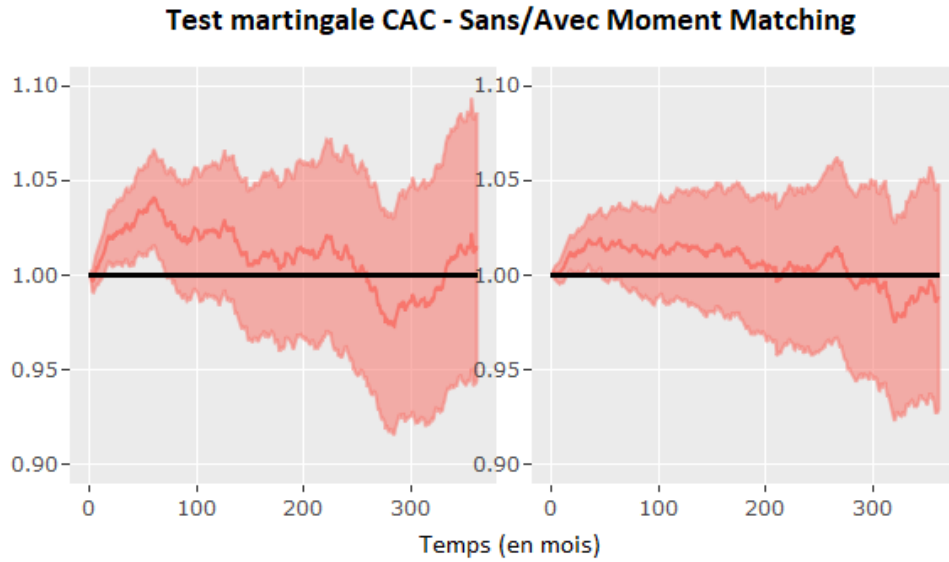


FIGURE 2.4 – Test martingale CAC sans/avec Moment Matching au seuil 95%

EUR sans ajustement	EUR avec ajustement
4.77	4.28

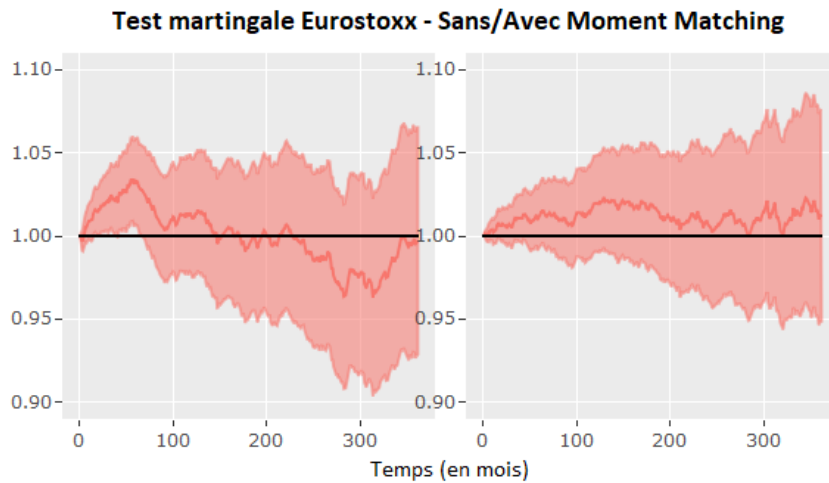


FIGURE 2.5 – Test martingale Eurostoxx sans/avec Moment Matching au seuil 95%

HF sans ajustement	HF avec ajustement
0.83	0.11

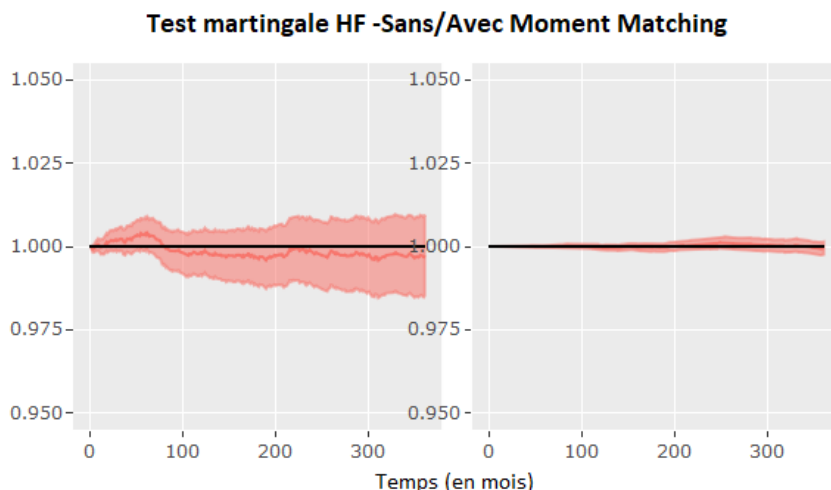


FIGURE 2.6 – Test martingale Hedge Fund sans/avec Moment Matching au seuil 95%

On peut ainsi explicitement observer la relation entre la qualité de l'aléa généré (correspondance des moments empiriques avec les moments théoriques) et la qualité des tests de validation des scénarios.

Les résultats sont issus de l'étude de l'impact du remplacement des deux premiers moments en même temps, on choisit d'étudier l'impact en modifiant la moyenne et la variance séparément. Les résultats montrent que seul le changement de la moyenne a un véritable impact sur les résultats, et que la modification de la variance a un impact très marginal.

2.3.2 Variables antithétiques

Les estimations issues d'une simulation de Monte Carlo dépendent des scénarios utilisés : si la simulation est lancée avec un autre jeu de nombres aléatoire ou avec un nombre de scénarios différent, les résultats seraient aussi différents.

Un nombre fini de scénarios sera toujours sujet à une erreur d'échantillonnage (il s'agira toujours d'une approximation de la « vraie » valeur qui serait obtenue en utilisant un nombre infini de scénarios).

En pratique, le nombre de scénarios est contraint par les temps de calcul lors de la génération des tables de scénarios et dans le modèle ALM. Une méthode utilisée pour réduire l'erreur d'échantillonnage est l'utilisation de variables antithétiques.

Rappelons qu'il est possible d'estimer l'erreur autour de l'estimateur de la moyenne utilisé dans la méthode de Monte Carlo en utilisant le théorème central limite. On obtient un intervalle de la forme suivante (avec une variance connue) :

$$\left[\hat{X} - q_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \hat{X} + q_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

L'erreur d'échantillonnage, donnée par la taille de l'intervalle de confiance, peut être réduite de deux manières :

2.3. TRAITEMENT DU JEU DE NOMBRES ALÉATOIRES POUR UNE MEILLEURE CONVERGENCE DES

- Jouer sur le facteur n (Augmenter le nombre de scénarios) : $\hat{X} \pm q_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ La taille de l'intervalle est réduite quand le nombre de scénarios n augmente. Mais comme mentionné plus haut, les modèles ALM limitent très vite le nombre de scénarios. De plus, on voit que la précision augmente avec un facteur racine du nombre de scénarios, ce qui veut dire qu'il faut multiplier par 4 le nombre de scénarios afin de réduire l'erreur de moitié.
- Jouer sur le facteur σ : $\hat{X} \pm q_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ en utilisant une méthode de réduction de variance, qui consiste à construire un estimateur alternatif avec une variance plus petite. On utilise ici des variables antithétiques.

Principe

La technique des variables antithétiques est une technique couramment utilisée dans les simulations de Monte-Carlo. L'implémentation de cette technique consiste en la génération de nombres aléatoires par paires : le deuxième paquet de nombre est l'opposé du premier. En adoptant une telle approche, le temps de simulation est réduit étant donné que seule la moitié des nombres aléatoires sont réellement générés. Mais surtout, cela permet de réduire la variance de l'estimateur de Monte-Carlo.

Si l'on souhaite estimer une certaine quantité X par l'estimateur de Monte-Carlo \hat{X} (par exemple, l'estimateur de la moyenne des projections des valeurs actualisés d'un actif à un pas de temps dans le cadre du test martingale), on utilise des scénarios dont la génération repose sur des variables gaussiennes notées dZ .

En supposant que l'on répète la simulation, mais que l'on inverse le signe des nombres aléatoire ($-dZ$ au lieu de dZ), on obtient un nouveau jeu de variables aléatoires gaussiennes (grâce à la symétrie de la loi normale). On peut alors calculer l'estimateur \hat{X}' de la séquence de obtenue avec le nombres inversés qui sera d'aussi bonne qualité que le premier estimateur avec la séquence initiale :

$$Var(\hat{X}) = Var(\hat{X}')$$

L'idée est ensuite de construire un nouvel estimateur en prenant la moyenne des deux estimateurs :

$$V_2 = \frac{1}{2}(\hat{X} + \hat{X}')$$

La variance de ce nouvel estimateur est alors :

$$\begin{aligned} Var\left(\frac{1}{2}(\hat{X} + \hat{X}')\right) &= \frac{1}{4}[Var(\hat{X}) + Var(\hat{X}') + 2Cov(\hat{X}, \hat{X}')] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}Var(\hat{X}) + \frac{1}{2}Var(\hat{X}') + Cov(\hat{X}, \hat{X}')\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}Var(\hat{X}) + \frac{1}{2}Var(\hat{X}') + Corr(\hat{X}, \hat{X}')\sqrt{Var(\hat{X})Var(\hat{X}')}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}Var(\hat{X}) + \frac{1}{2}Var(\hat{X}') + Corr(\hat{X}, \hat{X}')\sqrt{Var(\hat{X})Var(\hat{X}')}\right] \\ &= \frac{1}{2}[Var(\hat{X}) + Var(\hat{X}')Corr(\hat{X}, \hat{X}')] \\ &= \frac{1}{2}Var(\hat{X})(1 + Corr(\hat{X}, \hat{X}')) \end{aligned}$$

Étant donné que la corrélation ne peut être supérieure à 1, l'utilisation des variables antithétiques ne peut augmenter la variance :

$$\text{Var}\left(\frac{1}{2}(\hat{X} + \hat{X}')\right) \leq \frac{1}{2}\text{Var}(\hat{X})(1 + 1)$$

D'où,

$$\text{Var}\left(\frac{1}{2}(\hat{X} + \hat{X}')\right) \leq \text{Var}(\hat{X})$$

Nous souhaitons appliquer ce résultat à l'estimateur de la moyenne sur un jeu de scénarios de taille N . Les variables antithétiques ne donnent pas un jeu de scénario indépendant, il faut donc adapter le calcul. Comme indiqué ci-dessus, on part de l'estimateur suivant :

$$\hat{X} = \frac{1}{2}(\hat{X} + \hat{X}') = \frac{1}{N/2} \sum_{i=1}^{N/2} (X_i + X'_i)$$

Les \hat{X} définissent une séquence indépendante de taille $N/2$, il est alors possible de calculer la variance comme suit :

$$\text{Var}(\hat{X}) = \frac{1}{\sqrt{N/2}} \text{Var}\left(\frac{1}{2}(\hat{X} + \hat{X}')\right)$$

Impact de l'utilisation des variables antithétiques sur les tests martingales

L'indice dont la qualité du test est le plus améliorée est l'indice *Private Equity*, il est clair que la précision de l'estimateur de la moyenne est grandement améliorée avec ce nouvel estimateur construit en utilisant les variables antithétiques :

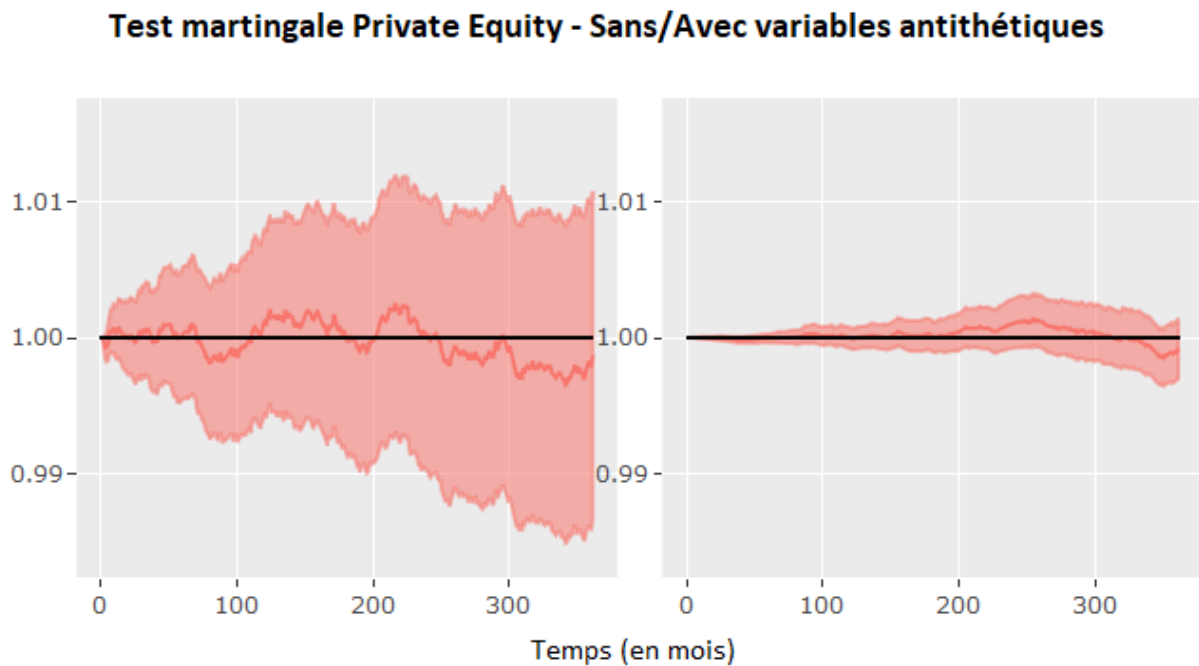


FIGURE 2.7 – Test martingale PE sans/avec variables antithétiques

2.4 Nombre d'itérations

D'une part, augmenter le nombre de scénarios générés améliore la précision des résultats, mais d'autre part, cela accroît les temps de calculs ce qui peut conduire à des difficultés de mise en place opérationnelle.

L'idée de cette section est d'étudier la convergence des résultats et des tests de validation en fonction du nombre de scénarios générés.

2.4.1 Convergence des tests martingales

Pour le test martingale, un intervalle de confiance est calculé à chaque pas de temps. Augmenter le nombre de scénarios réduit l'incertitude, cela débouche sur des intervalles de confiance plus petits à seuils fixés. On peut observer la demi-longueur au pas de temps 10 ans du test martingale sur le CAC qui devient de plus en plus petite quand le nombre d'itérations augmente :

Nombre d'itérations n	$1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
100	0.091476
1000	0.028834
5000	0.013013
10000	0.008986

La taille de l'intervalle de confiance autour de l'estimateur de la moyenne évolue comme une fonction racine du nombre de scénarios.

2.4.2 Convergence des résultats

La précision des résultats issus des projections ALM se mesure en partie en observant la convergence de la valeur temps des options et garanties des contrats.

TVOG

Les scénarios utilisés dans le modèles ALM déclenchent des mécanismes d'options et de garanties des contrats d'assurance qui dépendent de l'environnement économique. Il s'agit principalement des rachats conjoncturels, des arbitrages, des taux garantis et de la participation aux bénéfices.

La TVOG représente la valeur temps des options et garanties qui figurent au passif des assureurs et se calcule en utilisant des scénarios stochastique.

Pour calculer la valeur temps des options et garanties, on calcule la différence entre la valeur actuelle des marges futures (NAV) d'un scénario déterministe où peu/pas d'options et garanties sont déclenchées, et la NAV moyenne sur un jeu de scénarios stochastiques dans lequel les scénarios projetés explorent un large domaine.

Le calcul de la TVOG revient à un problème d'estimation d'une moyenne. Chaque scénario correspond à un calcul indépendant, on obtient alors un échantillon $(TVOG_1, \dots, TVOG_n)$ de valeurs indépendantes et identiquement distribuées. La variance théorique σ est inconnue, l'intervalle de confiance au niveau 95% de l'estimateur de la moyenne est donné par :

$$[T\hat{V}OG - q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}; T\hat{V}OG + q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}]$$

Où $q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}$ est le quantile au seuil $1 - \frac{\alpha}{2}$ d'une loi de Student à $n - 1$ degrés de liberté, n le nombre de scénarios et $\hat{\sigma}$ l'estimateur de l'écart-type.

Le calcul de cette TVOG en faisant varier le nombre de scénarios (de 1 à 5000 dans le graphique suivant) illustre la convergence :

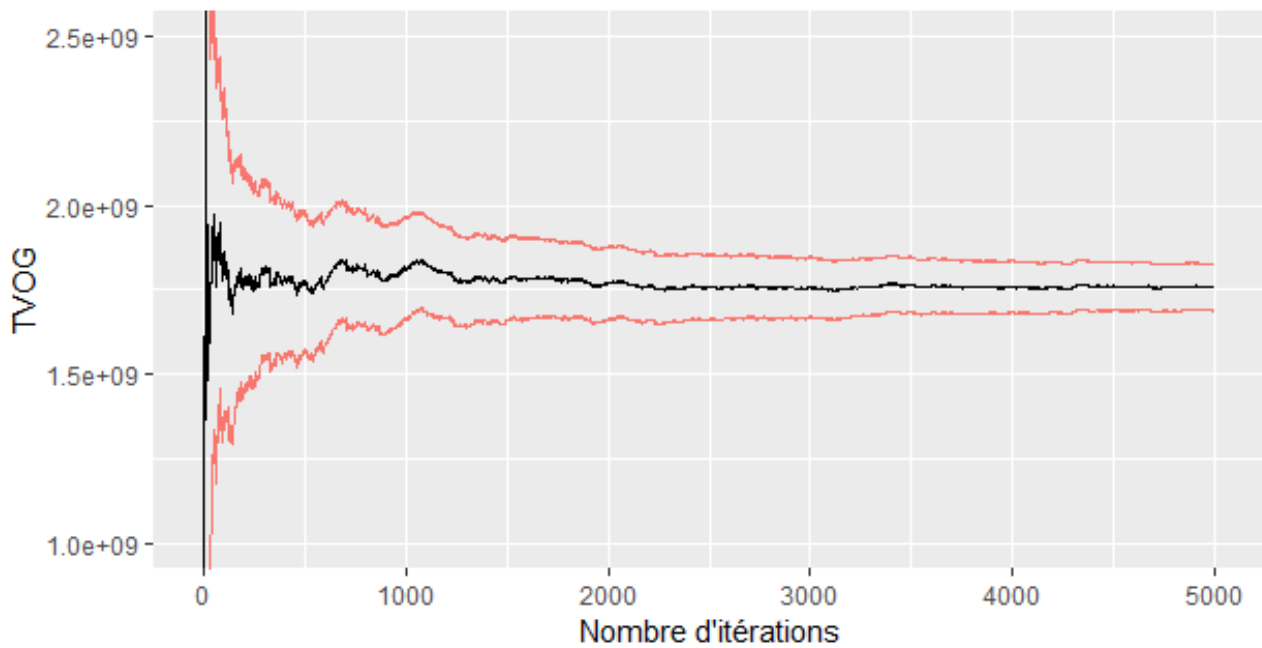


FIGURE 2.8 – Convergence de la TVOG avec l'intervalle de confiance au seuil 95% associé

L'estimateur de la moyenne des TVOG des scénarios est tracé en ligne noire. L'estimateur est entouré par les traits rouges qui correspondent à l'intervalle de confiance associé à chaque point au seuil 95%. Les premiers points sont particulièrement volatiles car l'estimation de cette grandeur avec peu de scénario ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants : chaque scénario provoquant des mécanismes d'option et de garanties très différents, la convergence se fait après la génération d'un nombre suffisant de scénarios. Dès qu'un nombre suffisant de scénarios est utilisé, les résultats se stabilisent.

L'utilisation d'une loi de Student du fait que la variance est inconnue ne change pas les résultats de manière significative. En effet, les quantiles de la loi de Student se rapprochent des quantiles de la loi normale quand le nombre de degrés de liberté augmente :

Degrés de liberté	Quantile au seuil 97.5%
2	4.30
15	2.13
100	1.98
1000	1.96

Sachant que le quantile d'une loi normale centrée réduite au seuil 97.5% est 1.96.

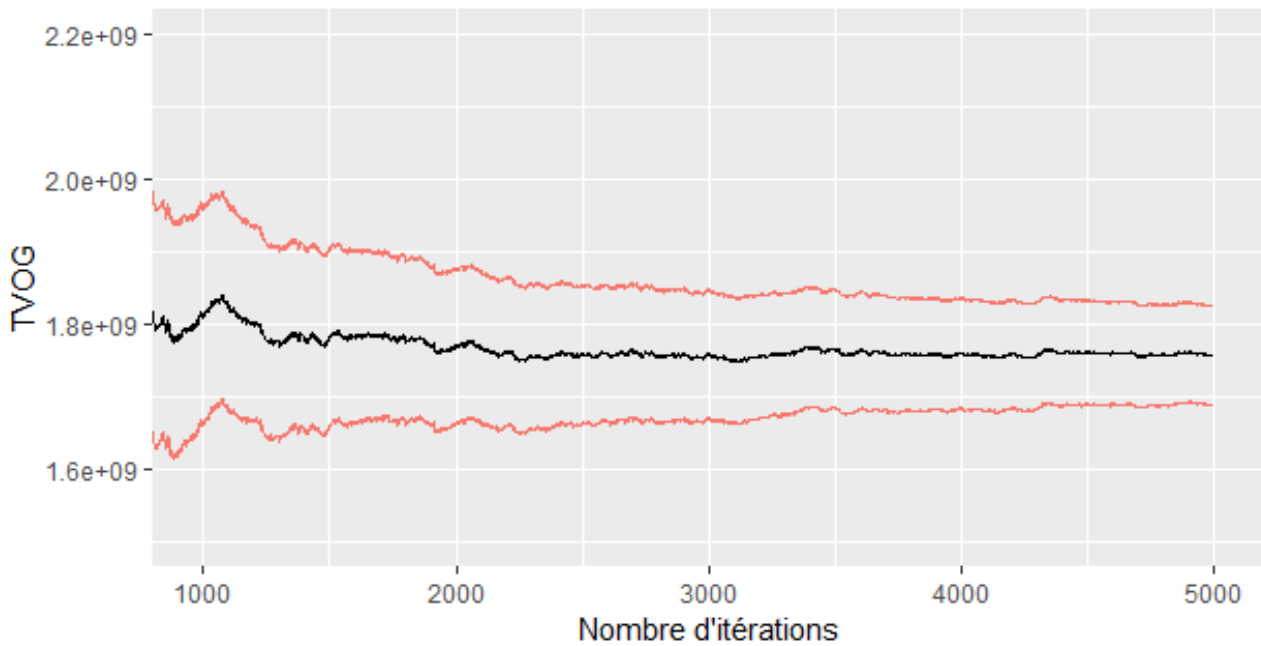


FIGURE 2.9 – Zoom sur les 4000 derniers scénarios

NAV

De la même manière, on peut également observer la convergence de la NAV. On possède un échantillon (NAV_1, \dots, NAV_n) d'éléments indépendants et identiquement distribués avec n le nombre de scénarios générés. L'intervalle de confiance de la NAV est donné par

$$\left[N\hat{AV} - q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}; N\hat{AV} + q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]$$

Où $q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}$ est le quantile au seuil $1 - \frac{\alpha}{2}$ d'une loi de Student à $n - 1$ degrés de liberté, n le nombre de scénarios et $\hat{\sigma}$ l'estimateur de l'écart-type.

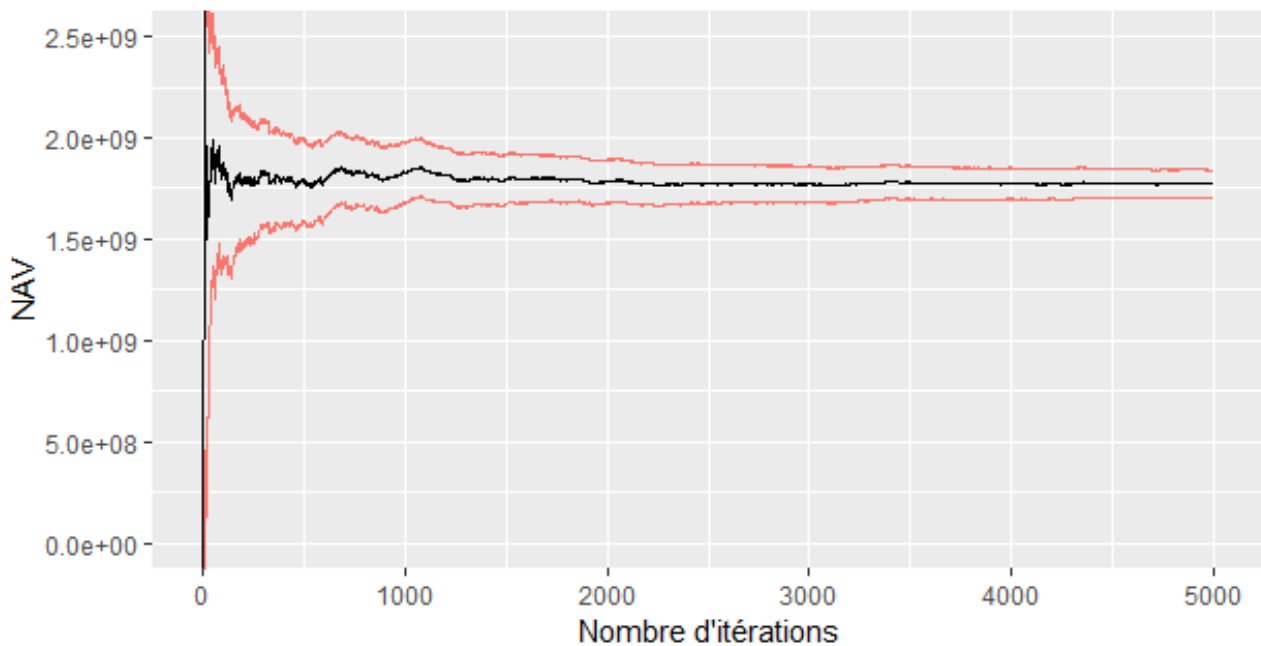


FIGURE 2.10 – Convergence de la NAV en fonction du nombre de scénarios

Le choix du nombre de scénario est un compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats. L'étude de la convergence permet de justifier ou de remettre en cause le choix d'un nombre de scénarios.

2.5 Quasi-aléatoire

L'ESG adopte un schéma de type Monte-Carlo pour estimer des espérances de plusieurs variables financières et facteurs de risque. De manière générale, de telles méthodes impliquent l'utilisation d'un aléa pour les simulations des variables. Jusqu'ici, les aléas étaient obtenus à l'aide de générateurs pseudo-aléatoires. Dans cette partie, on propose l'utilisation de générateurs dits «quasi-aléatoires» et qui possèdent quelques propriétés intéressantes.

Dans certains cas, l'utilisation de générateurs quasi-aléatoires (ou à discrédance faible) permet d'accélérer la convergence de la simulation de Monte-Carlo. Si cela est applicable à l'ESG, cela permettrait d'obtenir une meilleure précision des résultats en utilisant le même nombre de simulations, ou d'obtenir le même degré de précisions avec un nombre de simulations plus petit.

Rappelons tout d'abord que les séquences aléatoires générées servent principalement à simuler les variables normales qui apparaissent lors de la discrétisation des browniens qui définissent les modèles de diffusion.

2.5.1 Source de l'aléa

Pseudo-aléatoire

Il s'agit des séquences générées en utilisant une source que l'on considère aléatoire. La partie (2.1) présente la méthode utilisée pour générer des nombres pseudo-aléatoires en utilisant l'algorithme de Wichmann-Hill.

Quasi-aléatoire

Les générateurs quasi-aléatoires ou à discrédance faible sont des générateurs de séquences déterministes qui remplissent au mieux une espace à plusieurs dimensions. La discrédance correspond à la notion de « remplissage uniforme » de l'hypercube $[0, 1]^d$.

Le graphique suivant présente la génération de 2000 points dans 2 dimensions avec à gauche un générateur pseudo-aléatoire (WH) et à droite un générateur quasi-aléatoire (Sobol) :

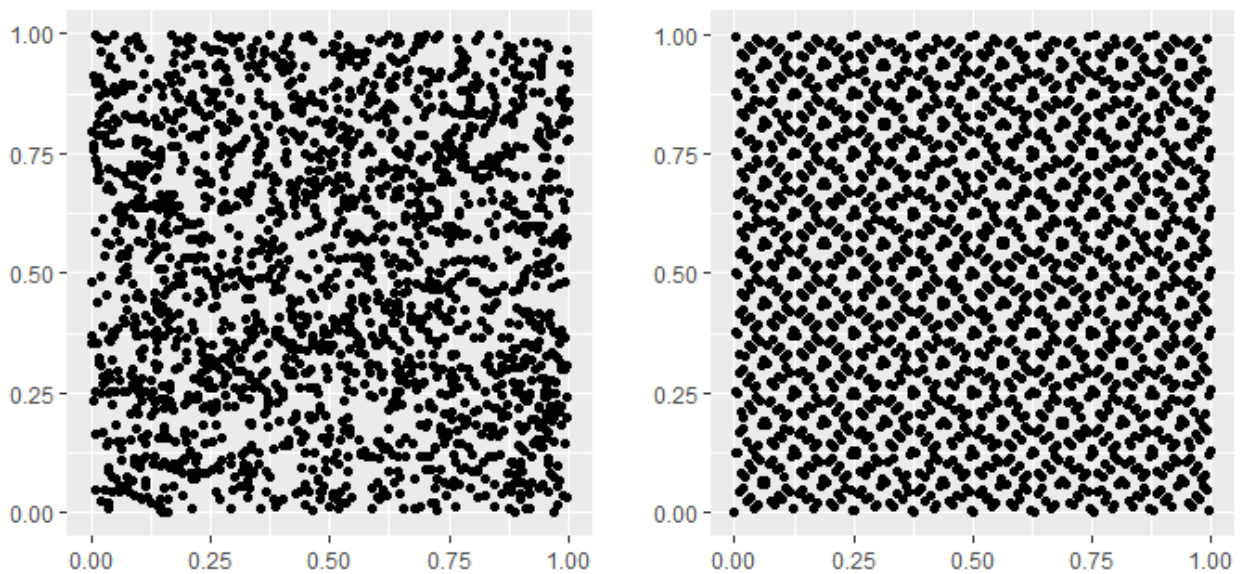


FIGURE 2.11 – Génération de nombres aléatoires en 2 dimensions

Par construction, les points du graphique de droite couvrent mieux l'espace que les points du graphique de gauche.

2.5.2 Taux de convergence

La convergence d'une méthode de Monte-Carlo classique se comporte comme l'inverse d'une fonction racine du nombre d'itérations $\sim \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Glasserman (2004) montre que l'utilisation de séquences quasi-aléatoires peut accélérer la convergence qui devient asymptotiquement de l'ordre de

$$\sim c(d) \frac{(\ln N)^d}{N}$$

Où d est la dimension et $c(d)$ une fonction inconnue qui dépend de la dimension. On note que pour des dimensions élevées, la convergence ne devient pas forcément plus rapide avec des séquences quasi-aléatoires.

2.5.3 Uniformité des séquences

Les séquences uniformes générées sont mieux distribuées quand on augmente le nombre de tirages. De plus les séquences semblent bien plus uniformes quand on utilise un générateur quasi-aléatoire. Pour 1000 tirages, on obtient :

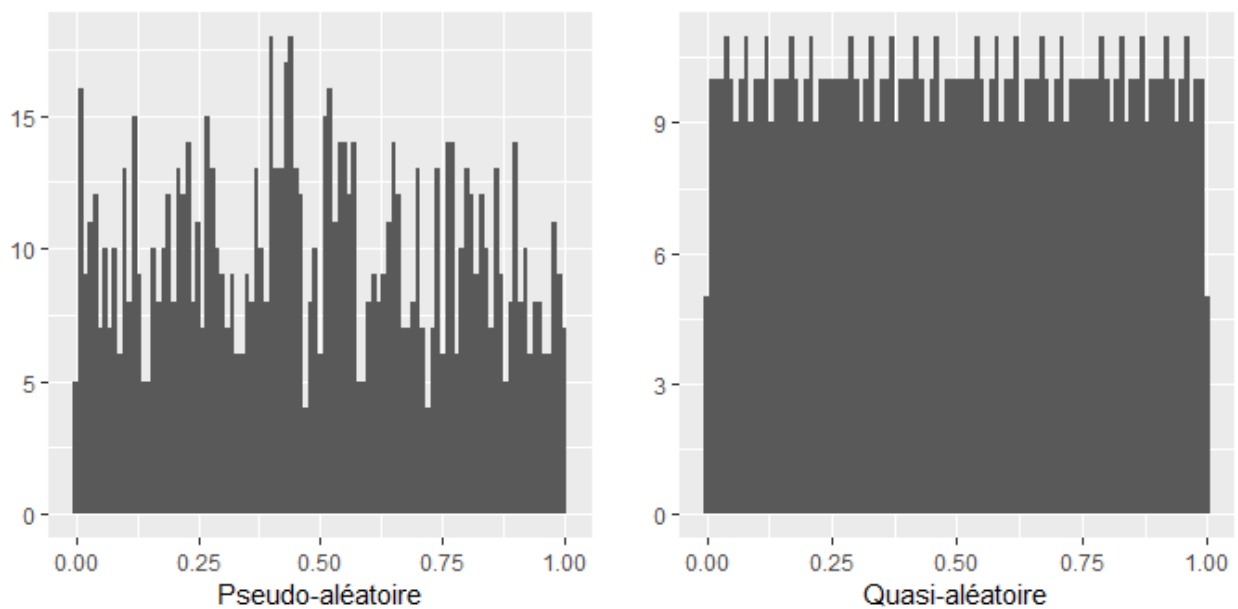


FIGURE 2.12 – Distribution de 1000 tirages uniformes

À 10000 tirages, la séquence quasi-aléatoire présente des propriétés remarquables d'uniformité :

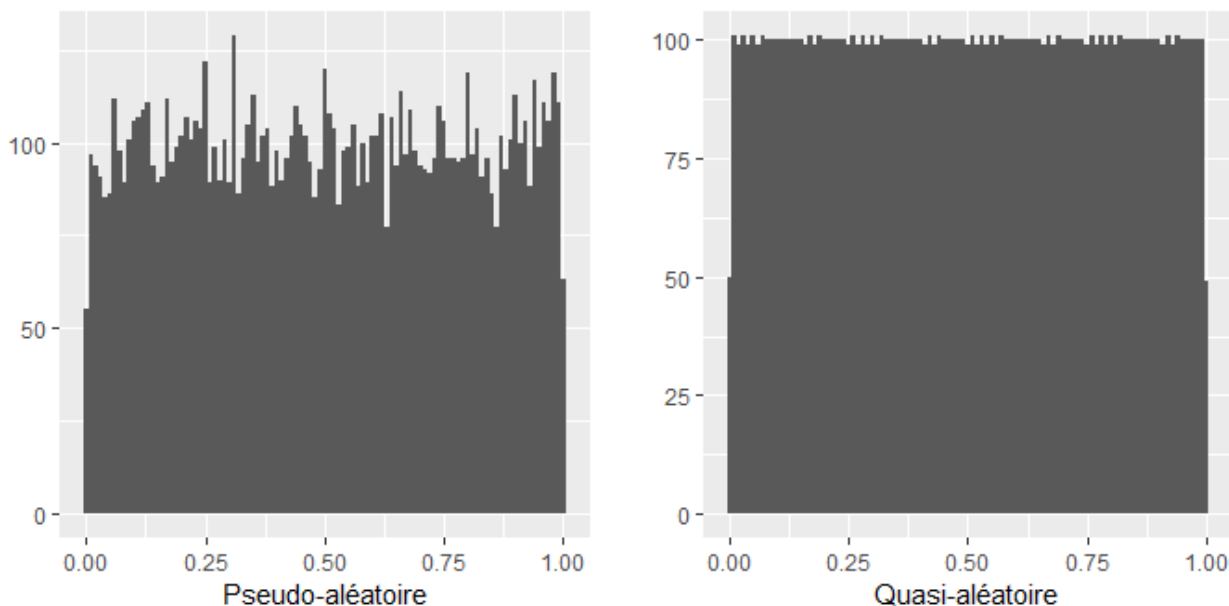


FIGURE 2.13 – Distribution de 20000 tirages uniformes

2.5.4 Dimension

Comme observé dans la partie consacrée à la convergence, la dimension de l'espace où l'on génère les nombres aléatoires est un facteur déterminant dans la précision des résultats et de la convergence. Si d devient trop grand, l'amélioration de la convergence en utilisant un générateur quasi-aléatoire n'est pas garantie.

Dans le cadre de l'utilisation de ces séquences dans le générateur de scénarios économique, la dimension correspondra à la taille de la séquence utilisée pour un seul scénario. Le nombre de scénarios utilisés correspondra au nombre de points qui viendront remplir cette dimension.

Par exemple, en pas mensuel sur un horizon de 30 ans et pour les 51 facteurs de risques projetés, la dimension est de $51 \times 360 = 18360$. Si 1000 scénarios sont générés, le tirage est de 1000 points dans $[0, 1]^{18360}$. En pas annuel, sur un horizon de 30 ans pour 51 (resp. 10) facteurs de risques, la dimension est de 1530 (resp. 300).

(David Redfern (2013) – Moody's research report) compare les générateurs quasi-aléatoires et propose l'utilisation de la séquence de Sobol.

2.5.5 Limites liées à la dimension

Il y a deux aspects qu'il est important de considérer sur les séquences de nombres générées : l'uniformité et la corrélation. On étudie comment ces grandeurs évoluent quand la dimension augmente :

- L'uniformité de la distribution sur chaque dimension
- La corrélation entre chaque paire de dimensions qui doit être proche de zéro

L'uniformité

Les graphiques ci-dessus illustrent la distribution quand les séquences sont générées sur une seule dimension. Couvrir les marges uniformément sur plusieurs dimensions est une contrainte plus difficile à satisfaire. Cependant, le générateur quasi-aléatoire produit de bons résultats d'uniformité marginale à grande dimension également : 1000 nombres sont générés en dimension 1000 (c'est-à-dire que l'on remplit l'espace $[0, 1]^{1000}$ avec 1000 points).

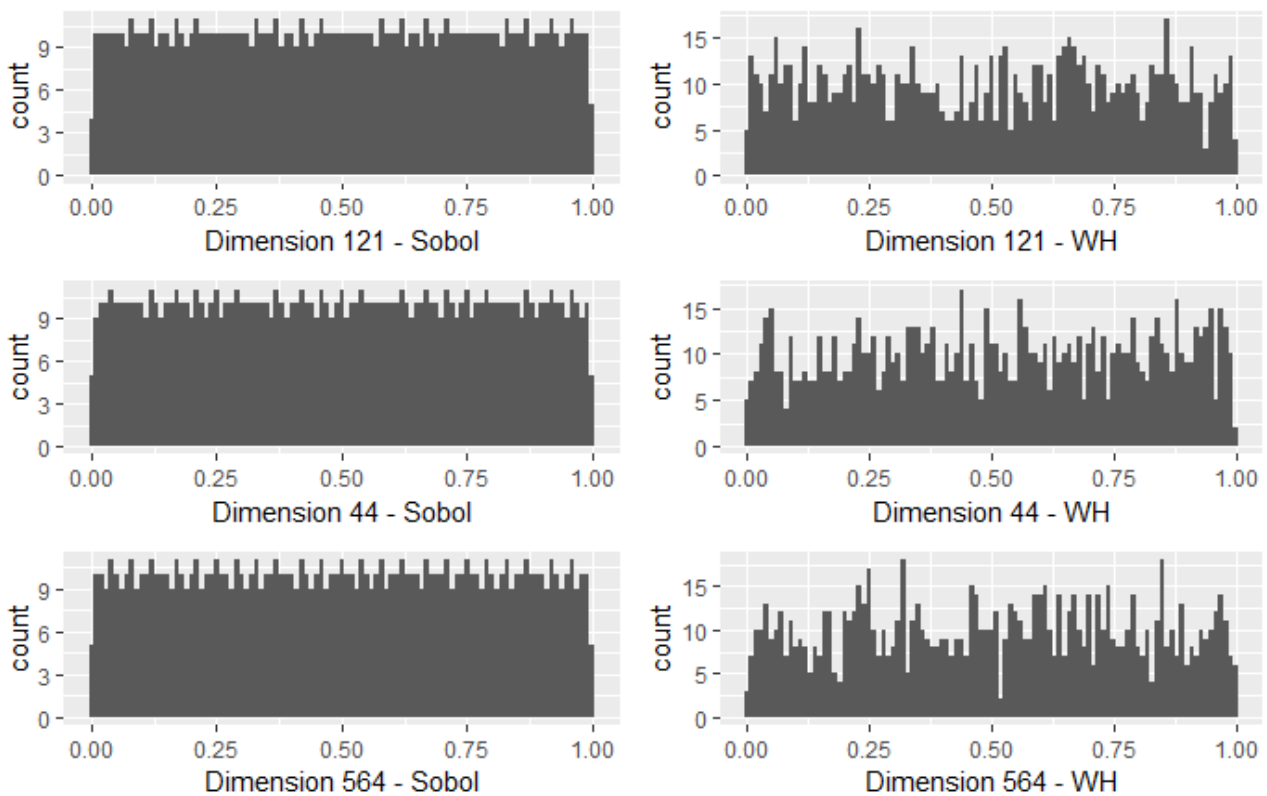


FIGURE 2.14 – Distribution de 1000 tirages de Sobol sur plusieurs dimensions

Il est clair que la séquence de Sobol remplit mieux l'espace que le générateur pseudo-aléatoire utilisé.

La corrélation

L'objectif étant de générer des séquences indépendantes (les corrélations étant appliquées par la suite), on vérifie que la corrélation est proche de 0 entre chaque dimension prise 2 à 2. L'étude de (David Redfern (2013) – Moody's research report) montre que de manière générale, les suites de Sobol possèdent de bonnes propriétés d'indépendance. Cependant, certains outliers en plus grandes dimensions, illustrent l'existence d'une forme de dépendance :

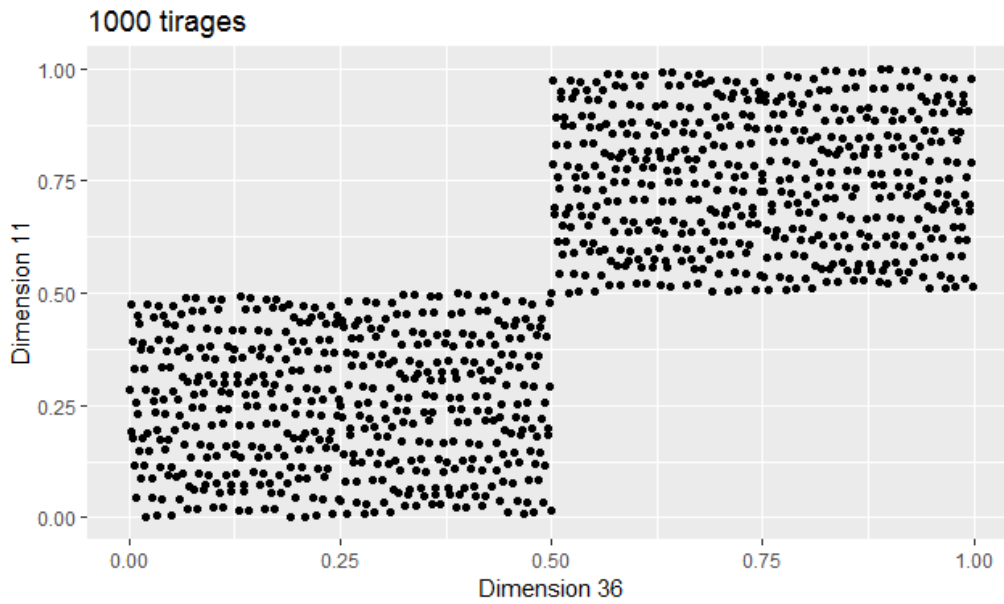


FIGURE 2.15 – Distribution de 1000 tirages de Sobol sur les dimensions 11 et 36

Cela vient du fait que le nombre de points générés n'est pas suffisant : en augmentant le nombre de génération de points, les points se retrouvent beaucoup mieux répartis dans l'espace. Les graphiques suivant montre comment l'espace est mieux recouvert en augmentant le nombre de points de 200 et de 500 :

Cependant, pour l'écrasante majorité des paires de dimensions, il n'y a pas de tendance notable à observer, celle présentée ci-dessous est un cas extrême sur une seule paire de simulations sur les 499 500 paires de l'exemple. Mais le problème reste persistant quand on traite des problèmes à dimension élevées.

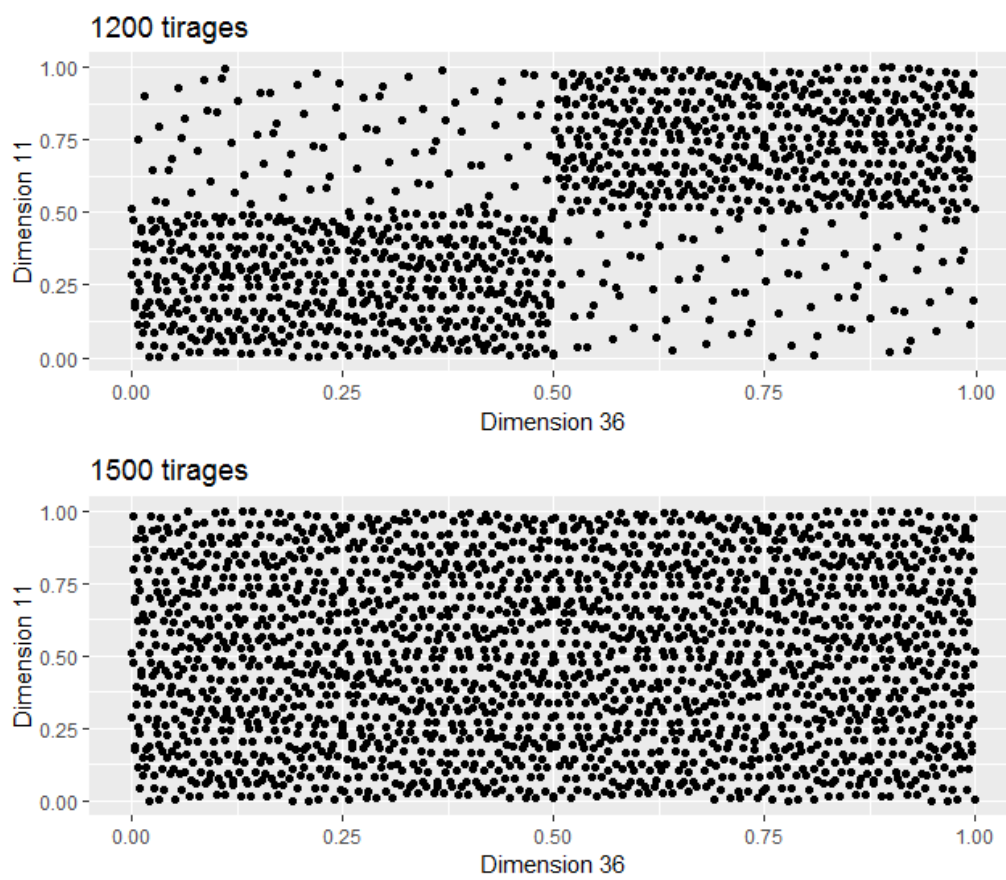


FIGURE 2.16 – Distribution de 1000 tirages de Sobol sur les dimensions 11 et 36

2.5.6 Application au GSE

L'idée est maintenant de changer la source de l'aléa utilisée en entrée du générateur de scénarios en utilisant le jeu de nombres présenté. Les séquences quasi-aléatoires peuvent être utilisées pour améliorer le taux de convergence dans un schéma de Monte-Carlo.

Comme illustré dans la partie ci-dessus, la dimensionnalité peut poser problème quand on travaille avec des générateurs quasi-aléatoires. La dimension dans le générateur de scénarios peut rapidement augmenter du fait du choix du pas de discrétisation (annuel, mensuel, semestriel) et du nombre de variable diffusées, la dimension correspondant au produit de ces deux données. Le nombre de scénarios utilisé vient ensuite remplir cet espace.

Afin de simplifier les calculs, seuls les aléas intervenant dans la définition du modèle de taux seront générés en utilisant les suites de Sobol. On observera comment l'utilisation de cet aléa modifie la convergence des tests de martingalité des obligations zéro-coupons et des tests de markets consistency des volatilités implicites des swaptions (car ce sont les tests où les taux interviennent directement).

Dix tables sont générées avec un générateur de nombres pseudo-aléatoire en utilisant à chaque fois une graine différente et dix autres tables sont générées en utilisant un générateur de nombre quasi-aléatoire (basé sur la suite de Sobol). Chaque table contient 1000 scénarios.

Chaque scénario permet de recalculer le prix actualisé issu de la projection des taux, on vérifie ensuite que sur chaque table de scénarios, l'estimation de la moyenne de ces prix n'est pas trop loin du prix en date initiale (principe du test martingale). On affiche donc les résultats des tests de chacune des vingt tables avec à gauche les tables utilisant des générateurs pseudo-aléatoire et à droite celles utilisant un générateur quasi-aléatoire.

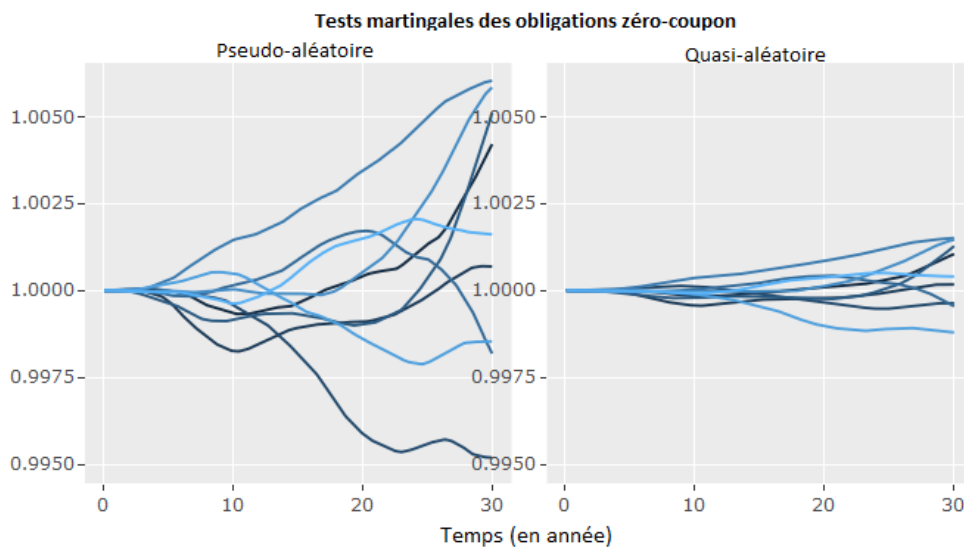


FIGURE 2.17 – Tests de martingalité sur les prix des obligations zéro-coupon issus de 10 tables en changeant la source de l'aléa

Les propriétés des générateurs quasi-aléatoires permettent de réduire de manière significative la volatilité des résultats.

Il est donc possible d'utiliser des générateurs quasi-aléatoire dans le générateur de scénarios. Cependant, du fait de la grande dimensionnalité que l'on observe en pratique (à cause des horizons

de projections lointains et du nombre de facteurs de risques projetés), cette utilisation peut vite être limitée.

Une solution peut être d'adopter une approche hybride où l'utilisation de plusieurs générateurs peut être adoptée. Mais dans cette configuration aussi, on peut faire face à un problème lié à la dimension : même avec seulement quatre facteurs de risques, le fait de simuler en pas mensuel sur un horizon de 30 ans (360 pas de temps) implique de générer des séquences de nombres dans une dimension de taille 1440.

Chapitre 3

Autour du calibrage du modèle de taux

3.1 Cadre mark-to-model

Il est important de noter qu'il n'existe pas de marché où le prix des options et garanties d'un contrat d'assurance sont observables. On ne peut donc pas adopter une méthode mark-to-market consistant à valoriser le passif en cohérence avec un cours de marché. À la place, les assureurs calibrent leurs modèles en utilisant des instruments financiers et des produits dérivés liquides et valorisent leurs passifs en adoptant une approche par simulation de monte-carlo. Pour les modèles de taux, il est commun d'utiliser les prix des swaptions pour le calibrage.

L'objectif est d'identifier des propriétés ou des indicateurs qui correspondent et qui aient du sens à la fois pour les instruments financiers et pour les options et garanties des contrats d'assurance. La volatilité implicite est la mesure standard utilisée pour la cotation des produits dérivés et la valorisation des passifs, et se comporte généralement de manière intuitive à travers les différents niveaux de strike, de maturités et de tenors.

Le modèle utilisé doit pouvoir fidèlement reproduire la surface de volatilité afin de bien valoriser le passif, car les contrats d'épargne euro contiennent des options et garanties qui dépendent directement des taux. Pour une valorisation *market-consistent*, il faut donc que le modèle puisse correctement estimer le prix d'instruments financiers équivalents.

Le passif d'une compagnie d'assurance contient des options et garanties couvrant une multitude de maturités, avec des niveaux d'exercice qui peuvent varier (les conditions de marché pouvant changer significativement depuis la date de souscription). Il faut s'assurer du fait que les scénarios économiques générés puissent explorer ces garanties, afin de valoriser la TVOG avec une faible marge d'erreur.

3.2 Produits dérivés de taux

3.2.1 Notations sur les taux

Zéro-coupon

Les zéro-coupons sont des instruments financiers ne délivrant qu'un seul coupon à la date de maturité T . Le prix de cet instrument à la date t pour une maturité T est noté $P(t, T)$.

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, il existe une probabilité risque-neutre sous laquelle le prix actualisé des actifs :

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds}]$$

Taux forward

Les taux forward correspondent au taux d'un placement à une date future fixée avec une maturité déterminée.

On a

$$(1 + r(t))^t (1 + F(0, t, T))^{T-t} = (1 + r(T))^T$$

$$(1 + F(0, t, T))^{T-t} = \frac{(1 + r(T))^T}{(1 + r(t))^t}$$

On reconnaît l'expression de deux obligations zéro-coupons à droite :

$$(1 + F(0, t, T))^{T-t} = \frac{P(0, t)}{P(0, T)}$$

En appliquant le développement limité $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, l'équation devient :

$$(1 + F(0, t, T))^{T-t} = 1 + (T - t)F(0, t, T)$$

On obtient l'expression du taux forward en fonction des zéro-coupons :

$$F(0, t, T) = \frac{1}{T - t} \left(\frac{P(0, t)}{P(0, T)} - 1 \right)$$

Swaps de taux

Un swap est un contrat entre deux parties s'engageant à échanger, pendant une période de temps fixée, un flux fixe contre un flux variable. Souvent, le taux variable est indexé sur un taux monétaire (LIBOR ou EURIBOR). Les montants échangés sont proportionnels à un nominal fixé N .

L'expression du swap en fonction des zéro-coupons peut être explicitée de la manière suivante :

$$V_{fixe} = \tau \times P(0, t_i) \times S$$

$$\begin{aligned}
V_{variable} &= \sum_{i=1}^n \tau P(0, t_i) F(0, t_{i-1}, t_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \tau P(0, t_i) \frac{1}{\tau} \left(\frac{P(0, t_{i-1})}{P(0, t_i)} - 1 \right) \\
&= \sum_{i=1}^n P(0, t_{i-1}) - P(0, t_i)
\end{aligned}$$

Pour une valorisation au pair, la jambe fixe est égale à la jambe variable, on en déduit alors

$$S = \frac{\sum_{i=1}^n P(0, t_{i-1}) - P(0, t_i)}{\tau P(0, t_i)}$$

On parle de swap payeur et de swap receveur :

- Le swap payeur paye le taux fixe et reçoit le taux variable
- Le swap receveur paye le taux variable et reçoit le taux fixe

Swaption

Une swaption est une option donnant le droit d'entrer dans un swap de taux. Elle est caractérisée par :

- La maturité de la swaption
- La durée du swap sous-jacent appelé Tenor
- Le taux fixe du swap sous-jacent appelé Strike

Par exemple, une swaption receveuse 1Y-10Y de strike 3% donne le droit d'entrer dans 1 an dans un swap qui durera 10 ans, en recevant un taux fixe de 3% et en payant l'EURIBOR 6 mois.

3.3 Modèle LMM+

Le *Libor Market Model* est un modèle de taux qui suppose une dynamique log-normale à chaque taux forward. Le modèle LMM+ introduit en plus un facteur de déplacement (ou *shift*, une méthodologie permettant de choisir ce paramètre est présentée dans la section suivante) forçant le modèle à générer des taux négatifs et une volatilité stochastique afin de permettre au modèle de reproduire une plus large gamme de diffusion des taux.

La structure du modèle est la suivante :

$$\frac{df_k(t)}{f_k(t) + \delta} = drift + g_k(t) \times \sqrt{V(t)} \times dW_t$$

Avec :

- δ est le facteur de déplacement, ce paramètre va avoir une influence sur la forme de la distribution et permettre la génération de taux négatifs.

- la *drift* est déterminé de manière à éviter les opportunités d'arbitrage. C'est ce qui assure la martingalité des taux projetés.
- $g_k(t)$ est la volatilité déterministe qui dépend du temps, elle est modélisée en utilisant la forme d'une fonction de Rebonato. Cela permet une transition fluide des volatilités initiales vers une volatilité cible (fixée en amont). La fonction de Rebonato permet de reproduire de nombreuses formes selon ses quatre paramètres (a, b, c et d) : $g_k(t) = (a + b(T_k - t))e^{-c(T_k - t)} + d$
Cette composante du modèle a un impact significatif sur les options à la monnaie.
- la volatilité stochastique $V(t)$ gère plutôt la volatilité sur les queues de distribution et a un impact sur les options hors de la monnaie. Elle est définie selon un modèle CIR : $dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \epsilon\sqrt{V(t)}dZ_t$

Ainsi, calibrer le modèle LMM+ revient à déterminer 8 paramètres :

1. Les paramètres (a, b, c, d) de la fonction de Rebonato.
2. Les paramètres (κ, θ, ϵ) du modèle CIR.
3. La corrélation entre le brownien du modèle LMM+ et celui de la volatilité stochastique.

Dans un cadre *market-consistent*, les paramètres sont calibrés de manière à minimiser l'écart entre les prix de marché et les prix reconstruits à partir du modèle.

3.4 Choix relatifs au calibrage

L'article d'[Armel & Planchet \(2018a\)](#) se focalise sur quelques limites et points sensibles liés aux choix effectués lors du calibrage du modèle de taux :

3.4.1 Choix de l'instrument

La question du choix des instruments utilisés pour le calibrage du modèle de taux est contrainte par la nécessité de disposer d'un marché profond et liquide afin d'observer des données fiables pour le calibrage. La question de la cohérence entre la structure optionnelle des contrats d'assurance et les produits dérivés utilisés est alors traitée dans [Armel & Planchet \(2018b\)](#). Les swaptions sont les instruments choisis pour calibrer le modèle de taux car il s'agit de produits largement échangés et cotés sur le marché et les prix de ces options sont disponibles pour différents ténors, maturités et niveaux d'exercice.

3.4.2 Niveau du strike

Des modèles de taux simples à peu de facteurs peuvent être largement suffisants pour pouvoir retrouver les prix de peu de produits dérivés à la monnaie. Mais dès que l'objectif est de reproduire les prix d'une large gamme de produits dérivés à travers plusieurs strikes, la complexité de la surface de volatilités implicites que l'on souhaite reproduire ne permet pas d'utiliser des modèles simples.

Avec la situation actuelle de taux bas, les contrats d'épargne vendus quand les taux étaient à un niveau plus élevé et contenant des garanties élevées sur les taux se retrouvent profondément dans la monnaie.

Ce constat justifie d'autant plus la nécessité de pouvoir générer des taux avec des propriétés satisfaisantes de market-consistency à plusieurs niveaux de strike. Les volatilités implicites des swaptions varient en fonction de plusieurs paramètres, le niveau d'exercice en fait partie.

3.4.3 Facteur de déplacement

Dans le contexte économique actuel où les taux négatifs ne sont plus une aberration, les modèles lognormaux présentent quelques limites car ils ne permettent de générer que des taux positifs. Pour que le modèle LMM soit compatible avec l'environnement actuel, un paramètre de déplacement est introduit, permettant la génération de taux négatifs.

La valeur du facteur de déplacement est fixée en amont du calibrage, le choix de ce paramètre peut avoir un impact significatif sur les résultats et la justification de son choix, dans un univers risque-neutre, passe par une analyse des tests de martingalité et de market-consistency. Le choix de ce paramètre est aussi motivé par le besoin d'éviter les scénarios avec des taux d'intérêts explosifs et la nécessité de pouvoir générer des scénarios contenant des taux négatifs.

Pour la plupart des modèles de taux, la distribution des taux diffusés est une hypothèse implicite : le modèle de Vasicek par exemple suit une distribution normale, le modèle de Cox-Ingersoll-Ross suit une chi-deux. Le contrôle de la distribution via des paramètres facilement interprétables est un outil puissant. Dans le cadre du modèle LMM+, le choix du niveau du facteur de déplacement détermine la borne inférieure que peut avoir la diffusion des taux. En notant θ le facteur de déplacement, on ne suppose plus une distribution lognormale pour les taux forward (notés F), c'est plutôt $F + \theta$ qui suit une dynamique lognormale de telle sorte que F puisse prendre des valeurs négatives allant jusqu'à $-\theta$.

Le choix du facteur de déplacement est déterminé en prenant en compte :

- La qualité des tests de Market-Consistency issus de la calibration avec un facteur de déplacement fixé.
- Le comportement et la proportion des taux explosifs, surtout en situation de stress du niveau ou de la volatilité des taux.
- L'impact du facteur de déplacement sur les taux les plus bas.
- L'impact sur les résultats.

Moodys (2017) donne des indications permettant de justifier le choix d'un facteur de déplacement. Dans le cadre de cette étude, on comparera des facteur de déplacement (que l'on notera DP pour *Displacement Parameter*) ayant pour valeur 45%, 10%, 5%.

Comparaison des tests de market-consistency

La mesure de la qualité de l'ajustement des volatilités implicites aux données de marché est la moyenne de la racine carrée de l'erreur (*RMSE*).

Déplacement	a	b	c	d	V_0	Ret Moy	Vitesse	Ret Moy	Vol de Var	Corr	RMSE
45%	0.007	0.0016	0.0610	0	1	0.1	0.9996		0.5	0.5467	9.12
10%	0.032	0.0072	0.0681	0	1	0.1	0.6315		0.2650	0.2353	4.89
5%	0.069	0.0135	0.0740	0	1	0.1060	0.3884		0.01	-0.9	5.13

Les tests de market-consistency issus des calibrages effectués avec plusieurs *DP* donnent des résultats à peu près équivalents, avec tout de même des résultats meilleurs avec le *DP* fixé à 10%.

On observe que quand le facteur de déplacement augmente, la valeurs des paramètres a, b, c et d diminue et les paramètres liés à la volatilité stochastique sont plus importants.

En dessous de $DP = 5\%$, les tests de market-consistency pour les swaptions deviennent très mauvais. Cela s'explique par le fait que les scénarios de taux ne peuvent pas prendre des valeurs assez négatives pour reproduire les prix de marché des swaptions.

Robustesse de la qualité de la calibration aux situations de stress

Il ne suffit pas de s'assurer de la qualité de l'ajustement aux données de marché dans la situation de base seulement, il est aussi important d'observer si cet ajustement est également satisfaisant en situation de stress. Pour cela, quatre stress sont appliqués :

1. Stress 1 : hausse des taux de $+100bps$
2. Stress 2 : baisse des taux de $-100bps$
3. Stress 3 : surface de volatilités implicites : $+25\%$
4. Stress 4 : hausse de taux de $+100bps$ et volatilités implicites : $+25\%$

Le calibrage sera ensuite réalisé à partir des données de marché avec les différents facteurs de déplacement fixés en amont.

Pour $DP = 45\%$:

Choc	a	b	c	d	V_0	Ret Moy	Vitesse Ret Moy	Vol de Var	Corr	RMSE
Base	0.008	0.0014	0.0563	0	1	0.1	1.0053	0.2778	1	9.12
Stress 1	0.008	0.0014	0.0607	0	1	0.1	1.1268	0.5	0.5530	9.56
Stress 2	0	0.0018	0.0615	0	1	0.100	0.8454	0.4177	0.6038	8.86
Stress 3	0	0.0018	0.0615	0	1	0.100	0.8454	0.4177	0.6038	6.28
Stress 4	0	0.0018	0.0615	0	1	0.1	1.2291	0.5	0.658	6.78

Pour $DP = 10\%$:

Choc	a	b	c	d	V_0	Ret Moy	Vitesse Ret Moy	Vol de Var	Corr	RMSE
Base	0	0.0072	0.0681	0	1	0.1	0.6315	0.2650	0.2353	4.89
Stress 1	0	0.0065	0.0665	0	1	0.1916	0.7478	0.5	0.2685	4.49
Stress 2	0	0.0086	0.0692	0	1	0.100	0.4106	0.2666	0.2707	5.14
Stress 3	0	0.0091	0.0670	0	1	0.100	0.6424	0.4122	0.2712	7.11
Stress 4	0	0.0079	0.0658	0	1	0.1528	0.7947	0.5	0.2983	6.63

Pour $DP = 5\%$:

Choc	a	b	c	d	V_0	Ret Moy	Vitesse Ret Moy	Vol de Var	Corr	RMSE
Base	0.	0.0135	0.0740	0	1	0.1060	0.3884	0.01	-0.9	5.13
Stress 1	0	0.0124	0.0732	0	1	0.2798	0.6140	0.01	0.3577	5.37
Stress 2	0	0.0157	0.0740	0	1	0.100	0.2024	0.2531	-0.2015	6.08
Stress 3	0	0.0023	0.0350	0	1	0.100	0.3515	0.0122	0.3233	7.23
Stress 4	0	0.0159	0.0743	0	1	0.2743	0.6265	0.0117	0.3465	6.94

Les résultats des *RMSE* pour chaque calibrage sont synthétisés dans le graphique suivant.

Pour chaque stress, on affiche la moyenne des différences au carré entre les volatilités de marché et les volatilités recalculées à partir du modèle de taux pour chaque stress :

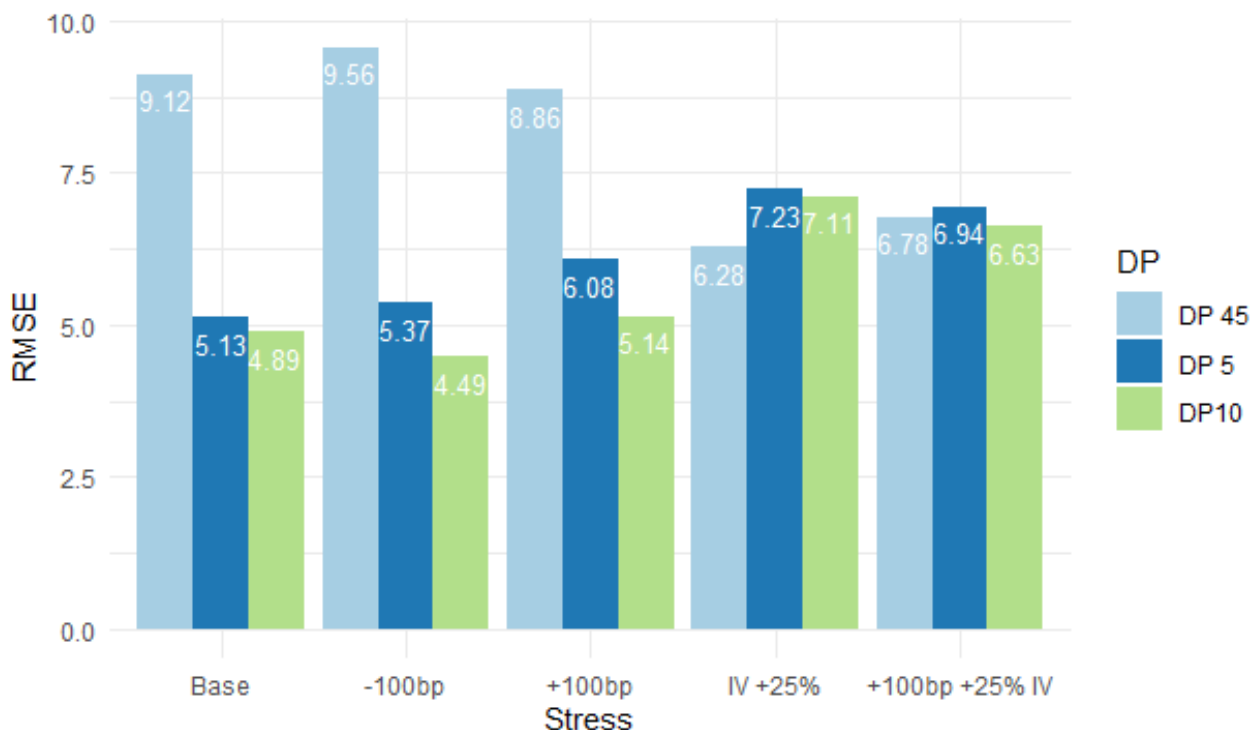


FIGURE 3.1 – Comparaison des RMSE des différents facteurs de déplacement dans plusieurs situations de stress

Les volatilités implicites issues des facteurs de déplacement fixés à 5% et 10% semblent avoir de meilleures propriétés que pour le 45%, surtout à volatilité basse.

Qualité de la reconstruction de la courbe initiale (test martingale sur les zéro-coupons)

Le test martingale sur les obligations zéro-coupons applique une méthode de monte-carlo afin d'estimer la courbe initiale en retrouvant les prix des zéro-coupons projetés à partir de la diffusion des taux. Le tableau suivant synthétise les résultats de la moyenne des erreurs constatés pour chacune des tables (centrales et stressées).

On note qu'une erreur d'environ 10 bps est acceptable. À partir de 100 bps, des différences notables entre la courbe déduite des taux projetés et la courbe initiale commencent à être observées.

Table	DP 45	DP 10	DP 5
Base	23.41	16.7	8.56
Stress 1 : +100bps	27.68	20.12	11.78
Stress 2 : -100 bps	17.29	11.29	4.65
Stress 3 : +25% IV	37.97	35.32	18
Stress 4 : +100 bps et +25% IV	52.73	40.02	25.71

Les erreurs observées sur les quinze tables sont toutes acceptables. Cependant, on observe que la

table issue du facteur de déplacement fixé à 45% est plus sensible en situation de stress que les deux autres facteurs de déplacement.

Taux explosifs et taux bas

Le facteur de déplacement joue sur la distribution des taux diffusés. L'observation des quantiles 0.05% et 99.5% pour chaque facteur de déplacement permet de visualiser cela :

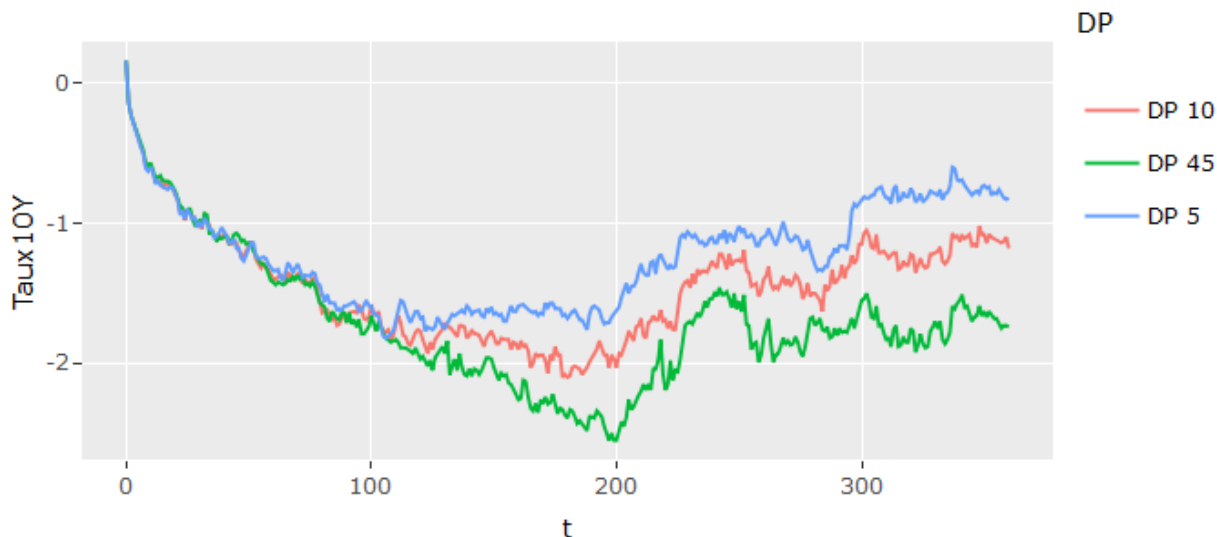


FIGURE 3.2 – Quantiles 0.5% pour différents facteurs de déplacement

De manière générale et sans prendre en compte l'effet des autres paramètres de calibrage, le facteur de déplacement vient relever les quantiles les plus bas de la diffusion vers le haut.

De la même manière, on affiche le graphique pour les quantiles hauts de la distribution à chaque pas de temps :

Les quantiles hauts de la distribution sont aussi relevés. Les quantiles ci-dessus sont issus des tables centrales non stressées. On peut déjà observer que les facteurs de déplacement les plus petits peuvent donner des diffusions contenant des taux explosifs. C'est pourquoi on étudie la proportion des taux élevés dans la simulation dans des situations de stress.

Pour les tables de scénarios présentées ci-dessus, on calcule le nombre de points où le niveau des taux passe la barre des 50% :

Table	DP 45	DP 10	DP 5
Base	0	0	34
Stress 1 : +100bps	0	0	41
Stress 2 : -100 bps	0	0	57
Stress 3 : +25% IV	0	214	393
Stress 4 : +100 bps et +25% IV	0	212	474



FIGURE 3.3 – Quantiles 99.5% pour différents facteurs de déplacement

3.5 Surface de volatilité

La surface de volatilités regroupe les valeurs de volatilités implicites des swaptions pour les combinaisons de tenor et de maturité, à laquelle on ajoute l'axe du strike. Au cours de l'étude du générateur, on traite les surfaces suivantes :

- **Matrices de volatilités implicites de marché** : données en entrée du modèle, ils représenteront les cibles que le modèle tentera de reproduire.

La matrice de volatilités en 31/12/2018 utilisée pour l'étude et issue de *Bloomberg* est la suivante :

Maturité/ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	27	32	36	39	41	41	46	47	49	50	52	54	55	55
2	36	40	43	45	48	49	51	52	53	54	54	56	56	56
3	46	48	51	52	53	55	56	56	56	57	56	57	57	57
4	54	55	57	58	59	59	59	59	59	60	58	58	57	57
5	60	60	61	62	62	62	62	62	62	62	62	58	57	57
7	66	54	66	66	66	65	65	65	64	64	61	59	58	57
10	70	70	69	69	68	68	67	67	67	67	63	60	59	58
15	68	68	68	67	67	67	66	66	66	66	62	60	58	57
20	66	66	66	66	65	65	65	65	64	64	61	58	56	55
25	64	65	65	64	64	64	63	63	62	62	59	56	67	53
30	62	62	62	62	62	62	61	61	61	60	57	55	53	52

- Matrices de volatilités issues du modèle : il s'agit de la matrice regroupant les volatilités que le modèle de taux (calibré sur les données de marché) est capable de capturer.

Maturité/ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	27	32	36	39	41	41	46	47	49	50	52	54	55	55
2	36	40	43	45	48	49	51	52	53	54	54	56	56	56
3	46	48	51	52	53	55	56	56	56	57	56	57	57	57
4	54	55	57	58	59	59	59	59	59	60	58	58	57	57
5	60	60	61	62	62	62	62	62	62	62	62	58	57	57
7	66	54	66	66	66	65	65	65	64	64	61	59	58	57
10	70	70	69	69	68	68	67	67	67	67	63	60	59	58
15	68	68	68	67	67	67	66	66	66	66	62	60	58	57
20	66	66	66	66	65	65	65	65	64	64	61	58	56	55
25	64	65	65	64	64	64	63	63	62	62	59	56	67	53
30	62	62	62	62	62	62	61	61	61	60	57	55	53	52

Les paramètres du modèle de taux sont déterminés de manière à minimiser l'écart entre les prix de marché et les prix reproduits par le modèle :

- Matrices de volatilités issues de la simulation : il s'agit de la matrice des volatilités obtenues à partir des scénarios issus de la simulation.

3.5.1 Ajustement de la matrice de poids

La surface de volatilité de marché peut présenter des déformations et des structures qu'un modèle paramétrique ne peut reproduire. La matrice de volatilités implicites que l'on souhaite reproduire contient plus de 264 points (sur la surface maturité/tenor/strike). Le modèle LMM+, avec ses 8 paramètres ne pourra pas reproduire parfaitement la surface de volatilités implicites de marché donnée en entrée.

[Devineau et al. \(2016\)](#) propose une méthode permettant de déterminer à quelle partie de la surface de volatilités implicites le passif de la compagnie est le plus sensible. Cela dépendra des contrats qui figurent au passif et du niveau des options et garanties sous-jacentes.

L'idée est d'estimer la sensibilité de la NAV aux volatilités implicites. Une fois ces zones sensibles identifiées, il deviendra important de les calibrer avec plus d'attention en ajustant la matrice de poids.

L'une des principales difficultés consiste à déterminer comment choquer la surface de volatilité de manière à ce que le modèle puisse capturer cette surface perturbée.

Plusieurs chocs de la surface de volatilité sont appliqués :

1. Appliquer un choc à la hausse à chaque point de la matrice (autant de sensibilités que de points dans la matrice).
2. Appliquer un choc à chaque ligne et à chaque colonne de la matrice
3. Appliquer le choc en découpant la matrice en plusieurs sous-parties

La première méthode est très longue à mettre en place : en effet, la matrice comporte 264 points et le temps de générer chaque table avec un point choqué et d'effectuer les calculs ALM associés est très long. De plus, la surface avec un seul point choqué est trop "anormale" pour que le modèle puisse la capturer.

La deuxième méthode implique un temps de calcul raisonnable mais la surface est toujours trop difficile à capturer pour le modèle.

C'est la troisième méthode qui est retenue et les résultats de différents choc de la matrice avec les impacts associés sur les résultats sont les suivants (avec à chaque fois une comparaison avec les résultats de la table non choquée appelée **Base**).

À chaque étape, il est important de s'assurer que la surface choquée est bien capturée par le modèle en affichant les tests de validation (c'est l'observation de ces tests qui a permis de conclure que les méthodes 1 et 2 du chocs de la matrice étaient difficilement applicables).

Quatorze chocs de la matrice de volatilités implicites sont retenus dans un premier temps :

Choc 1	Choc de +25% sur la partie de matrice contenant des tenors inférieurs à 10 ans (7 premières colonnes de la matrice ATM)
Choc 2	Choc de +25% sur la partie de matrice contenant des tenors supérieurs à 10 ans (7 dernières colonnes de la matrice ATM)
Choc 3	Choc de +25% sur la partie de OTM de la matrice (colonnes en dessous du strike)
Choc 4	Choc de +25% sur la partie de ITM de la matrice (colonnes au dessus du strike)
Choc 5	Choc de +25% sur la partie de la matrice contenant des maturités inférieures à 10 ans (7 premières lignes de la matrice ATM)
Choc 6	Choc de +25% sur la partie de la matrice contenant des maturités supérieurs à 10 ans (7 dernières lignes de la matrice ATM)
Choc 7	Choc de +25% sur la partie de la matrice contenant des tenors inférieurs ou égaux à 15 ans
Choc 8	Choc de +25% sur la partie de la matrice contenant des tenors inférieurs ou égaux à 15 ans
Choc 9	Choc de +25% sur la partie de la matrice contenant des maturités inférieures ou égales à 15 ans
Choc 10	Choc de +25% sur la partie de la matrice contenant des maturités supérieures à 15 ans
Choc 11	Choc de +25% sur la partie de la matrice contenant des maturités inférieures à 5 ans
Choc 12	Choc de +25% sur la partie de la matrice contenant des maturités supérieures ou égales à 5 ans
Choc 13	Choc de +25% sur la partie de la matrice contenant des tenor inférieurs à 5 ans
Choc 14	Choc de +25% sur la partie de la matrice contenant des tenors supérieurs ou égaux à 5 ans

Ces chocs donnent des matrices de volatilités implicites de marché assez déformées, avec des zones où la volatilités change brusquement. Ces effets ne sont pas toujours faciles à capturer pour le modèle. C'est pourquoi on s'assure par la suite que les volatilités implicites recalculées par le modèle sont capables de reproduire les volatilités implicites de marchés choqués.

Choc des tenors inférieurs à 10 ans

On applique un choc à la hausse de +25% aux tenors inférieurs à 10 ans.

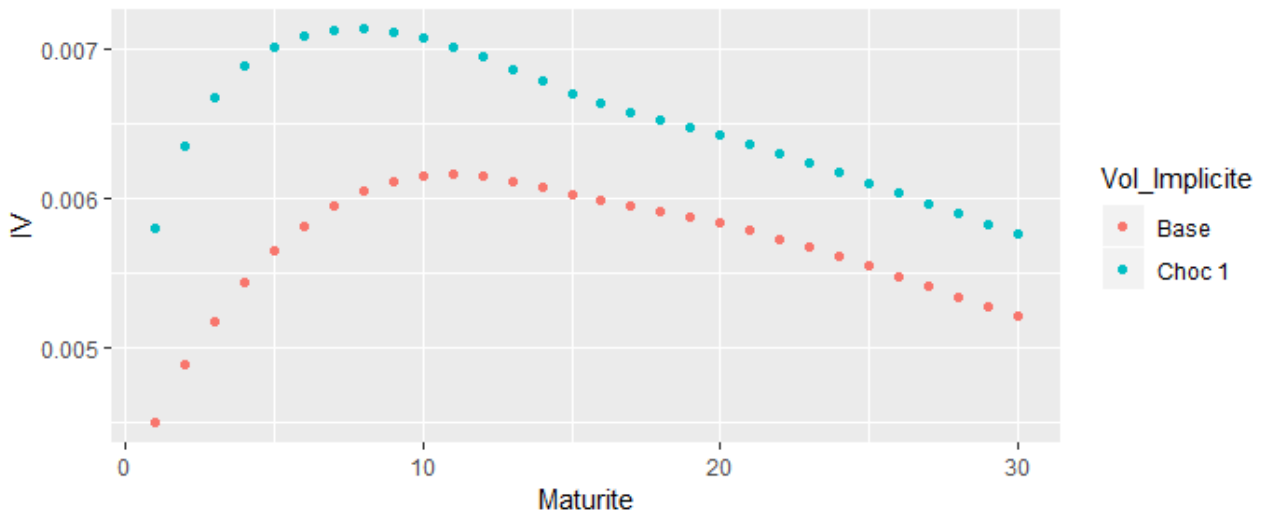


FIGURE 3.4 – Volatilités implicites du tenor 5 ans pour toutes les maturités - choc 1

Ce choc provoque une perte de -21.3% en NAV.

Choc des tenors supérieurs à 10 ans

On applique un choc à la hausse de +25% aux tenors inférieurs à 10 ans.

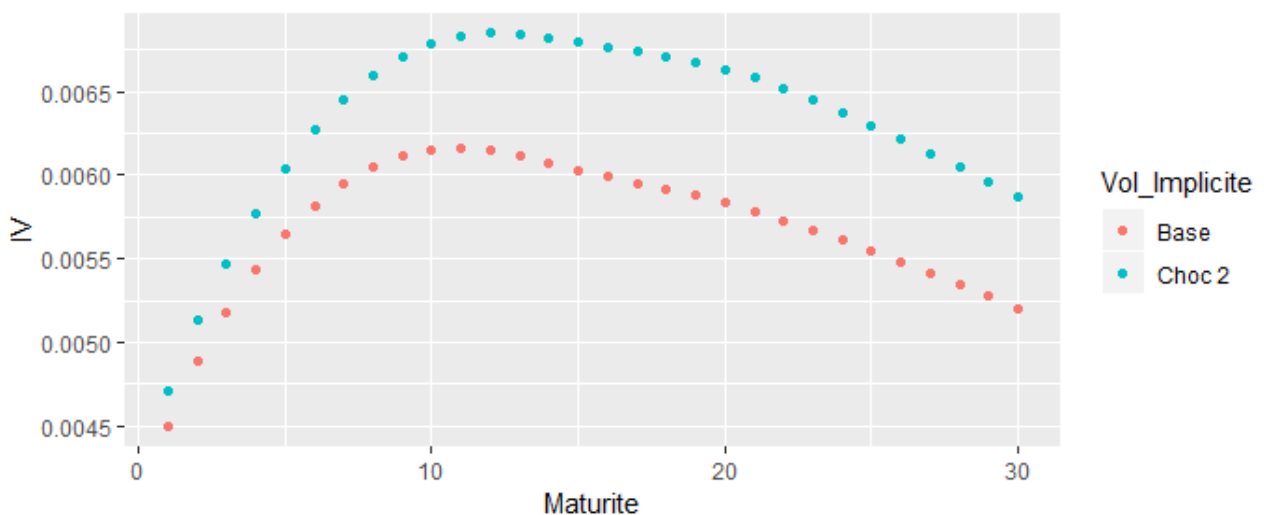


FIGURE 3.5 – Volatilités implicites du tenor 15 ans pour toutes les maturités - choc 2

Ce choc modifie les résultats :

Choc des volatilités implicites de maturités inférieures à 10 ans

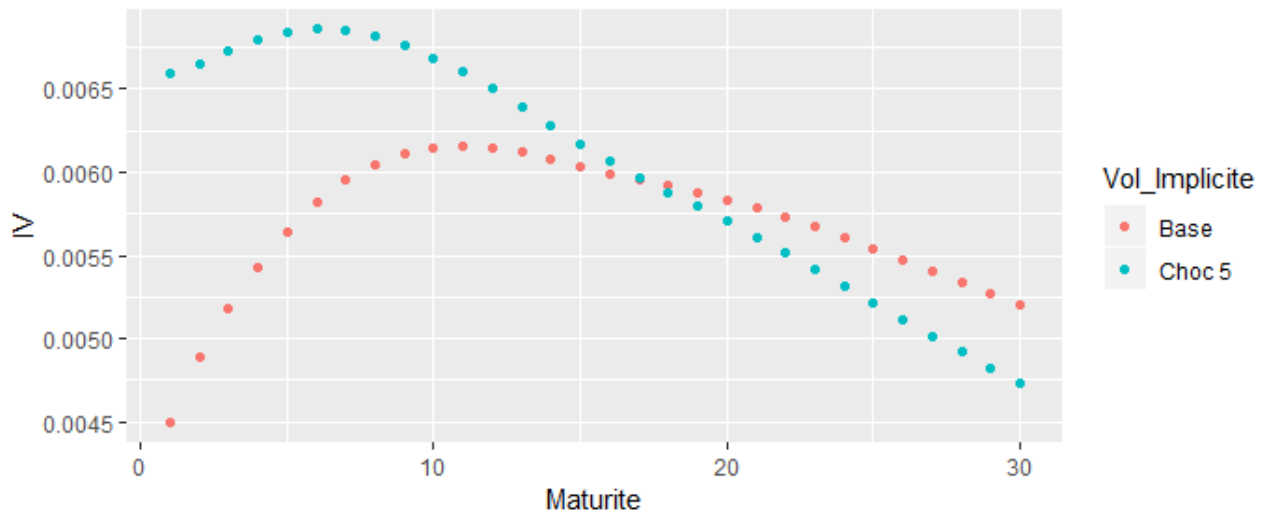


FIGURE 3.6 – Volatilités implicites du tenor 10 ans pour toutes les maturités - choc 5

Le modèle reflète de manière globale le choc que l'on souhaite appliquer : +25% sur les maturités inférieures à 10 ans.

L'impact sur les résultats est le suivant :

Choc des volatilités implicites de maturités supérieurs à 10 ans

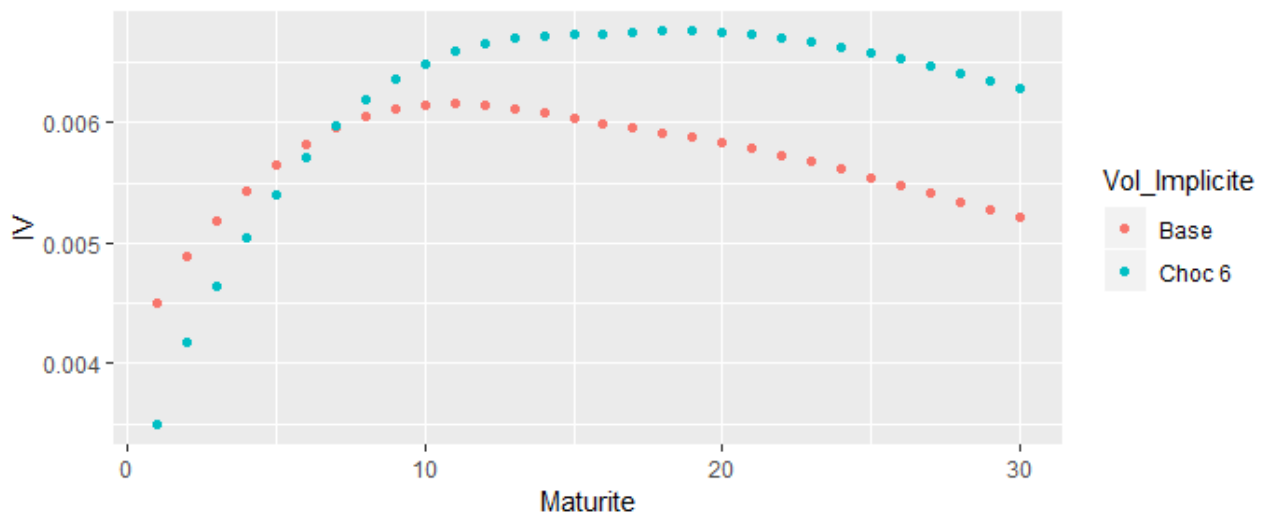


FIGURE 3.7 – Volatilités implicites du tenor 10 ans pour toutes les maturités - choc 6

Le modèle reflète de manière globale le choc que l'on souhaite appliquer : +25% sur les maturités inférieures à 10 ans.

L'impact sur les résultats est le suivant :

Choc des volatilités implicites ITM ($>$ strike)

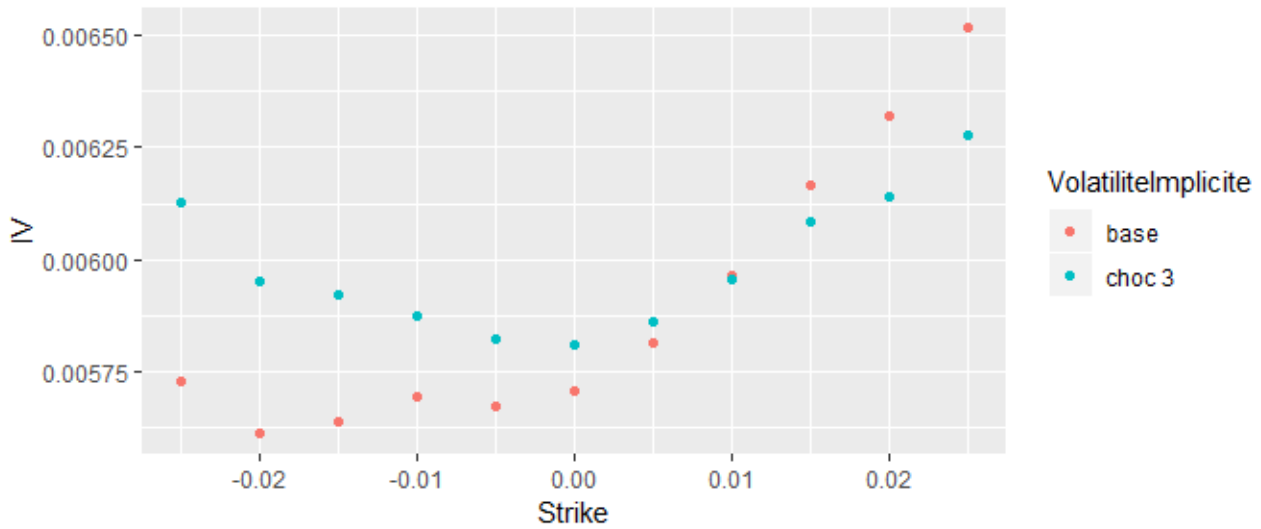


FIGURE 3.8 – Volatilités implicites du tenor 10 ans pour toutes les maturités - choc 3

Le modèle reflète de manière globale le choc que l'on souhaite appliquer : +25% sur les maturités inférieures à 10 ans.

L'impact sur les résultats est le suivant :

Choc des volatilités implicites OTM ($<$ strike)

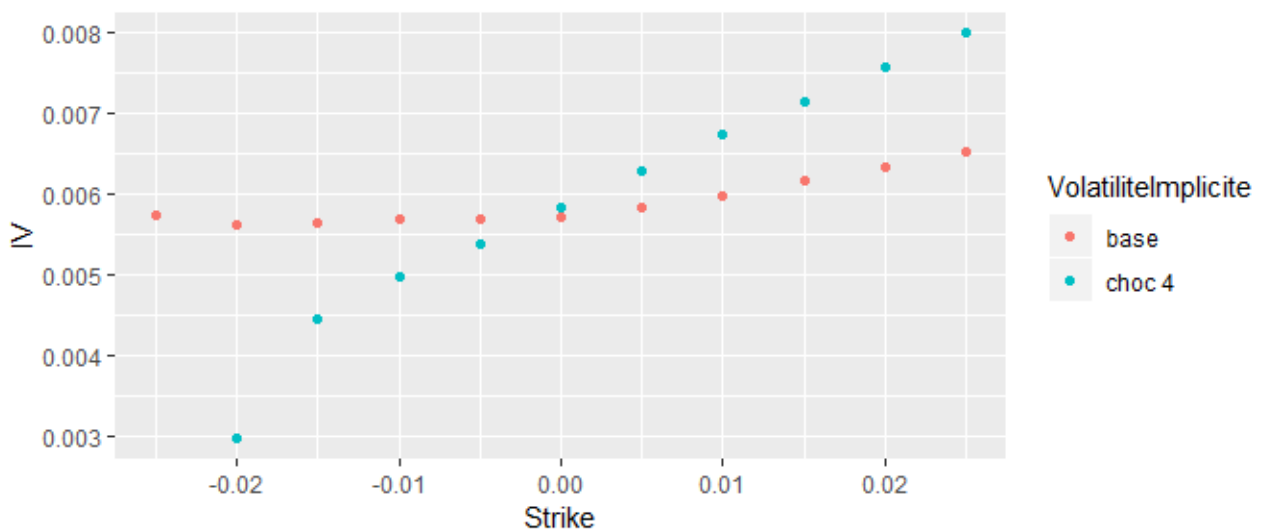


FIGURE 3.9 – Volatilités implicites du tenor 10 ans pour toutes les maturités - choc 4

Le modèle reflète de manière globale le choc que l'on souhaite appliquer : +25% sur les maturités inférieures à 10 ans.

L'impact sur les résultats est le suivant :

De la même manière on s'assure de la bonne reproduction de la surface de volatilité pour les 8 chocs restant :

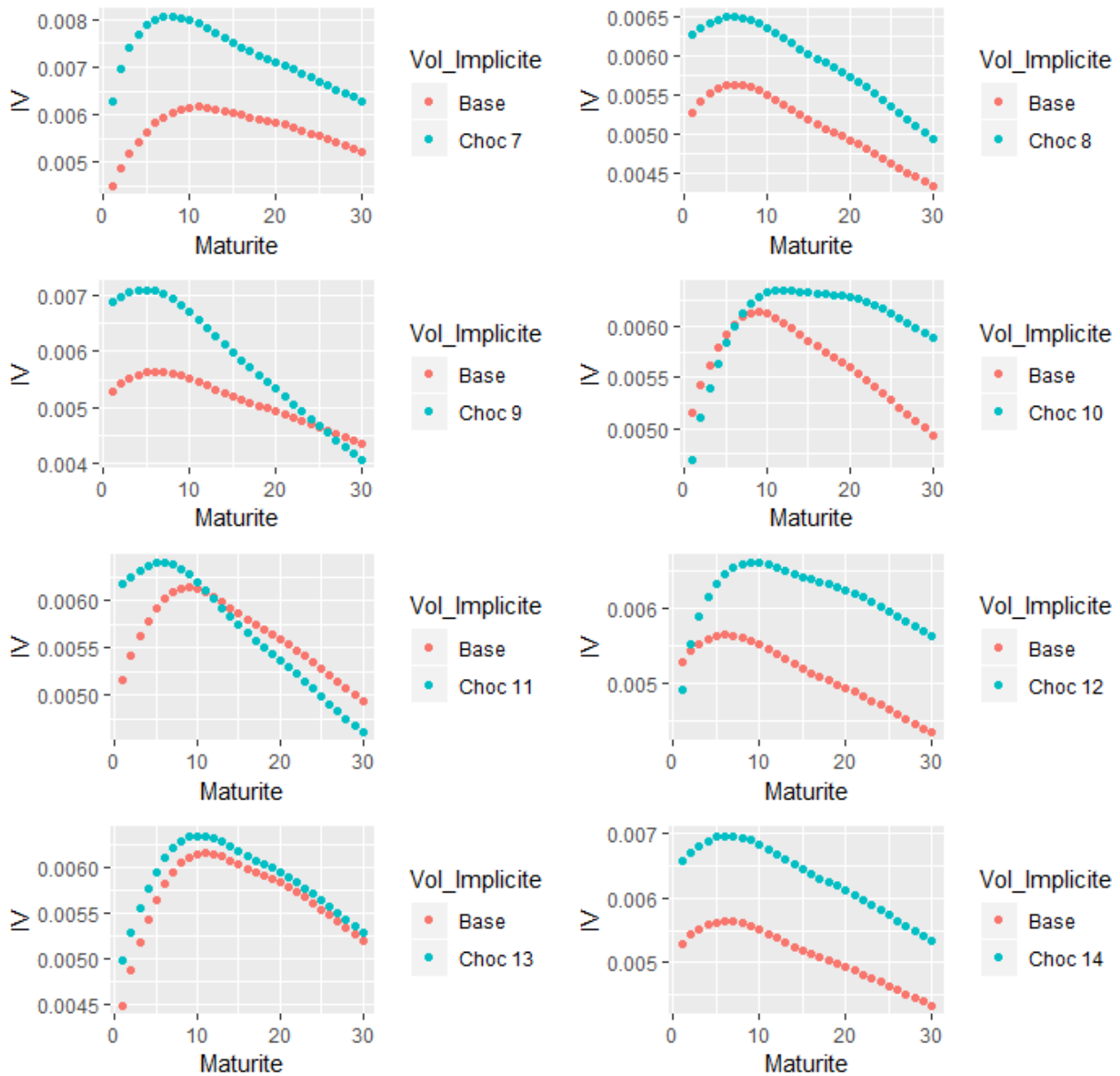


FIGURE 3.10 – Chocs 7 à 14

On observe pour chaque choc, l'impact du changement d'une zone de la matrice de volatilités implicites de marché sur la NAV, cela permet d'estimer la sensibilité des résultats à différentes zones des données de marché utilisées pour le calibrage. Les résultats sont synthétisés dans le tableau suivant :

Central 0.0%	choc 1 -21.3%	choc 2 -32.1%	choc 3 -9.8%	choc 4 -1.2%
choc 5 -6.7%	choc 6 -29.0%	choc 7 -44.1%	choc 8 0.9%	choc 9 -37.9%
choc 10 -10.8%	choc 11 0.8%	choc 12 -53.4%	choc 13 -5.5%	choc 14 -39.5%

Le graphique suivant synthétise les résultats présentés dans le tableau ci-dessus :

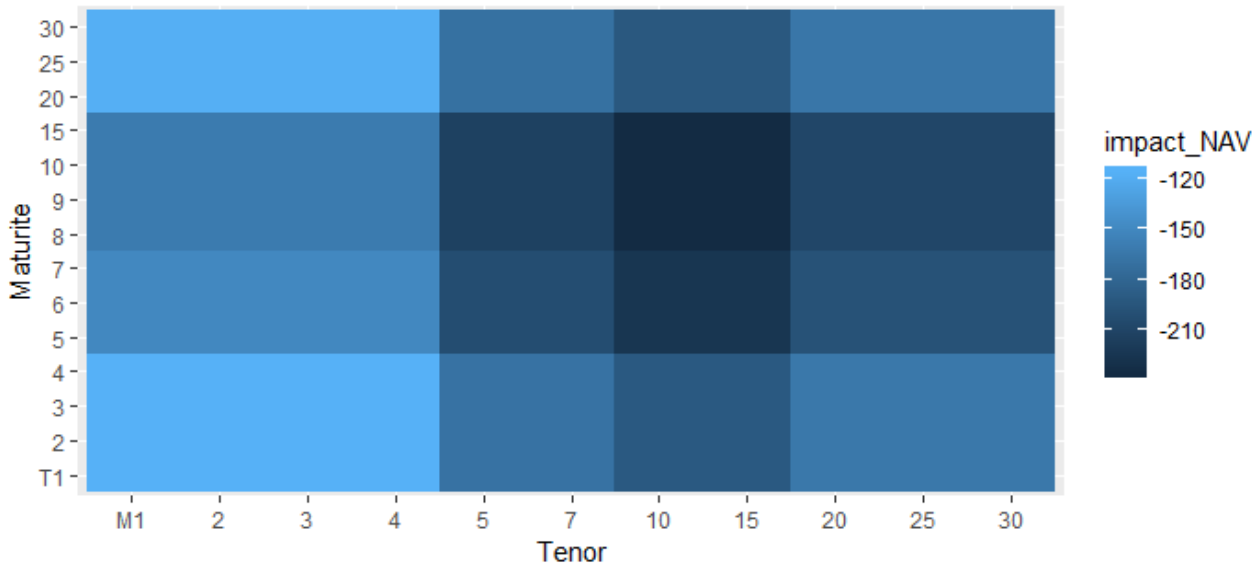


FIGURE 3.11 – Heatmap de la matrice de volatilités implicites ATM avec les impacts sur la NAV en couleurs

On observe clairement que la NAV est plus ou moins sensible à toute la matrice de volatilités. Elle est cependant particulièrement sensible aux tenors et maturités compris entre 8 et 15 ans.

Dans le cadre market-consistent de l'étude, les paramètres du modèle de taux sont déterminés en minimisant l'écart entre les volatilités implicites de marché et les volatilités implicites reproduites par le modèle. L'étude de la sensibilité des résultats à la matrice de volatilités permet d'affiner cette étape de calibrage en introduisant des poids lors de la minimisation de l'écart :

$$\sum_{i=1}^N \omega_i [IV_{marche_i} - I\hat{V}_i(\Phi)]$$

Cette *Heatmap* est traduite en matrice de poids en renormalisant les valeurs de l'impact de chaque zone en terme de NAV entre 0 et 1.

Une nouvelle table de scénario est lancée avec un calibrage prenant en compte la matrice de poids obtenue.

Cependant, il s'avère que les zones auxquels le passif de la compagnie est sensible sont également celles que le modèle capture le mieux. Même avec une matrice de poids uniformément répartie, les écarts entre les volatilités de modèle et les volatilités de marché sont très faibles. Forcer le modèle à

mieux capturer ces zones ne va pas améliorer les résultats de calibrage de manière significative. Cela se traduit par un faible impact sur les résultats :

<i>NAV</i> obtenue sans application de la matrice de poids	<i>NAV</i> obtenue avec application de la matrice de poids
741 260 472.62	736 167 876.83

Soit un écart de 0.69%, ce qui permet de valider le modèle actuel.

Chapitre 4

Traitements appliqués aux scénarios

Ce qui importe dans la diffusion des scénarios opérée par le GSE est l'observation des distributions temporelles jointes. A chaque pas de temps, on peut observer la distribution de la variable d'intérêt. Par exemple, pour la diffusion du taux 10 ans avec 1000 scénarios sur 30 ans en pas mensuels, on a :

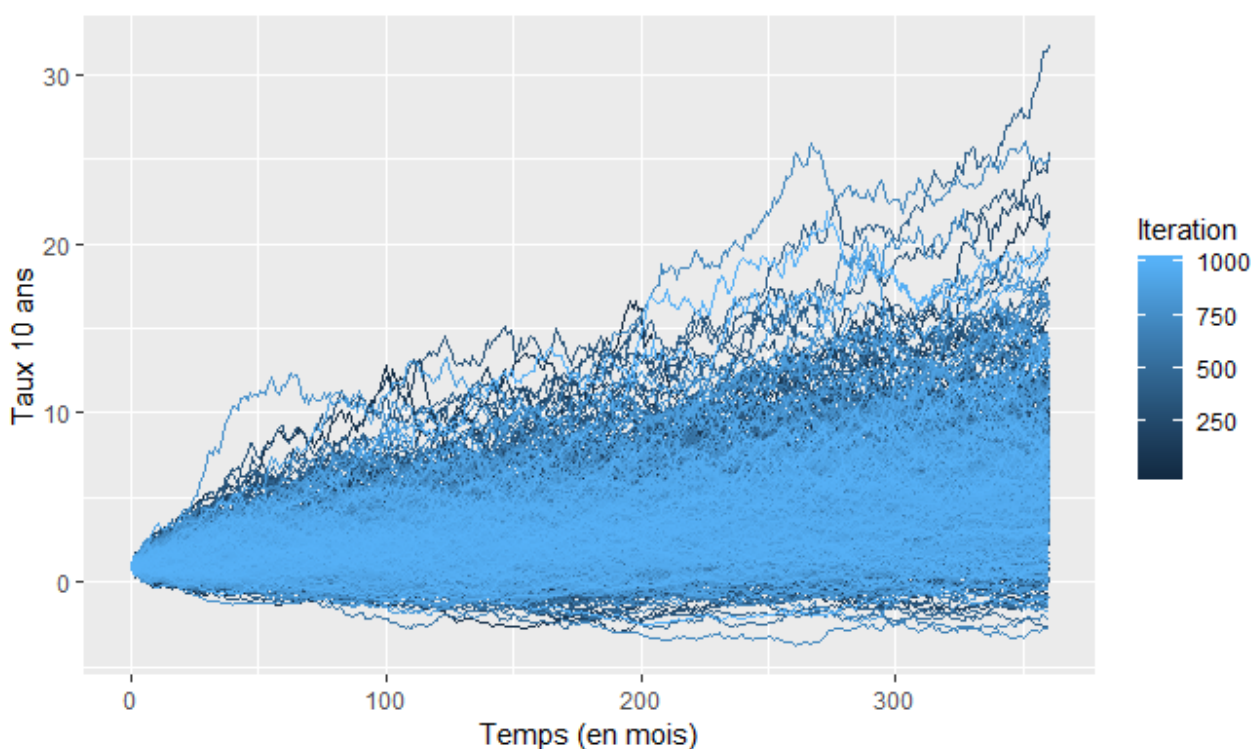


FIGURE 4.1 – Diffusion stochastique du taux 10 ans sur 30 ans en pas mensuel

Il est plus pratique d'observer les quantiles de la distribution à chaque pas de temps afin de mieux observer l'évolution.

Pour les mêmes scénarios que le graphique ci-dessus, on affiche, pour chaque pas de temps, les quantiles 0.5%, 1%, 10%, 25%, 75%, 90%, 99% et 99.5% ainsi que la moyenne en trait noir :

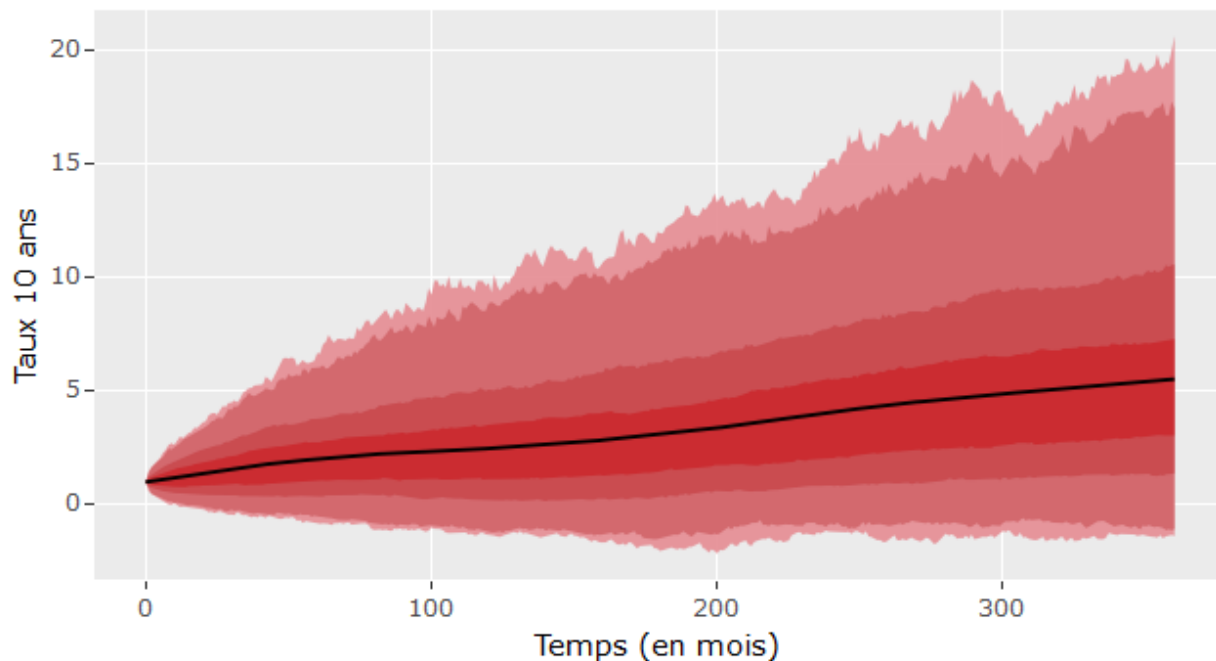


FIGURE 4.2 – Quantiles de la diffusion du taux 10 ans

4.1 Scénarios stressés

Plusieurs configurations peuvent amener à générer des tables de scénarios dans situation stressées par rapport à la table centrale correspondant à la table utilisée avec les données de marché et paramètres de la date d'arrêt :

- Dans le cadre des calculs Solvabilité 2, la réglementation impose la génération de tables correspondant à un stress à la hausse des taux, et un autre à la baisse des taux.
- Dans une approche gestion des risques, on peut générer des tables stressées de plusieurs manières :
 1. Modifier le point de départ de la diffusion et générer une nouvelle table
 2. Appliquer un stress sur les données de marchés qui servent au calibrage du modèle (par exemple, hausse ou baisse des volatilités implicites des swaptions)
 3. Translater vers le haut ou vers le bas les scénarios générés

Dans l'exemple suivant, la valeur du point de départ est augmentée (stress hausse taux) et on observe l'impact de ce stress sur la diffusion :

Même si dans le cadre d'une table centrale, il n'y a pas toujours de scénarios extrêmes, il n'est pas exclu que ces derniers puissent apparaître dans des situations de stress.

L'idée n'est pas d'interpréter la cohérence des scénarios pris individuellement, car cela reviendrait à remettre en cause une partie de la distribution à certains pas de temps. L'objectif est plutôt de pouvoir traiter les scénarios qui peuvent poser problème d'un point de vue opérationnel.



FIGURE 4.3 – Quantiles de la diffusion du taux 10 ans

Dans l'exemple de la figure 4.1, les scénarios sont directement issus du modèle de taux sans retraitement. Il peut s'avérer utile, voire nécessaire, de retraiter ces scénarios dans certains cas que l'on précisera. L'objet de cette partie est de présenter ces retraitements et d'étudier dans quelle mesure ce retraitement dégrade la qualité du jeu de scénarios.

4.2 Scénarios extrêmes

4.2.1 Scénarios explosifs

Dans certains cas, les diffusions peuvent produire des scénarios explosifs, surtout dans le cadre de l'utilisation des modèles lognormaux. Il ne s'agit pas de donner du sens à un scénario pris seul, mais plutôt de s'assurer de la cohérence du jeu de scénarios et de la compatibilité avec le modèle ALM. Dans l'exemple d'une table de scénario avec un taux en $t = 0$ à 4% et un paramètre de déplacement fixé à 1%, certains scénarios contiennent des valeurs excessivement élevées, comme le scénario 580.

Les valeurs du taux 10 ans, qui dépasse les 150% à certains pas de temps sont illustrés dans le graphique suivant :

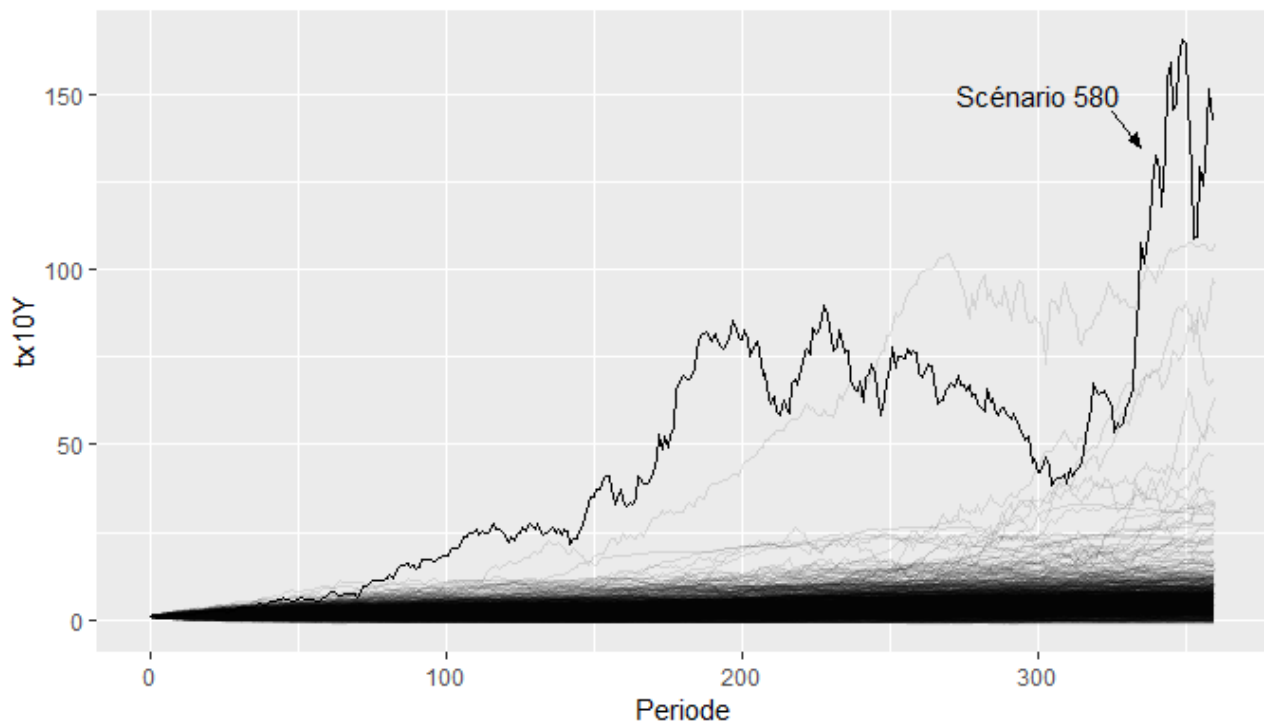


FIGURE 4.4 – Focus sur un scénario extrême

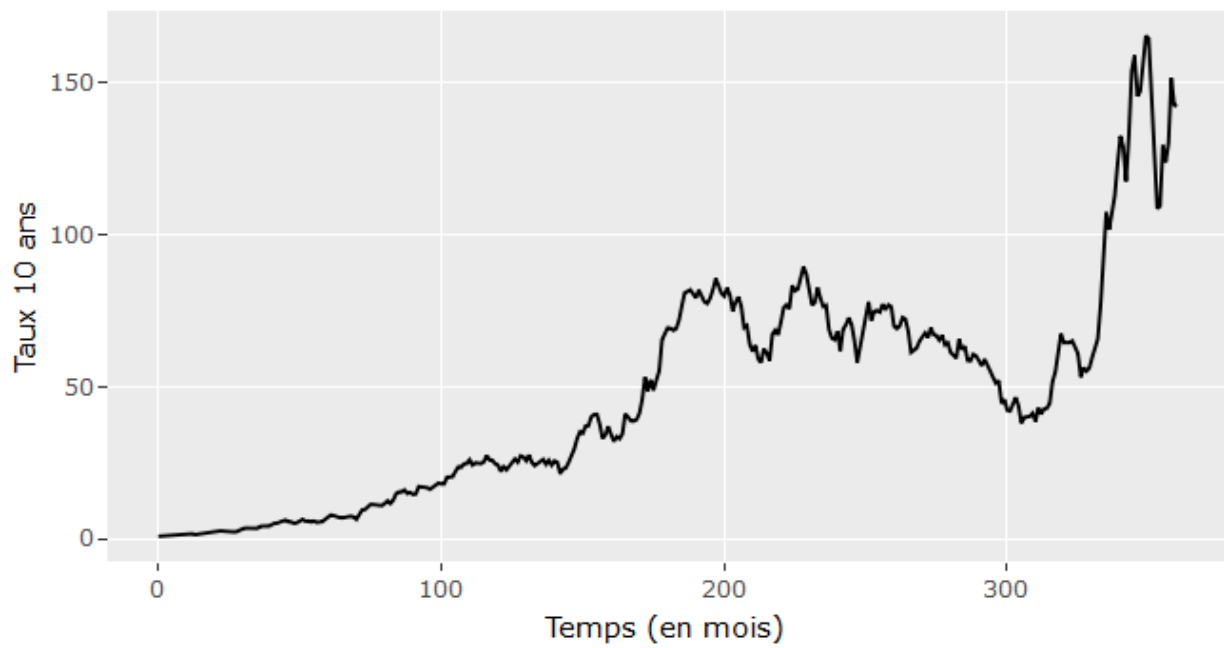


FIGURE 4.5 – Scénario 580

4.3 Cap et floor : limitation des scénarios extrêmes

4.3.1 Principe

L'idée la plus simple est de fixer un seuil que les trajectoires de taux ne peuvent pas dépasser : des floor ou des cap fixent ces limites. L'exemple suivant illustre l'application d'un cap à 10% à une trajectoire de taux :

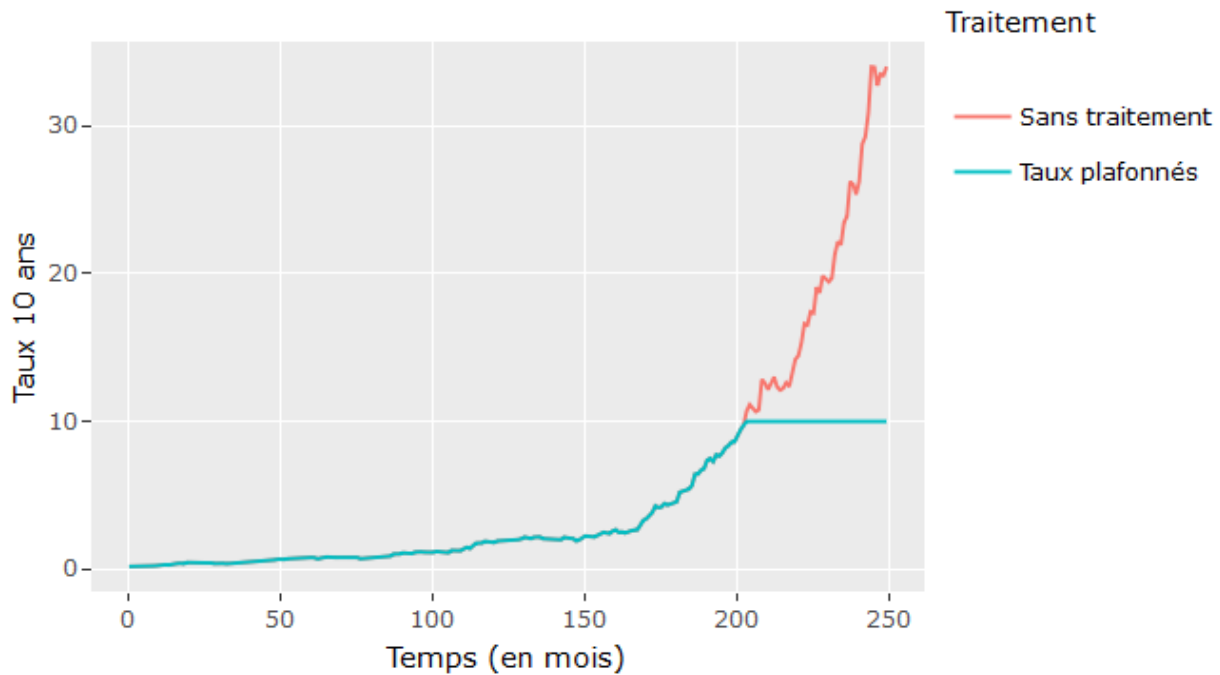


FIGURE 4.6 – Application d'un taux plafond à un scénario explosif

Le niveau du cap est volontairement bas sur cet exemple afin de mieux observer l'effet de l'application du cap sur la trajectoire. Les floor fonctionnent de manière analogue quand un scénario dépasse un certain seuil à la baisse.

Outre la question du niveau des taux à partir duquel il serait envisageable d'appliquer un tel retraitement, il est important de s'assurer que de telles déformations ne dégradent pas les tests de martingalité et de market-consistency de manière significative.

4.3.2 Impact sur les tests de martingalité

Tests martingales sur les taux sans retraitement des scénarios

L'étude se focalisera sur les tests martingales des obligations zéro-coupon (qui dépendent directement des taux nominaux) et sur les tests de market-consistency des swaptions. Pour cela, dix tables de scénarios sont générées avec des graines différentes. À chacune de ces tables, différents tests sont appliqués. Une attention plus particulière sera portée sur les tests portant sur les taux. L'application d'un taux plafond modifie la forme de la diffusion des scénarios :

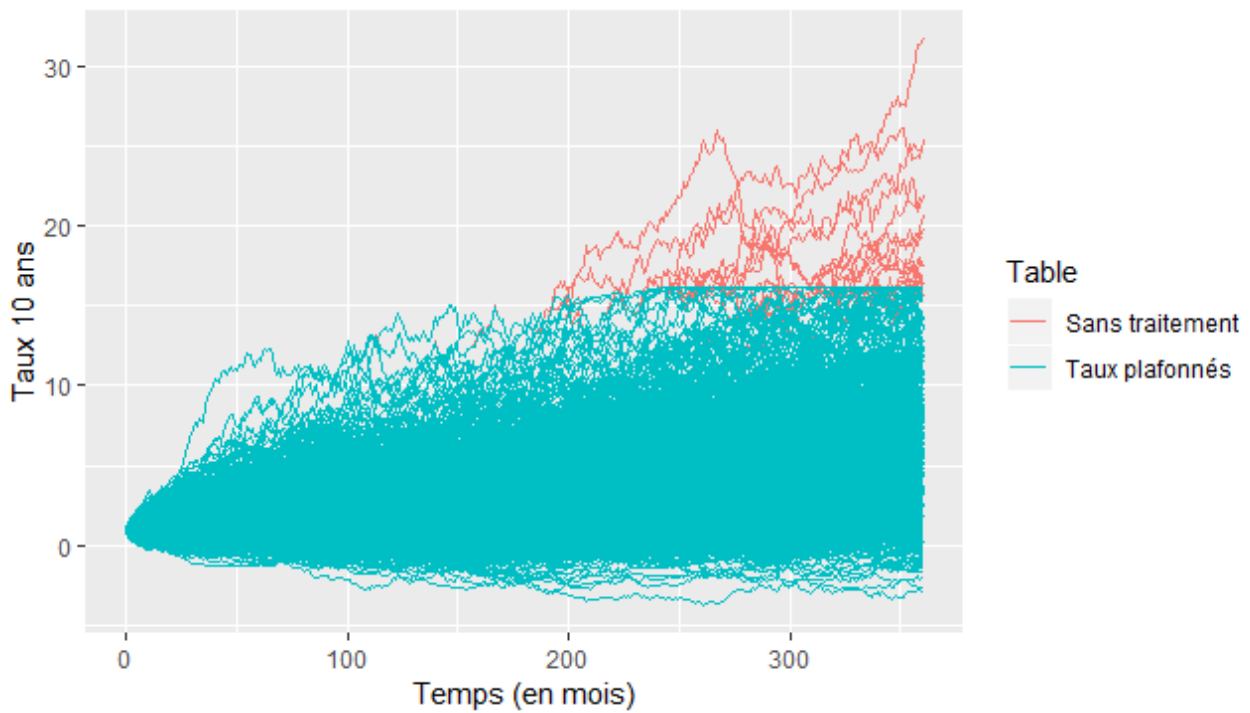


FIGURE 4.7 – Application d'un taux plafond à la diffusion du taux 10 ans

Le niveau du cap est fixé à un niveau excessivement bas dans cet exemple afin de mieux observer l'impact d'une telle déformation sur les tests. On rappelle que le test martingale consiste à vérifier que la projection des prix des obligations zéro-coupons vues en 0 est, en moyenne, proche de la courbe des taux sans-risques fournie par l'EIOPA à chaque pas de temps.

À chaque pas de temps, on commence par convertir les taux en prix zéro-coupon, on calcule ensuite un estimateur de la moyenne sur ces prix avec l'intervalle de confiance associé. L'objectif étant de s'assurer que les prix issus de la courbe initiale sans-risque soit comprise dans l'intervalle de confiance des prix projetés. L'application de ce test à la première table de scénarios générée montre qu'à chaque maturité, le test est validé (les prix issus de la courbe des taux EIOPA sont bien compris dans l'intervalle de confiance de l'estimateur de la moyenne des prix zéro-coupon projetés).

Tests martingales sur les taux avec des scénarios plafonnés

Jusqu'à $t = 180$ mois en moyenne, le plafonnement des taux ne concerne aucun scénario car n'atteint le taux plafond avant. Donc pour toutes les maturités avant ce point, les prix ZC projetés ne sont pas modifiés.

À partir du moment où un scénario voit ses taux plafonnés, la moyenne des prix projetés est modifiée : $\prod \frac{1}{(1+t_i)}$ est calculé avec certains t_i plus petits (car plafonnés) qu'avec les scénarios non retraités.

Cela conduit à une sous-estimation de la courbe initiale (i.e une surestimation des prix des obligations zéro-coupons projetés). Cependant, vu le peu de scénarios impactés, même avec un cap si bas, la déformation des scénarios ne dégrade pas les tests : à chaque pas de temps les prix projetés issus de la courbe des taux sans-risque est toujours dans l'intervalle de confiance de l'estimateur de la moyenne.

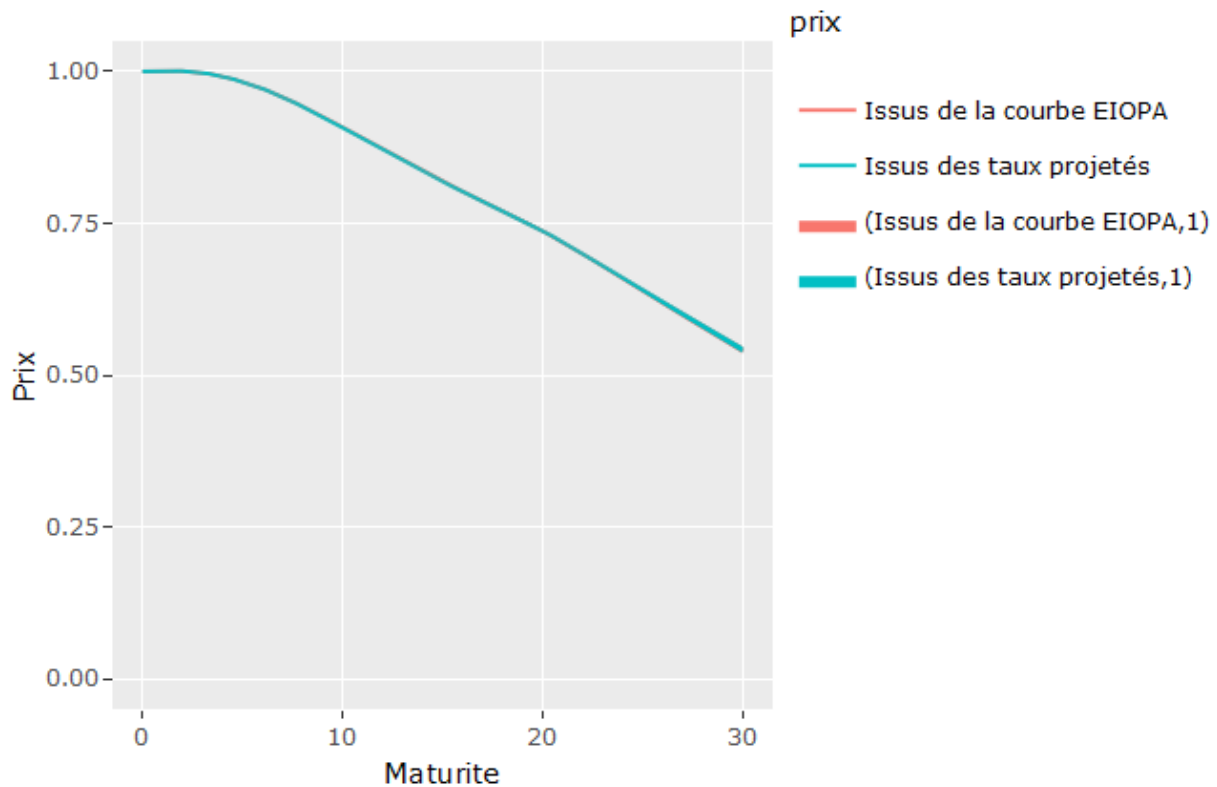


FIGURE 4.8 – Test martingale avec intervalle de confiance à 95%

Comme indiqué, le test est validé pour 100% des maturités.

L'attention est portée sur la déformation du test de quand le cap est appliqué (sur ce graphique, les prix sont actualisés) :

Comme attendu, avant 15 ans, aucun test n'est perturbé, mais à partir du moment où le cap est appliqué à quelques scénarios extrêmes, la moyenne des prix projetés augmente légèrement du fait que certains taux ont une valeur plus petite que sur la table de scénarios sans retraitement.

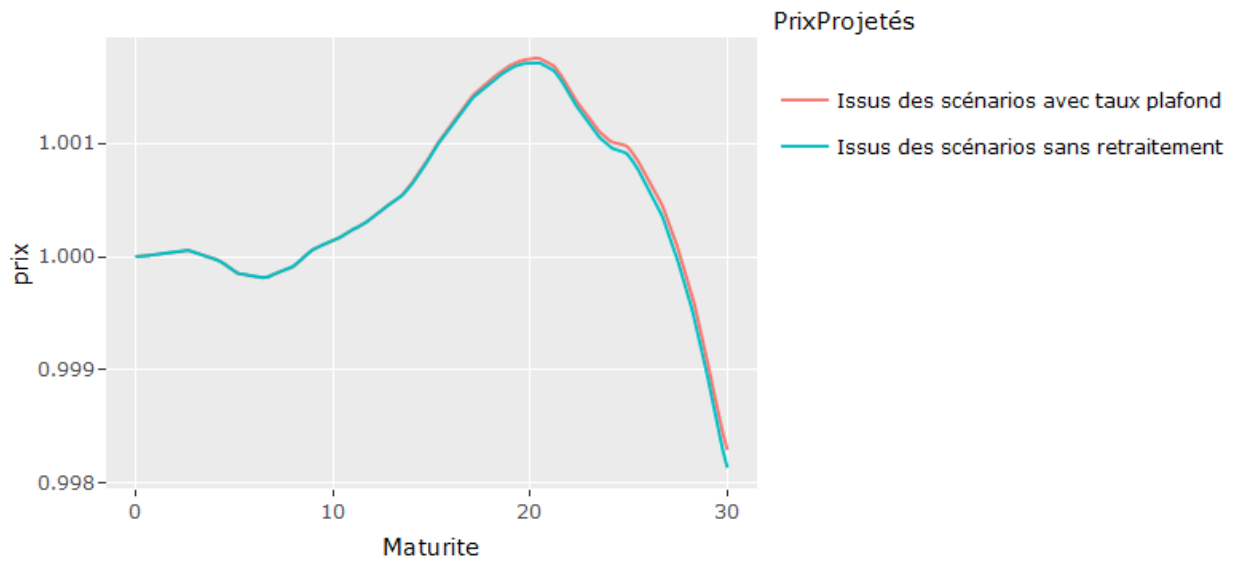


FIGURE 4.9 – Test martingale avec intervalle de confiance à 95% de la table de scénario 5

Ce test a été effectué sur dix tables différentes, avec à chaque fois un cap appliqué au même niveau, les résultats sur la modification des tests sont toujours ceux que l'on attend : un léger rehaussement des prix projetés à partir de 15 ans environ, sans pour autant dégrader les tests. Le graphique suivant illustre cette modification :

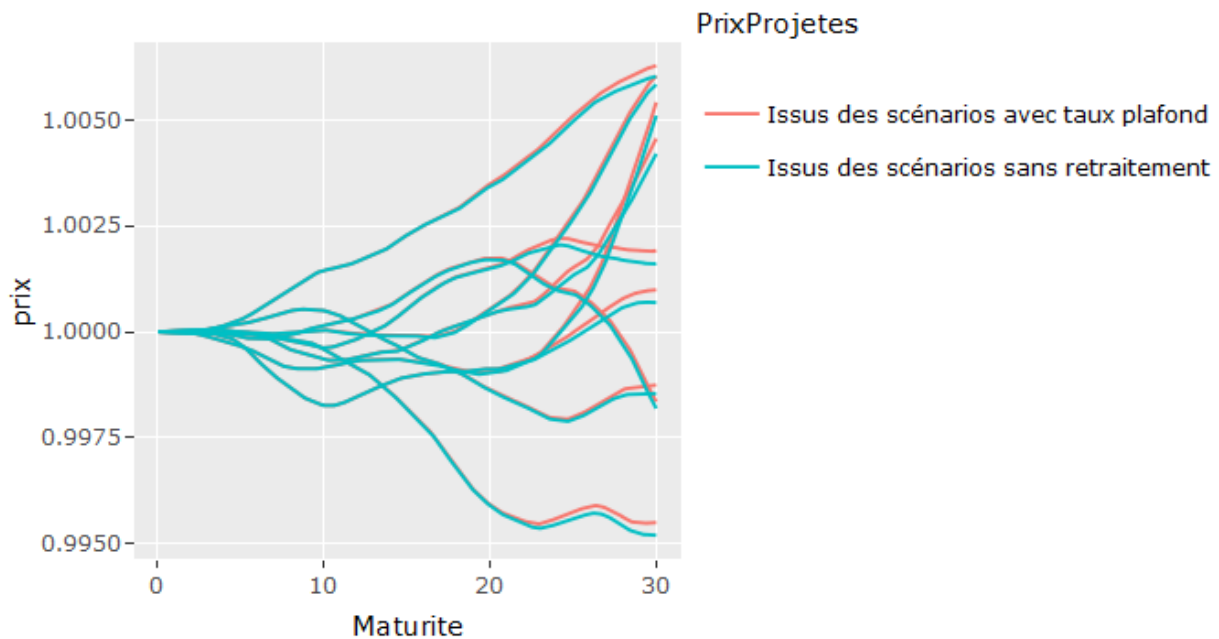


FIGURE 4.10 – Tests martingales des 10 tables de scénarios avec/sans taux plafond

L'effet inverse est observé quand des taux planchers sont appliqués à la simulation : la moyenne des prix projetés est plus basse que sur le jeu de scénario sans retraitement.

4.3.3 Impact sur les tests de *market-consistency*

Les paramètres du modèle de taux ont été calibré de manière à reproduire au mieux les volatilités implicites (et donc les prix) de marché. Ainsi, si une déformation est appliqué au scénarios en sortie, il est naturel de penser que la *market-consistency* sera altérée, et ce d'autant plus que la déformation appliquée est importante.

La figure 4.11 illustre l'impact de l'application d'un taux plancher (*floor*) à -2% sur la *market-consistency* des swaptions. En d'autres termes, on observe le changement induit par l'application d'un taux plancher (*floor*) sur les volatilités implicites différents niveaux de *strike* calculées à partir des scénarios générés.

Seule la volatilité implicite associée au strike le plus négatif (-2.5%) est modifiée par l'application du taux plancher. Dans le contexte de taux bas actuel, les scénarios doivent explorer des valeurs (très) négatives afin de pouvoir reproduire les prix de marché des swaptions payeuses ayant les *strikes* les plus bas. En empêchant les scénarios de prendre ces valeurs par l'application d'un taux plancher, les swaptions ayant les *strikes* les plus bas seront légèrement moins bien valorisées.

Cependant, il est important de noter que la volatilité implicite de marché se trouve toujours dans l'intervalle de confiance, même quand la volatilité implicite estimée est perturbée par l'application du taux plancher.

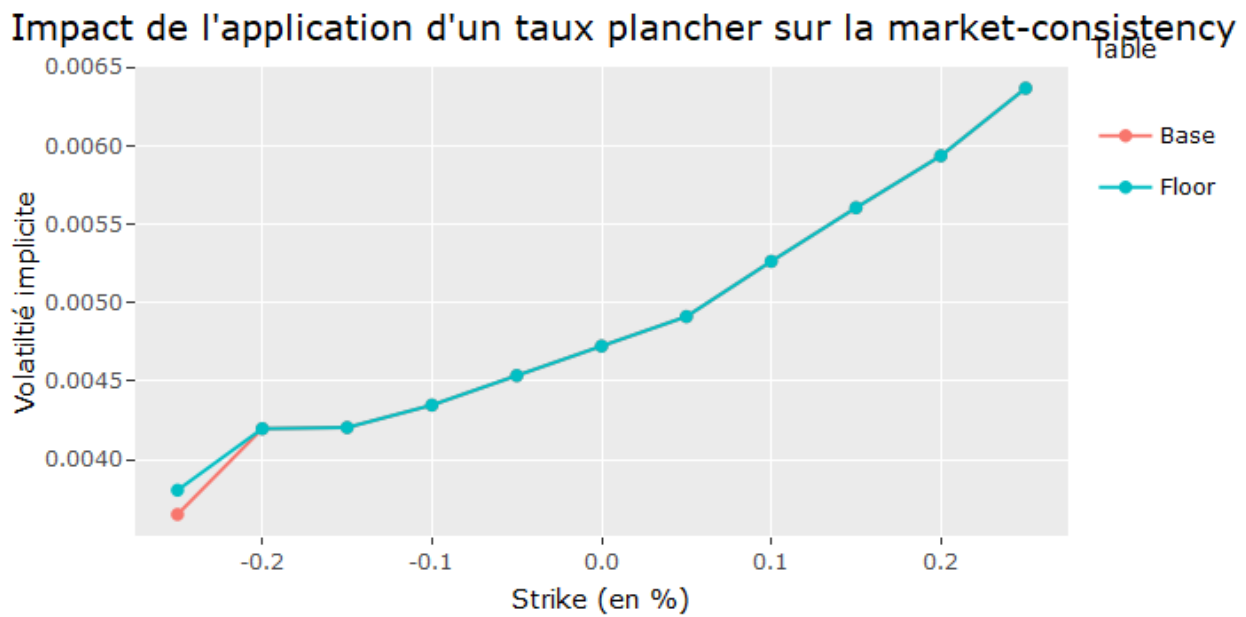


FIGURE 4.11 – Tests de market-consistency des swaptions de maturité 5 ans avec/sans floor

4.3.4 Impact sur les résultats

Les scénarios de taux impactent de manière directe les marges futures de l'assureur. La *NAV* est d'abord calculée pour chaque scénario, la *NAV* finale étant la moyenne des *NAV* sur tous les scénarios.

De ce fait, les modifications appliquées aux scénarios de taux impactent de manière directe les *NAV* sur les scénarios impactés par le plafonnement des taux et/ou l'application d'un taux plancher, cela impacte donc la *NAV* globale.

On se place dans le cadre des *NAV* issues des scénarios projetés au 31/12/2018 sans retraitement (c'est-à-dire sans contrainte sur les bornes des taux). On trace en abscisse le taux moyen sur 360 pas de temps de la simulation et en ordonnées la *NAV* calculée au niveau de ce scénario :

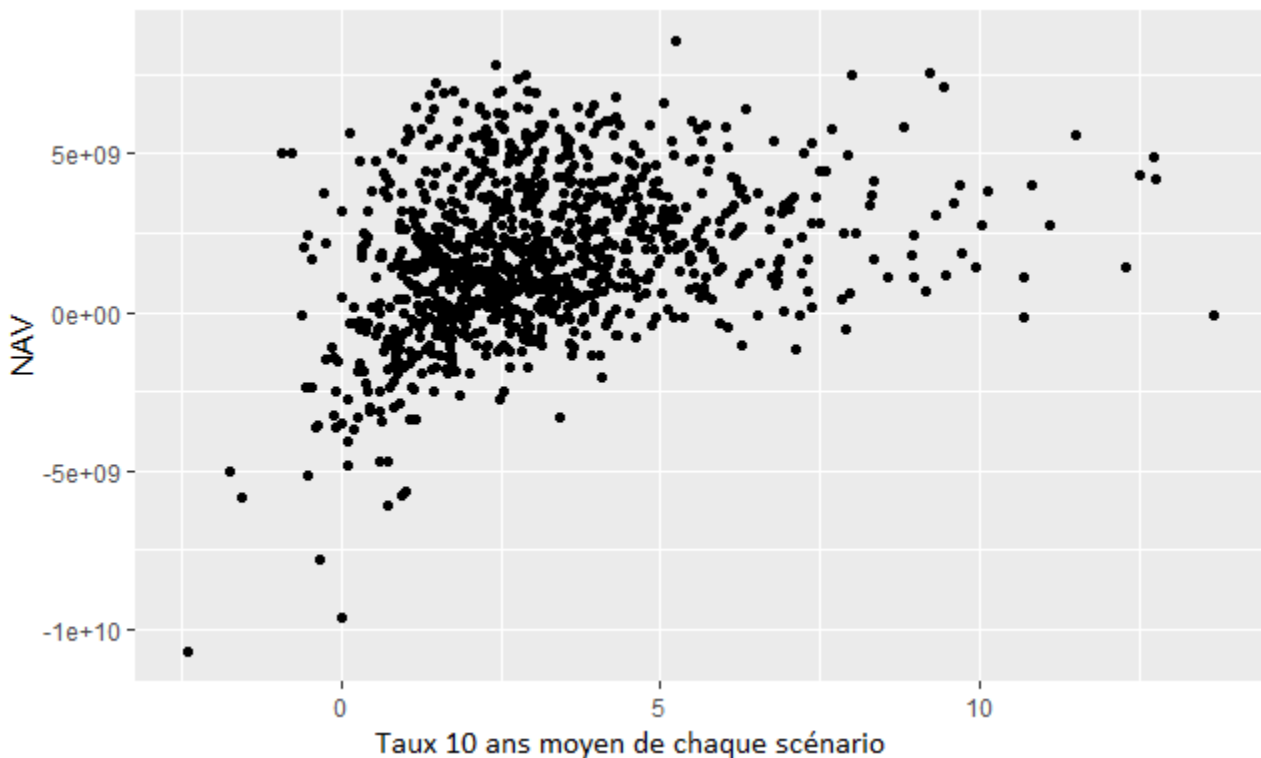


FIGURE 4.12 – NAV des 1000 scénarios en fonction du taux moyen sur chaque scénario

Le mécanisme de calcul de la *NAV* est assez complexe, mais de manière générale, des taux bas conduisent aux marges futures les plus petites.

La moyenne n'est qu'un indicateur synthétique, les résultats dépendent du moment où les taux sont bas (la simulation étant effectuée en run-off, des taux bas en début de simulation auront plus d'impact que des taux bas en fin de simulation), la diffusion des autres facteurs de risques joue aussi un rôle important dans le calcul des marges.

Impact des taux planchers

Les taux planchers interviendront sur les scénarios dont les taux passent en dessous d'un seuil fixé. Dans l'exemple suivant, on superpose les *NAV* calculées sur les scénarios sans retraitement et les *NAV* calculées sur des scénarios diffusées avec un taux plancher fixé à -2% :

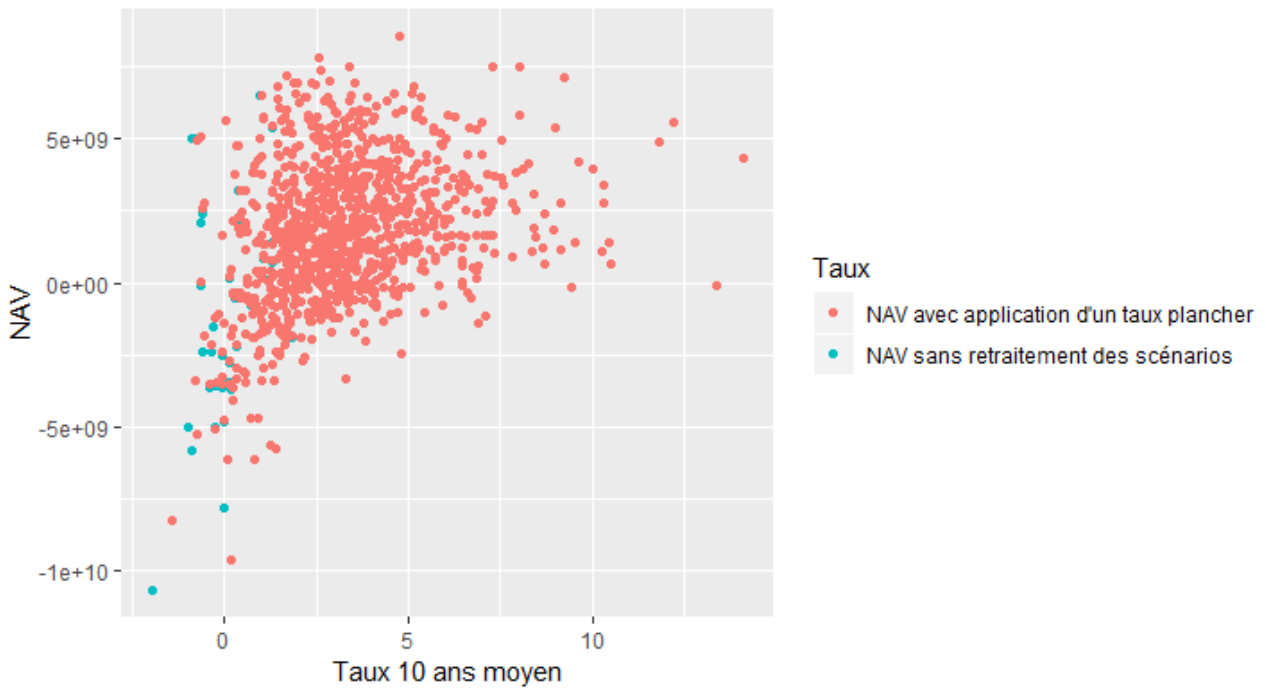


FIGURE 4.13 – NAV des 1000 scénarios avec/sans application d'un taux plancher

Les scénarios les plus coûteux en terme de *NAV* sont généralement ceux qui possèdent les taux les plus bas lors de la diffusion. Cela est observable sur le graphe ci-dessus : les points ayant les *NAV* les plus petites correspondent aux scénarios ayant les taux moyens les plus faibles. Appliquer un taux plancher (ou *floor*) à la diffusion des taux vient fixer la valeur minimale prise par les scénarios à -2% , cela rehausse les taux moyens des scénarios impactés par le *floor* (axe des abscisses), mais surtout, cela remonte le niveau des *NAV* les plus petites (sur l'axe des ordonnées).

Impact des taux plafonds

Les taux plafonds interviendront sur les scénarios dont les taux passent au dessus d'un seuil fixé. Dans l'exemple suivant, on superpose les *NAV* calculées sur les scénarios sans retraitement et les *NAV* calculées sur des scénarios diffusées avec un taux plafond fixé à un niveau arbitrairement bas de 15% :

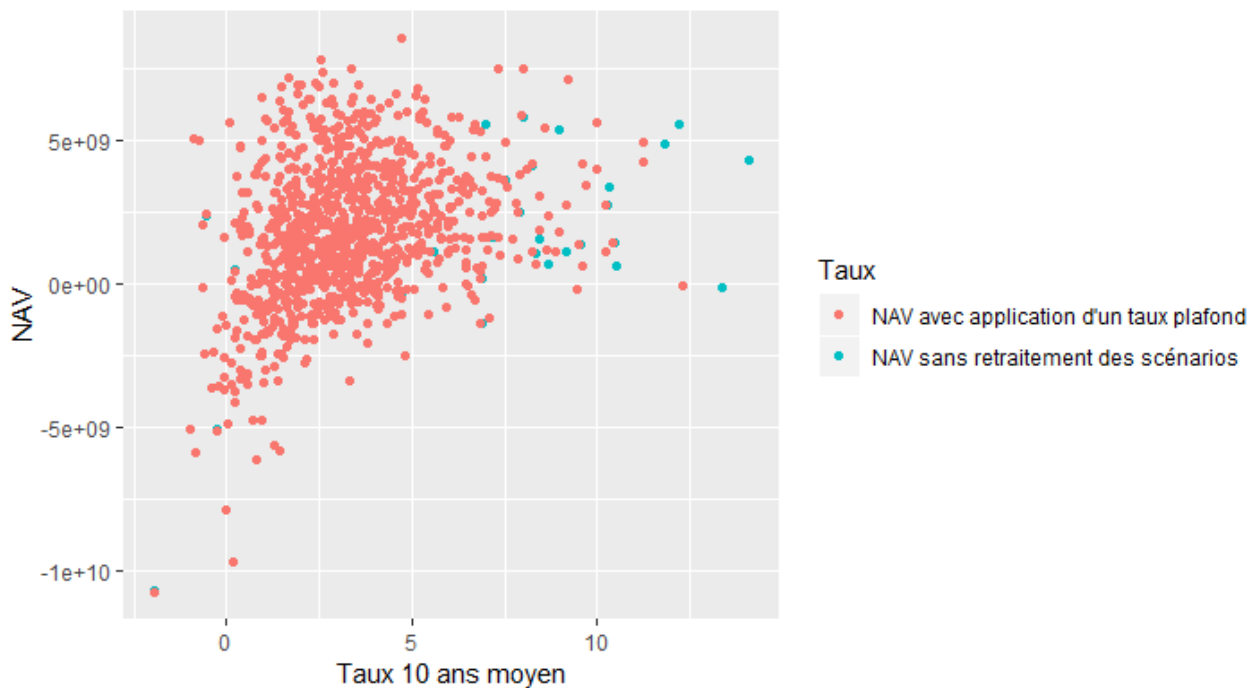


FIGURE 4.14 – NAV des 1000 scénarios avec/sans application d'un taux plafond

L'application du taux plafond rabaisse le niveau des abscisses des points ayant les abscisses les plus positifs : les points ayant les abscisses les plus positifs correspondent aux scénarios ayant les taux les plus élevés et sont donc ceux qui sont susceptibles de contenir des taux qui passent au dessus du seuil fixé, les abscisses de ces points sont décalés vers la gauche car la moyenne des taux sur le scénario concerné est plus basse. Cependant, cette déformation appliquée aux taux ne modifie pas beaucoup les NAV (sur l'axe des ordonnées).

Impact sur la NAV totale

Finalement, la NAV est la moyenne des NAV calculées sur chaque scénario pris individuellement. On récapitule les résultats obtenus :

NAV	NAV avec taux plancher à -2%	NAV avec taux plafond à 15%
1 825 689 937,65	+0.53%	+0.06%

Comme observé sur les nuages de points ci-dessus, l'application du taux plancher améliore les marges futures. Tandis que l'application du taux plafond ne modifie les résultats que légèrement, même avec un seuil fixé excessivement bas (15%).

Comme le rappelle [Planchet \(2017\)](#), bien que les états du monde entre l'univers risque-neutre et risque-réel (ou historique) sont les mêmes, les poids de chaque points diffèrent, avec certaines zones qui se retrouvent sur-pondérées au dépend de d'autres zones. C'est ce qui explique les trajectoires de certains scénarios difficiles à interpréter. Dans l'idéal, aucun retraitement ne devrait être fait en sortie de la projection afin de ne pas déformer les distributions à chaque pas de temps. Cependant, des

contraintes opérationnelles liées au modèle ALM imposent la restriction du champs des possibles, il convient donc de s'assurer que de telles déformations ne conduisent pas à une trop grande dégradation des tests de validation.

Conclusion

L'objectif du mémoire était d'identifier des leviers permettant de réduire l'incertitude des tests de validation. L'étude s'est concentrée autour de trois principaux points : la qualité de l'aléa, les choix effectués lors de l'étape de calibrage et l'impact de l'ajustement de la trajectoire de certains scénarios.

La génération des nombres aléatoires permet de diffuser les variables d'intérêt en alimentant les browniens définis dans les modèle. La technique de la correspondance des moments qui consiste à retraiter la séquence de nombres pour que ses deux premiers moments correspondent aux valeurs théoriques attendues améliore la convergence des tests de validation. L'observation de la formule de l'intervalle de confiance de l'estimateur de la moyenne donne des indications sur la manière de réduire l'incertitude : utiliser une méthode de réduction de variance (comme les variables antithétiques) ou augmenter le nombre de scénarios.

Les choix effectués lors de l'étape de calibrage impactent les résultats et les tests. D'une part, le choix de certains paramètres en amont du calibrage impacte la diffusion des scénarios. D'une autre part, bien que le modèle de taux soit complexe, il n'est pas en mesure de parfaitement ajuster la surface de volatilités implicites. Nous avons donc appliqué une méthodes permettant de choisir les zones de la surface qu'il faut calibrer avec le plus d'attention en ajustant la matrice de poids.

Des contraintes opérationnelles dans le modèle ALM peuvent contraindre l'utilisation de certains jeux de scénarios contenant des trajectoires extrêmes. Certaines trajectoires peuvent être plafonnées, mais cela n'est pas sans conséquence sur la martingalité du jeu de scénarios. Cependant, on observe dans l'étude que ces déformations, appliquées sur un très petit nombre de scénarios, ont un faible impact sur les tests et sur les résultats.

Bibliographie

- Armel, K. & Planchet, F. (2018a), ‘Comment construire un générateur de scénarios économiques risque neutre destiné à l’évaluation du best-estimate des contrats d’épargne en euro’, *HAL* .
- Armel, K. & Planchet, F. (2018b), ‘Comment définir la qualité d’un générateur de scénarios économiques destiné à évaluer le best-estimate épargne en euro’, *HAL* .
- Belet, E. (2017), *Étude de l’impact des tests statistiques de validation des scénarios économiques sur les indicateurs Solvabilité II*, Sogecap.
- Devineau, L., Grbac, Z., Tankov, P. & Vedani, J. (2016), *Modèles financiers pour la construction du bilan économique*, Congrès des actuaires.
- Donio, M. (2014), *Générateurs de scénarios économiques*, Sia Partners.
- Glasserman, P. (2004), *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer.
- L’ecuyer, P. (2007), ‘A c library for empirical testing of random number generators’, *Research Gate* .
- Moodys (2015), ‘Lmm+ : Derivation, implementation and mc methodology’, *Moody’s analytics* .
- Moodys (2017), ‘Market consistent lmm+ nominal yield cruve calibration with a semi-static displacement parameter’, *Moodys analytics research report* .
- Moodys (2018), ‘Market consistent lmm+ nominal yield curve calibrations with semi-static displacement parameter’, *Moody’s analytics* .
- Planchet, F. (2017), ‘Paramètres de générateurs de scénarios économiques, comment choisir?’, *La tribune de l’assurance* .
- Teugua, O. N. (n.d.), *Convergence des scénarios et écarts de valorisation*.