

Mémoire présenté devant l'ENSAE Paris
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires
le 19/03/2021

Par : **RAMCHOUN Badreddine**

Titre : **Etude d'un portefeuille de prévoyance et des impacts
sur le provisionnement en réassurance vie.**

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membres présents du jury de la filière
Pierre PICARD*

Entreprise :  AXA Globale Re

Nom :

Signature :



*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaires*

Directeur du mémoire en entreprise :

Nom : EL WARARI Omar

Signature :



**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)**

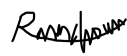
Signature du responsable entreprise

Secrétariat :



Bibliothèque :

Signature du candidat



Résumé

La réassurance est désormais un outil inéluctable pour les assureurs pour mieux gérer les risques auxquels ils font face et optimiser leurs capitaux propres. En effet dans un marché concurrentiel où la compétitivité est le maître mot, les assureurs optent pour la réassurance afin d'augmenter leurs capacités de souscription et s'assurer contre une éventuelle déviation de la sinistralité.

Une fois la cession acceptée, la compagnie de réassurance doit être en mesure d'honorer ses engagements futurs. Pour ce faire, elle calcule de façon annuelle et selon la réglementation en vigueur, le montant des provisions techniques à mettre de côté pour couvrir les risques qu'elle a acceptés.

C'est dans ce contexte qu'intervient notre mémoire. AGRé, captive de réassurance du Groupe AXA souhaiterait réévaluer ses engagements vie envers AXA Hong Kong en raison de l'inadéquation du modèle actuel avec les directives de Solvabilité II. L'objectif est ainsi de développer un outil de projection qui permet de fournir la meilleure estimation possible de ces engagements.

Nous présentons dans ce mémoire les différentes étapes suivies pour arriver à notre objectif. Nous commençons tout d'abord par une description des différents risques de notre portefeuille, en particulier la mortalité, l'incidence des maladies et le risque de rachat. Nous proposons ensuite de modéliser indépendamment chacun des risques étudiés. Pour la mortalité nous calibrons les probabilités de décès via les méthodes classiques de Hoem et de Kaplan Meier que nous ajusterons ensuite en utilisant différentes techniques de lissages (Makeham, Whittaker Henderson, Brass). Les lois d'incidences seront estimées par Kaplan Meier, quant aux ajustements nous opterons pour la méthode de WH. Les rachats seront finalement ajustés par la méthode des cadences de Chain Ladder. Nous introduisons enfin notre modèle de projection multi-états qui nous permettra d'évaluer avec précision les différents cashflows générés par le produit réassuré et on testera pour conclure, la robustesse du modèle en analysant sa sensibilité aux différents paramètres.

Mots-clés : *Quote-Part, Réassurance vie, Whittaker Henderson, Hoem, BRASS, SolvabilitéII, Kaplan Meier, Mack , Simulations.*

Abstract

Reinsurance is the best way for insurers to manage their risks and optimize their own equity. Indeed in a market where competitiveness is the key word, insurers choose reinsurance strategy in order to increase their underwriting limits and insure themselves against the risk of a change in loss experience.

Once the cession is accepted, the reinsurance company must be able to honor its future commitments. To do so, it calculates on an annual basis and according to the regulations in force, the amount of technical reserves to be set aside to cover the risks it has accepted.

It is in this context that our article was written, AGRé would like to reassess its life commitments toward AXA Hong Kong because of the inadequacy of the current model with the Solvency II directives. The objective is therefore to develop a projection tool that provide the best estimate of these commitments.

We present in this paper all the steps followed to reach our goal. We begin first with a description of the various risks in our portfolio, in particular mortality, morbidity risks and lapses. We then propose to model each risk aside. For mortality we calibrate the death's probabilities using the classical methods of Hoem and Kaplan Meier which we will then adjust using different smoothing techniques (Makeham, Whittaker Henderson, Brass). The incidence laws will be estimated by Kaplan Meier, and the smoothing will be done by WH method. Next, the Lapses will be adjusted by the Chain Ladder method. Finally, we introduce our multi-state projection model which will allow us to accurately assess the various cashflows generated by the reinsured product, and to conclude we will test the robustness of the model by analyzing its sensitivity to different inputs.

Keywords: *Quota-Share, Life Reinsurance, Whittaker Henderson, Hoem, BRASS, SolvencyII, Kaplan Meier, Mack , Simulations.*

Note de Synthèse

Problématique

AXA Global Re est la captive de réassurance du Groupe AXA. Elle intervient sur la branche vie et non vie. Dans le cadre de l'amélioration de son dispositif de provisionnement vie, l'équipe Reserving a souhaité créer un outil spécifique à la projection de leurs engagements envers les cédantes. Nous nous intéressons en particulier au produit de prévoyance individuelle de l'entité AXA Hong Kong. Ce choix est motivé par trois raisons :

- La première raison est liée aux recommandations de l'équipe d'audit du modèle interne du Groupe AXA
- Le produit réassuré est le plus matériel du point de vue des primes nettes de rétrocession. C'est l'un des seuls engagements sur lequel *AGRe* a une grande rétention contrairement aux autres engagements vie. De plus, c'est le seul produit dont les données sont fiables.
- La volonté d'AGRe de s'aligner sur les directives de la réglementation Solvabilité 2, concernant la prise en compte de l'expérience de l'assureur/réassureur dans la modélisation de leurs propres risques.
- Proposer une méthode alternative à l'approche P&C en vigueur pour les engagements vie.

Données

Nous disposons de reportings mensuels sur le produit étudié, de la période allant du 01/09/2012 au 31/06/2019. Le contrat de prévoyance commercialisé par AXA HK prévoit une garantie contre les aléas de la vie, à savoir le décès et les risques de morbidité qu'on ventile en deux composantes, maladies "graves" et maladies "mineures". Le contrat prévoit aussi des garanties supplémentaires contre les déclarations multiples des sinistres graves et les maladies "redoutées/précoces", et enfin une garantie additionnelle pour se couvrir contre l'inflation.

Approche

L'approche que nous proposons se décline en plusieurs étapes : La première étape consiste à modéliser les risques sous-jacents. Nous avons alors exploré une panoplie de méthodes classiques pour la modélisation de ces risques et nous avons choisi, en se basant sur les tests statistiques, celles qui ajustaient au mieux le risque. Au vu de la relation entre l'entité et AGRe, nous disposons des indicateurs Best Estimate tirés de sa propre expérience, ces derniers nous ont permis de porter un second regard quant aux résultats et aux conclusions tirées.

Chaque risque est analysé puis modélisé indépendamment des autres risques. Pour la mortalité, nous estimons les quotients par âge à l'aide des estimateurs classiques de Kaplan Meier et de Hoem sur l'intervalle d'âge [30, 60ans]. Nous les ajustons ensuite à l'aide des techniques usuelles

de WH, Brass et de Makeham dans la perspective de pallier les irrégularités observées à cause de l'échantillonnage. En se référant aux tests déployés lors de cette analyse, en particulier χ^2 et la déviance, il nous semble que la méthode Hoem-Brass et Hoem Makeham ajuste au mieux le risque respectivement dans la population masculine et féminine. Nous extrapolons ensuite la mortalité aux grands âges en utilisant la méthode de Brass.

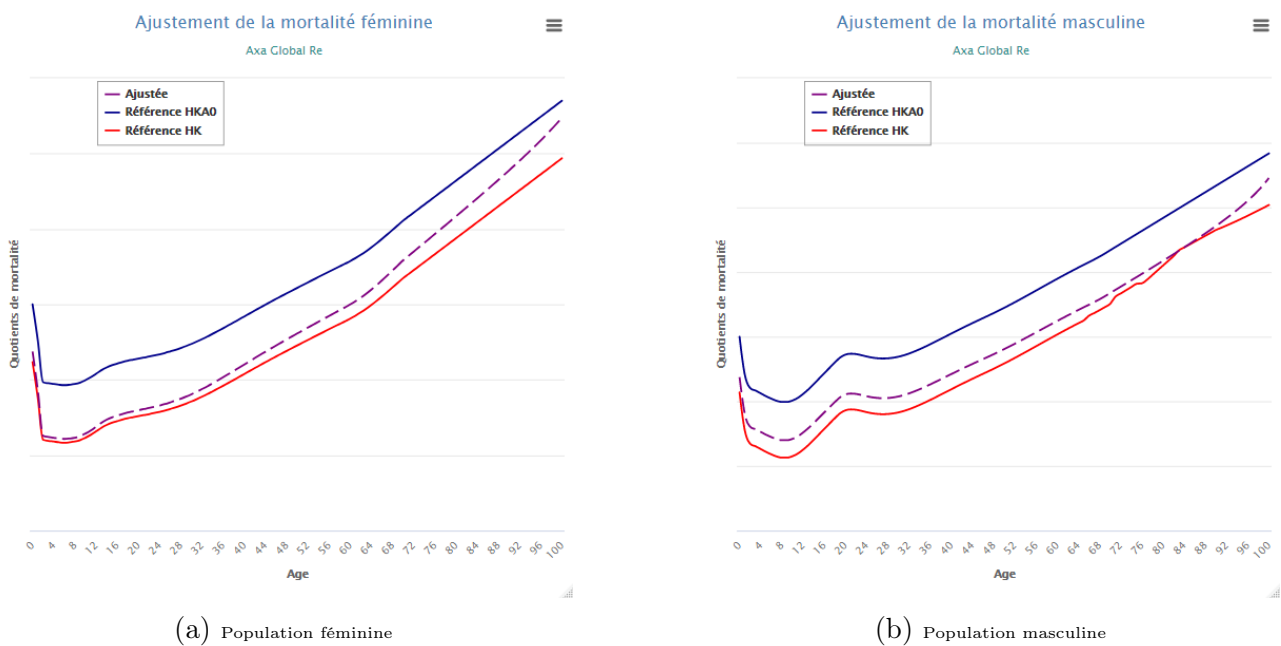


FIGURE 1 – Ajustement final de la table de mortalité

L'ajustement réalisé en comparaison avec les taux de référence HK, montre une divergence de vision sur le risque de mortalité qui peut être expliquée par l'expérience restreinte du portefeuille d'étude.

Quant au risque d'incidence, nous calibrons les taux à l'aide de l'estimateur de Kaplan Meier et nous proposons de les lisser à l'aide de la méthode de Whittaker Henderson seulement, en raison d'absence des courbes de référence concernant le risque d'incidence des maladies étudiées. En se référant aux différents statistiques de test, en particulier R_{deux} et χ^2 , nous notons une surestimation de notre part. Toutefois, l'estimation Best Estimate de l'entité asiatique vient reconforter notre vision du risque puisque nous restons toujours au dessous de ces hypothèses, comme le montre le graphique suivant sur l'incidence des maladies graves.

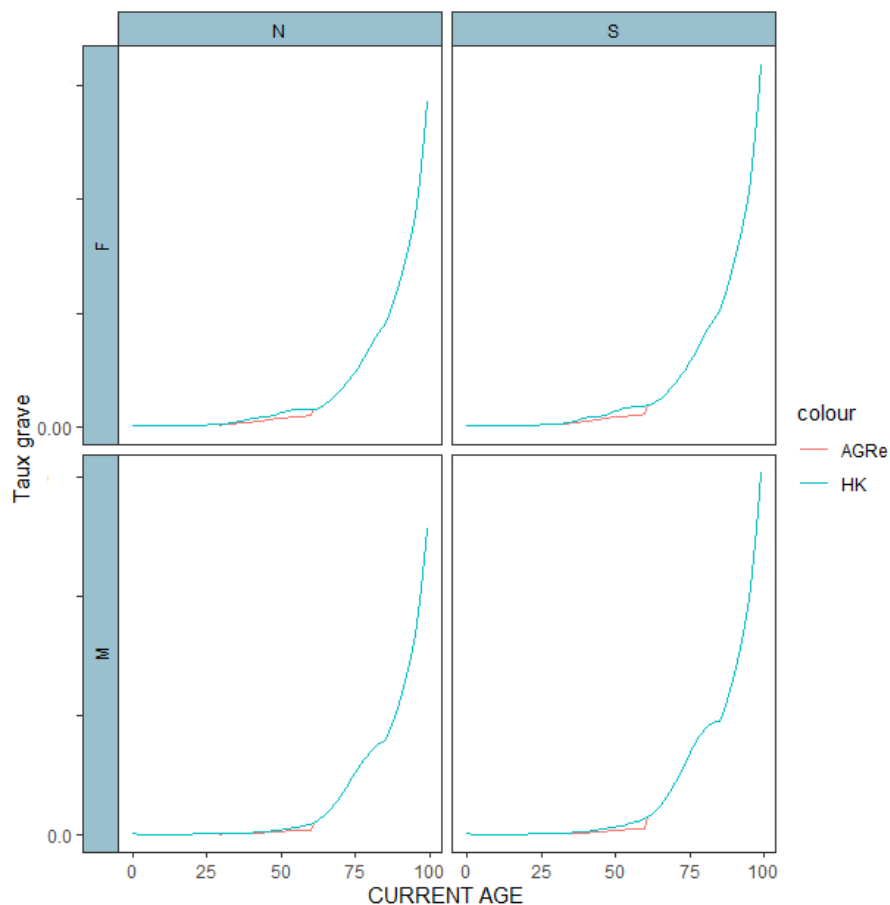


FIGURE 2 – Ajustement des taux d’incidence des maladies graves. AXA vs AGRe

Enfin nous ajustons les taux de rachat en fonction de la durée, des modalités et la durée des paiements en utilisant la méthode de provisionnement de Chain Ladder. Elle nous permet de détecter la cadence des rachats et ainsi prédire pour une durée donnée, un "terme de paiement" donné et une durée de paiement donnée, le taux de rachat correspondant.

L’objectif de cette étape est de calibrer les paramètres de notre modèle de projection. Ce dernier basé sur des simulations permet de prendre en compte l’état de la police à chaque mois de projection. C’est un algorithme récursif qui répète les mêmes opérations à chaque mois de projection jusqu’à l’extinction du portefeuille. Le modèle développé nous permet ainsi de déterminer l’évolution du portefeuille dans son ensemble mais aussi de déterminer notre valeur cible qui est le BEL vie et de quantifier la sensibilité du modèle aux variations des paramètres d’entrée. Les résultats à l’issue de ce modèle nous ont permis d’avoir une vision assez globale sur le risque porté par AGRe mais également de déterminer les paramètres impactants qu’il faudra suivre jusqu’à l’extinction du portefeuille.

Conclusion

Les travaux menés jusqu’ici nous ont permis de conclure qu’il y a une divergence de point de vue sur le risque porté par le portefeuille. Ils nous ont aussi permis de répondre aux recommandations de l’audit interne et plus généralement au directives solvabilité II concernant l’estimation du BEL vie.

Executive summary

Issue

AXA Global Re is the reinsurance captive of the AXA Group. It intervenes in the life and non-life branch. As part of improving its life reserving system, the Reserving team thought about creating a specific tool to project its commitments toward cedants in life business. We will analyze mainly, Hong Kong's life and health product. Our choice is motivated by three reasons:

- The first reason is linked to the recommendations of the internal model audit team of the AXA Group.
- The reinsured product is the most material from the point of view of net retrocession premiums. This is one of the only commitments on which *AGRe* has a high retention unlike other life commitments. In addition, it is the only product with reliable data.
- *AGRe*'s desire to align itself with the directives of Solvency II regulations, concerning the taking into account of the experience of the insurer/reinsurer in the modeling of their own risks.
- Propose an alternative method to the P&C approach in force for life commitments.

Data

We have monthly reports on the studied product, over the period from 01/09/2012 to 31/06/2019. The insurance contract marketed by AXA HK provides a financial protection in case of death and illness, which can be divided into two components: Critical Illness and Minor Illness. The contract also provides additional protection in case of multiple declarations of Critical Illness and Early stage Illness, finally it provides an additional protection against inflation.

Approach

The proposed approach is divided into several steps: The first step consists in modeling the underlying risks linked to the product. In this sense, we have explored a range of classical methods for modeling these risks and we have chosen, based on statistical tests, those which best fit the risk. In view of the relationship between the entity and *AGRe*, we had Best Estimate indicators drawn from its own experience, these allowed us to take a second look at the results and the conclusions drawn.

We analyze the different risks and we propose to model each of them aside. For mortality, we estimate the probabilities by age using the classical estimators of Kaplan Meier and Hoem on the age interval [30, 60 years]. We then adjust them using the usual techniques of WH, Brass and Makeham in order to deal with the irregularities observed due to sampling. By referring to

the tests deployed during this analysis, in particular χ^2 and deviance, it seems to us that the Hoem-Brass and Hoem Makeham method best fit the risk in the male and female populations respectively. We finally extrapolate mortality to older ages using Brass's method.

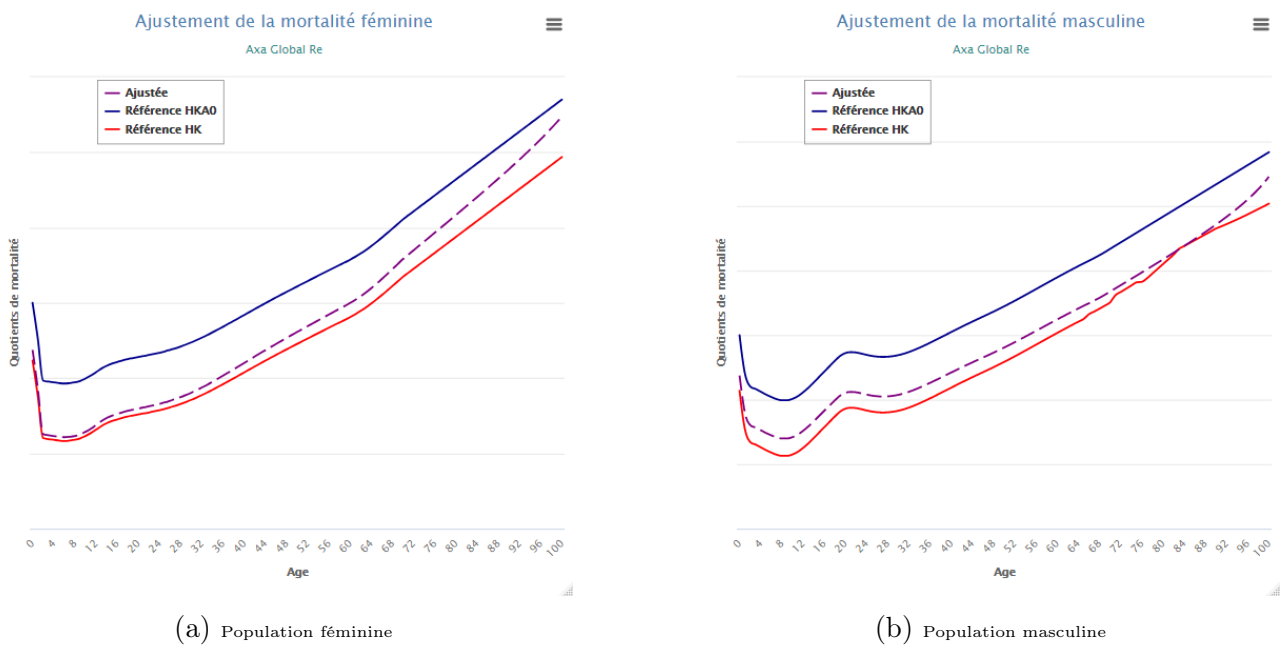


Figure 3 – Ajustement final de la table de mortalité

The adjustment made shows a divergence of vision on the risk of mortality, which can be explained by the limited experience of the analysed portfolio.

As for the risk of incidence, we adjust it using the Kaplan Meier estimator and we propose to use only the Whittaker Henderson smoothing technique due to lack of reference curves for the risk of Illness incidence. Referring to the different test statistics, in particular R_{deux} and χ^2 , we note an overestimation on our behalf. However, the Best Estimate estimate indicators of the Asian entity comes to comfort our view of risk since we always stay below these assumptions, as shown in the following graph on the incidence of critical illnesses.

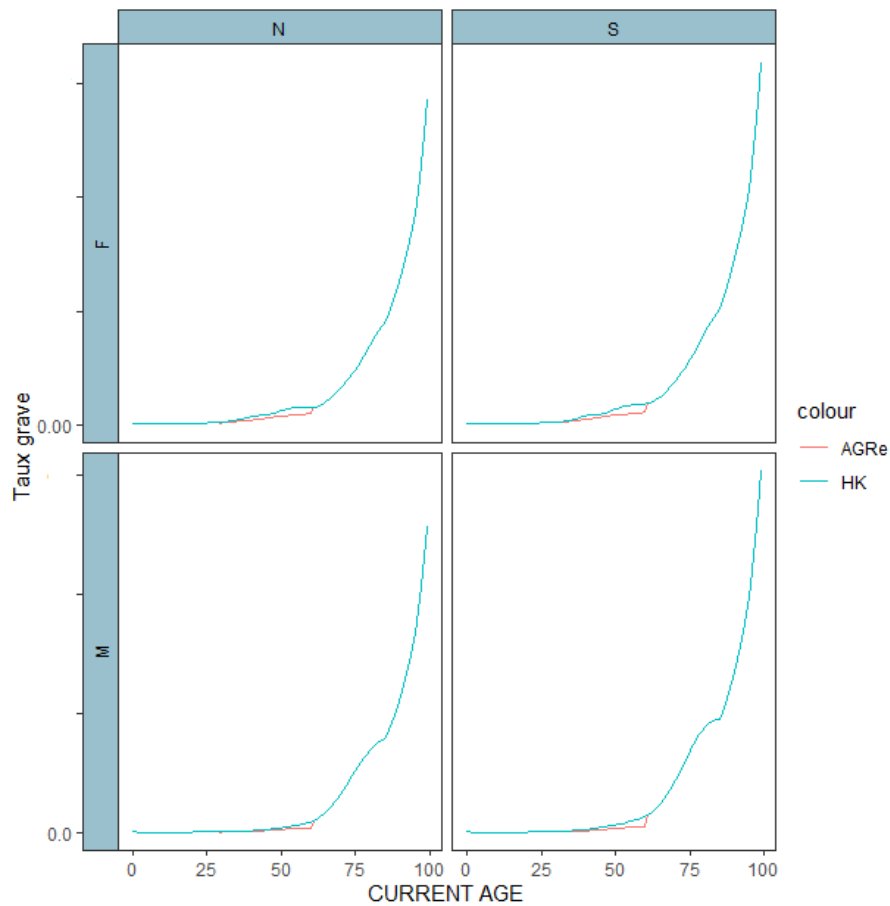


Figure 4 – Ajustement des taux d’incidence des maladies graves. AXA vs AGRe

Finally we adjust the lapses rates according to the duration, terms and duration of payments using the Chain Ladder provisioning method. It allows us to detect the rate of lapses and thus predict for a given duration, a given "payment term", the corresponding lapse’s rate.

The aim of this step is to fit the parameters of our projection model. The model is based on simulations and allow us to take into account the state of the police at each month of projection. It is a recursive algorithm which repeats the same operations at each projection month until the extinction of the portfolio. The model thus allows us to determine the evolution of the portfolio as a whole but also to determine our target value which is the BEL life. Moreover, it allow us to quantify the sensitivity of the model to variations in the input parameters. The results of this model have allowed us to have a fairly global view of the risk borne by AGRe but also to determine the impacting parameters that we should supervise till the extinction of the portfolio.

Conclusion

The work carried out so far has enabled us to conclude that there is a divergence in point of view on the risk carried by the portfolio. They also enabled us to respond to the recommendations of the internal audit and more generally to the solvency II directives concerning the estimation of the BEL life.

Remerciements

Mes plus vifs remerciements s'adressent tout d'abord à mes encadrants M. Omar El Warari, Actuaire reserving chez AGRe et M. Elie Dadoun Reserving Manager chez AGRe, pour leurs suivis, et qui, malgré les occupations et les responsabilités qu'ils assument, ont toujours eu le temps de m'écouter, me conseiller et me fournir l'encadrement nécessaire durant cette période de stage.

Mes vifs remerciements vont également à Mme Caroline Portel, responsable de la direction financière d'AGRe, pour m'avoir généreusement accepté au sein de son équipe et pour sa confiance. Egalement à l'ensemble de l'équipe du département Pricing/Risk Management qui ont facilité mon insertion au sein de l'entité.

Je tiens à remercier aussi mon encadrant pédagogique Mr. Pierre Picard pour son écoute, la qualité de ses enseignements ainsi que pour ses conseils.

Enfin, j'exprime ma gratitude envers mes parents, mes soeurs, mon frère pour leur soutien infailible tout au long de mes années d'étude et je remercie Houda pour m'avoir épaulé dans la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Résumé	3
Abstract	4
Note de Synthèse	5
Executive Summary	9
Remerciements	13
Table des matières	14
Introduction	17
I Axa Global Re et les risques de la réassurance vie	1
I.1. Marché de la réassurance vie	1
I.2. Formes de réassurance	3
I.2.1. Réassurance Proportionnelle :	4
I.2.2. Réassurance non proportionnelle :	6
I.2.3. Formes de réassurance usuelles en réassurance vie :	8
I.3. Position d'AGRe	8
I.3.1. Historique et fusion	8
I.3.2. Rôle d'AGRe	8
I.3.2.1. Finalité du Pool	9
I.3.3. Branche vie d'AGRe	9
I.4. Contexte et périmètre d'étude	10
I.4.1. Solvabilité II	10
I.4.2. Périmètre d'étude	10
I.4.3. Insuffisances du modèle actuel	12
I.4.4. Proposition d'une nouvelle approche	14
II Présentation des données (Réassurance d'un produit de prévoyance d'AXA Hong Kong)	17
II.1. Structure des données	17
II.1.1. Caractéristiques des contrats	17
II.1.2. Données	21
II.1.3. Traitement des données	23
II.1.4. Ressources externes	23
II.1.4.1. Mortalité de la population nationale	24
II.1.4.2. Taux d'incidence	25
II.1.4.3. Projections Best Estimate de la cédante.	25
II.2. Analyse des données	25

II.2.1. Contrôle des calculs	25
II.2.2. Evolution des Sommes sous risque	26
II.2.3. Evolution des primes	28
II.2.4. Evolutions des Sinistres	29
II.2.5. Evolution de l'âge de la population assurée	30
II.2.5.1. Distribution des âges	30
II.2.5.2. Âge Moyen	30
III Calibration des paramètres	32
III.1. Etude de la mortalité	32
III.1.1. Notations	32
III.1.2. Estimateur de HOEM	33
III.1.3. Estimateur de Kaplan Meier	34
III.1.4. Lissage de Brass	37
III.1.5. Lissage de Whittaker Henderson	38
III.1.6. Lissage Makeham	40
III.1.7. Validation locale	40
III.1.8. Validation globale	41
III.2. Calibration de la mortalité	42
III.2.1. Analyse de la mortalité	43
III.2.1.1. Exposition et nombre de décès	43
III.2.1.2. Mortalité Globale	44
III.2.2. Estimation des taux de mortalité	44
III.2.2.1. Détermination des quotients par âge	44
III.2.3. Ajustement des quotients	45
III.2.3.1. Ajustement Whittaker Henderson	45
III.2.3.2. Ajustement de BRASS des quotients	46
III.2.3.3. Ajustement de Makeham des quotients	47
III.2.4. Critique des résultats et adéquation	48
III.2.4.1. Validation locale	48
III.2.4.2. Validation Globale	50
III.2.4.3. Fermeture et ouverture des tables de mortalité	51
III.3. Analyse et calibration des incidences	51
III.3.1. Calibration et validation des taux d'incidence	52
III.4. Analyse et calibration des lapses	58
III.4.1. Analyse graphique	58
III.4.2. Calibration des taux de rachat	60
III.4.2.1. Méthode de Mack	60
III.4.2.2. Application	61
III.4.2.3. Confrontation des résultats avec les hypothèses d'Axa HK	62
IV Résultats du modèle de projection et analyse de sensibilité	64
IV.1. Présentation du modèle de projection	64
IV.2. Algorithme de Projection	65
IV.2.1. Décroissance des sommes sous risque	67
IV.2.2. Projection des primes et des sinistres	68
IV.3. Résultats du modèle de projection	69
IV.3.1. Primes et sinistres	69
IV.3.2. Primes et sinistres par garanties	69
IV.3.3. Fiabilité du modèle	70

IV.4. Analyse de sensibilité du Loss Ratio	71
Conclusion	73
Bibliographie	74
Glossaire	76
Annexes	77
A Taux de prime	77
I.1. Taux de prime appliqué à la garantie "Maladies Graves"	77
I.2. Taux de prime appliqué à la garantie "Maladies Précoces"	78
I.3. Taux de prime appliqué à la garantie "Maladies Mineures"	78
I.4. Taux de prime appliqué à la garantie "Maladies Mineures"	79
B Comparaison des taux HK et des taux AGRe	80
C Ajustement Unisexe des lois d'incidence	82
D Backtest des SAR	83
E Projections de l'âge moyen et du nombre d'individus restants.	84
F Méthode de Nelder Mead	85
G Résidus de la population féminine	87

Introduction

Les provisions techniques en réassurance vie constituent l'élément clé du bilan du réassureur vie, l'estimation via des techniques peu adaptées en ignorant la structure du portefeuille réassuré peut entraîner des déviations sur le long terme. Il est de ce fait indispensable d'adopter une approche complète se basant sur les données sources de la cédante afin de déterminer avec précision les engagements du réassureur tel qu'il est prescrit dans le référentiel de solvabilité II. En pratique pour mettre en place une telle approche, les actuaires se heurtent à de multiples obstacles dont la plupart sont liés aux données. Celles-ci ne sont pas toujours disponibles en quantités suffisantes à cause des délais de reporting qui ne sont pas respectés et aussi à cause du caractère irrégulier des flux d'informations provenant de la cédante. Et quand bien même ces données soient disponibles, elles ne sont pas toujours au bon format et peuvent présenter plusieurs défauts auxquels il faudra remédier avant de commencer à les manipuler.

Le réassureur est alors contraint de chercher d'autres moyens pour estimer ses engagements envers la cédante. Souvent les approches adoptées ne sont pas conformes à la réglementation en vigueur et nécessitent une réévaluation. C'est le cas du portefeuille prévoyance d'AGRe, ce mémoire aura donc pour objectif de modéliser avec précision ce produit qui propose une couverture contre les risques de décès et de maladie et dont la couverture est réalisée par un traité Quote-Part limité. Le premier chapitre du mémoire proposera une mise en contexte, dans laquelle nous analyserons le marché mondial de la réassurance vie et le cas particulier de l'Asie, on s'attardera après sur la définition des techniques de réassurance usuelles et la description du processus de réassurance chez AGRe, enfin on clôturera cette première partie par la critique de l'ancienne méthode utilisée et la présentation de la nouvelle approche proposée.

Ensuite dans une deuxième partie, nous nous pencherons sur la présentation du produit et du traité étudié, nous compléterons ensuite cette présentation par une analyse globale des différents caractéristiques du contrat. La troisième partie sera réservée à la modélisation des risques sous-jacents du produit. Finalement une quatrième partie sera consacrée à la présentation du modèle de projection et à l'analyse de sensibilité de l'indicateur de rentabilité Loss Ratio.

Chapitre I

Axa Global Re et les risques de la réassurance vie

I.1. Marché de la réassurance vie

La réassurance est considéré comme le moyen traditionnel des compagnies d'assurance de personnes pour transférer leurs risques vers une autre entité appelée le réassureur. C'est un contrat à long terme et nécessite que le réassureur ait les capacités financières et techniques pour supporter et gérer un tel risque.

De cet échange naît une relation étroite entre les deux parties, celle-ci est matérialisée par un contrat de réassurance qui peut prendre soit la forme juridique d'un *Traité* obligatoire soit la forme d'une *Facultative*. Au delà de son objectif premier qui est de transférer le risque, la compagnie d'assurance, aussi appelée la *cédante*, peut profiter de l'expertise du réassureur sur les différentes problématiques auxquelles elle sera confronté comme le lancement d'un nouveau produit sur le marché, allégement des capitaux requis, optimisation fiscale, etc . . .

Le marché de la réassurance est divisé en deux catégories, la réassurance vie et la réassurance non-vie. Dans ce mémoire notre intérêt sera tourné vers la branche vie, nous y analyserons les tendances sur le marché mondial sans pour autant occulter le développement du marché primaire de l'assurance vie dont il dépend fortement.

Selon le dernier rapport financier ² de Swiss RE de 2019 (Cf.[19]), le montant de primes en assurance vie auquel on devrait s'attendre en 2019 est estimé à 2800 Milliards\$ dont 20% proviendrait des marchés émergents comprenant les régions de l'Asie émergente, la Turquie et les pays d'Amérique du Sud. Ces régions ont connu un développement économique intéressant durant la dernière décennie, une raison qui a favorisé l'émergence de la classe moyenne et l'accès de plus en plus au produit d'assurance et de prévoyance.

Malgré un contexte mondial caractérisé par une stagnation de la croissance des primes globales à l'ordre de 2%, la croissance enregistrée sur les pays émergents ne passe pas inaperçue et attise l'appétit des géants de la réassurance en quête de croissance. Effectivement, avec une croissance des primes au dessous de la moyenne annuelle de 2% pour les marchés matures tels que l'Europe, le Japon, les réassureurs ont changé de cap et se sont tournés vers des marchés comme la Chine qui explose tous les records et montre une croissance à deux chiffres des primes d'assurance vie, portée principalement par la commercialisation des produits de prévoyance. Les régions d'Afrique et du Moyen Orient quant à elles affichent une faible croissance autour de 4% et sont de ce fait moins courtisées par les réassureurs.

Les spécialistes prévoient aujourd'hui une croissance soutenue dans les marchés émergents en particulier l'Asie émergente, et s'attendent à ce que la part de ceux-ci atteigne 50% des primes

2. Swiss Re Reports-Pages 10-11

mondiales de l'assurance d'ici 10 ans, voir même que la Chine devienne à horizon de 15 ans le premier marché de l'assurance. Finalement l'avenir de l'assurance vie sera marqué par une décroissance des ventes des produits d'épargne vu le contexte actuel des taux bas tandis que les produits de prévoyance garderont leurs rythmes de croissance habituelle.

En parallèle, sur le marché de la réassurance vie, le montant des primes cédées a enregistré une hausse de 2% pour s'établir à peu près à 85 Milliards \$ dont 70% provient essentiellement des Etats Unis d'Amérique, Royaume-Uni et la Chine. Leur part du marché des cessions reste pour l'instant inchangée malgré le fait que les marchés émergents affichent une croissance des primes à deux chiffres.

La tendance globale qu'on note sur le marché de la réassurance vie est que les acteurs aujourd'hui diversifient leurs portefeuilles loin du business traditionnel de la mortalité, si bien que la réassurance des charges médicales des marchés émergents constitue à elle seule 13% des primes et dont la cédante principale est la Chine.

Globalement, le marché de la réassurance vie compte peu de concurrents et reste difficilement pénétrable. On note une forte concentration de celui-ci, en effet le TOP 5 des réassureurs en 2017 se partageaient 70% des parts du marché de la réassurance vie en terme de primes comme le montre la figure I.1 et cette tendance est loin de se dissiper. On prévoit même que le marché soit concentré davantage pendant les prochaines années. D'ailleurs pendant la période 2000-2020 toutes les tentatives d'introduction sur le marché de la réassurance vie étaient infructueuses, même les acteurs qui ont pénétré n'ont pas pu survivre à la rude concurrence et ont finit par se replier.

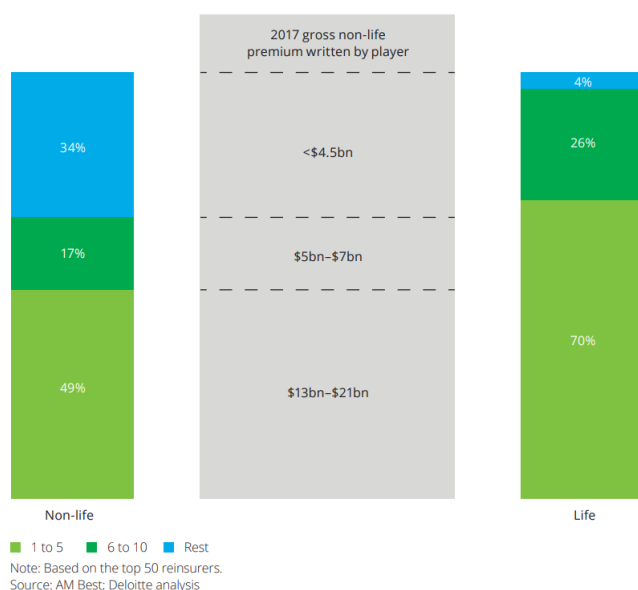


FIGURE I.1 – Répartition des parts du marché de la réassurance Vie/Non Vie en 2017 entre les différents acteurs

Cet accès restreint s'explique par la pénibilité des contraintes financières et réglementaires imposées ainsi que la pression exercée par les géants de la réassurance. Sur le plan financier les nouveaux entrants doivent faire preuve de solidité financière, ainsi les fonds propres doivent être en quantité suffisante pour absorber les déviations d'une sinistralité accrue de la branche vie et sur laquelle le nouvel entrant n'a pas assez d'expertise pour la gérer.

Sur le plan réglementaire, le nouvel entrant doit se conformer à la réglementation en vigueur, celle-ci est obligatoire et impose plusieurs contraintes d'ordre organisationnel, technique et matériel.

Enfin, les géants de la réassurance ont multiplié durant les 20 dernières années les opérations de

fusion-acquisition, absorbant ainsi toutes les nouvelles structures innovantes qui apparaissent sur le marché et ce dans la perspective de survivre à la rude concurrence actuelle. Cette situation a contribué indéniablement à creuser le fossé entre les géants de la réassurance et les petites structures en place, renforçant par conséquent la concentration du marché de la réassurance vie.

Pour conclure, le marché de la réassurance vie sera aussi impacté par la divergence des incitations réglementaires par rapport à chaque région, limitant ainsi l'accès des réassureurs externes au marché national de certaines régions. Néanmoins les réassureurs restent confiants et s'attendent à une stabilisation des taux de cessions, voire même qu'elles augmentent à cause des turbulences en cours sur le marché de l'assurance.

Marché Asiatique Le marché émergent asiatique représente un vecteur de développement à long terme pour les réassureurs en quête de croissance. Les mutations que connaît la société asiatique aujourd'hui, notamment avec la montée en flèche de la classe sociale moyenne, profitera aux réassureurs. Cette population se caractérisant par un accès plus facile au marché de l'assurance pourra se couvrir contre les risques aléatoires liés à la vie humaine et en parallèle, face à cette montée de prise de risque les assureurs solliciteront davantage le marché de la réassurance afin de se prémunir contre la concentration des risques et protéger leur résultat. Le marché asiatique, reste l'un des plus concurrents, en particulier Hong Kong (cf.[4]) où de nouveaux produits sont régulièrement lancés, d'ailleurs c'est dans ce sens qu'on remarque aujourd'hui une croissance du nombre de portefeuilles Run-Off (lié principalement au renouvellement de l'offre de produits d'assurance).

I.2. Formes de réassurance

Avant d'aller plus loin dans les parties suivantes, il est primordial d'avoir une vision assez claire des traités traditionnels sur le marché, leurs fonctionnements et leurs caractéristiques. En réassurance il existe plusieurs types de contrats :

- **Traité obligatoire** : Ces contrats imposent des obligations réciproques. La *cédante* s'engage à céder tous ses risques (sur une période donnée) et la compagnie de réassurance s'engage à les accepter. Deux types de traités de réassurance sont également distingués entre la réassurance proportionnelle et la réassurance non proportionnelle
- **Facultative** : L'assureur et le réassureur sont respectivement libres de céder ou d'accepter un risque, en totalité ou en partie
- **Facultative-Obligatoire** : Contrat hybride où le réassureur s'engage à accepter toutes les affaires que la *cédante* choisira de lui soumettre.

Les formes de couvertures en pratique sont scindées en deux, la réassurance proportionnelle et la réassurance non proportionnelle. Dans la figure I.2, nous regroupons les différents contrats liés à chaque forme de réassurance et nous expliquerons ensuite très brièvement chacune d'elles.

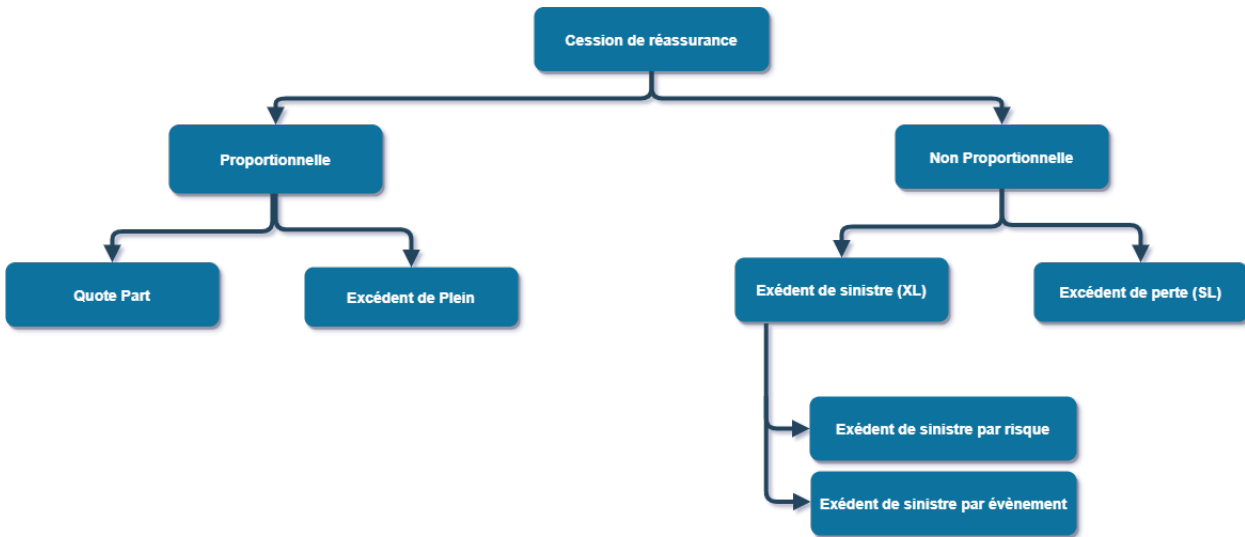


FIGURE I.2 – Formes de réassurance

I.2.1. Réassurance Proportionnelle :

En réassurance proportionnelle, les primes et les sinistres sont partagés proportionnellement entre assureur et réassureur(s). Ils se partagent le sort de l'exposition, quelque soit la sinistralité qui la touche. La proportion de la prime versée par l'assureur au réassureur servira à financer la même proportion des éventuels sinistres non retenus par l'assureur. Les principales clauses négociées sont les clauses de commission, versées à l'assureur en participation des frais d'acquisition du portefeuille, ainsi que les clauses de participation aux bénéfices pour autant qu'il y en ait.

On distingue entre deux types de traités :

Quote Part :

C'est la forme la plus simple de la réassurance proportionnelle, la proportion est définie à l'avance et s'applique directement sur les risques réassurés, le tableau I.1 résume le schéma de fonctionnement du Quote-Part.

		Quote Part avec taux de cession $1 - \alpha$		
		Brute/ Acceptée	Rétention	Cession
	Primes	$\sum \text{Primes}$	$\alpha \sum \text{Primes}$	$(1 - \alpha) \sum \text{Primes}$
Capitaux assurés	sinistre1	Sinistre1	$\alpha \text{Sinistre1}$	$(1 - \alpha) \text{Sinistre1}$
	sinistre2	Sinistre2	$\alpha \text{Sinistre2}$	$(1 - \alpha) \text{Sinistre2}$

TABLE I.1 – Fonctionnement du Quote-Part

Le réassureur s'engage à rembourser l'assureur la même proportion quelle que soit l'amplitude de la sinistralité. Concrètement pour un sinistre de 1 € le réassureur va payer $(1 - \alpha) \text{€}$. Le traité Quote-Part est d'application simple, s'utilise pour toutes les formes de cessions, pour des capitaux assurés limités ou illimités. Mais il entraîne une forte cession de primes et ne permet pas d'homogénéiser la rétention de l'assureur, il garde la même rétention pour les petits et grands sinistres

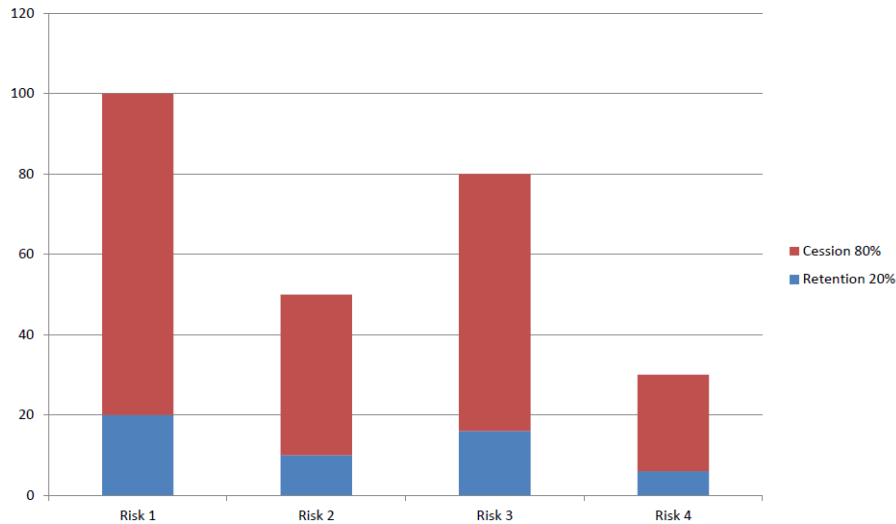


FIGURE I.3 – Distribution de la charge de l’assureur (en bleu) et du réassureur (en rouge) dans le cas d’un Quote-Part

On voit très bien sur ce graphique que ni la charge du réassureur ni la charge de l’assureur n’est homogène, celle-ci fluctue avec la variation de la charge de la sinistralité. En particulier, lors de la survenance des grands sinistres l’assureur n’est pas complètement protégé. On pourra faire la remarque que le Loss Ratio défini comme le rapport entre la charge et les primes acquises reste le même pour l’assureur dans le cas d’un Quote-part.

Excédent de plein :

L’excédent de plein fonctionne de manière différente étant donnée que le taux de cession est variable. On introduit les notions de *plein de rétention* et de *capacité* du XP. Le plein de rétention fait référence à la rétention de l’assureur c’est-à-dire ce qu’il compte garder sur chaque *risque*, la capacité quant à elle fait référence à la limite pour laquelle le réassureur sera engagée, elle correspond en pratique à neuf fois la rétention. Le taux de cession est défini par la formule suivante :

$$\alpha = \frac{\max(0, (\min(\text{Capitaux assurés}, \text{Plein de souscription}) - \text{Plein de rétention}))}{\text{Capitaux assurés}}$$

Nous définissons également le *Plein de souscription* comme la limite maximale des capitaux sous-risque (Plein de souscription=Rétention + Capacité).

Prenons un exemple simple pour bien se fixer les idées, on suppose un portefeuille avec plusieurs catégories de risque, couvert par un excédent de plein de rétention **100** et d’une capacité de **9 pleins**. Les capitaux assurés diffèrent d’un risque à l’autre comme le montre le tableau suivant I.2.

Risques	A	B	C	D	E
Capitaux assurés	200	400	150	20	600
Sinistres	100	60	90	20	300
Primes Brutes	80	150	50	15	250
Taux de cession	50%	75%	33.33%	0%	83.3%
Charge réassureur	50	45	30	0	250
Primes réassureur	40	112.5	16.66	0	208.25

TABLE I.2 – Exemple de fonctionnement de l'Excédent de plein

On voit très bien que la charge du réassureur est proportionnel à celle de l'assureur, ces proportions varient en fonction du risque et des capitaux assurés.
Exemple de calcul : Pour la catégorie de risque A, **Capitaux assurés** < **Plein de souscription**, le taux de cession est calculé selon la formule ci-dessus.

$$\alpha = \frac{\max(0, (\min(200, 1000) - 100))}{200} = 0.5$$

On note que pour des capitaux assurés dépassant le plafond maximum autorisé (dans ce cas particulier $100 + 9*100 = \text{Plein de souscription}$), le surplus de capitaux n'est pas pris en compte, il est souvent géré en Facultative après négociation entre la cédante et le réassureur. L'excédent de plein présente l'avantage pour la cédante de conserver ses petits risques maitrisables tout en cédant une grande partie de ses risques importants. Il présente néanmoins une charge de gestion assez lourde si on le compare au Quote Part et ne permet pas de se protéger contre les risques de sur-fréquence.

I.2.2. Réassurance non proportionnelle :

Dans la réassurance non proportionnelle, le réassureur n'intervient qu'à partir d'un montant de sinistre ou de perte, qu'on appelle la franchise ou la priorité et son engagement ne peut aller au-delà d'un certain montant appelée la portée. La notation courante en pratique de ces traités est la suivante : **Priorité Traité Portée**

Excédent de sinistres

Appelé XS (Excédent de sinistres) ou XL (Excess of loss), ce traité permet à l'assureur de se couvrir contre les sinistres dépassant la priorité, et ce dans la limite de la portée. Il est important de faire la distinction entre la couverture par risque ou par événement.

- **Couverture par risque** : Les bornes du traité s'appliquent à chaque police sinistrée au cours de la période effective du traité.
- **Couverture par évènement** : Les bornes du traité s'appliquent à la sinistralité totale causée par un seul évènement. Celui-ci peut être d'origine naturelle (tempête, tremblement de terre, etc), ou d'origine humaine (émeute, attentat terroriste). Dans ce cas, un évènement peut provoquer un nombre considérable de sinistres au portefeuille de la cédante mais ces sinistres peuvent être tous inférieurs à la franchise prévue du traité. Un XS par évènement est alors extrêmement efficace pour couvrir la perte totale due à l'évènement. A noter que dans ce cas une définition très claire et exhaustive de l'évènement est requise

Stop Loss :

Aussi appelé Excédent de perte, son rôle est de lisser le résultat de l'assureur en n'intervenant que lorsque le *Loss Ratio* atteint un seuil qu'on appelle la priorité. Son fonctionnement est identique à celui d'un excédent de sinistres. La différence réside dans les bornes¹ du traité, qui ne sont plus exprimées en valeur absolue de sinistre, mais en *Loss Ratio* (Sinistres rapporté aux primes), exprimé en pourcentage des primes acquises par la cédante. Ce traité ne s'applique que sur la sinistralité annuelle agrégée de la cédante. Il permet alors d'offrir une protection du résultat global et de prémunir la cédante contre la volatilité de la sinistralité annuelle. Compte tenu de sa structure, il n'est cependant adapté qu'aux branches courtes.

Clauses particulières :

Les traités non proportionnels sont en général accompagnés de clauses *Aggregate* et de *reconstitution* que nous allons brièvement décrire ci-dessous.

Aggregate : Ces clauses permettent de fixer un montant maximal et minimal qui ne peuvent être dépassés pendant l'année, par conséquent l'engagement du réassureur n'est plus illimité et le risque supporté par le réassureur diminue considérablement.

Les deux parties peuvent négocier une clause *Aggregate Annual Limit* représentant le montant maximal annuel de l'engagement du réassureur. L'application de cette clause s'apparente à un plafond annuel. Par exemple 5 sinistres d'un montant de 20 M € sur un traité 10XS10 avec un AAL de 30M € n'entraînera que 30M € de pertes pour le réassureur contre 50M € si il n'avait pas d'AAL ou d'autre limitation de fréquence (reconstitution). Le cumul annuel des charges du réassureur sur tous les sinistres survenus pendant l'année et dépassant la priorité ne pourra pas dépasser le AAL.

En revanche, les deux parties peuvent opter pour un plancher, ou une franchise annuelle. Celle-ci permet d'augmenter la rétention de l'assureur sur l'année en fonction de ses contraintes financières. Il garde à sa charge, en plus de la franchise sur chaque sinistre, le cumul annuel de la charge du réassureur sur chaque sinistre tant qu'il n'a pas dépassé la franchise annuelle, qu'on appelle dans le jargon de la réassurance le *Aggregate Annual Deductible / AAD*.

Clauses de reconstitution : Cette clause permet de limiter l'engagement du réassureur. Une reconstitution est le renouvellement de la portée après épuisement de l'ancienne portée par l'effet des sinistres réglés par le réassureur, elle est exprimée soit en prorata du temps ou prorata du temps et capital. Un traité peut être accompagné de plusieurs reconstitutions, exemple 10XS10 avec 2 reconstitutions offre à l'assureur une protection allant jusqu'à 30M €. Cette clause s'applique *immédiatement dès le premier Euro à charge* du réassureur. C'est à dire que la prime de reconstitution est payable une fois que l'assureur commence à consommer sa première portée.

1. En général, les limites de ce type de traité ne sont pas exprimées sous la forme d'un montant fixe, mais d'un rapport sinistres à primes ou sinistres sur capitaux. La première forme est la plus utilisée, bien que la seconde soit préférable car n'étant pas fonction des conditions tarifaires à la base. Il arrive que les limites du Stop-Loss soient définies doublement par un rapport sinistres à primes et par un montant en valeur absolue. Dans ce cas, la limite retenue est alors, pour la priorité la valeur maximale entre le montant et le pourcentage, et pour la portée la valeur minimale entre le montant et le pourcentage.

I.2.3. Formes de réassurance usuelles en réassurance vie :

En réassurance vie on constate une prédominance des couvertures proportionnelles sur les couvertures non-proportionnelles.

En effet, les couvertures divergent selon le type de produit et la durée des branches. Pour les risques de catastrophe "Sur-mortalité", on optera bien évidemment pour des couvertures non proportionnelles type *XS Cat* car les couvertures proportionnelles sont moins adaptées aux sinistres extrêmes. De plus on remarquera aussi l'existence des XS par tête pour couvrir les portefeuilles L&H. Ces traités restent tout de même minoritaires face aux traités *Quote Part* et aux traités en *Excédent de Plein* qui sont largement souscrits pour couvrir les portefeuilles de vie et de prévoyance.

I.3. Position d'AGRe

I.3.1. Historique et fusion

AGRe est une société de réassurance du groupe AXA, née de la fusion des deux entités indépendantes AXA Global Life et AXA Global P&C en 2017. Les grandes lignes d'activité de l'entité sont.

- Dommages aux biens par risque et par événement. (Property per Risk and CAT).
- Transport (Marine, Aviation, Transport, MAT).
- Responsabilité Civile Générale (General Third-Party Liability).
- Responsabilité Civile Automobile (Motor Third Party Liability).
- Invalidité, Décès et catastrophe en vie (Disability, Death and life CAT).

AXA est le premier groupe à mettre en place une telle structure, le groupe est considérée comme la plus grande cédante sur le marché de la réassurance au vu de sa structure et du nombre d'entités le constituant.

Toutes les cessions obligatoires des entités sont centralisées chez AGRe, en revanche les cessions facultatives dépendent uniquement de la stratégie de l'entité et sont soit pris en charge par le réassureur interne AGRe, soit pris en charge par un réassureur externe du marché de la réassurance.

Le processus ne s'arrête pas ici, en effet le réassureur peut rétrocéder une partie ou 100% des risques obligatoires sur le marché externe. Dans ce dernier cas, elle a un rôle de courtier et est rémunérée à l'affaire mais reste quand même porteur de risque vis-à-vis de la cédante et supporte également un risque de contrepartie¹ vis-a-vis du récessionnaire.

I.3.2. Rôle d'AGRe

AGRe est l'entité interne de réassurance du groupe. A ce titre elle a un rôle central et accompagne les entités dans leur développement en mettant à leurs dispositions son expertise technique. Concrètement, elle conseille la cédante sur le lancement des nouveaux produits et le suivi comptable y afférent, elle met également à sa disposition les bases de données servant à la tarification et au provisionnement. L'entité permet également l'optimisation du capital au

1. le risque de crédit ou de contrepartie est le risque que le débiteur ne réponde pas à son obligation initiale de rembourser un crédit

niveau du Groupe par la recherche de la diversification des risques.

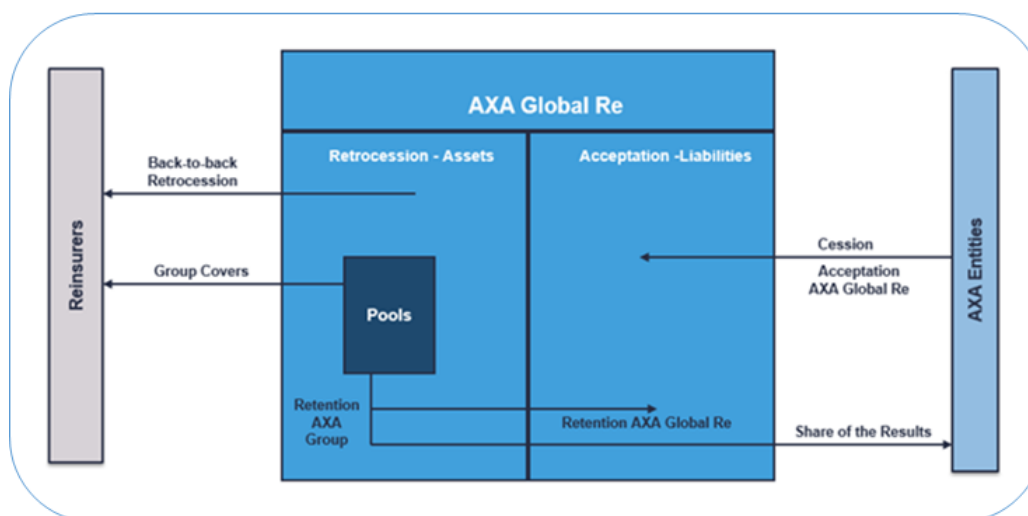


FIGURE I.4 – Schéma de réassurance d'AGRe

La figure I.4 résume le schéma l'activité d'AGRe. La structure de réassurance accepte toutes les cessions des entités du Groupe AXA, ensuite une partie de ces risques est rétrocedée sur le marché de la réassurance. La partie qui reste sera ensuite soit conservée entièrement par AGRe et gèrera le risque de façon indépendante, soit elle optera pour un partage, aussi bien des risques que des résultats avec les entités du groupe dans le cadre du Pool¹.

On note aussi que le Pool est à son tour couvert sur le marché de la réassurance externe.

I.3.2.1. Finalité du Pool

Historiquement, le pool a été créé dans un contexte de hausse des prix de réassurance. Effectivement, la sinistralité atypique observée sur le marché de la réassurance pendant les 20 dernières années a révélé une sous tarification des produits commercialisés. On rappelle les différentes catastrophes qui ont été à la source de cette réévaluation des prix. On distingue entre les catastrophes d'erreurs humaines, c'est le cas par exemple de l'usine **AZF** de Toulouse et l'Attentat du World Trade Center en 2001. D'autre part, la survenance des événements de type catastrophes naturelles ont favorisé cette réévaluation, c'est le cas par exemple des tempêtes de Lothar et Martin. Non seulement les prix ont augmenté mais tout un champ de travail a été lancé par les compagnies de réassurance pour revoir leurs modèles d'estimation des risques de catastrophes naturelles. Face à cette offensive, le groupe AXA a opté pour la mise en place d'une stratégie de pool, lui permettant à la fois d'accéder au marché de réassurance sans toutefois augmenter l'exposition des entités du groupe.

I.3.3. Branche vie d'AGRe

Comme mentionné auparavant AGRe est active dans les deux branches de réassurance avec une prédominance de l'activité P&C. En raison de la diversité des branches d'activité sur lesquelles le groupe AXA opère, AGRe gère une multitude de portefeuilles diversifiés en termes de géographies et de risques. Grâce à cette diversification, AGRe réduit considérablement son besoin de capital. Effectivement, il est moins probable qu'un événement extrême se produise la même année dans des zones géographiques distinctes. De la même façon, la structure des

1. Le Pool est le regroupement des entités d'AXA avec lesquelles AGRE a décidé de partager le risque

risques relatifs aux branches *Dommages* et *Personnes* est différente. Les engagements relatifs aux risques dommages sont en général à développement court, c'est le cas des portefeuilles couvrant le risque d'incendie, aviation, marine, ils sont en général couverts par des traités de type *Catastrophe "Cat"*, *XS* et *SL*. Alors qu'en réassurance de personnes, les engagements sont en général à long terme, on retrouve alors les portefeuilles de responsabilité civile (Sinistres corporels), d'invalidité et des accidents de travail.

On y retrouve également des portefeuilles couvrant les risques biométriques notamment la mortalité. C'est le cas typiquement des portefeuilles de Hong Kong qu'on traitera tout au long de ce mémoire.

En terme de rétention de risque dans le bilan, la branche vie est relativement peu matérielle par rapport à la branche P&C.

I.4. Contexte et périmètre d'étude

I.4.1. Solvabilité II

La norme solvabilitéII définit les provisions techniques comme étant la somme de la marge de risque et le Best Estimate liabilities.

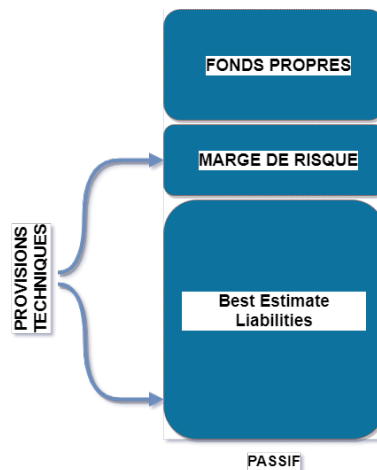


FIGURE I.5 – Modèle simplifié du passif d'une compagnie d'assurance.

BEL : La meilleure estimation correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents. Le calcul de la meilleure estimation est fondé sur des informations actualisées et crédibles et des hypothèses réalistes et il fait appel à des méthodes actuarielles et statistiques adéquates, applicables et pertinentes

Marge de risque : est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance ». A noter que « les entreprises d'assurance et de réassurance procèdent à une évaluation séparée de la meilleure estimation et de la marge de risque.

I.4.2. Périmètre d'étude

Dans ce mémoire nous nous pencherons sur l'étude du produit de prévoyance individuelle d'AXA Hong Kong. C'est le plus matériel du point de vue net de primes de rétrocession et reste l'un

des produits dont les données sont parfaitement structurées pour l'instant. A la suite d'un audit sur le modèle interne, AGRe s'est vu recommander d'améliorer sa méthode de calcul des engagements car celle-ci ne permet pas d'appréhender précisément les risques auxquels l'entité est exposée.

Les données de *Bordereaux* utilisées uniquement par les équipes comptables ne sont pas de bon format et n'ont jamais été exploitées jusqu'ici par l'équipe en charge du provisionnement. Le but de ce mémoire est de proposer une alternative à la méthode déjà en place pour le calcul du Best Estimate Liabilities Vie.

En assurance, la protection individuelle désigne les produits qui proposent une couverture pour les événements tels que le décès, l'invalidité et l'incapacité de travail, les maladies redoutées, la dépendance, et les accidents de la vie. Les assurés paient une prime dont la fréquence est définie dans le contrat (prime annuelle, mensuelle, etc.) ; en contrepartie, en cas d'occurrence de l'évènement spécifié dans le contrat, l'assureur indemnise à hauteur de la somme assurée.

Le fonctionnement de ces contrats est donc similaire à celui des contrats d'assurance dommages. C'est le cas du produit de Hong Kong que nous étudions. Le secteur privé de la santé(cf.[9]) dans cette région est le deuxième le plus cher après les Etats-unis d'Amérique. Le groupe AXA est présent dans cette région administrative spéciale d'Asie via sa filiale AXA Hong Kong et propose aux assurés de cette région des solutions de prévoyance contre les aléas de la vie adaptées à leurs besoins. Le produit que nous allons traiter constitue une protection individuelle contre les risques suivants :

- Décès
- Maladies Critiques/Graves
- Maladies Mineures

Dans son rôle de réassureur interne du groupe, AGRe assure la couverture du portefeuille Hong Kong par un traité Quote-Part. Toute police du portefeuille respectant les caractéristiques suivantes, bénéficiera de la couverture de réassurance (*Nous nous assurons de la fiabilité des données avant de procéder au traitement*) :

- Période de souscription : Polices souscrites pendant la période allant de 2012/09/01 à 31/12/2017.
- Plafond des sommes assurées : 10 Millions HKD par Police.
- Age limite de couverture : 100 ans

Les polices ne vérifiant pas ces modalités seront gérées en Facultative après négociations entre l'entité et le réassureur. Dans notre cas aucune police ne présente cette particularité.

Le traité prévoit d'autres clauses, notamment le traitement des commissions et le rachat des contrats.

- Commissions : Le traité prévoit le paiement des commissions en deux temps, une première commission de 60% pendant la première année ,ensuite une deuxième commission de 10% la deuxième année
- Réintégration : Consiste à la réintégration des contrats qui ont été résiliés faute de paiement, à condition qu'ils aient été souscrit pendant la période de souscription.

Le ratio de réassurance est une fonction des sommes sous risque et est au minimum de 75%. Il est dans ce sens variable et dépend des caractéristiques de chaque police. Toutefois, on rappelle que celui-ci est constant pendant toute la durée du contrat même après réintégration.

Maintenant que nous avons défini le périmètre d'étude, nous aborderons dans les sous-sections suivantes le modèle en vigueur pour le calcul du BEL et ses inconvénients. Nous décrirons ensuite, la nouvelle approche proposée.

I.4.3. Insuffisances du modèle actuel

Le calcul du BEL vie pour ce portefeuille en particulier se fait sans la prise en compte des caractéristiques spécifiques des polices souscrites. Effectivement dans un contexte d'indisponibilité des données, AGRe estimait selon une vision globale du portefeuille ses engagements envers la cédante. Elle utilise alors une méthode empruntée à la branche P&C qui consiste à projeter les flux du portefeuille jusqu'à maturité en se basant sur des Loss Ratio à priori et détermine ensuite le BEL.

Le calcul se décompose en deux sous calculs.

Le $BEL_{Réserves}$ et le $BEL_{Charges}$.

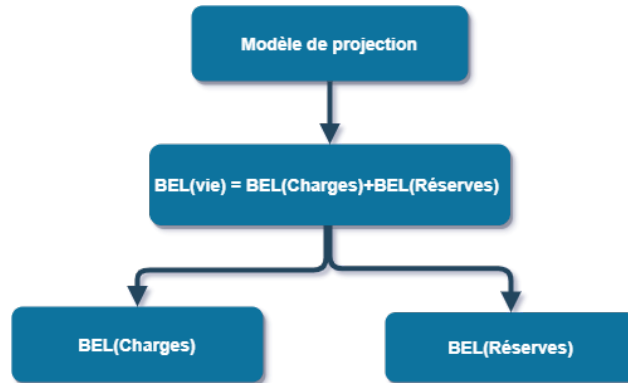


FIGURE I.6 – Décomposition du BEL_{vie}

Le $BEL_{Réserves}$ représente la meilleure estimation possible des sinistres et des primes futures.

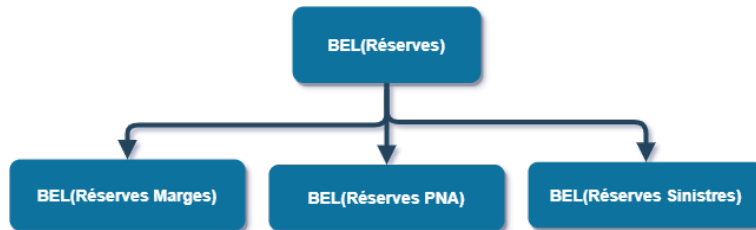


FIGURE I.7 – Décomposition du $BEL_{Réserves}$

Sur la figure I.7, nous remarquons que le calcul se fait en trois étapes.

1. Premièrement, nous déterminons pour l'année en cours le $BEL_{Réserves\ sinistres}$ en déterminant les IBNRs¹, les provisions mathématiques et la participation au bénéfice. Celui-ci est donné par la formule suivante.

$$BEL_{Réserves\ sinistres} = \sum_{k=1}^{Maturité} \frac{IBNRs_k}{(1+r_k)^k} + PM + SAP + PB$$

où

IBNRs sont calculés par la méthode statistique de ChainLadder.

PM : Provisions mathématiques

PB : Participation aux bénéfices.

SAP : Les sinistres à payer.

r_k : Le taux spot risque neutre SII.

1. Incurred but not reported

2. Deuxièmement nous déterminons le $BEL_{\text{Réserves PNA}}$ qui est composé de la prime non acquise et les différents éléments y afférents, à savoir les sinistres, les commissions et la participation au bénéfice. Le calcul se fait via la formule suivante.

$$BEL_{\text{Réserves PNA}} = PNA * (1 - (LR_{PNA} + COM_{PNA} + PB * \max(0, 1 - (LR_{PNA} + COM_{PNA} + Charges_{PB})))$$

Où

PNA : La prime non acquise de l'année en cours.

LR_{PNA} : Le Loss Ratio de l'année en cours.

PB : Représente le pourcentage de la participation au bénéfice.

Charges PB : Représente les charges liées à la participation au bénéfice.

COM_{PNA} : Le taux de commission.

3. Troisièmement, nous calculons le $BEL_{\text{Réserves marges}}$ à partir de l'estimation des primes futures et les différents éléments y afférents, à savoir les sinistres, les commissions et la participation au bénéfice. Etant donné que le produit étudié fait partie du périmètre long-terme dont la couverture est renouvelée chaque année, la projection des primes futures doit prendre en compte les risques liés au rachat et au décès. On a ainsi :

$$A_k = PrimesFutures_k * (1 - (LR_{PrimesFutures} + COM_{PrimesFutures_k} + PB * \max(0, 1 - (LR_{PrimesFutures} + COM_{PrimesFutures} + Charges_{PB})))$$

$$BEL_{\text{Réserves marges}} = \sum_{k=1}^{\text{Maturité}} \frac{A_k}{(1 + r_k)^k}$$

Primes Futures : $Primes * Taux \text{ de Rachat} * Taux \text{ d'extinction}$, ou le taux d'extinction permet de tenir compte des effets autres que le rachat sur les primes futures (évolution de la somme assurée, évolution de la prime de risque)

LR_{Primes Futures} : Permet de calculer les sinistres liés aux primes futures.

COM_{Primes Futures} : Représente le taux de commission pour les primes futures.

PB : Représente le taux de participation au bénéfice.

Le $BEL_{charges}$ quant à lui représente la meilleure estimation possible des charges futures liées à la gestion du traité.

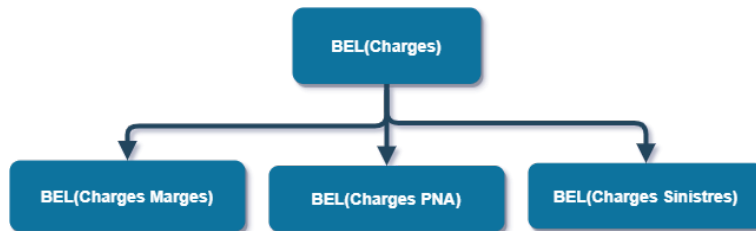


FIGURE I.8 – Décomposition du $BEL_{Charges}$

Ces frais sont internes à AXA Global Re et sont liés à la gestion des sinistres, au suivi du portefeuille et aux différents traitements comptables au cours de la vie du portefeuille.

$$BEL_{Charges} = \sum_{k=1}^{\text{Maturité}} \frac{Charges_k}{(1 + r_k)^k}$$

Le risque du portefeuille n'est pas porté uniquement par AGRé, une partie est rétrocédée sur le marché de la réassurance. On applique ainsi un taux de rétrocessions sur les différentes

composantes du BEL (hors charges) pour garder au final que le BEL des engagements d'AGRe. Le BEL final est ainsi la somme de la meilleure estimation des primes nets de rétrocession, moins la meilleure estimation des sinistres net de rétrocession moins la meilleure estimation des dépenses liées aux primes et les sinistres.

$$\text{BEL}_{\text{NetAGRe}} = \text{BEL}_{\text{Réserves Nets}} + \text{BEL}_{\text{Charges Net}}^1$$

Cette méthode a le privilège d'être simple d'implémentation et se base sur des données de marchés. Nous mettrons toutefois le point sur quelques insuffisances du modèle, pour lesquels on proposera une solution alternative dans la section suivante.

Les points qu'on pourra améliorer sont déclinés comme suit :

- Méthode empruntée au P&C, non adaptée aux problématiques vie et santé car elle ne permet pas de faire des projections suivant des métriques vie.
- Caractéristiques du contrat non pris en considération : Evolution des sommes assurées, Calcul détaillé des primes, Age limite de couverture, Type de couverture, évolution du portefeuille, Calcul de la prime de réassurance.
- Projection des sinistres via un Loss Ratio à priori qui ne tient pas compte de l'évolution du portefeuille.².
- Projections des primes sans la prise en considération de l'évolution réelle de celles-ci.
- Les Projections se font selon un ratio de réassurance unique.
- L'hypothèse de la mortalité n'a pas été calibré sur l'expérience du portefeuille.
- L'hypothèse de rachat ne reflète pas l'expérience du produit Hong Kong.
- Approche ne permettant pas de réaliser des tests de sensibilité aux paramètres vie.

En absence de données et selon les conditions de matérialité et de ressources disponibles, cette approche peut sembler légitime. Toutefois elle est insuffisante et ne correspond pas aux meilleures pratiques. C'est dans ce cadre que nous développons donc une nouvelle approche.

I.4.4. Proposition d'une nouvelle approche

Après avoir énoncé les principales limites de l'ancienne approche, nous développerons en détails dans cette sous-section notre proposition pour l'amélioration du système de provisionnement des engagements vie d'AGRe.

Notre approche sera orientée données et se basera principalement sur les informations fournies par la cédante dans le cadre de l'accord conclu entre les deux parties.

Ainsi, le schéma général de la nouvelle approche se présente comme suit :

2. Loss Ratio à priori estimé par l'équipe (Pricing et Reserving)

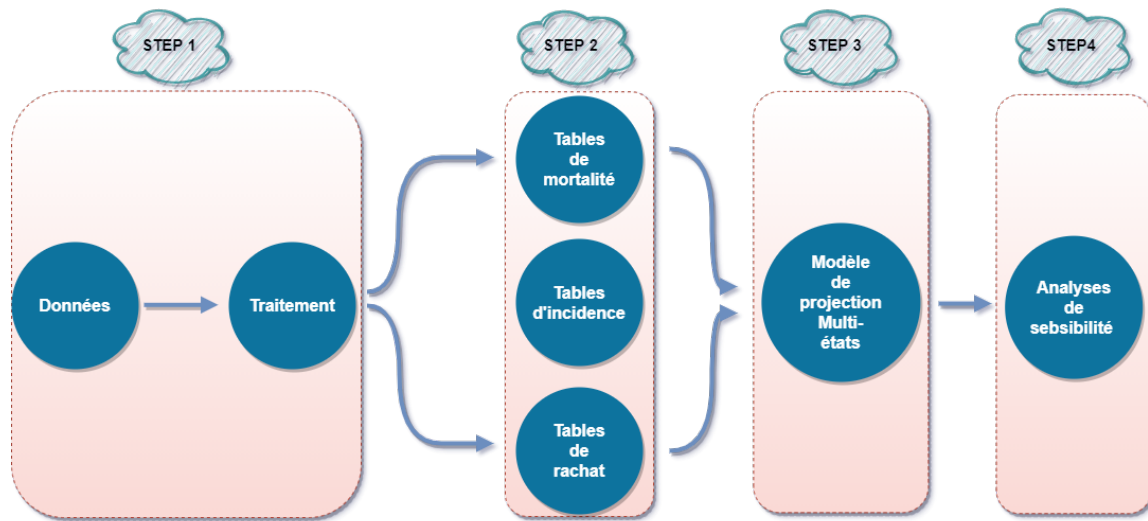


FIGURE I.9 – Schéma représentatif de l'approche proposée

Après avoir importé les données du système de gestion des bases de données d'AGRe, nous réalisons un traitement complet en ajustant le format des tables utilisées et en analysant la fiabilité des variables de notre champs d'intérêt. Nous détaillerons davantage le traitement fait dans le second chapitre II.

La deuxième étape de ce processus consiste à calibrer les taux de mortalité, d'incidence et de rachat sur l'expérience du portefeuille. Comme mentionné dans la section I.4.2., la police assurée est soumise à trois risques distincts. Nous choisirons de traiter en premier lieu le risque de mortalité.

Plusieurs scientifiques, notamment les démographes et les actuaires se sont intéressés à la question de la mortalité et depuis plusieurs traitements et modèles statistiques ont pu être développés. On se servira en particulier pour l'estimation des taux bruts d'expérience, des résultats de Kaplan Meier sur l'estimation de la fonction de survie en présence de données censurées et de l'estimateur paramétrique dit de Hoem. Ces deux méthodes fournissent à quelques différences près les mêmes résultats.

A cause des risques liés aux fluctuations de l'échantillonnage, les taux bruts estimés présentent souvent quelques irrégularités, nous procédons alors à des lissages via le modèle relationnel de Brass, les méthodes non paramétriques de Whittaker Henderson et la méthode paramétrique de Makeham. Nous analyserons enfin l'adéquation du modèle en réalisant des tests statistiques et en comparant avec les hypothèses de référence de HK.

Malgré le fait qu'il est possible de calibrer la mortalité sur l'expérience de portefeuille, l'utilisation de ces tables pour des fins de provisionnement ou de tarification reste strictement réglementé. Selon l'article A335-1 du *Code des assurances français*, l'assureur ou le réassureur peut établir des tables certifiées par un actuaire indépendant agréé à cet effet par l'une des associations d'actuaires reconnues par l'ACPR. Les tables sont établies à partir des données d'expérience de l'entreprise ou bien à partir des données d'expérience démographiquement équivalente. Toutefois les entreprises peuvent réaliser cet exercice en interne afin d'évaluer le risque pris, notamment par AGRe afin quantifier ses engagements envers sa cédante. Aussi elle permet d'avoir un outil d'aide à la décision quant à la rentabilité, l'appétit au risque, etc ...

Ensuite, dans le même ordre d'idée que la mortalité nous ajustons les taux d'incidence. Une description plus détaillée de ces risques sera présentée dans le chapitre II.

Et enfin, pour clôturer l'étape des calibrations, on modélisera les taux de lapses observés en optant pour la méthode de Chain Ladder. L'inspiration vient des méthodes utilisées dans le provisionnement P&C, on peut considérer que la décroissance du nombre de polices peut être assimilée aux sinistres cumulés, le développement assimilé à la durée et l'année de survenance

assimilée à la génération de contrat. C'est un outil intéressant pour estimer les cadences de sortie du portefeuille. Nous remarquerons toutefois que le raisonnement en termes de facteur de développement est un peu différent car ceux-ci sont inférieurs à un¹.

La prochaine étape consiste à alimenter notre modèle multi-états pour projeter les primes et les sinistres. Le modèle est basé sur des simulations de l'état de la police à chaque date de projection. On explicitera plus en détails dans le chapitre III, les états et les transitions possibles pour une police InForce. L'élément le plus important qui a été considéré lors de cette projection est la décroissance des sommes sous risque de l'assureur en raison de son impact sur les primes futures de réassurance et les sinistres. A l'issue de cette étape, nous obtenons la distribution du BEL vie qui représente nos engagements envers la cédante. Nous testerons la robustesse de notre modèle en appliquant des chocs à la hausse comme à la baisse des différents inputs de notre modèle.

Cette nouvelle approche permet de pallier les différentes insuffisances qu'on a observées sur l'ancien modèle. Sa particularité réside dans le fait qu'elle tient compte des caractéristiques du contrat et ne projette pas selon des hypothèses de marché. Notre démarche se veut par conséquent rigoureuse, flexible et impactante comme nous allons voir dans la partie IV.3..

1. C'est aussi le cas en provisionnement classique dans le cas où on observe des récupérations.

Chapitre II

Présentation des données (Réassurance d'un produit de prévoyance d'AXA Hong Kong)

Dans cette partie nous nous intéresserons aux caractéristiques des contrats et aux différents traitements qui ont été effectués sur les bordereaux.

Aujourd'hui, la problématique liée à la gestion et au traitement des données revêt une importance toute particulière pour les entreprises qui utilisent la *data*, notamment les compagnies d'assurance qui en recueillent quotidiennement et en quantités importantes. En conséquence, elle tient désormais une place importante dans les orientations stratégiques de l'entreprise, si bien que les grands groupes ont mis en place des cellules spécialisées nouvellement créées, qui auront pour but de gérer les bases de données et d'en extraire de la valeur.

Au sein des compagnies d'assurance et de réassurance, l'objectif est double, d'une part automatiser la gestion des données et s'assurer de leur fiabilité dans la perspective d'une utilisation optimisée par toutes les équipes opérationnelles, entre autres, les équipes actuariat qui évaluent les engagements de la compagnie d'assurance et ont besoin de données pour alimenter les modèles actuariels. D'autre part, utiliser les données à des fins commerciales afin d'améliorer leur rentabilité, en proposant de nouveaux produits sur mesure et adaptés aux caractéristiques de leurs assurés.

Dans le cadre de ce mémoire, toute une série de manipulations ont été effectuées sur les bases de données. Nous commencerons par présenter le produit, ensuite nous énumérons les différents traitements réalisés sur la base de données et on bouclera ce chapitre avec une analyse descriptive globale du portefeuille.

II.1. Structure des données

II.1.1. Caractéristiques des contrats

Nous traitons dans le cadre de ce mémoire un portefeuille de prévoyance individuelle couvert par un traité de réassurance de type QP. Une couverture proportionnelle qui s'applique tête par tête.

Contrat de prévoyance individuelle.

Le contrat de prévoyance commercialisé par l'entité du groupe prévoit une garantie contre les aléas de la vie, à savoir le décès et les risques de morbidité qu'on ventile en deux composantes, maladies graves et maladies mineures. Le contrat prévoit aussi des garanties supplémentaires

comme tout contrat de prévoyance afin de fidéliser les clients et en attirer de nouveaux. Ces garanties sont décrites dans le tableau suivant II.1.

L'objectif d'évoquer de telles garanties est non seulement de présenter le produit mais également de se conformer à la réglementation en vigueur Solvabilité II en ce qui concernera la projection des flux futurs liés à ces garanties. En effet selon l'article 32 du règlement solvabilité II [3], Chapitre 3/Section 3/Sous Section 3.

Lors du calcul de la meilleure estimation, les entreprises d'assurance et de réassurance tiennent compte de l'ensemble des éléments suivants :

- *Toutes les garanties financières et options contractuelles incluses dans leurs contrats d'assurance et de réassurance ;*
- *Tous les facteurs susceptibles d'influer sur la probabilité que les preneurs exerceront les options contractuelles ou réaliseront la valeur des garanties financières.*

Garanties Supplémentaires	Interprétations
Maladies Préoces	Cette option permet de se prémunir contre le risque de survenance de certaines maladies à un jeune âge, d'où la qualification de précoce. L'assuré est couvert contre une panoplie d'infections dressée par le service de souscription de la filiale asiatique.
Déclaration multiple du sinistre	Cette option permet à l'assuré d'être indemnisé plusieurs fois en cas de plusieurs maladies.
Options de Rachat	Cette option permet à l'assureur de racheter son contrat tout au long de sa durée de vie. Elle permet ainsi de récupérer la partie des primes investies.
Garanties Inflation	Elle permet d'ajuster la somme assurée de l'inflation.

TABLE II.1 – Garanties supplémentaires du produit de prévoyance individuelle

Programme de réassurance

Le programme de réassurance mis en place entre l'entité et la cédante est une Quote Part individuelle limitée. Les risques de base couverts par ce traité sont la mortalité (Prestations en cas de décès) et la morbidité (Prestations en cas de maladies graves et de maladies mineures). A noter que les remboursements en cas de sinistre sont forfaitaires du point de vue du réassureur.

1. ***Période de souscription*** : Le traité de réassurance s'applique sur les polices qui ont été souscrites pendant la période allant du 01/09/2012 jusqu'au 31/12/2017.
2. ***Territoire de souscription*** : Cette clause dans le contrat n'a pas pour but seulement de limiter la souscription qu'aux deux régions, elle permet aussi d'avoir des statistiques sur le pourcentage de souscription par région et également d'appliquer certains chargements supplémentaires dans le cas des étrangers qui viennent souscrire des polices à Honk Kong ou à Macau. Ci-dessous le positionnement des deux régions administratives spéciales de Chine.



FIGURE II.1 – Zones Géographiques de souscription

3. **Limites de souscription** : La compagnie de réassurance et la cédante concluent un accord sur les exigences que doivent satisfaire les polices souscrites pour qu'elles soient automatiquement acceptées. C'est un montant limite, exprimé en Dollars de Honk Kong qui est fixé à 10M HKD. L'objectif d'une telle limite est de permettre à l'assureur de limiter et d'homogénéiser son exposition au risque. La compagnie de réassurance n'a pas de fonds illimitées, elle est ainsi contrainte à maîtriser le risque en limitant la souscription. Encore, si 100% des Sommes sous risques pour la garantie Décès + 50% des sommes sous risques pour la garantie Sinistres multiples + 100% des sommes sous risque Minor, ne dépassant pas la limite de souscription, alors la police est acceptée automatiquement en réassurance, sinon l'assureur doit renégocier les termes d'acceptation automatique avec le réassureur.

4. **Rétention de la cédante** : Le contrat prévoit une rétention sur chaque police assurée. Celle-ci dépend du type de couverture, on notera que pour les garanties "Basic" (que nous allons expliquer ci-dessous), elle est de l'ordre de 240k HKD, et pour les garanties supplémentaires "IIE" et "Early stage" elle est de l'ordre de 650K HKD.

5. **Sommes assurées/Sum Assured** : C'est la somme assurée par police. Elle dépend de la somme originale assurée, qui dépend elle-même du revenu de l'assuré et ne peut pas dépasser un maximum fixé par la cédante.
La somme assurée va servir de base pour le calcul des sommes sous risque.

6. **Sum At Risk/Sommes Sous Risque** :

Produit	Risque Couvert	Sommes sous risque
Couverture Basique	Décès	$\max(\text{Sommes assurées} - \text{Réserves}, 0)$
	Maladies Graves	$\max(\text{Sommes assurées} - \text{Réserves}, 0)$
	Maladies Mineures	$\max(\text{Sommes assurées} - \text{Réserves}, 0)$
Garantie déclarations multiples	Maladies graves	$\min(20\% \text{Sommes assurées} - \text{Réserves}, \text{Prestation limite})$
Garantie Maladies graves précoces	Maladies Graves Précoces	$\max(\text{Sommes assurées} - \text{Réserves}, 0)$

TABLE II.2 – Méthodes de calcul des sommes sous risque

Les sommes sous risque dépendent d'un paramètre interne à l'entité AXA Hong Kong (réserves), il reflète une partie non réassurée du risque.

NB : Pour la couverture basique, sur les dix premières années celle-ci s'exprime comme suit :

$$\text{SA} = 135\% \cdot \text{Sommes Assurées originales} - \text{Total des paiements effectués pour les maladies mineures}$$

Si la durée de la police dépasse les 10 ans, le facteur 135% est réduit à 100%. Pour les autres couvertures restantes, celles-ci sont égales aux sommes assurées originales.

- Taux de réassurance/Reinsurance Ratio :** Le ratio de réassurance dépend de la couverture donnée, des sommes sous risque, des sommes assurées et de la rétention de l'assureur sur ses risques.
- Primes de Réassurance/Reinsurance Premium :** Le réassureur reçoit des flux de primes au début de chaque période en fonction des modalités de paiement choisies par l'assuré, lors de l'établissement du contrat original. Les taux de primes sont fixés à l'avance et sont fonction des variables "SEXE" et l'état "Fumeur"/"Non Fumeur". La prime de réassurance appliquée à la garantie décès est égale au produit du taux de cession par police et la somme sous risque assurée.

$$\text{Primes}_i = \alpha_i \cdot \left(\frac{T_x}{1000} \text{Sommes Sous Risque}_i \right) (1 + \beta_i) \cdot \gamma_i$$

Où α_i représente le taux de cession individuel, T_x (conférer Annexe I.1.) la prime de risque par âge et pour 10000 HKD de sommes sous risque, β_i un taux de chargement selon la classe de mortalité et finalement γ_i le taux reflétant la périodicité du paiement. Dans le cas des autres garanties, le facteur β_i est nul.

Modalités de paiement	γ_i
Annuel	1
Semestriel	0.52
Mensuel	0.36

TABLE II.4 – Valeurs de γ_i

Classe de Mortalité	β_i
A	0.4
B	0.5
C1	0.1
S	0.15

TABLE II.3 – Valeurs de β_i

9. **Commissions** : Le taux de commission fait l'objet de négociation entre les deux parties. Pendant la première année, le réassureur paye 60% à la cédante, et à la deuxième année, il paie une portion moins importante de 10%.
Le réassureur paie plus la première année pour compenser les frais engagés par la cédante pour lancer le produit.

10. **Taux de change** ; Les montants sont exprimés en HKD.

Maintenant que nous avons énuméré les différentes règles et caractéristiques de contrat, nous allons dans un second temps évoquer le schéma structurel des données que nous avons traitées.

II.1.2. Données

Nous disposons de reportings mensuels dans notre système de gestion de base de données, depuis la date du lancement de produit jusqu'à aujourd'hui. L'information sur les assurés, les sinistres, les réintégrations est résumée dans des fichiers Excel. Nous présenterons ci-dessous les identifiants clés de cette base de données ainsi que les variables d'intérêt qui suivent un format et un niveau d'information défini, en accord avec les clauses du traité. Les tables de la base de données sont au nombre de 3 :

1. Base de Données Basic¹ :

- **Numéro de Police** : Identifiant unique de la police ;
- **Sexe** : Homme ou femme ;
- **Age de l'assuré à l'origine du contrat** ;
- **Date de Naissance** ;
- **Current Age** : Age actuel selon le reporting de la police ;
- **Devise** : Devise du contrat (HKD/MOP rarement USD) ;
- **Etat Fumeur/Non fumeur** ;
- **Date effective** : Date de début du contrat ;
- **Classe de morbidité** : Classification de la morbidité de l'assuré ;

1. Regroupant toute l'information sur les polices ayant souscrites une couverture basique

- **Classe de mortalité** : Classification de la mortalité de l'assuré ;
- **Modalités de Paiement** : Annuel, semestriel, mensuel ;
- **Ratio de réassurance** : Le ratio de réassurance correspondant à chaque police ;
- **Commissions cédées** (Death, Major, Minor) : Commissions cédées au réassureur ;
- **Primes cédées au réassureur** (Death, Major, Minor) : Primes cédées au réassureur ;
- **Sommes sous risque** (Death, Major, Minor) ;
- **Code D'état** : Nous renseigne sur l'état de la police (Active, Rachetée, expirée, ...) ;
- **Code Plan** : Apporte une information sur la durée de paiements des primes, la durée au bout de laquelle l'assuré ne paiera plus de primes ;
- **Duration de la police** : Le temps depuis lequel la police d'assurance est active.

Une table supplémentaire ("Basic IIE"), similaire à la table "Basic" et ayant la même structure que celle-ci , renseigne sur les accroissements de sommes assurées liées à l'inflation pour les polices bénéficiant de cette garantie supplémentaire.

2. Base de données Rider¹ :

- **Numéro de Police, Sexe, Date Effective, Date de naissance, modalités de paiement** ;
- **Primes cédées** : Montant des primes cédées ;
- **Code Plan** : Apporte une information sur le type de couverture supplémentaire (E pour les maladies précoces, M pour les déclarations multiples) ;
- **Sommes sous risque Rider** : Sommes sous risque pour la garantie supplémentaire (E ou M), dépendamment des garanties supplémentaires.
- **Statut Fumeur/Non Fumeur** ;
- **Ratio de réassurance Rider** : Calculé en fonction des sommes sous risque.

Une table supplémentaire ("Rider IIE"), similaire à la table "Rider" et ayant la même structure que celle-ci , renseigne sur les accroissements de sommes assurées liées à l'inflation pour les polices bénéficiant de cette garantie supplémentaire.

3. Base de données Claims.

- **Numéro de Police, Sexe, Date de Naissance, Devise** ;
- **Type de Plan** : Couverture principale ou supplémentaire ;
- **Type de sinistre** : Décès, maladies graves ou mineures ou précoces.
- **Date de survenance** : Date de survenance du sinistre ;
- **Date de déclaration** : Date de déclaration du sinistre ;
- **Date de clôture** : Date de clôture du sinistre ;
- **Montant réassurée** : Part du réassureur dans le montant assuré ;

1. Regroupant toute l'information sur les polices ayant souscrites une couverture supplémentaire (Maladies précoces, Déclaration multiple, Garantie inflation)

II.1.3. Traitement des données

Ce paragraphe a pour objectif de présenter les différents étapes qu'on a menées pour la construction des bases de données finales, "*Primes*" et "*Sinistres*".

Un premier travail consistait à récupérer toutes les feuilles dans chaque fichier Excel et les mettre au format csv/rds¹ pour optimiser l'importation. S'ensuit après une mise au format des colonnes pour harmoniser le nom des colonnes et pallier les quelques incohérences de format.

Les champs contribuant à la construction de la base de données "*Primes*" proviennent des 4 bases de données citées précédemment. Majoritairement de la table "*Basic*" avec un split sur les garanties décès, maladie grave et mineure, ensuite la table secondaire "*Rider*" qui donne la contribution à la prime liée aux suppléments pour chaque police bénéficiant d'une garantie supplémentaire. Puis dans une moindre mesure, deux autres tables "*Basic IIE*" et "*Rider IIE*"² qui donnent la contribution à la prime de la couverture *inflation* sur chaque garantie du produit (principale et supplémentaire).

Le traitement principale a consisté à empiler ces données en repérant chaque date dans une nouvelle colonne "Date de Reporting" après avoir harmoniser les données de chaque table.

Quant à la base "*Sinistres*", le traitement consistait à empiler les tables de sinistres de chaque reporting (après mise au format), qu'on liera ensuite avec les sommes assurées correspondantes dépendamment de la catégorie du sinistre.

Nous ne servirons de ces bases tout au long de ce mémoire pour l'analyse des rachats et de la mortalité et des taux d'incidence des maladies. D'ailleurs on profitera pour émettre quelques critères sur la détermination des risques pris en compte lors de cette projection.

Risques	Base de données	Variable caractéristique	
Mortalité	<i>Primes</i>	Code Etat == 8	
Rachats	<i>Primes</i>	Code Etat == 4	
Incidences	<i>Sinistres</i>	{ Décès	Si Type de Sinistre == DTH/DEATH
		{ Maladies Graves	Si Type de Sinistre == LI/ELI/SLI
		{ Maladies Mineures	Si Type de Sinistre == MIN

TABLE II.5 – Eléments pour la détermination des risques

II.1.4. Ressources externes

Lors de notre étude, nous avons aussi utilisés des données externes de référence ainsi que des données internes communiquées par l'entité asiatique. Celles-ci servent de repères et permettront de comparer nos calibrations à des tables de référence et de comparer les résultats de nos projections avec celles de la cédante.

Concernant les données externes, nous exploiterons la table de mortalité HKA01³ publiée sur le site de l'association actuarielle de Hong Kong. En interne nous exploiterons les taux de mortalité, les taux de rachats et les taux d'incidence propres à l'expérience de Hong Kong.

L'objectif étant d'utiliser ces données dans la perspective de réaliser des calibrations et d'en déduire les tendances qu'on n'a pas pu observer à partir des données d'expérience.

Pour des raisons de confidentialité les valeurs des documents internes ont été modifiées de telle façon à ce qu'on garde la même allure des courbes.

1. Format spécifique à l'enregistrement des données sous R

2. IIE : Inflation index enhancement

3. Table de mortalité de la population HONG KONG

II.1.4.1. Mortalité de la population nationale

La population de Macau étant minoritaire dans notre portefeuille d'étude, nous nous limiterons à la présentation des données de mortalité de la population de Hong Kong.

Avec une moyenne d'espérance de vie 81 ans pour les hommes et de 87 ans pour les femmes, Hong Kong se hisse dans le top 10 des pays ayant une longue espérance de vie. Elle dispose d'un système de santé parmi les plus performants garantissant un accès gratuit aux soins primaires et à toute la population. Par ailleurs, le système économique est l'un des plus performants de la région, avec un taux de chômage avoisinant les 2%, ce qui renforce l'accès de la population aux soins de santé.

Le graphique II.2 ci-dessous représente la courbe de mortalité de référence,

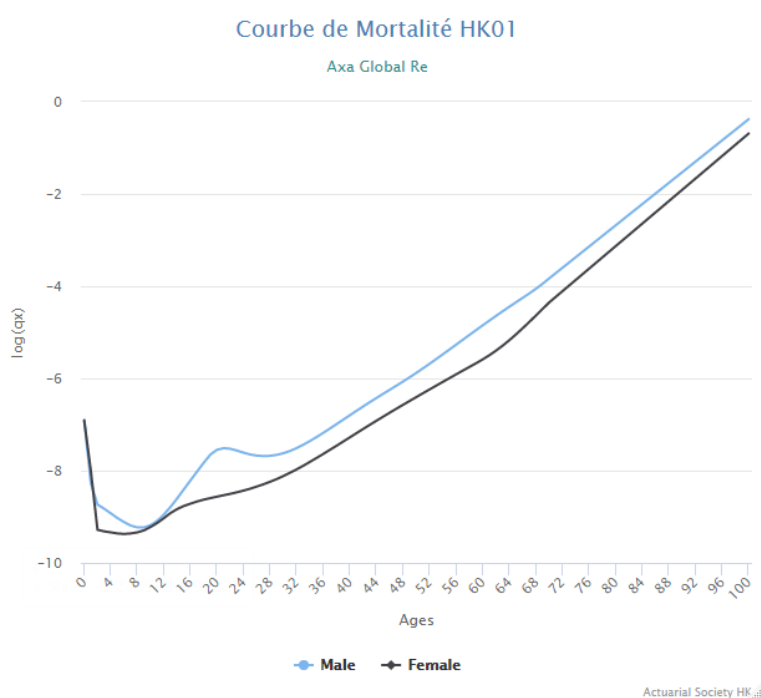


FIGURE II.2 – Evolution de la mortalité par âge de la population de Hong Kong

La mortalité à Hong Kong est l'une des plus faibles dans le monde si on la compare aux autres pays développés comme les Etats-Unis ou l'Europe [2]. Le taux de mortalité annuelle reste moyennement stable malgré le nombre de décès qui ne cesse d'augmenter d'année en année, celui-ci s'est situé à 0.64% en 2018 ¹.

Une description complète des données ayant servi à construire le graphique II.2 est disponible sur la plateforme de l'association des actuaires de Hong Kong². La courbe de mortalité est tirée de l'expérience de plusieurs acteurs du secteur de l'assurance à Hong Kong sur une période allant de 1991 jusqu'à 2001. La courbe est utilisée comme référence par les professionnels de l'assurance pour des questions liées à la tarification des produits et à l'évaluation des engagements. Elle constitue ainsi une référence facilement adaptable aux profils de risques de leurs portefeuilles. La mortalité est différencié par genre : Les femmes ont tendance à vivre un peu plus longtemps que les hommes. L'évolution de la mortalité avec l'âge est également différente, avec une bosse d'accident aux âges intermédiaires moins forte comparé au hommes. Par ailleurs, au niveau des premiers âges [0-5ans], la mortalité est aussi similaire chez les hommes que chez les femmes,

1. <https://fr.countryeconomy.com/demographie/mortalite/hong-kong>

2. <https://www.actuaries.org.hk/storage/download/ESR01.pdf>

cette tendance s'explique principalement par la prédominances des cinq maladies infantiles¹. La mortalité poursuit sa tendance baissière sur les âges [5-10] pour retrouver une tendance quasi linéaire en échelle log, avec une pente plus importante à partir de l'âge 60.

II.1.4.2. Taux d'incidence

Nous disposons également de données confidentielles émises par la cédante sur les risques d'incidence des maladies graves, maladies mineures, maladies graves précoces. Ces tables sont ventilées par sexe et par statut Fumeur/Non Fumeur. Elles estiment pour chaque âge la probabilité d'incidence des sinistres étudiés. Nous estimerons nos propres tables de loi d'incidence pour challenger les hypothèses de la cédante.

Les tables d'incidences serviront à alimenter notre modèle à états avec lequel nous réaliserons les simulations sur l'état de l'assuré chaque mois jusqu'à l'extinction des contrats.

II.1.4.3. Projections Best Estimate de la cédante.

AGRe et l'entité réassurée appartiennent au même Groupe. La cédante se permet alors de partager ses projections Best Estimate des sommes sous risques, primes et des sinistres.

Ces informations serviront à AGRe de se positionner quant aux résultats fournis par le modèle de projection développé.

II.2. Analyse des données

II.2.1. Contrôle des calculs

Une première analyse de données a consisté à la réalisation de plusieurs contrôles sur le calcul des sommes assurées et des sommes sous risques ainsi que les primes et les ratio de réassurance, des variables très sensibles dans notre modèle de projection. L'objectif, étant de repérer les incohérences et de s'assurer de la conformité des calculs en utilisant les formules mentionnées dans le paragraphe II.1.1., et de repérer les polices qui ne respectent pas les limites de souscription fixées par le traité.

L'exploration des données nous a permis de déceler plusieurs incohérences :

1. Varicelle, Rougeole, Rubéole, Coqueluche, Oreillons

Incohérences	Traitements
Déclaration prématurée des polices, se caractérisant par une date d'effet supérieure à la date de reporting	Suppression des lignes de la base de données "Primes" où la date d'effet est supérieur à la date de reporting.
Déclaration retardée des polices souscrites	Ajout des différents dates de reportings manquantes à la base de données "Primes"
Variation de la variable genre	Nous récupérons pour chaque police la dernière valeur mis à jour à partir du dernier reporting, ensuite nous assignons aux anciens reportings la valeur mis à jour.
Différent format de ratio de réassurance (0.25,25%)	Uniformisation au bon format
Discontinuité dans le reporting des polices, certaines polices ne sont pas régulièrement reportées.	Création d'une base de données complète ("Primes") en formant toutes les combinaisons possibles avec les identifiants des polices et des dates de Reporting. Le remplissage des données manquantes se fait en fusionnant avec l'ancienne base de données "Primes".

TABLE II.6 – Incohérences et traitements effectuées

II.2.2. Evolution des Sommes sous risque

Les sommes sous risques originales est un indicateur essentiel dans notre étude, leur évolution nous permet d'anticiper les primes que nous allons recevoir dans le futur ainsi que la mise en évidence de la partie run-off du portefeuille.

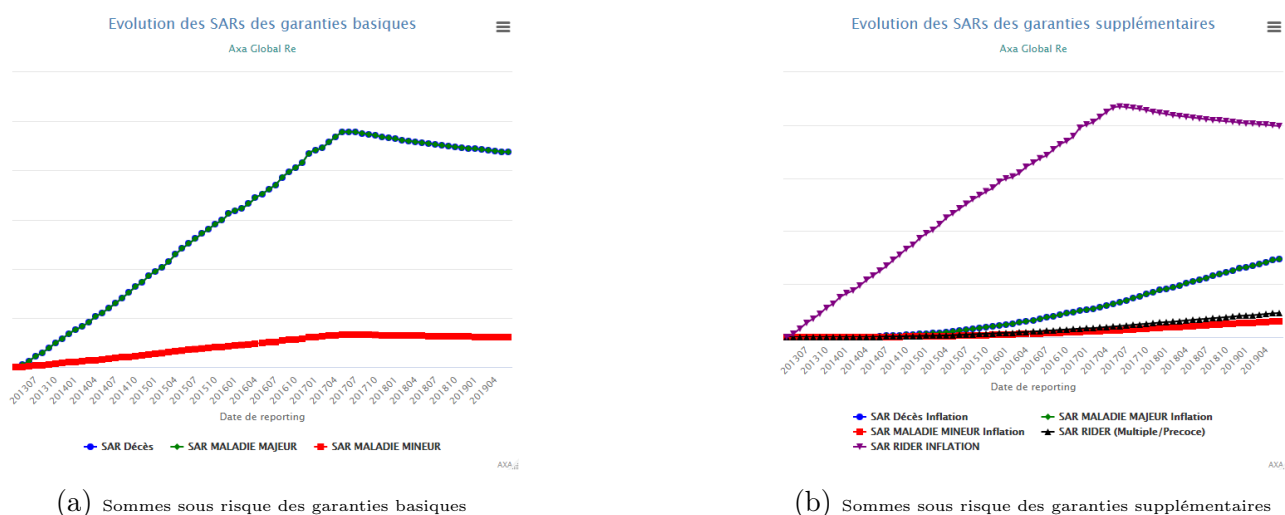


FIGURE II.3 – Sommes sous risque ventilé par type de garantie

On observe au niveau de la figure II.3a une croissance des sommes sous risques, majoritairement portée par les garanties sur le décès et les maladies majeures, celles-ci sont représentées en vert et en bleu. Le lecteur pourra remarquer que les sommes sous risque relatifs aux garanties Majeur et Décès coïncident, en effet comme précisé dans la partie II.1.1., on a les mêmes sommes assurées pour les deux couvertures.

Ces graphiques exhibent deux étapes distinctes, une phase de souscription marquée par l'augmentation du nombre de contrats et par conséquent des sommes sous risques réassurées. L'augmentation est quasi linéaire, couplée à quelques petites variations à la hausse comme à la baisse

qu'on explique par le rachat des polices et la réintégration des contrats des assurés ayant fait défaut par le passé.

La deuxième phase commence à partir de 31/06/2017, cette date marque la fin de souscription et amorce l'état run-off du portefeuille. On observe une tendance baissière des sommes sous risque, liée principalement à la composante épargne du produit. AGRE ne réassure en fait que les sommes sous risque qui correspondent à la différence entre la prestation en cas de sinistre (somme assurée) versée à l'assureur et la valeur de rachat accumulée payée par l'assuré. Prenons l'exemple d'une assurance décès temporaire à terme pour illustrer nos propos. La différence entre le capital versé à la police dans le cas d'un éventuel décès et les cotisations capitalisées représente la somme sous risque. L'assureur peut toutefois adopter une stratégie interne de calcul de la valeur de rachat dépendamment de son appétence au risque et de son expérience. La somme sous risque est par définition décroissante, la tendance baissière est donc justifiée. Outre la décroissance naturelle due aux réserves on note aussi qu'elle est liée à deux phénomènes, le rachat et la sinistralité. En ce qui concerne le rachat, le réassureur n'est plus engagé, la police passe à l'état de rachat et toutes les sommes sous risque sont mises à zéro. Le deuxième facteur expliquant cette tendance est la sinistralité : En cas de survenance de sinistres, les sommes sous risque sont remises à zéro. Le réassureur paie la proportion des sommes sous risque à sa charge et est alors désengagé du risque.

Concernant le graphique II.3b, les garanties supplémentaires exhibent le même comportement. Toutefois les sommes sous risque de la garantie inflation gardent une tendance croissante : Ceci s'explique par le fait que ces garanties sont en vision cumulée. C'est à dire que chaque année, pour les polices ayant souscrites une garantie inflation, un montant supplémentaire vient s'ajouter dépendamment du taux d'inflation du moment et de la SAR du moment (décroissante par définition). La courbe est ainsi concave du fait de la décroissance des SAR.

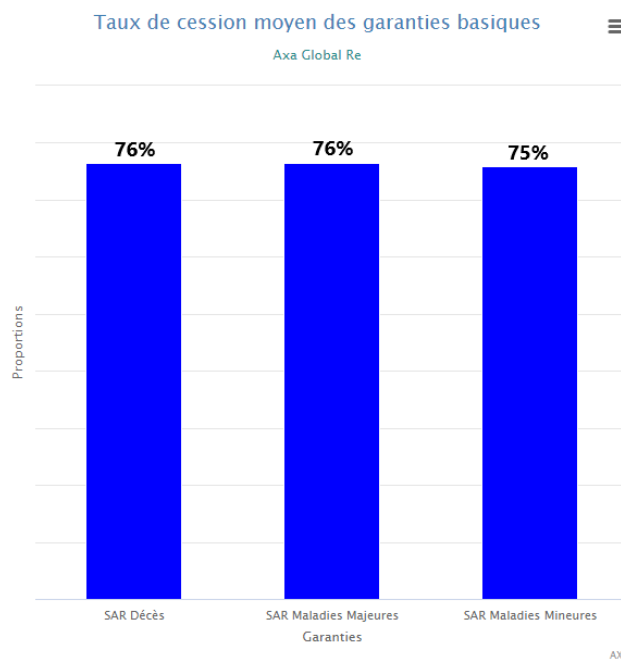


FIGURE II.4 – Taux de cession des garanties basiques

Sur le graphe en haut II.4, les SAR cédées sont ventilées par catégorie de garantie, c'est le produit entre le ratio de réassurance (qui est supposé constant dans le temps) correspondant à chaque police et les SAR du moment. Le taux moyen de cession fluctue autour de 75%, en effet celui-ci est formulé de telle façon à ce qu'il ne descende pas sous le seuil de 75%. D'ailleurs, la très grande majorité des polices ont un taux de cession égal à 75%

II.2.3. Evolution des primes

Les flux de primes reçues par AGRé sont irréguliers selon le graphique II.5c. Les pics observés sont relatifs à la prédominance des paiements annuels comme on peut le constater au niveau de la figure II.5b, mais reflète aussi la variation dans les phases de souscription des polices. On pourra également remarquer des chutes régulières le mois de Février de chaque année en raison du nouvel an chinois, cette période de l'année est marquée par des prises de congés prolongés. Par ailleurs on constate une prédominance des primes sur les garanties majeures, liée principalement au fait que les taux de prime appliqués pour cette couverture sont très grands. Effectivement, il y a plus de chance d'observer un sinistre majeur qu'un décès, cette interprétation reste valable pour les garanties supplémentaires. Les primes liées aux garanties majeures représentent 60% des primes totales, les primes sur les garanties décès correspondent à 20% et les garanties supplémentaires constitue à peu près 15%.

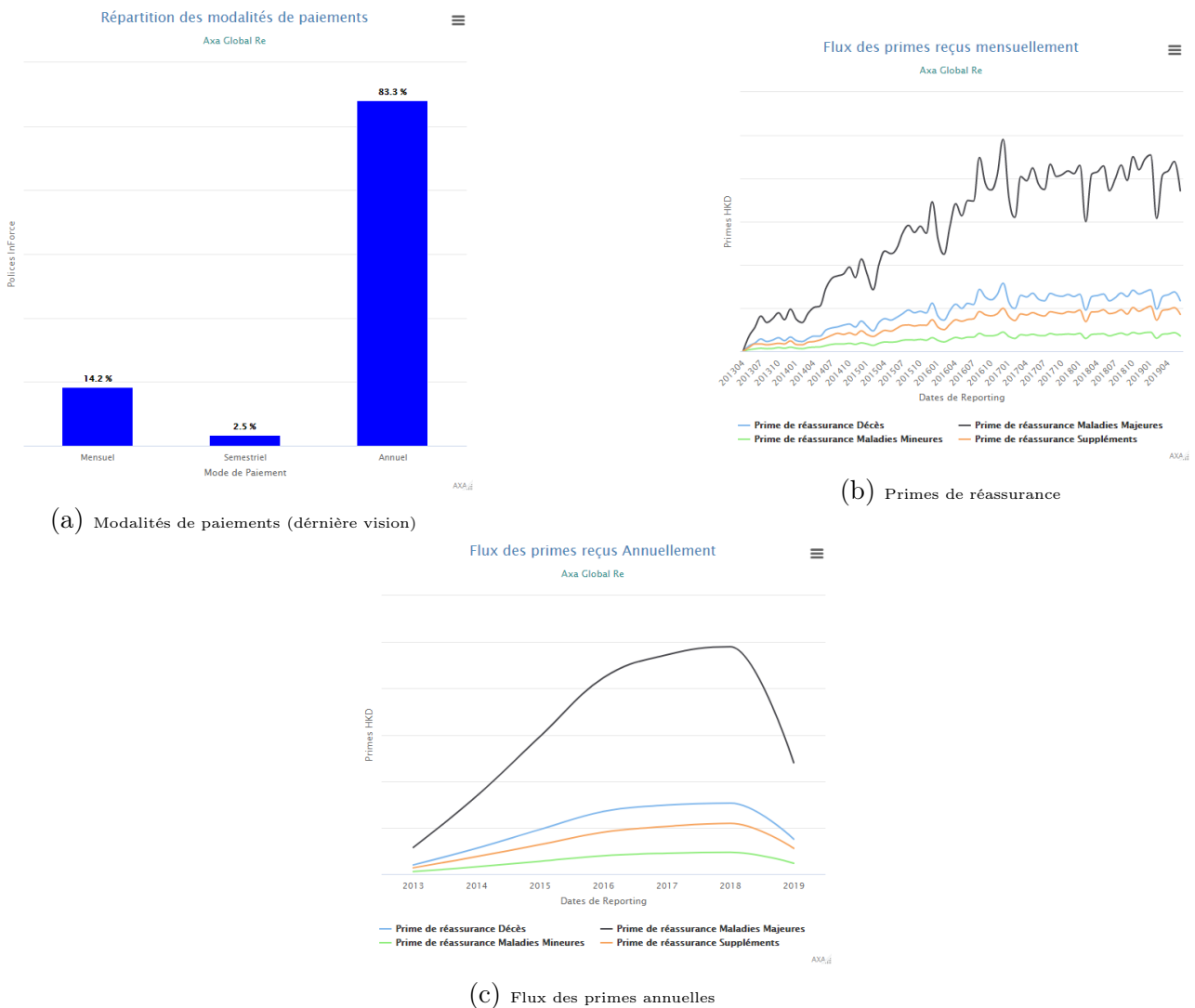


FIGURE II.5 – Modalités de paiements-Primes de réassurance

En vision annuelle II.5c, les irrégularités liées au reporting disparaissent. On observe une augmentation graduelle des primes lors de la période de souscription et un début de stagnation à partir de 31/06/2017. L'inclinaison à la date 2019 est lié à l'absence de données sur la deuxième moitié de l'année 2019/06/31, il est d'ailleurs difficile de trancher dans l'immédiat sur la tendance future des primes car elle est tributaire de l'évolution des âges, des rachats et des sommes sous risques. En effet la prime est déterminée par les sommes sous risques et le taux de

primes applicable, ce dernier augmente graduellement avec l'âge pour refléter l'augmentation du risque de survenance des sinistres. Toutefois, on est sur que la tendance à moyen et à long terme sera baissière.

II.2.4. Evolutions des Sinistres

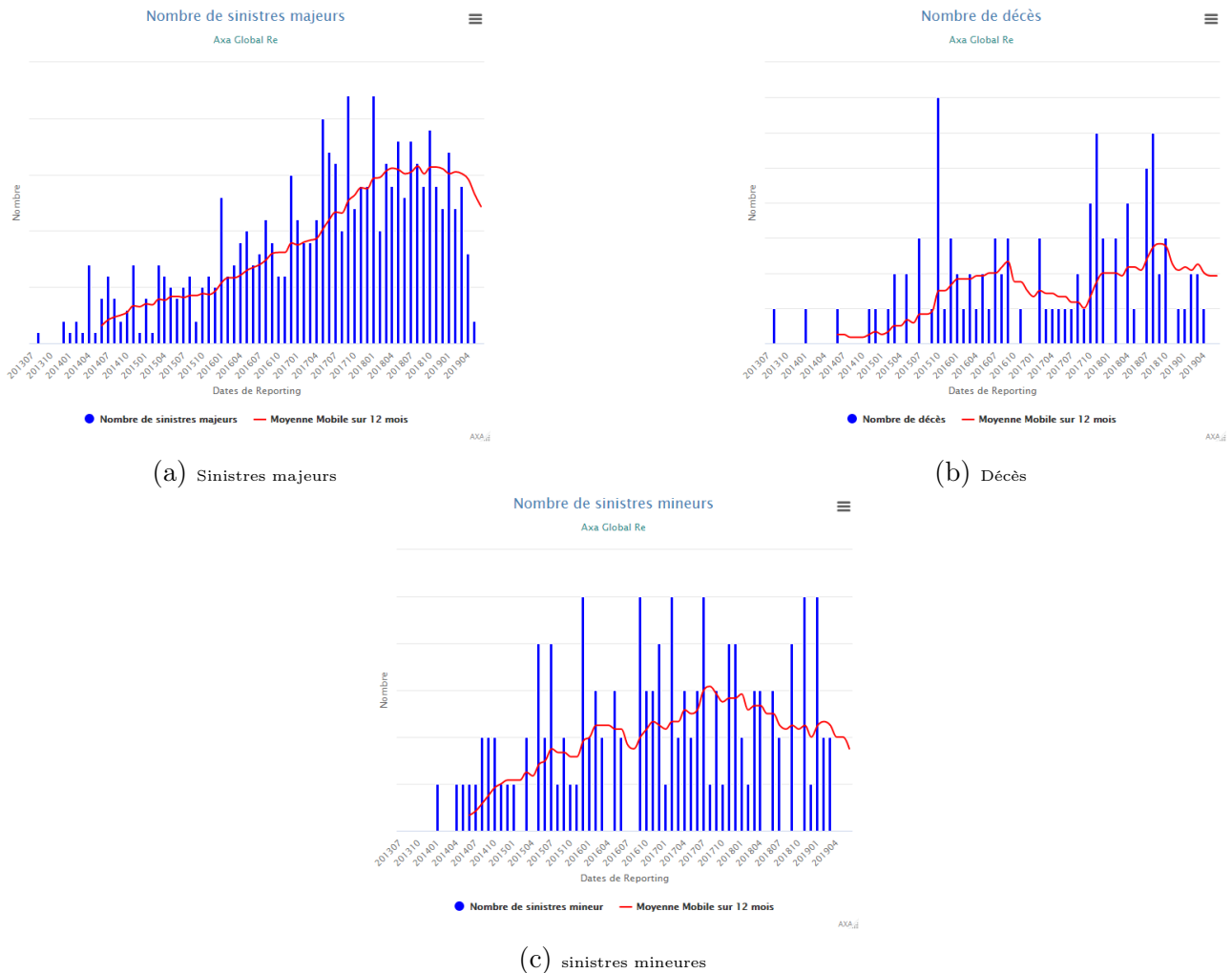


FIGURE II.6 – Sinistres comptabilisés

A partir de la base de données sinistres, nous tirons toute l'information sur l'historique des sinistres depuis la date de souscription jusqu'au 30/06/2019. On observe une forte fréquence des sinistres majeurs par rapport aux deux autres garanties, surtout au milieu de la période de souscription qui connaît une forte déclaration des sinistres. Une tendance haussière confirmée par l'allure croissante de la moyenne mobile¹, néanmoins une légère décroissance commence à prendre place à partir des dernières dates de reporting à cause des tardifs (Sinistres déclarés après la date de survenance).

Au niveau des deux graphiques II.6b et II.6c, la moyenne mobile reflète une volatilité accrue de la tendance observée sur les deux garanties. Effectivement, le nombre de sinistres est relativement bas (voire aucun sinistre à certaines dates de reporting) par rapport aux sinistres de la garantie majeure. Cela a pour conséquence de contribuer aux variations accidentelles de la moyenne mobile.

1. La moyenne sur les 12 derniers mois

II.2.5. Evolution de l'âge de la population assurée

II.2.5.1. Distribution des âges

La distribution des âges est caractérisée par une concentration des âges intermédiaires entre 20 et 40 ans. La médiane des âges se situe à peu près à 31 ans, celle-ci fluctue moins rapidement pendant la période de souscription et tend à augmenter légèrement à partir de la date de fin de souscription.

L'analyse de ce graphe, nous permet aussi de distinguer les plages d'âges où on ne pourra pas observer de mortalité et de ce fait à écarter lors de la modélisation de ce risque.

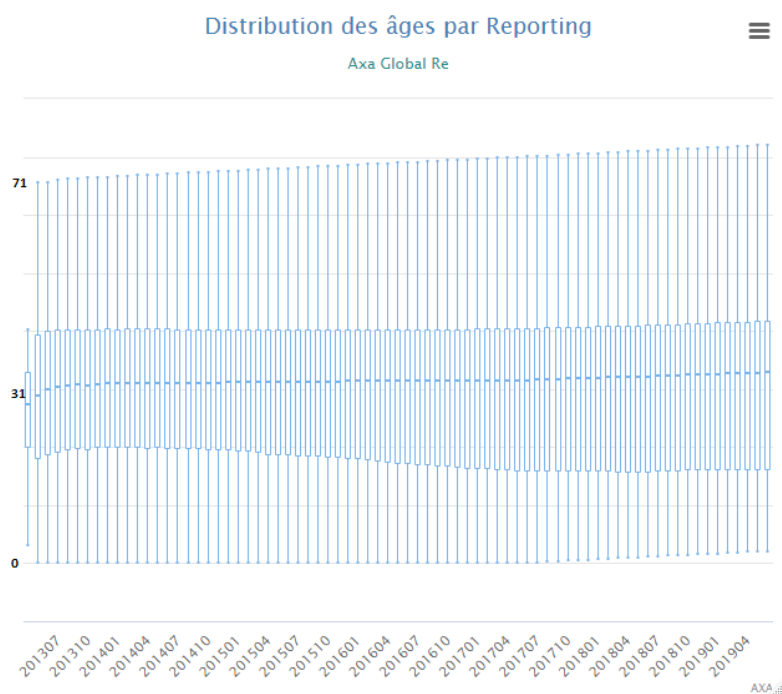


FIGURE II.7 – BoxPlot des âges par date de Reporting

II.2.5.2. Âge Moyen

Puisque nous traitons un portefeuille en vision run-off, le lecteur pourra deviner l'allure de la courbe de l'évolution de l'âge moyen pendant chaque date de reporting. En effet à partir de la date de fin de souscription, on estime avoir dans le cas idéal d'absence de rachat, une croissance linéaire de pas unitaire (= 1 mois) pour chaque mois de reporting. Or, les polices réassurées sont soumises au risque de rachat (*lapse*), cet événement semble être modéré puisque la variation de l'âge moyen ne semble pas trop dévier de la droite linéaire figure II.8b. Cela veut dire que le rachat est homogène entre les âges et que la mortalité n'a pour l'instant pas beaucoup d'effet.

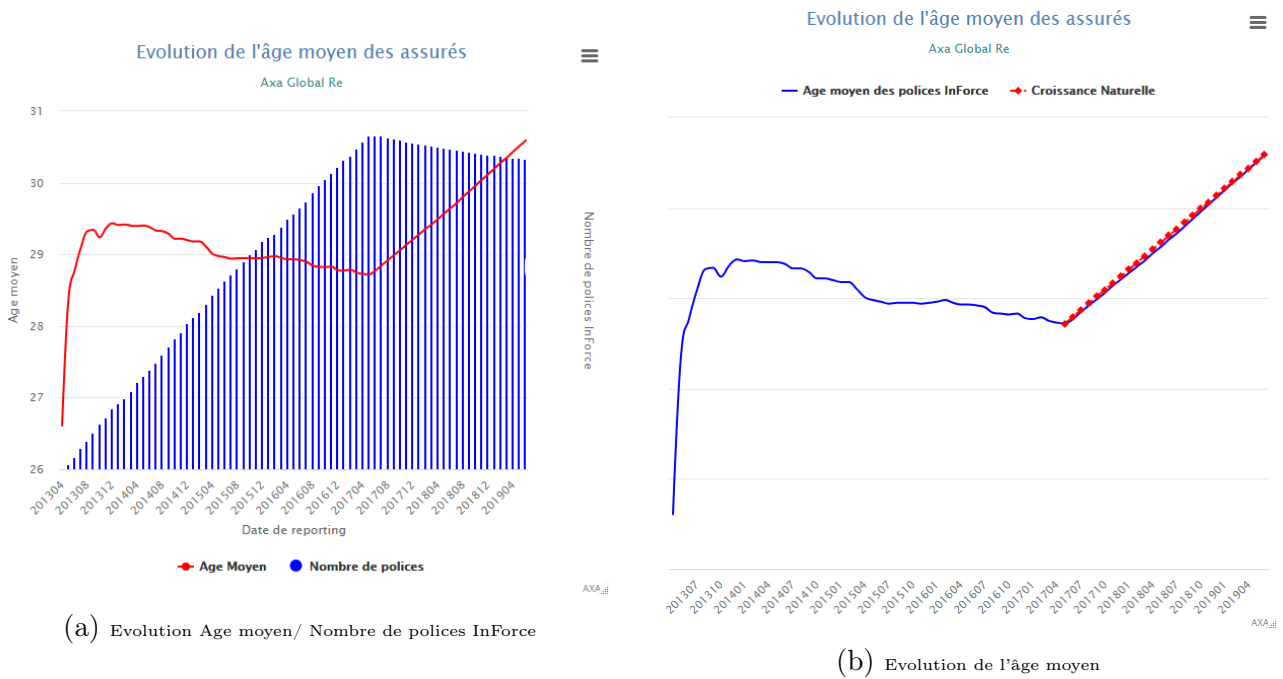


FIGURE II.8 – Sommes sous risque ventilé par type de garantie

Egalement la décroissance du nombre de police actives fait en sorte que l'âge moyen dévie doucement de sa croissance naturelle, l'effet de rachat n'est pas encore visible sur les âges. Toutefois il impacte considérablement le nombre de polices et les sommes sous risques assurées. En outre, nous décidons d'évaluer l'âge moyen pondéré par les primes reçues sur la figure II.9, dans le but de révéler le poids des âges contribuant fortement à la prime reçu par le réassureur. L'écart entre la courbe de l'âge moyen pur et les courbes d'âge moyens pondérés montre qu'en grande partie, les assurés d'âges intermédiaires ([25-40] ans) contribuent fortement à la prime.

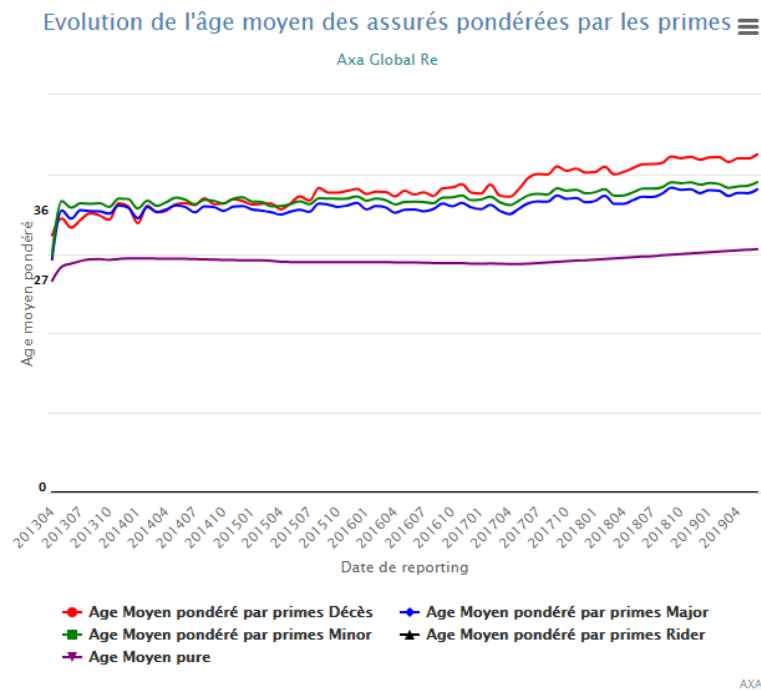


FIGURE II.9 – Age moyen pondéré par les primes des garanties basiques

Chapitre III

Calibration des paramètres

III.1. Etude de la mortalité

Dans cette section, nous abordons les différentes méthodes utilisées pour l'évaluation de la mortalité² dans une population donnée ainsi que la mise en place d'indicateurs adéquats sur celle-ci. On procédera ensuite, après l'obtention des séries objectives de notre étude, à différentes techniques de lissage. Enfin nous concluons cette section en présentant les différentes approches pour valider localement et globalement l'ajustement de la mortalité aux données.

Dans la littérature, la mortalité est étudiée selon deux approches. Une première approche consiste à se fixer une année d'étude ou plusieurs années d'études et comptabiliser les décès pour chaque âge. Cette approche est la plus répandue, car l'information est disponible. Toutefois, il existe une autre approche beaucoup plus rigoureuse, pour comprendre les phénomènes démographiques et leurs évolutions sans la lunette déformante des aléas conjoncturels, qui consiste à étudier la mortalité d'un groupe d'individus nés une même année tout au long de leur existence, ou durant une même période. Cependant la mise en place d'une telle approche n'est pas possible dans notre cas en raison de la contrainte temps et la contrainte sur la disponibilité des données. Nous considérons alors la première approche, la plus souvent adoptée pour tenir compte de l'expérience du portefeuille.

III.1.1. Notations

Nous définissons :

- T la variable aléatoire continue positive représentant la durée de vie d'une personne
- T_x la variable aléatoire représentant la durée de vie résiduelle d'une personne à l'âge x . En effet $T_x = T - x | T > x$.
- $S(t)$ la fonction de survie d'une personne, $S(t) = P(T > t)$
- $S_x(t)$ la fonction de survie résiduelle d'une personne à l'âge x , ou autrement dit la probabilité de survivre jusqu'à l'âge t sachant qu'on est en vie à l'âge x . En terme probabiliste $S_x(t) = P(T_x > t | T_x > 0)$
- q_x la probabilité qu'une personne d'âge x décède : $q_x = P(T_x < 1 | T_x > 0)$

Le taux q_x nous renseigne sur la probabilité des décès à un âge x dans une population donnée. Pour cela il est nécessaire de connaître le nombre de personnes en vie à l'âge x et décédés entre

2. Ces techniques resteront valables et s'appliqueront sans problème aux taux d'incidences des maladies

x et $x+1$. Il existe une relation étroite entre la fonction de survie et de probabilité de décès.

$$\begin{aligned} q_x &= P(T_x < 1/T_x > 0) \\ q_x &= P(T < x + 1/T > x) \\ q_x &= 1 - P(T > x + 1/T > x) \\ q_x &= 1 - \frac{P(T > x + 1)}{P(T > x)} \\ q_x &= 1 - \frac{S(x + 1)}{S(x)} \end{aligned}$$

Ainsi notre série de taux de mortalité est entièrement définie par la fonction de survie et vice-versa.

Afin de calibrer les quotients q_x , on procédera en utilisant l'estimateur de Kaplan Meier de la fonction de survie ainsi que la méthode de Hoem. Nous commençons par présenter l'estimateur de Hoem.

III.1.2. Estimateur de HOEM

L'estimateur de HOEM repose sur l'hypothèse que les décès suivent une loi binomiale. C'est un estimateur paramétrique qui permet de prendre en compte les censures, les troncatures (cf. Planchet Therond, 2006 [7]). Il consiste à calculer par âge le ratio du nombre de décès sur la durée vécue à l'âge x .

Pour tenir compte de cet effet de censure, le principe est de se fixer un intervalle d'observation qu'on note par $[a_i, b_i]$, où a_i et b_i représente respectivement le début et la fin de la période d'observation de l'individu i d'âge x au sein de l'intervalle $[x, x+1]$.

- Tout au long de cette période, l'individu i est soumis au risque de décès.
- Les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_{N_x} représentent l'état de l'individu i , on a au total N_x individus exposés sur l'intervalle d'âge $[x, x+1]$. Les X_i sont indépendants et suivent une loi de bernoulli de paramètre $b_i - a_i q_{x+a_i}$.
- On note par

$$D_x = \sum_{i=1}^{N_x} X_i \sim Bin(N_x, b_i - a_i q_{x+a_i})$$

la variable aléatoire représentant les décès sur l'intervalle $[x, x+1]$. Celle-ci suit une loi binomiale.

Pour la mise en place de l'estimateur de Hoem, nous formulons les hypothèses suivantes : les décès sont indépendant les uns des autres et sont uniformément distribués dans l'intervalle x et $x+1$.

$$\begin{aligned} {}_t q_x &= t \cdot q_x \\ {}_{s-t} q_{x+t} &\sim_s p_x \quad {}^{-t} p_x \end{aligned}$$

Nous avons par conséquent le résultat suivant

$$b_i - a_i q_{x+a_i} \sim (b_i - a_i) * q_x$$

Enfin, on pose

$$Z_i = \frac{X_i}{b_i - a_i}$$

$$\mathbb{E}[Z_i] = \mathbb{E}\left(\frac{X_i}{b_i - a_i}\right) = \frac{\mathbb{E}(X_i)}{b_i - a_i} = q_x$$

Les Z_i sont indépendants du fait des X_i supposés indépendants et en appliquant la loi faible des grands nombres à Z_i , on retrouve :

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{\sum_{i=1}^{N_x} (b_i - a_i)}$$

D_x les décès sur l'intervalle d'âge $[x, x+1]$ et où $\sum_{i=1}^{N_x} (b_i - a_i)$ est l'exposition globale dans l'intervalle $[x, x+1]$.

En pratique cela revient à comptabiliser les décès survenus à chaque âge x , plus la comptabilisation de la durée vécue par chaque individu i dans chaque intervalle $[x, x+1]$, et cela sur toute la période d'étude.

Intervalles de confiance

Nous cherchons toutefois à cerner la qualité de notre estimateur en ajoutant des intervalles de confiance d'ordre α . Nous cherchons pour chaque âge un intervalle de confiance. D'après le théorème central limite :

$$\sqrt{N_x} \frac{\hat{q}_x - q_x}{\sqrt{q_x(1 - q_x)}} \rightarrow_{N_x \rightarrow +\infty} N(0, 1)$$

on note par $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée et réduite.

Par construction $\hat{q}_x(1 - \hat{q}_x) \rightarrow_{Proba} q_x(1 - q_x)$ ainsi nous obtenons les intervalles de confiance à l'ordre α .

$$IC_\alpha = \left[\hat{q}_x - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{q}_x(1 - \hat{q}_x)}{N_x}}, \hat{q}_x + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{q}_x(1 - \hat{q}_x)}{N_x}} \right]$$

Une variante log-normale est toutefois possible pour pallier les problème des valeurs négatives de l'intervalle de confiance. On suppose alors que les quotients suivent une loi log-normale de moyenne μ et de variance σ . Autre possibilité plus simple est de mettre un plancher à 0.

III.1.3. Estimateur de Kaplan Meier

L'estimateur de KM est un estimateur robuste lorsqu'on traite des modèles de durée en raison des censures et des troncatures qui peuvent venir biaiser nos observations sur la variable de durée. Dans la figure III.1 nous exposons quelques cas qu'on pourra rencontrer lors du traitement de celle-ci.

Nous nous fixons une période d'observation puis nous suivons chaque individu i jusqu'à la fin de cette période.

Dans ce cas particulier, on suppose que notre objectif est d'évaluer la durée de vie de chaque individu. Ainsi, on pourra remarquer que pour les individus (3,4) l'observation de notre variable d'intérêt n'est pas possible en raison de la censure. Effectivement, l'individu 4 a quitté notre champs de vision pour des raisons autres que le décès tandis que l'individu 3 a survécu au risque de décès et on sait seulement que sa durée de vie est supérieur à une certaine valeur connue. Ces observations sont dites censurées à droite en liason avec les perturbations causées par ces données sur la partie droite de la distribution de la variable d'intérêt.

L'individu 5 est l'individu fantôme qu'on n'a pas pu observer du fait qu'il est à l'extérieur de notre fenêtre d'observation. Cette observation est dite tronquée à gauche, en liaison avec la perturbation que ce type de données cause sur la partie gauche de la distribution de la durée de vie.

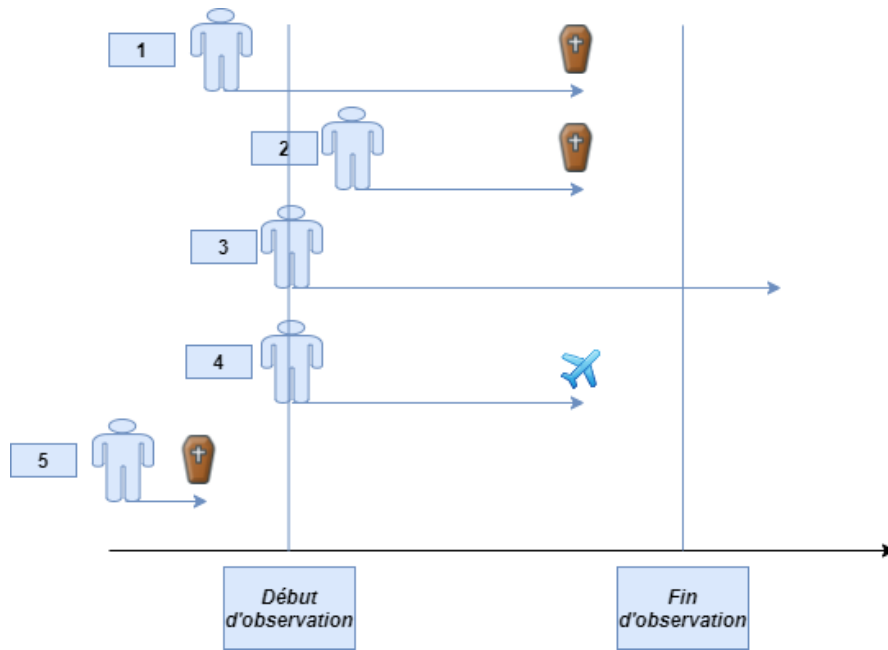


FIGURE III.1 – Exemple de censure à droite et de troncature à gauche.

- La censure est un phénomène aléatoire qui vient parasiter notre observation de la variable de durée. Il existe plusieurs type de censure, nous nous intéressons à la censure de type 3 lorsque celle-ci est aléatoire. Dans le cas de la mortalité par exemple, ce sont les assurés qui ont quitté le portefeuille pour autres raisons que le décès ou bien les personnes qui n'ont pas subi l'évènement au cours de la période d'observation. En termes mathématiques, si on suppose T_i notre variable de durée et C_i notre variable de censure. Ce qu'on observerait serait la variable Y_i avec :

$$Y_i = \inf(T_i, C_i)$$

$$\delta_i = \mathbb{1}_{T_i < C_i}$$

Où δ_i nous renseignerait sur le statut de l'observation (Censure ou complète).

- La troncature est liée aux observations fantômes qu'on n'a pas pu observer pendant la période d'observation. Par exemple, dans le cas d'un portefeuille d'assurance, ce serait les personnes qui ont subi l'évènement de décès avant même de rentrer dans la période d'observation. En termes mathématiques, s'ajoute une variable τ_i tel que ce qu'on observe c'est $Y_i / Y_i > \tau_i$

L'estimateur permet de prendre en compte cette spécificité liée à l'observation des variables de durées. Egalement, il possède de bonnes propriétés liées au fait qu'il n'émet aucune hypothèse sur la distribution de la variable d'intérêt contrairement aux estimateurs paramétriques. En outre il a tendance à sous estimer la fonction de survie, ce qui peut se révéler prudent dans notre cas puisque on surestime les probabilité de décès!

Si on note par :

- $a_i, i \in 1, \dots, m$ les âges connus des individus entre x et $x+1$
- n_i et c_i respectivement le nombre de personnes restant en vie à l'âge a_i et le nombre de décès à l'âge a_i
- c_i et T_i respectivement le nombre de personnes censurées et le nombre de personnes tronquées.

- T_i la date du i ème événement.

L'estimateur de Kaplan Meier est donnée par :

$$S_{KM}(t) = \prod_{i/T_i < t} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)$$

avec

$$n_i = n_{i-1} - d_{i-1} - c_{i-1} - t_{i-1}$$

C'est l'estimateur produit de la fonction de survie. L'allure de la courbe s'apparente à une fonction en escalier qui ne change de valeur que pour les observations non censurées (observation non censurée $\implies d_i \neq 0$).

On pourra par ailleurs déterminer l'intervalle de confiance liée à cet estimateur, celui-ci est déterminé par la méthode delta.

$$VAR(S(t)_{KM}) = S(t)_{KM}^2 \sum_{T_j < t} \frac{d_j}{n_j - d_j}$$

Notre objectif étant de retrouver les quotients de mortalité par âge, nous utilisons ainsi les résultats précédents.

En effet

$$q_x = 1 - \frac{S_{x+1}}{S_x}$$

on pourra ainsi estimer S_x par

$$\hat{S}_x = \prod_{i/a_i < x} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)$$

On a donc

$$q_x = 1 - \prod_{i=a_1}^{a_m} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)$$

Pratique Pour mener à bien cette étude nous aurons besoin d'informations spécifiques sur les individus assurés. Nous nous inspirons de l'exemple de Planchet et Thérond [7] pour expliciter l'approche adoptée. Après avoir fixé une fenêtre d'observation(01/01/1990-01/01/1992), nous construisons la base de données suivante :

Assuré	Date de Naissance	Date d'entrée	Date de sortie	Etat	Age au début de l'observation	Age à la fin de l'observation
1	01/03/1910	03/12/1988	01/01/1992	Vivant	79.84	81.48
2	01/05/1909	03/12/1988	01/02/1990	Décès	80.67	80.76
3	01/02/1910	03/06/1990	01/01/1992	Vivant	79.92	81.91
4	01/05/1910	03/08/1988	01/03/1991	Censuré	79.67	80.83
5	01/03/1905	03/12/1980	01/01/1992	Vivant	84.84	86.84
6	01/04/1911	01/06/1991	01/01/1992	Vivant	78.75	80.75

TABLE III.1 – Base de données brute KM

Nous cherchons à estimer le quotient d'âge q_{80} , pour ce faire nous construisons le tableau suivant :

Age	Nature	Exposition	individus	p_{80}
80	Entrée	4	1,3,4,6	100%
80.67	Entrée	5	1,2,3,4,6	100%
80.75	Censure	4	1,2,3,4	100%
80.76	Décès	3	1,3,4	75%
80.83	Censure	2	1,3	75%

TABLE III.2 – Base de données brute KM

Ainsi on déduit que $q_{80} = 25\%$. Cet exemple¹ met en évidence le fait que la fonction de survie ne change de valeur que lorsqu'il y a survenance de décès uniquement !

Dans ce qui suit nous présenterons les différents méthodes de positionnement et de lissage de la mortalité.

III.1.4. Lissage de Brass

Afin de compenser le manque d'information lié aux données, en raison par exemple de l'expérience assez courte du portefeuille, Brass propose initialement dans son livre (Brass 1971 [20]), de lier la mortalité existante à une mortalité de référence à travers le modèle suivant.

$$\text{logit}(q_x) = \beta + \alpha \text{logit}(q_{xref}) + \epsilon$$

où $\text{logit}(q_x) = \log\left(\frac{q_x}{1 - q_x}\right)$ et ϵ représente l'erreur du modèle.

Les quotients sont à valeurs dans $[0,1]$ tandis que les logits sont à valeur dans \mathbb{R} . L'idée est donc d'estimer les paramètres α et β d'un modèle de régression linéaire classique. Une première méthode consisterait à minimiser le critère des moindres carrés ordinaires pondérées par les expositions à chaque âge.

$$\min\left(\sum_{x=0}^w E_x * (\text{logit}(q_x) - \alpha - \beta \text{logit}(q_{xref}))^2\right)$$

Toutefois nous adopterons l'approche proposée par (Planchet et Thérond 2011 [8]) qui consiste à estimer les paramètres du modèle en minimisant le critère suivant :

$$\min\left(\sum_{x=0}^w E_x * (\hat{q}_x - q_x)^2\right)$$

Où \hat{q}_x sont les quotients estimés par la méthode de KM ou de Hoem et où

$$q_x = \frac{\exp(\beta) * \left(\frac{q_{xref}}{1 - q_{xref}}\right)^\alpha}{1 + \exp(\beta) * \left(\frac{q_{xref}}{1 - q_{xref}}\right)^\alpha}$$

Les quotients de référence q_{xref} proviennent de la table de mortalité de la population nationale de Hong Kong.

1. NB : Nous mettons aussi en garde contre le risque de présence d'ex-aequo.

III.1.5. Lissage de Whittaker Henderson

La méthode de Whittaker Henderson est fréquemment utilisée pour palier les irrégularités liées à l'estimation des taux de mortalité sur un portefeuille d'assurance. W-H essaie de concilier deux idées en apparence contradictoires. D'un côté l'idée que l'estimateur est convergent et devrait donc s'approcher de la vraie courbe, d'un autre côté nous avons un à priori que la vraie courbe est lisse. En effet une bonne courbe doit être :

- Proche de la courbe des taux bruts (Critère de fidélité)
- Suffisamment régulière (Critère de régularité)

Nous quantifions le critère de fidélité par :

$$F(q) = \sum_{x=0}^p w_x (q_x - \hat{q}_x)^2$$

et le critère de régularité par

$$S(q) = \sum_{x=0}^{p-z} (\Delta^z q_x)$$

où Δ représente une version discrétisée¹ de la dérivée pour exprimer la régularité de la courbe. Comme on travaille dans un cas discret avec des âges entiers, nous n'avons pas une vraie courbe mais une série de points. D'où la notion d'une version discrétisée de la dérivée pour résoudre le problème de la régularité.

$$\begin{aligned} \Delta q_x &= q_{x+1} - q_x \\ \Delta^2 q_x &= \Delta(\Delta q_x) = q_{x+2} - 2q_{x+1} + q_x \end{aligned}$$

Dans l'idée, cela correspond à des dérivées successives dans le cas continu. L'objectif étant de faire en sorte que les dérivées à un certain ordre (2 en général) soit petites. i.e : Les variations d'un point à l'autre ne soit pas excessives.

On souhaiterait minimiser les deux critères, $F(q_x)$ est minimal pour \hat{q}_x néanmoins ce n'est pas le cas de $S(\hat{q}_x)$. On ne pourra pas donc minimiser chacun des deux critères, Il faudra chercher un compromis. Whittaker Henderson propose donc un nouveau critère synthétisant les deux derniers.

$$WH_h(q_x) = F(q_x) + hS(q_x)$$

où h est le paramètre de lissage, qui permet de guider l'importance relative de la régularité par rapport au critère d'adéquation.

$$Si \quad h \rightarrow 0 \quad q_x^l = \hat{q}_x$$

$$Si \quad h \rightarrow \infty \quad q_x^l = Constante$$

Le programme d'optimisation se résout de façon exacte, on a la possibilité de donner une formule fermée des quotients lissés q_x^l . D'ailleurs on notera que le critère de régularité et de fidélité pourra être écrit sous forme matricielle.

- En posant, $q = q_x(0 < x < m)$ vecteur des probabilités de décès
- On a aussi la matrice diagonale des poids de chaque individu noté $w = diag(w_i)_{1 < i < p}$.

1. Attention aux effets de bords

- $\Delta^z q = \Delta^z(q_i)_{1 < i < p-z}$ où le

$$\Delta^z(q_i) = \sum_{j=0}^z \binom{z}{j} (-1)^{z-j} q_{j+i}$$

On pourra vérifier que $\Delta^z(q) = K_z q$, en effet considérons $z=2$ et $p=5$ on a

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

On a $\Delta^2 q_0 = \Delta(\Delta q_0) = q_2 - 2q_1 + q_0$, en passant ainsi à l'équation matricielle pour représenter le critère de régularité $S(q_x)$ on a

$$K_2 \cdot q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

$$K_2 \cdot q = \begin{bmatrix} q_0 - 2q_1 + q_2 \\ q_1 - 2q_2 + q_3 \\ q_2 - 2q_3 + q_4 \end{bmatrix}$$

de même pour le critère de fidélité :

$$F(q) = \sum_{x=0}^p w_x (q_x - \hat{q}_x)^2 = (q - \hat{q})' W (q - \hat{q})$$

Ainsi :

$$WH_h(q) = F(q) + hS(q)$$

$$WH_h(q) = (q - \hat{q})' W (q - \hat{q}) + hq' K'_z K_z q$$

$$WH_h(q) = q' W q - 2q' W \hat{q} + \hat{q}' W \hat{q} + hq' K'_z K_z q$$

En dérivant le système d'équations ci-dessus on obtient :

$$\frac{\partial WH_h}{\partial q} = 2Wq - 2W\hat{q} + 2hK'_z K_z q$$

La résolution du système $\frac{\partial WH_h}{\partial q} = 0$ donne les taux lisés

$$q^l = (W + hK'_z K_z)^{-1} Wq$$

Cette technique demeure l'une des plus utilisées dans le lissage des taux de mortalité en raison de la rapidité de mise en place.

III.1.6. Lissage Makeham

Le modèle de Makeham est une version améliorée du modèle de Gompertz [10], ce dernier stipule que la mortalité est liée seulement au vieillissement de la population et que le taux instantané de décès s'exprime en fonction de l'âge seulement.

$$\mu_x = A * B^x$$

Makeham fondateur de l'actuariat moderne complète le modèle de Gompertz en ajoutant la composante liée à la mortalité accidentelle. C'est une constante qui ne dépend pas de l'âge et rend compte des phénomènes de mortalité qui ne sont pas liés à l'âge.

$$\mu_x = C + A * B^x$$

L'intérêt de ce choix est lié au fait que nous ajustons la mortalité sur des âges intermédiaires [30-60] et non sur des âges inférieurs où le modèle est réputé d'être moins adapté en raison de son incapacité à capter la mortalité infantile et la bosse des accidents.

Nous pouvons facilement déduire du taux instantané les quotients de mortalité par âge, en effet :

$$q_x = 1 - \frac{S(x+1)}{S(x)}$$

$$q_x = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} \mu_s ds\right)$$

$$q_x = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} C + A * B^s ds\right)$$

$$q_x = 1 - \exp\left(-C - A \int_x^{x+1} B^s ds\right)$$

$$q_x = 1 - \exp\left(-C - \frac{A}{\ln(B)} * B^x(B-1)\right)$$

L'ajustement du modèle à nos observations permet de lisser la courbe de mortalité par âge, pour ce faire nous optons pour une minimisation du critère des moindres carrés ordinaires sous contraintes pondérés par l'exposition respective à chaque âge. Le problème à résoudre peut se résumer par l'expressions suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min(\sum_{x=0}^w E_x * (\hat{q}_x - q_x)^2) \\ S/C \quad A > 0, B > 1, C > 0 \end{array} \right.$$

Où

$$q_x = 1 - \exp\left(-C - \frac{A}{\ln(B)} * B^x(B-1)\right)$$

Nous réalisons cette optimisation en optant pour la fonction *ConstrOptim* dans le package *stats* implémenté sous R.

III.1.7. Validation locale

La validation des ajustements est une étape primordiale dans la construction des tables de mortalité finales. Elle permet de juger de la qualité des hypothèses émises et de trier les modèles qui s'adaptent le plus au portefeuille d'étude.

En se référant à la note sur les critères de validation des ajustements [6], la validation locale consiste à évaluer graphiquement les décès observés et les décès ajustés ainsi que les différents types de résidus. Nous distinguons entre trois types de résidus :

- **Résidus de la réponse** : $r_x = \hat{q}_x - q_{x\text{lissé}}$
- **Résidus de Pearson** : $r_x = (D_x - E_x * q_{x\text{lissé}}) / \sqrt{VAR(E_x * q_{x\text{lissé}})}$
- **Résidus de déviance** : $r_x = \text{sign}(D_x - E_x * q_{x\text{lissé}}) * \sqrt{Deviance_x}$ ¹

L'analyse graphique des résidus permet de compléter le diagnostic entrepris au départ avec la comparaison entre les données observées et les ajustements. L'idée aussi est de s'assurer que les résidus ne présentent aucune tendance particulière, et dans le cas contraire être en mesure de fournir une explication quant à cet ajustement inapproprié.

III.1.8. Validation globale

Nous présentons plusieurs tests possibles pour quantifier la qualité de l'ajustement au niveau global conformément à la note de travail [11].

Khi-deux

La statistique de Khi-deux généralement utilisée pour juger de l'adéquation de l'ajustement, va nous permettre de voir s'il n'y a pas eu de déformation non aléatoire lors du lissage des taux bruts de mortalité et si l'écart entre les taux ajustés et les taux réels n'est pas très significatif. Cet indicateur s'écrit :

$$\chi^2 = \sum_x \frac{(D_x - \tilde{q}_x * E_x)^2}{E_x * \tilde{q}_x(1 - \tilde{q}_x)}$$

Cet indicateur suit une loi de Khi-deux dont le degré de liberté sera déterminé en fonction de l'intervalle d'âge d'étude et des paramètres estimés. Dans le cas non paramétrique on privilégie la statistique ayant la valeur la plus faible.

SMR

Ce test permet de comparer entre les décès observés et les décès théoriques.

$$SMR = \frac{\sum_x D_x}{\sum_x E_x * q_x}$$

Cet indicateur permet de nous dire si on surestime ou on sous estime la mortalité sur un intervalle d'âge donnée. Si $SMR > 1$ on a une surestimation et vice versa.

Il existe toutefois un test qu'on pourrait mettre en oeuvre pour juger de l'adéquation de l'ajustement des taux de mortalité. On calcule la statistique :

- Si $SMR < 1$ $\phi^{SMR} = 3 * D \frac{1}{2} (1 - (9D)^{-1} - (\frac{D}{E}) \frac{1}{3})$
- Si $SMR > 1$ $\phi^{SMR} = 3 * D^* \frac{1}{2} ((9D^*)^{-1} + (\frac{D^*}{E}) \frac{1}{3} - 1)$

Où

$$D = \sum_x D_x, \quad D^* = D + 1, \quad E = \sum_x q_x E_x$$

Sous l'hypothèse H_0 (le SMR n'est pas significativement différent de 1), la statistique calculée

$$\phi^{SMR} \sim N(0, 1)$$

On rejette H_0 si $\phi^{SMR} > z_{1-\alpha}$ Où z est le quantile d'ordre α de la loi $N(0,1)$.

1. Voir section III.1.8.

Déviante

Il s'agit d'une mesure de la qualité d'ajustement comme pour le Khi-deux, elle s'écrit :

$$\begin{cases} Si & D_x > 0 \\ Si & D_x = 0 \\ Enfin \end{cases}$$

$$\text{Déviante totale} = \sum_x \text{Déviante}_x$$

Nous opterons pour la valeur de déviante la moins forte.

Le rapport de vraisemblance

La statistique du rapport de vraisemblance s'écrit :

$$\zeta^{LR} = \sum_x (D_x (\ln(\frac{D_x}{E_x \tilde{q}_x}) - (D_x - E_x \tilde{q}_x)))$$

Sous l'hypothèse nulle H_0 , cette statistique suit une loi de χ^2 à n degré de liberté. L'hypothèse que le modèle s'ajuste aux données sera rejetée si

$$\zeta^{LR} > \chi_{1-\alpha}^2(n)$$

Nous cherchons donc la valeur la plus faible de ζ , nous pouvons également calculer la p_{valeur}

$$p_{valeur} = P(\zeta^{LR} < \chi_{1-\alpha}^2(n)) = 1 - F_{\chi^2}(\zeta^{LR})$$

et nous opterons pour la valeur la plus proche de 1.

MAPE

A l'image du SMR, ce test mesure l'exactitude de l'ajustement par rapport aux observations. Il correspond à la moyenne des écarts en valeur absolue par rapport aux valeurs observées. La statistique s'écrit :

$$MAPE = \frac{\sum_x |(\frac{D_x}{E_x} - \tilde{q}_x)/(D_x/E_x)|}{\sum_x D_x} * 100$$

R deux

Statistique qui permet de juger de l'adéquation de l'ajustement du modèle proposé aux données observés. Il est compris entre 0 et 1 et se définit comme étant le rapport entre la variance expliquée par le modèle et la variance totale.

$$R^2 = 1 - \left(\frac{\sum_x (\frac{D_x}{E_x} - q_x)^2}{\sum_x (\frac{D_x}{E_x} - \sum_x \frac{D_x}{N})^2} \right)$$

III.2. Calibration de la mortalité

Nous évoquerons dans un premier temps les différents traits caractérisant la mortalité de notre portefeuille, ensuite nous procéderons à la calibration et au lissage des taux bruts en utilisant les différents techniques mentionnées ci-dessus et enfin nous analyserons l'adéquation des résultats

en réalisant des tests statistiques. Nous rappelons que la construction de la table de mortalité par âge doit satisfaire à plusieurs exigences, entre autres le critère de Cochran. Celui-ci stipule qu'en moyenne les classes d'âges doivent avoir au moins 5 décès et 5 vivant au minimum.

$$E_x * \hat{q}_x \geq 5$$

$$E_x * (1 - \hat{q}_x) \geq 5$$

Ce critère ne permet pas seulement de justifier la suffisance des données à notre disposition mais nous permet également de réaliser des tests statistiques de type *Khi-Deux*.

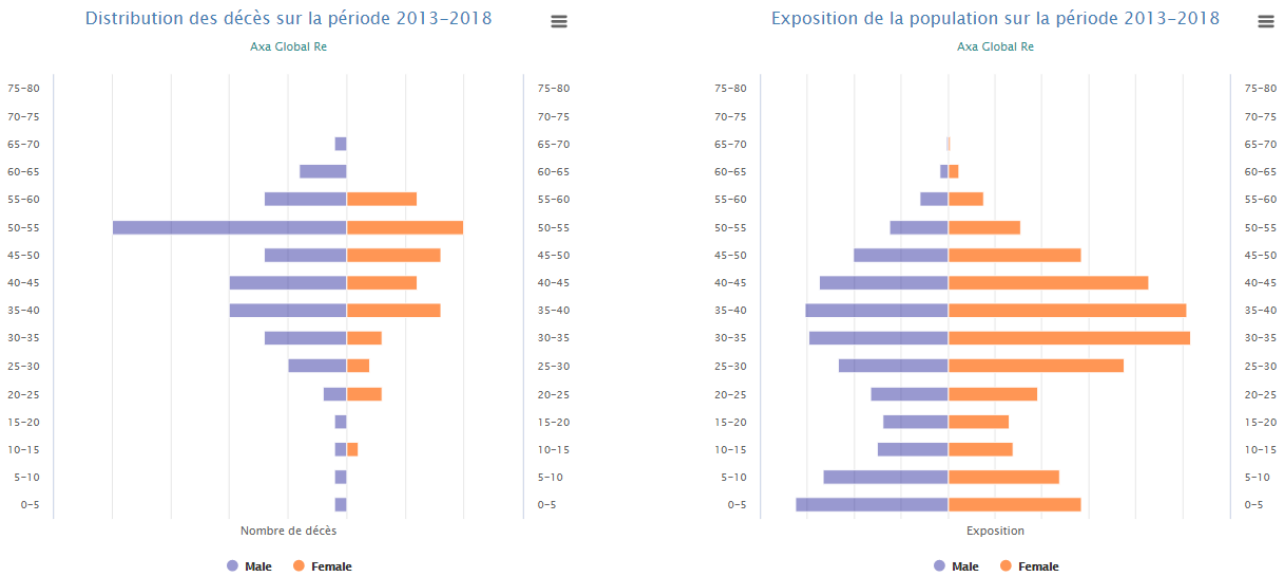
III.2.1. Analyse de la mortalité

Dans cette section, nous analyserons en détails la mortalité inhérente au portefeuille. Celui-ci à la particularité d'avoir une faible expérience en mortalité car le produit n'a été lancé qu'en 2013 et est constitué principalement d'une population assez jeune moins exposée au risque de décès. Nous fixons la période d'observation allant du 01/01/2013 à 31/12/2018 pour mener à bien cette analyse.

III.2.1.1. Exposition et nombre de décès

Les deux figures résument l'information sur l'exposition et le nombre de décès dans la population étudiée. Sur la figure III.2b, les femmes prédominent l'exposition sauf pour les âges de 0 à 10 ans. Contrairement à ce qu'on pourrait s'attendre, la mortalité est beaucoup plus accentuée chez les hommes que chez les femmes malgré leur faible exposition. Elle se matérialise par un nombre de décès supérieur et atteint un pic au groupe d'âge 50-55.

Par ailleurs, nous constatons que l'étude de la mortalité pourra se faire uniquement aux âges intermédiaires étant donné que l'expérience de décès n'est pas significatif pour les petits âges (0-30 ans) et les grands âges (60-100 ans). La calibration des taux se fera d'ailleurs sur l'intervalle d'âge (30-60ans).



(a) Distribution des décès

(b) Distribution de l'exposition

FIGURE III.2 – Distribution des décès et de l'exposition par sexe

III.2.1.2. Mortalité Globale

Ces deux graphes corroborent nos dires sur la faible expérience de notre portefeuille, les taux annuels de mortalité estimés sont relativement très bas et varient d'une année à l'autre. On compte en moyenne 1.5 décès pour 10 000 assurés. Egalement, la tendance de mortalité est assez forte chez la gente masculine en comparaison avec les femmes, on compte en moyenne 2.5 décès pour 10 000 assurés. Ces taux ont été construit en suivant la population des assurés à partir de 2013 jusqu'en 2018, on comptabilise pour tous les individus et ce sur toute la période d'observation, la durée vécue dans chaque âge et les éventuels décès. Le taux annuel étant le ratio entre les décès survenus au cours de l'année n et les expositions sur la même année.

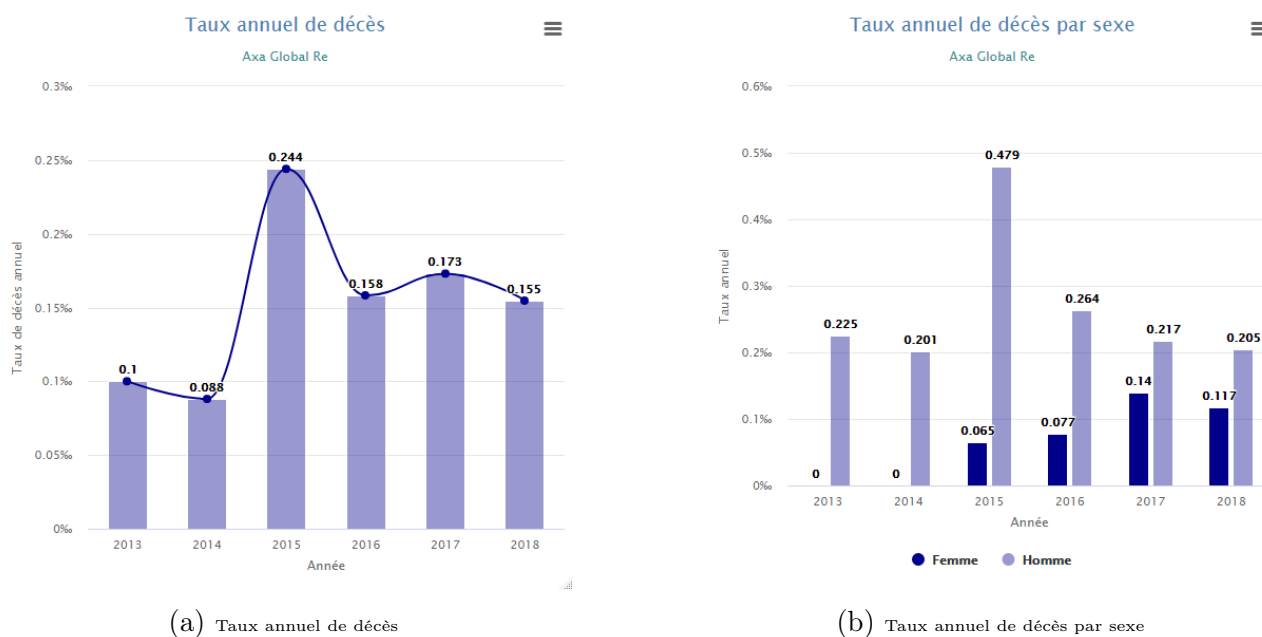


FIGURE III.3 – Taux annuel de décès

III.2.2. Estimation des taux de mortalité

III.2.2.1. Détermination des quotients par âge

Rappelons que l'objectif de l'étude de la mortalité est de déterminer la table de mortalité par âge. Celle-ci constituera l'entrée dans notre modèle de projection multi-états. Nous nous baserons pour la détermination des quotients par âge sur l'estimateur de Kaplan Meier et de Hoem. Le choix entre les deux estimateurs se fera à l'issue des tests que nous développerons dans la partie III.2.4..

Par ailleurs, puisque c'est une étude sur la mortalité d'une sous-population de Hong Kong, notre réflexion sera étayée par les hypothèses de l'entité asiatique d'AXA, celles-ci sont justifiées en raison de la longue expérience de la cédante sur ce marché. Leurs hypothèses seront d'une utilité majeure pour pallier le manque d'expérience en termes de décès observés sur notre portefeuille globale.¹

En se référant à la figure III.4, on note que les estimateurs de Kaplan Meier et de de Hoem sont

1. Le critère de Cochran n'est pas vérifié pour certains âges où on a l'ensemble des décès, mais le modèle développé est assez générique pour le portefeuille vie d'AXA Global Re. Par conséquent ce modèle pourra être réutilisé lorsque la base de données AGRé sera plus complète. Nous nous permettons ainsi de mener cette étude car on dispose de données externes de référence qui constituent un guide essentiel de l'étude de la mortalité, effectivement on dispose de la table HKA01 représentant la mortalité de la population de Hong Kong et la table de référence AXA HK.

relativement superposés sauf chez les femmes où on note quelques écarts au niveau de l'âge 57 et 60. En addition les taux estimés sont à l'intérieur de l'intervalle de confiance¹, celui-ci est toutefois assez large en raison des variations accidentelles des taux de mortalité résultant de la faible expérience du portefeuille. Cette variation est plus forte chez les femmes que les hommes, ceci est dû au fait qu'on a moins d'exposition chez les femmes et plus d'expérience (décès) chez les hommes.

En comparaison avec la mortalité de la population nationale, la mortalité du groupe étudié reste en dessous. Nous assurons par conséquent une sous-population qui présente un risque inférieur au risque de la population globale.

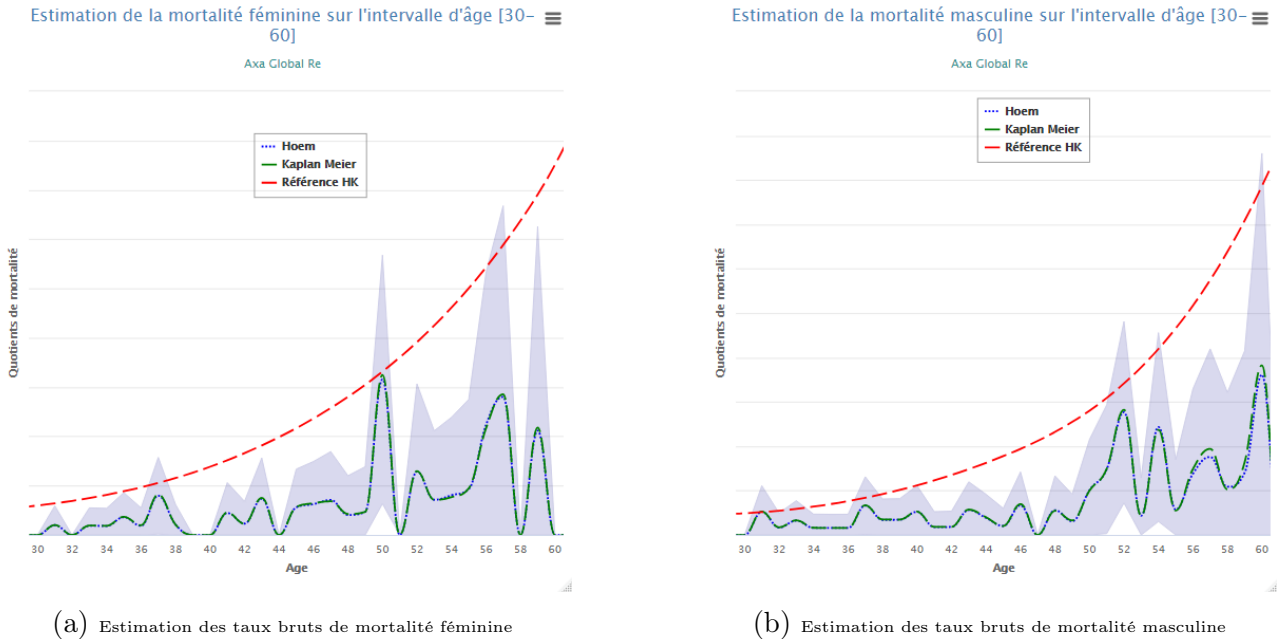


FIGURE III.4 – Estimation des taux par âge

III.2.3. Ajustement des quotients

III.2.3.1. Ajustement Whittaker Henderson

Comme c'est souvent le cas, la courbe de mortalité estimée présente des irrégularités liées aux fluctuations de l'échantillonnage. Par conséquent nous ajustons les quotients en utilisant les techniques de lissages mentionnées auparavant dans la section III.1.5.. Tout d'abord, pour éviter les problèmes liés aux quotients nuls nous procédons à une interpolation² de ces taux, c'est en effet une méthode justifiée et raisonnable en particulier sur cette intervalle d'âge où on dispose de l'a priori sur la croissance de la table de mortalité.

Pour cet ajustement nous avons fixé le critère de lissage à $h = 3$ et nous avons principalement utilisé la fonction *Whittaker.Mortalitytable* du package *demography* disponible sur *R*. Sur la figure ci-dessous nous regroupons les résultats par sexe, on remarque un léger écart chez les femmes vers les grands âges où le lissage des taux Kaplan Meier surestime la mortalité par rapport au taux lissés de Hoem.

1. Construit à partir de la formule citée dans la section III.1.2.

2. Pour assurer l'inversibilité de la matrice M III.1.5.

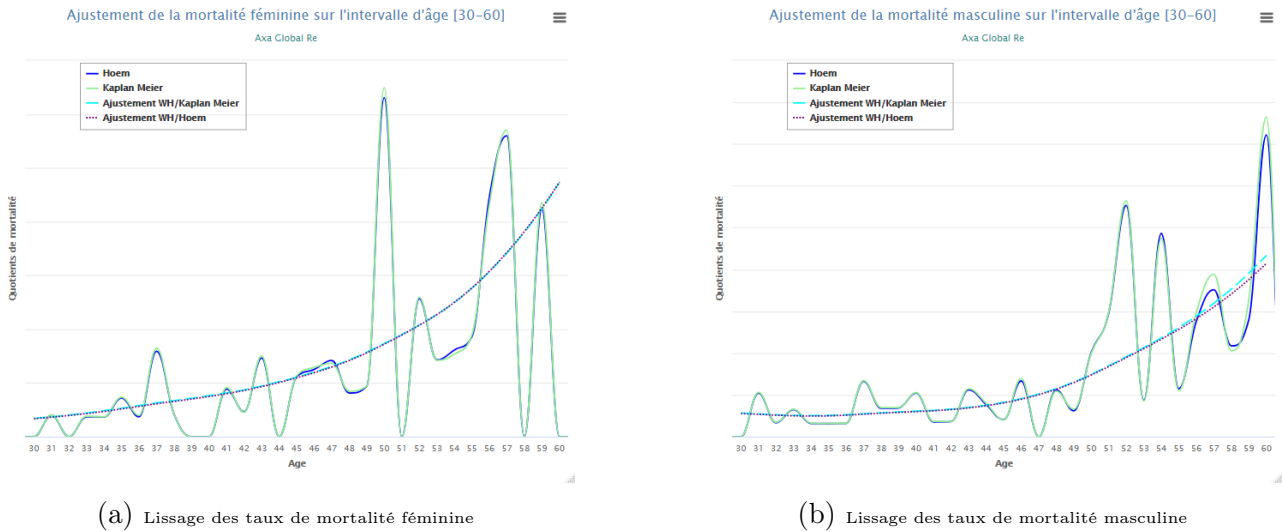


FIGURE III.5 – Ajustement de Whittaker Henderson des taux de mortalité

III.2.3.2. Ajustement de BRASS des quotients

L'ajustement de BRASS permet de réaliser une régression linéaire des logits des taux de mortalité estimés sur les taux de mortalité de référence. Nous résumons dans le tableau ci-dessous III.4 les paramètres estimés de notre modèle :

	Paramètre	Hommes	Femmes
Kaplan Meier	α	0.96	1.03
	β	-1.36	-0.92
Hoem	α	0.93	1.04
	β	-1.51	-0.85

TABLE III.3 – Paramètre de la minimisation non linéaire

Le modèle de Brass¹ est un modèle qui repose sur une donnée exogène, nous utilisons comme données externes la table de mortalité de référence de la population nationale. Ce modèle est dit sparse² et permet de capter le lien entre les deux populations. Le paramètre α permet de quantifier la vitesse de la mortalité dans le sous groupe étudié par rapport à la population nationale tandis que le paramètre β permet de la situer par rapport à la population nationale. Nous pouvons ainsi remarquer au regard des résultats ci-dessus, que la propagation de la mortalité chez les hommes est moins accentuée par rapport à la mortalité de la population nationale, mais à l'opposé la population féminine exhibe un comportement contraire (avec $\alpha > 1$).

Ci-dessous nous représentons graphiquement les ajustements de Brass par sexe.

1. NB : Le modèle de Brass sous-estime les quotients de mortalité lorsque celui-ci dépasse 0.5 en raison de la convexité de la fonction logit à partir de 0.5 (voir annexe)

2. Utilisant le moins de paramètres (2 dans ce cas)

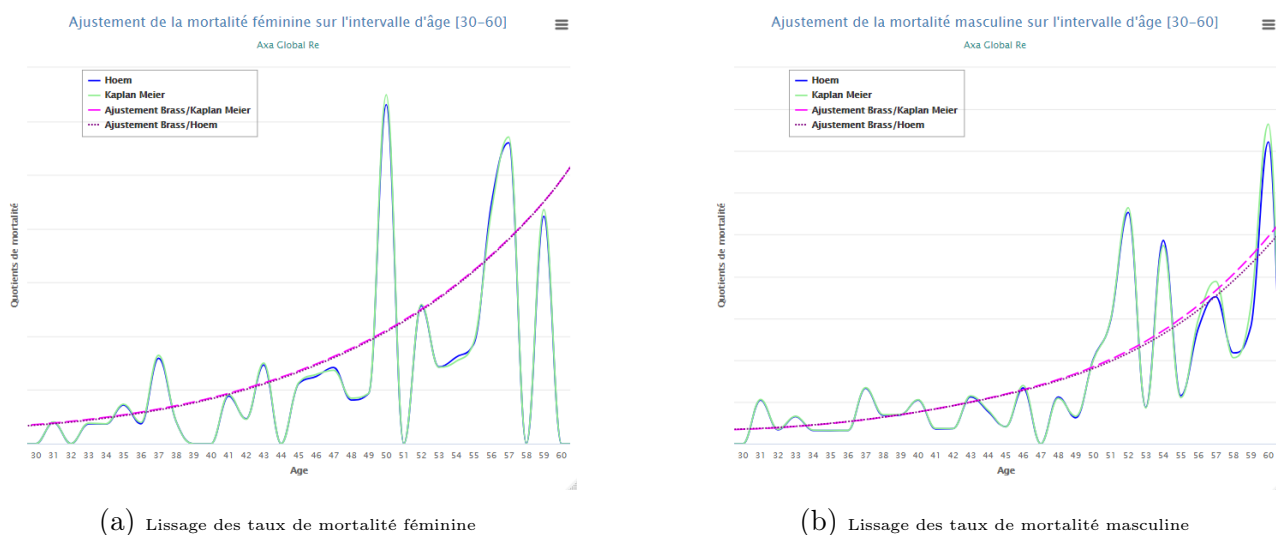


FIGURE III.6 – Ajustement de BRASS des taux de mortalité

III.2.3.3. Ajustement de Makeham des quotients

L'ajustement paramétrique de Makeham a été réalisé par la méthode des moindres carrés pondérés. Nous minimisons ce dernier en utilisant la méthode de Nelder-Mead (Cf Annexe F), ci-dessous nous résumons les estimations des paramètres A, B, C ¹, nous représentons ensuite l'ajustement des quotients aux données.

	Paramètres	Hommes	Femmes
Kaplan Meier	A	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$6.9 \cdot 10^{-5}$
	B	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$7.18 \cdot 10^{-7}$
	C	1.17	1.12
Hoem	A	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$6.5 \cdot 10^{-5}$
	B	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$7.4 \cdot 10^{-7}$
	C	1.16	1.12

TABLE III.4 – Paramètre de la minimisation sous contraintes de Makeham

1. $A > 0, B > 0, C > 1$

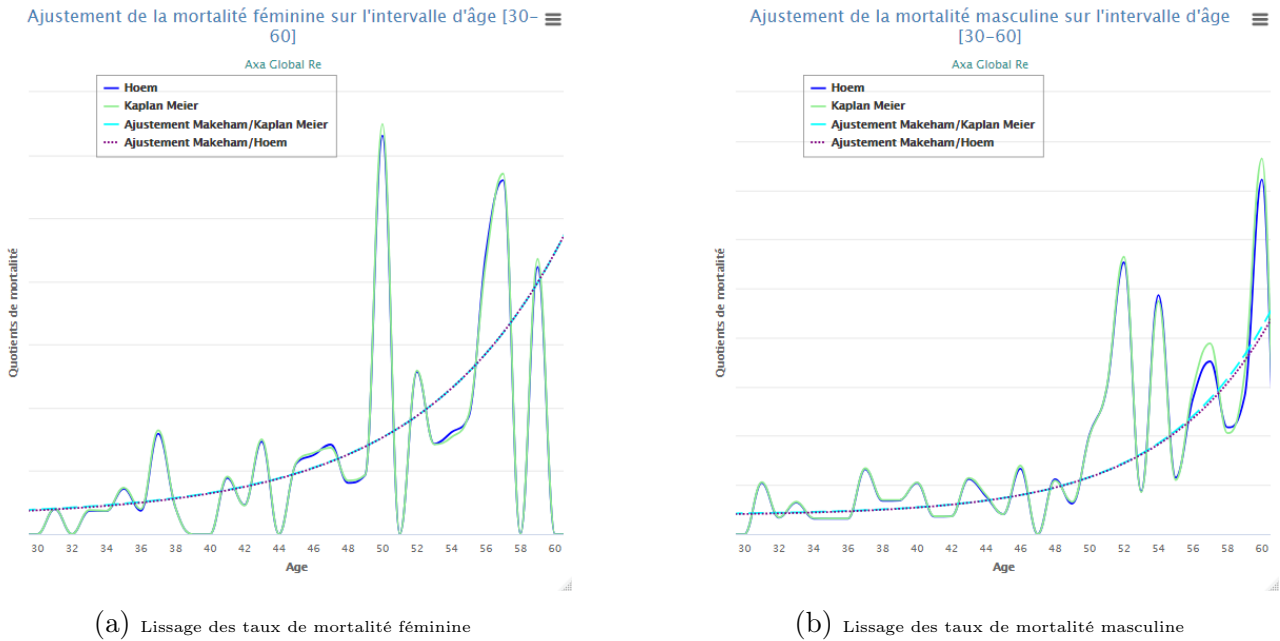


FIGURE III.7 – Ajustement de Makeham des taux de mortalité

III.2.4. Critique des résultats et adéquation

III.2.4.1. Validation locale

Nous analysons dans un premier temps les différents résidus obtenus après lissage pour la population féminine et la population masculine.

Nous remarquons d’abord qu’il n’y a pas de différence significative entre les deux estimateurs KM et Hoem : les deux produisent presque les mêmes graphiques de résidus indépendamment de la méthode de lissage adoptée. Cette interprétation est valable aussi bien pour la population masculine (représentée ci-dessous III.8) que la population féminine. (cf G.1)

Par ailleurs, en analysant les graphiques des résidus de réponse de l’ajustement de Brass, Whittaker Henderson et de Makeham pour la population masculine, nous remarquons que ceux-ci n’exhibent relativement aucune tendance particulière et sont centrés autour de la droite horizontale d’ordonnée nulle, sauf pour les grands âges à partir de 50 ans où on note la présence d’outliers indiquant que le modèle n’a pas pu capter la variabilité des décès dans cette région. En analysant les résidus de la déviance, notre intuition se confirme : nous notons un concentré de valeurs négatives des résidus dans l’intervalle d’âge [50-60] indiquant que le modèle sous-estime les décès dans cette région et de façon plus accentuée avec l’ajustement de Whittaker Henderson et de Makeham. Pour l’intervalle d’âge [30-50], la plupart des résidus de Pearson de l’ajustement de Brass sont compris entre [-2,2] contrairement au modèle ajusté de Whittaker Henderson et de Makeham où on dénombre de nombreux outliers. Enfin globalement les résidus de Pearson du modèle de Brass se comportent mieux que les résidus résultants de l’ajustement de WH et de Makeham sur tout l’intervalle d’âge d’étude. Nous pouvons relativement conclure de cette première analyse que l’ajustement de Brass est le mieux adapté pour le cas des hommes.

Quant à la population féminine, nous remarquons pareillement que les résidus de réponse n’arrivent pas à capter la volatilité dans l’intervalle d’âge [50-60]. En effet on sous estime la mortalité, particulièrement pour les âges 51,58 et 60. Cependant les résidus de Pearson sont globalement bien centrés autour de zéro et compris entre [-2,2]. Notre choix sera dirigé vers la méthode de Makeham en raison des faibles résidus de réponse, contrairement à l’ajustement de Brass et de WH.

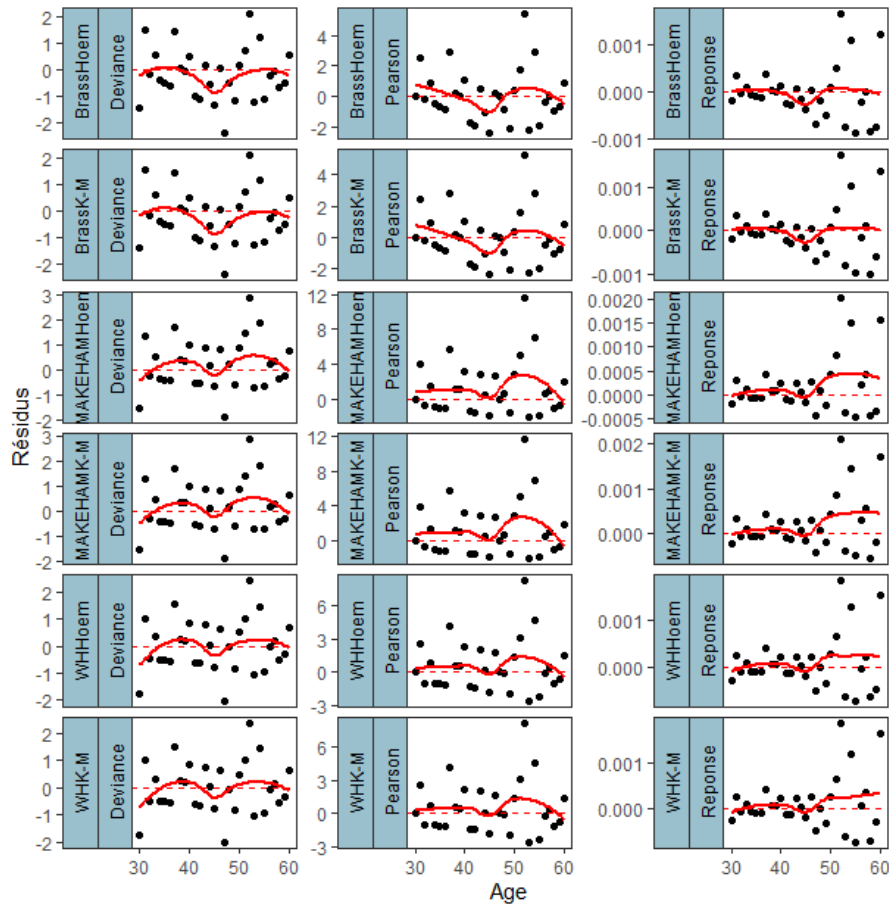


FIGURE III.8 – Résidus de la population masculine

En addition, nous analysons les écarts entre les décès estimés et les décès observés. Nous remarquons globalement que les écarts observés dans la population féminine sont plus forts et sont la conséquence d'une faible expérience en terme de décès, quant à la population masculine les écarts sont relativement moins importants.

Les résultats des estimations corroborent deux idées principales que nous avons évoquées auparavant dans l'analyse des résidus. La première est liée au fait que les deux estimateurs ajustés produisent les mêmes résultats à quelques différences près, que ce soit pour la population masculine ou féminine. La deuxième est liée au fait que l'ajustement de Makeham et Whittaker Henderson sous-estime la mortalité dans la population masculine. A titre d'exemple, chez les hommes nous observons 63 décès, l'ajustement de Brass de l'estimateur Kaplan Meier surestime la mortalité et affiche un écart de 6%, à l'opposé l'ajustement de WH du même estimateur sous-estime la mortalité et affiche un écart de 8%.

A l'issue de ces analyses, et en considérant le fait que nous évaluons un produit décès, l'estimateur de Hoem ajusté avec la méthode de Brass est le plus concluant pour la population masculine! Pour la population féminine, l'estimateur de Hoem-Makeham est le plus adapté. Pour confirmer les résultats obtenus, nous allons procéder à une validation globale des ajustements.

	Hommes			Femmes		
	Observés	Estimés	Ecart %	Observés	Estimés	Ecart
KM-BRASS	189	201	6%	123	160.5	30%
KM-WH	189	174	-8%	123	138	12%
KM-MAKEHAM	189	150	-21%	123	127	3.4%
Hoem-Brass	189	199	5%	123	139	28%
Hoem-WH	189	171	-9%	123	139	12.9%
Hoem-MAKEHAM	189	150	-22.9%	123	126	2%

TABLE III.5 – Décès observés/Décès Estimés

III.2.4.2. Validation Globale

Pour valider globalement les résultats obtenus et conclure sur le choix de l'ajustement approprié, nous réalisons une série de tests globaux dont nous regroupons les résultats dans le tableau ci-dessous III.6. L'approche consiste à choisir l'estimateur et l'ajustement qui répondent aux maximum de critères énoncés dans la section III.1.8..

A partir des résultats du tableau, nous remarquons que l'ajustement de Hoem-Brass est le plus approprié pour la population masculine tandis que l'estimateur Hoem-Makeham ajuste bien la mortalité pour la population féminine. Ces résultats doivent être interprétés avec un peu de recul et devraient prendre en compte plusieurs critères, notamment la nature du produit (décès/vie) et la vision du réassureur (prudent/moins prudent).

	Hommes						Femmes					
	KM-Brass	Hoem-Brass	KM-WH	Hoem-WH	KM-MAKEHAM	Hoem-MAKEHAM	KM-Brass	Hoem-Brass	KM-WH	Hoem-WH	KM-MAKEHAM	Hoem-MAKEHAM
Déviante (valeur moins forte)	29.56	29.42	27.76	27.87	32.17	32.5	37.35	36.96	35.13	34.99	35.16	35.05
SMR (proche de 1)	0.93	0.95	1.08	1.10	1.27	1.29	0.76	0.77	0.87	0.88	0.965	0.97
χ^2 (valeur moins forte)	28.01	28.18	28.64	29.16	40.3	41.16	28.27	28.31	29.92	30.10	33.5	33.68
MAPE (valeur moins forte)	28.6	28.06	23.86	23.46	21.70	21.44	26.32	25.67	21.37	21.16	19.88	19.67
Rapport de vraisemblance	14	14.7	13.8	13.9	16.08	16.25	18.6	18.48	17.5	17.4	17.58	17.52

TABLE III.6 – Résultats des critères de la validation globale

III.2.4.3. Fermeture et ouverture des tables de mortalité

Nous avons réussi dans un premier temps à calibrer la mortalité sur l'intervalle d'âge [30-60]. Pour rappel, nous avons sélectionné l'estimateur *Hoem-Brass* pour la population masculine et *Hoem-MAKEHAM* pour la population féminine.

Le travail demeure relativement incomplet étant donné que nous cherchons des tables de mortalité pour tous les âges. Nous proposons ainsi dans cette section d'extrapoler la mortalité pour les âges qui n'ont pas été traités en raison d'insuffisance des données à savoir [0-30] et [60-100].

Nous choisissons d'utiliser le modèle relationnel de Brass pour l'ouverture et la fermeture des tables de données pour la population masculine et féminine. Il a été démontré dans plusieurs études (en particulier Denuit 2005 [5]) que les différentes méthodes utilisées pour l'extrapolation aux grands âges sont semblables et qu'il n'y a pas de différence significative.

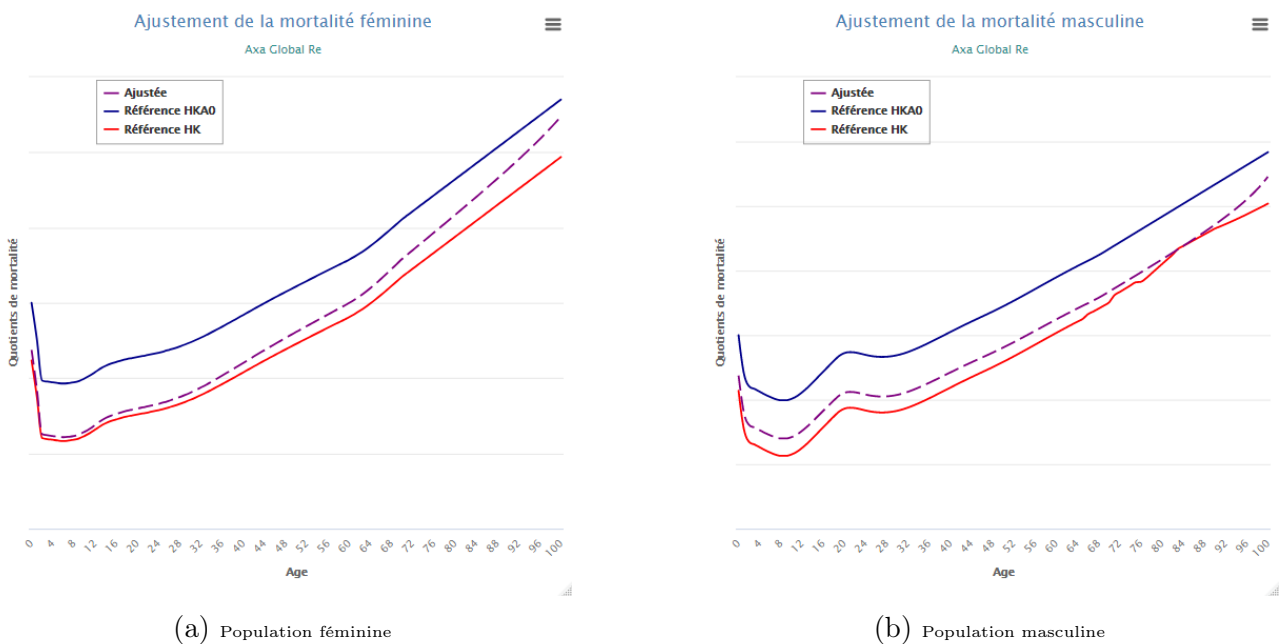


FIGURE III.9 – Ajustement final de la table de mortalité

Sur la figure III.9, nous traçons la courbe de mortalité ajustée par la méthode de Brass (en violet). Nous remarquons que celle-ci est délimitée par deux courbes, en rouge la mortalité estimée par l'entité asiatique et en bleu la mortalité de la population nationale de Hong Kong. Cette représentation en échelle logarithmique permet de confirmer deux constats : d'une part l'ajustement de la mortalité est fidèle au regard du risque de la mortalité dans la population nationale. En effet que ce soit pour les hommes ou pour les femmes, les deux courbes affichent des comportements similaires en termes de mortalité, notamment l'allure de la "bosse des accidents" et la mortalité infantile. D'autre part nous constatons que la cédante semble sous-estimer un peu la mortalité.

III.3. Analyse et calibration des incidences

A l'image des quotients de mortalité, les taux d'incidence seront calibrés en utilisant l'estimateur non paramétrique de Kaplan Meier.

Nous allons tout d'abord analyser chacune des garanties et présenter les principaux résultats de l'ajustement. Nous procéderons enfin à une série de tests pour valider les résultats.

Dans l'étude de la mortalité, nous n'avons considéré que la variable sexe dans la modélisation,

cependant l'analyse de la morbidité se fera autrement en considérant une deuxième variable liée à l'état Fumeur/Non Fumeur.

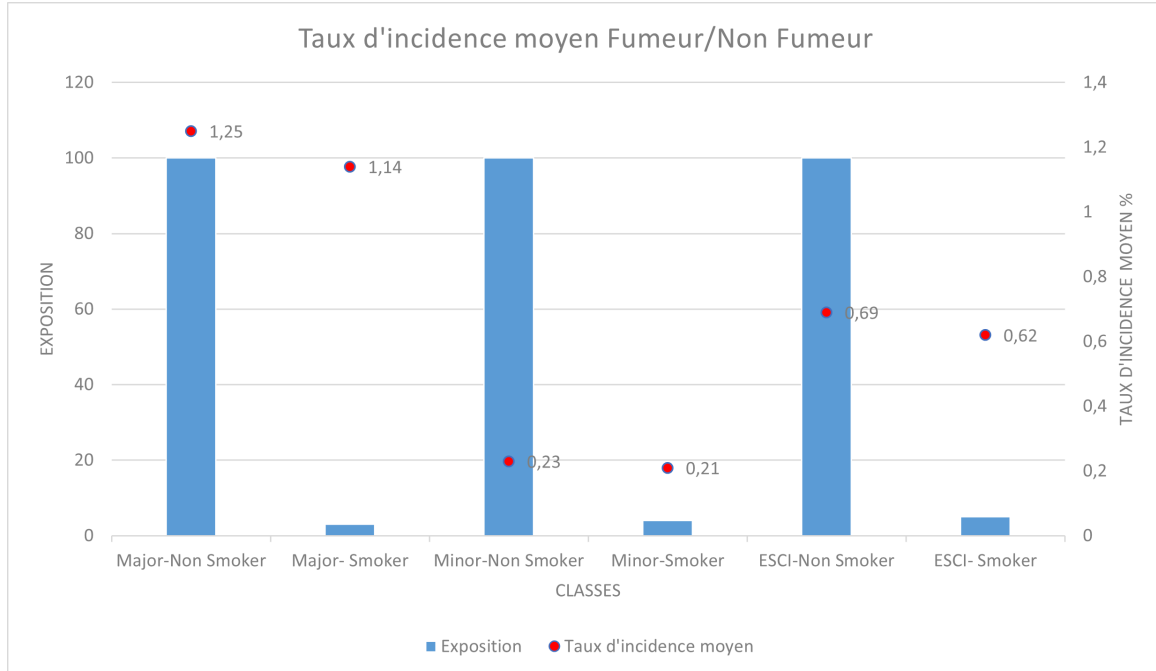


FIGURE III.10 – Taux d'incidence moyen par produit et par classe

Nous pouvons tout de suite affirmer qu'il n'y a pas de différences significatives entre les deux classes Fumeur/Non Fumeurs. L'a priori à notre disposition est que cette variable est discriminante mais en revanche on le constate pas encore au niveau des données à cause de la faible expérience et la faible exposition de la catégorie.

III.3.1. Calibration et validation des taux d'incidence

L'estimation des taux d'incidence peut s'avérer parfois compliquée en raison de la faible quantité de données. Nous mettons en évidence cette problématique en analysant le graphique (fig III.11) représentant nos estimations brutes.

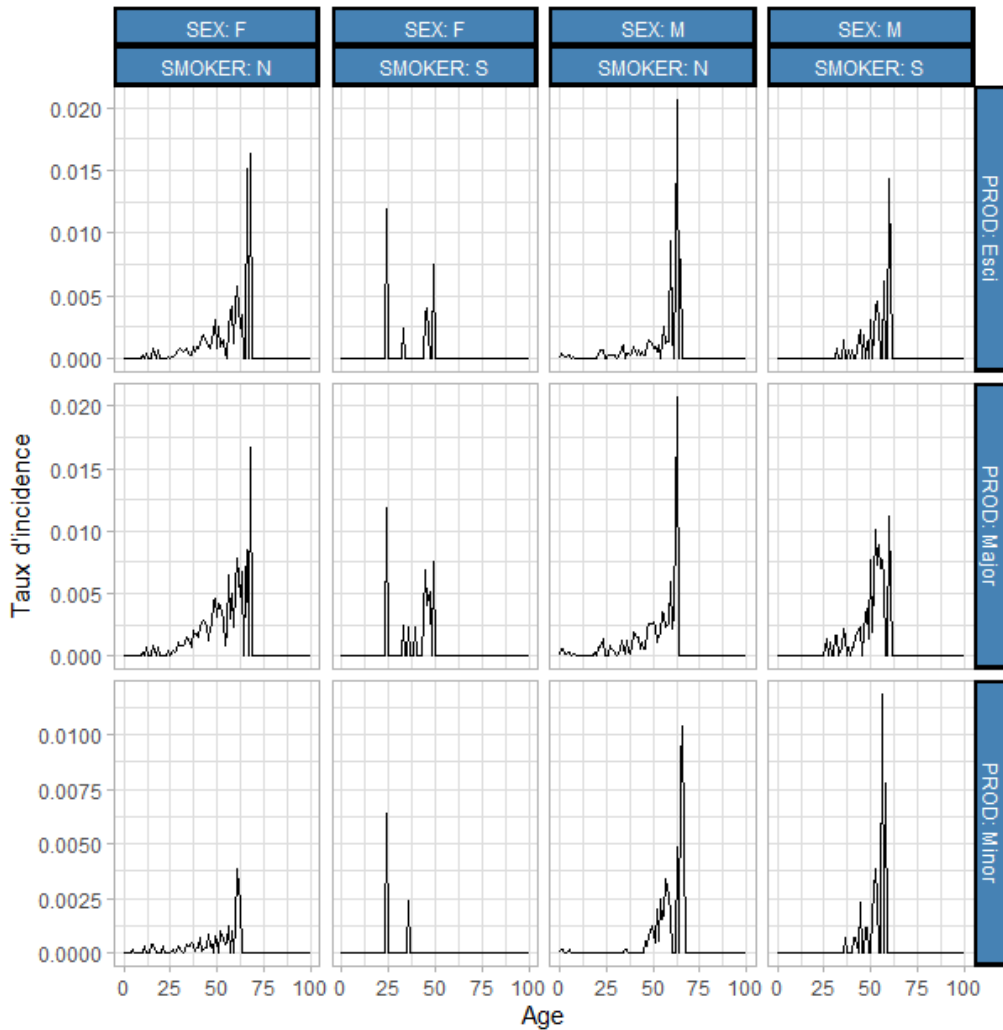


FIGURE III.11 – Taux d'incidence

Le graphique est une représentation des taux d'incidence estimés par produit, par genre et par catégorie "Fumeur/Non fumeur". Nous pouvons constater, que la segmentation effectuée entraîne des irrégularités surtout pour les classes moins représentées, en particulier la population féminine de la catégorie "Fumeur" couverte contre les risques mineurs. En effet ce qu'on espérait gagner en terme de granularité de l'information est perdue à cause de l'insuffisance des données ! Le lissage dans ce cas particulier ne peut être juste. Nous proposons ainsi d'ajuster les taux d'incidence dans la population féminine en faisant abstraction de la catégorie d'appartenance. Nous privilégions la méthode de Whittaker Henderson pour réaliser l'ajustement des taux. L'approche présente néanmoins quelques difficultés, notamment la détermination du paramètre de lissage h indiquant le poids relatif du critère de régularité dans la fonction de minimisation et du paramètre z de régularité. Il n'existe pas de méthode analytique parfaite pour déterminer avec précision la valeur de ces deux indicateurs, c'est pour cela que nous optons pour un critère visuel.

Pour ce faire, nous implémentons une application sous *R/Shiny* qui a comme inputs les paramètres de lissage, nous les faisons varier simultanément et nous nous arrêtons au moment où l'irrégularité de la courbe semble suffisamment corrigée.

Maladies Graves

Les maladies graves sont majoritairement représentées dans notre portefeuille, en moyenne le taux de sinistralité est de 0.6%. Nous nous limiterons lors de cet ajustement à l'intervalle d'âge

[30-60]. Nous présentons ci-dessous les résultats de l'ajustement pour les différentes catégories citées auparavant. (Critère de lissage $h=0.4$, $z=2$)



FIGURE III.12 – Ajustement WH des taux d'incidences des maladies majeurs

Naturellement les taux d'incidence sont croissants. Les résultats sont résumés dans le tableau

Test	Femmes	Hommes Non Fumeur	Hommes Fumeur
R_deux	0.8	0.6	0.2
SMR	0.91	0.77	0.68
χ^2	33	30	50

TABLE III.7 – Résultats des tests sur la garantie "Maladie Majeures"

Nous pouvons remarquer que l'ajustement des taux d'incidence de la population masculine est celui qui présente les statistiques les moins concluantes, surtout pour la population *Fumeur*, car le test d'adéquation R_deux affiche une faible valeur et affirme que le modèle proposé n'explique pas complètement la variance totale observée dans cette population. De même le SMR est inférieur à 1, le modèle surestime l'incidence dans cette plage d'intervalle, contrairement à la population féminine. L'idée de regrouper les fumeurs avec les non fumeurs semble donner de bons résultats, notamment avec un SMR proche de 1 et une valeur faible de χ^2 , nous arrivons à cadrer avec les observations.

En addition, nous réalisons un test rétro-actif (*Backtest*) sur les données en comparant les observations avec les prévisions du modèle. Nous résumons les écarts dans le tableau suivant.

	Femmes	Hommes Non Fumeur	Hommes Fumeur
Observés	360	110	53
Estimés	398	142	77
Ecart%	10 %	29%	45%

TABLE III.8 – Backtesting des résultats

Nous pouvons conclure que l’ajustement est relativement bon pour la population féminine avec un écart de 10% contrairement à la population masculine et surtout la catégorie "Fumeur" qui présente un fort écart. Une alternative à cette problématique serait d’estimer une loi d’incidence unisexe, ne prenant en considération que les âges et qu’on appliquera sur toute la population en attendant que les données soient en quantité suffisante pour définir fidèlement les taux d’incidence par catégories.

D’ailleurs, nous nous restreignons finalement dans le cas des maladies majeures à la table d’incidence par genre. On pourra noter une amélioration des indicateurs et une meilleure représentation des données. (Voir annexe, fig C.1). Les indicateurs d’incidence semblent s’améliorer avec cette manoeuvre. Nous pourrions aussi se reconforter sur les résultats en se positionnant par rapport aux ajustements réalisés par la cédante.

	Femmes	Hommes
Observés	369	163
Estimés	404	189
Ecart%	9%	15%

TABLE III.9 – Résultats de l’ajustement du modèle des maladies majeures

Maladies Précoces

Nous suivrons le même cheminement dans l’analyse de l’ajustement sur les taux d’incidences des maladies précoces. Contrairement aux maladies majeures, la garantie "Maladie Précoce" est moyennement touchée par la sinistralité : on compte en moyenne 0.3% sinistre par police. Le graphique III.13 ci-dessous dresse l’ajustement des taux bruts précoces. (**Critère de lissage $h=0.15, z=2$**).

En analysant les graphiques, on pourra remarquer que les ajustements (lignes rouges) sont globalement à l’intérieur de l’intervalle de confiance (95%) sauf pour catégorie *Fumeur*, principalement à cause d’une faible sinistralité et une faible exposition.

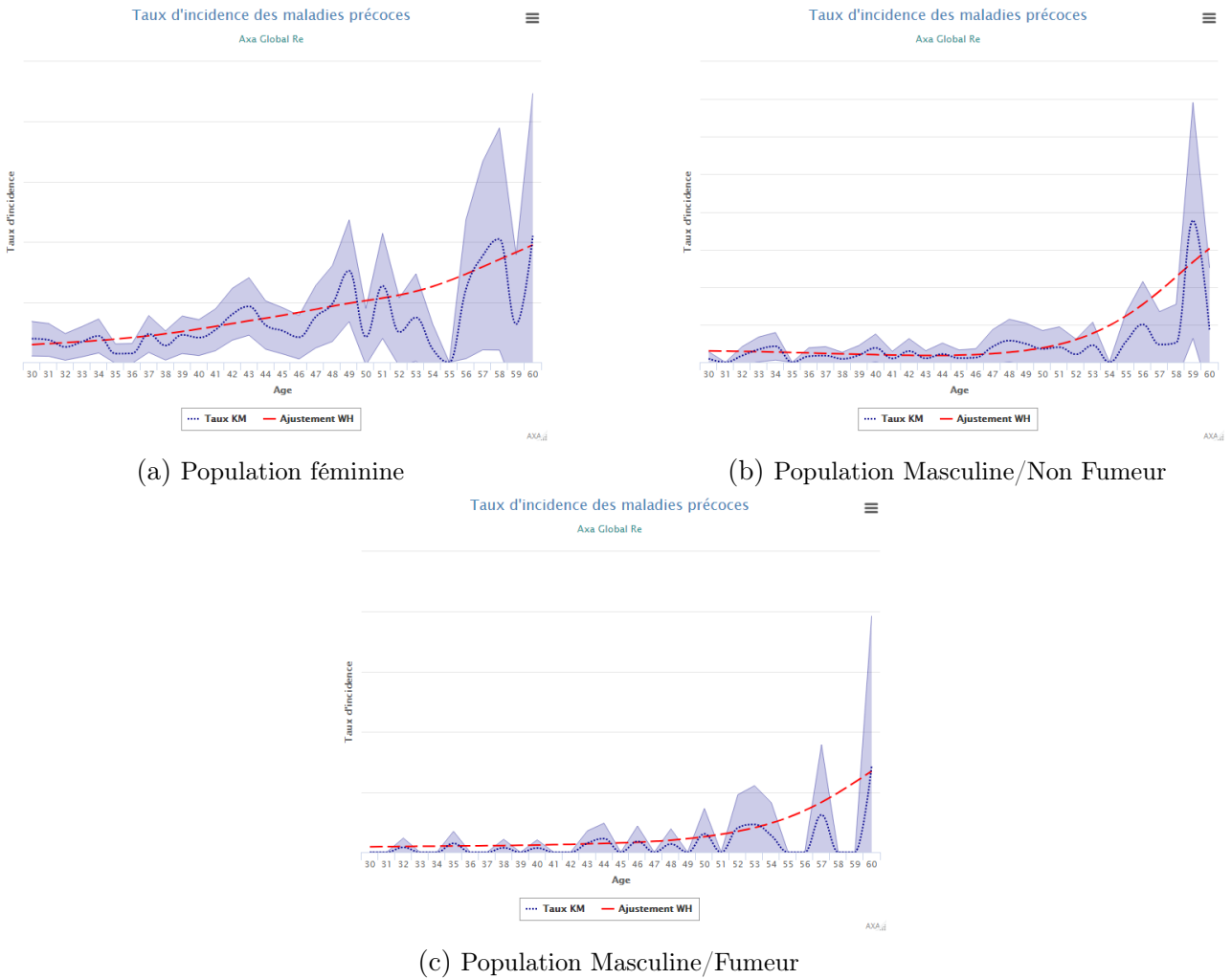


FIGURE III.13 – Ajustement de WH des taux d’incidence des maladies précoces

Test	Femmes	Hommes Non-Fumeur	Hommes-Fumeur
R_deux	0.70	0.60	0.23
SMR	0.83	0.7	0.45
χ^2	35	34	61

TABLE III.10 – Résultats des tests ESCI

Nous pourrions noter que l’ajustement de la population masculine "Fumeur" n’est pas adéquat, cela est confirmé par la faible valeur du SMR indiquant une surestimation aberrante des décès. En revanche, on pourra se reconforter en réalisant une comparaison entre les tables de référence d’AXA HK et nos estimations. Celles-ci restent largement en dessous (fig B.2) et témoigne du fait que l’expérience d’AGRe n’est pas assez significative pour trancher définitivement sur les résultats.

Quant à la population féminine, les résultats indiquent globalement que l’ajustement est relativement bon, notamment avec R_deux élevé et une valeur de SMR proche de 1.

De plus, nous réalisons un test rétrospectif (*backtest*) sur les observations pour juger de la qualité de l’ajustement.

	Femmes	Hommes Non Fumeur	Hommes Fumeur
Observés	193	62	22
Estimés	232	88	48
Ecart%	20 %	41%	118%

TABLE III.11 – Backtesting des résultats

Il en ressort que l’ajustement n’est pas très correct, nous surestimons la survenance des sinistres. Le modèle fournit des résultats prudents, quelque soit la catégorie étudiée. En se positionnant par rapport à la référence AXA Hong Kong(B.2), nous pouvons conclure que notre modèle est globalement bon.

Finalement nous proposons une table unisexe seulement, pour affiner davantage les statistiques globales (Voir annexe figC.2). Celle-ci présente des résultats améliorés.

	Femmes	Hommes
Observés	197	84
Estimés	236	103
Ecart%	19 %	22%

TABLE III.12 – Résultats de l’ajustement unisexe de l’incidence des maladies précoces

Maladies Mineures

La segmentation selon la catégorie fumeur dans ce cas n’est pas très intéressante étant donné que nous n’avons qu’une dizaine de sinistres enregistrés. Nous présenterons uniquement l’ajustement de l’incidence de cette maladie sur l’intervalle d’âge [30-60]. Le critère de lissage adopté est ($h=0.035, z=2$).

On pourra noter sur la figure III.14 que les ajustements sont globalement à l’intérieur de l’intervalle de confiance particulièrement pour la population masculine, en raison de l’écart observé dans l’exposition. Toutefois l’intervalle de confiance est volatil aux grands âges ce qui nous pousse à avoir plus de recul sur les valeurs qu’on pourra obtenir dans cette région.

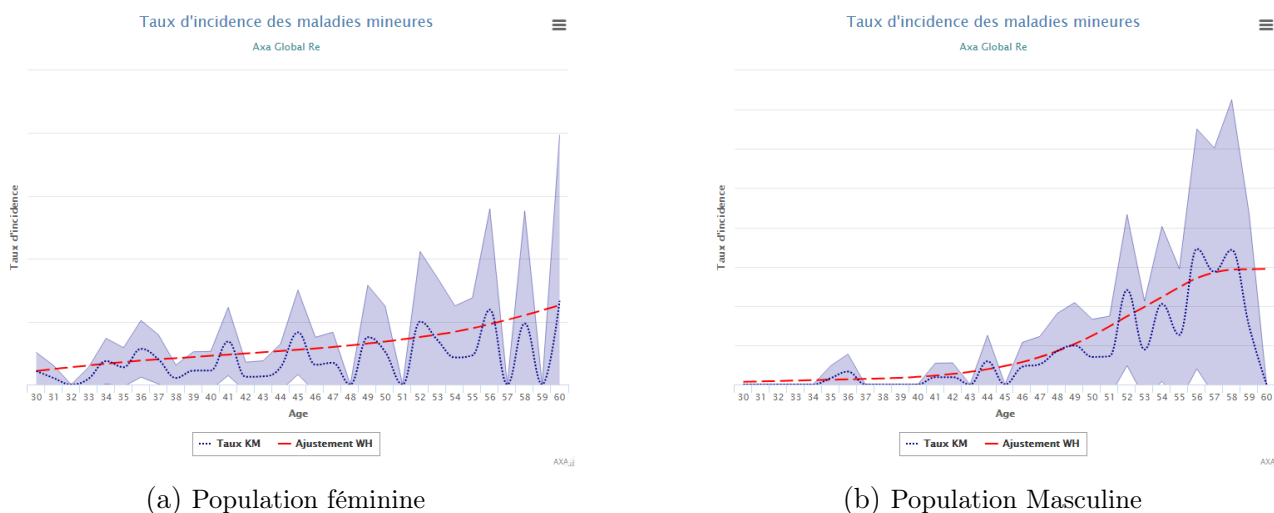


FIGURE III.14 – Ajustement de WH des taux d’incidence des maladies mineures

Par ailleurs nous procédons à plusieurs tests sur l’ajustement des lois d’incidence, nous regroupons les résultats dans le tableau suivant.

Test	Femmes	Hommes
R_deux	44	33
SMR	0.67	0.71
χ^2	29	20

TABLE III.13 – Résultats des tests Minor

Les résultats de la modélisation de l'incidence de ce sinistre n'est pas très convaincante. On note un SMR loin de 1 indiquant une sur estimation de l'incidence des maladies mineures.

	Femmes	Hommes
Observés	62	48
Estimés	91	66
Ecart%	46 %	37%

TABLE III.14 – Résultats de l'ajustement unisexe de l'incidence des maladies mineures

D'un point de vue statistique le modèle n'est pas adéquat, toutefois en se positionnant par rapport aux estimations d'AXA HK (figB.3), nous pouvons confirmer les résultats.

III.4. Analyse et calibration des lapses

Le rachat (lapse) fait partie des options et garanties dont bénéficie l'assuré lorsqu'il souscrit son contrat d'assurance. C'est une option qui lui permet de récupérer ses cotisations avant la date d'échéance du produit. On pourrait l'assimiler dans le contexte financier à une option américaine dont le temps d'exécution est aléatoire et dont le sous-jacent est par exemple dans le cas de l'épargne la réserve mathématique. Cela présente une problématique pour l'assureur qui doit disposer de fonds à tout instant. Dans cette partie sur la modélisation des rachats, nous nous intéresserons dans un premier temps à analyser graphiquement la variation en fonction des variables comme l'âge, le terme de paiement et la durée de la police, et nous procéderons ensuite à une calibration la cadence des taux de rachat en utilisant une méthode apparentée à la méthode Chain Ladder utilisée en provisionnement.

III.4.1. Analyse graphique

Nous décidons dans cette partie de détecter les variables qui auraient un impact sur le rachat. La figure ci-dessous représente les taux de rachat en fonction de trois catégories d'âge ([45-54], [35-44] et [25-34]) et la durée. Les taux de lapses mensuels sont bien à discriminer selon la durée de la police, en effet celui-ci croît entre la première et la deuxième année puis décroît ensuite. En revanche la variable catégorie d'âge ne semble pas discriminante, considérons par exemple la *duration* = 1, la boîte à moustache en noir exhibe une distribution de taux de rachat similaire pour les différentes catégories d'âges choisies. Il est ainsi assez clair que cette variable ne rajoute pas d'information significative sur les taux de rachat.

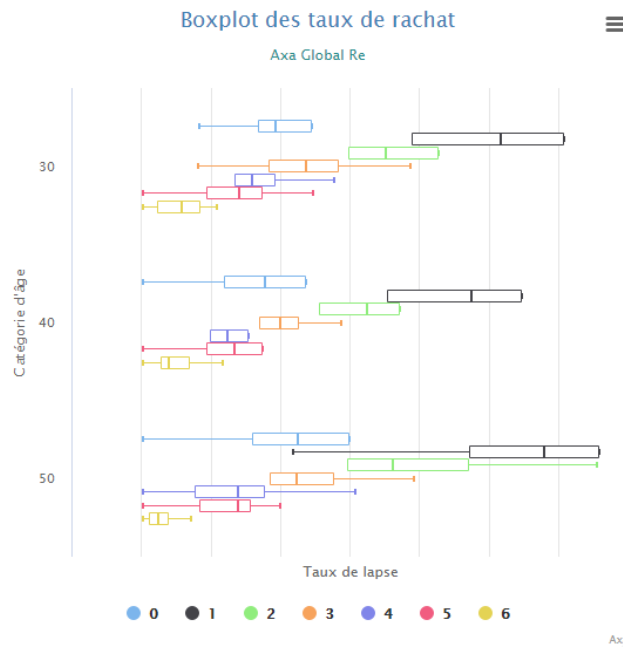


FIGURE III.15 – Boxplot des taux de rachat en fonction de la catégorie d'âge

Nous regardons ensuite si les modalités de paiement sont assez discriminante dans la détermination des taux de rachat. Pour ce faire, nous représentons sur la figure III.16 les taux de rachat mensuel selon les modalités de paiement et la durée.

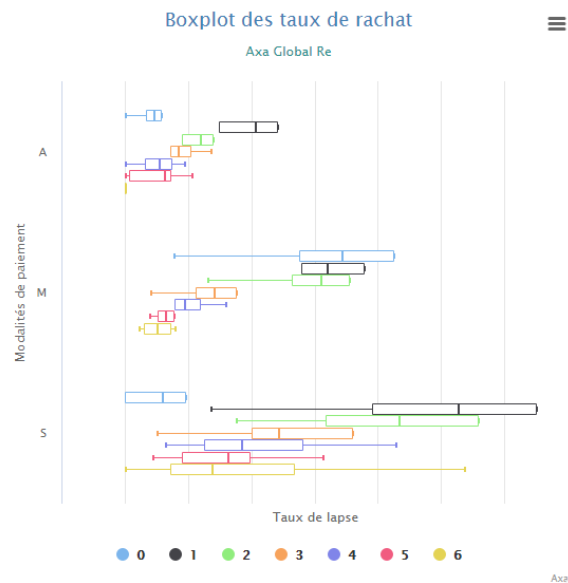


FIGURE III.16 – Boxplot des taux de rachat en fonction des modalités de paiement

Contrairement à la catégorie d'âge, les boxplots semblent varier en fonction des modes de paiements. Avec des taux significativement plus élevés dans le cas d'un mode de paiement mensuel, au moins pour les premières années de durée. Un assuré qui paie mensuellement sa prime aura une plus forte probabilité de racheter son contrat contrairement à la personne qui paie annuellement sa prime.

Egalement on pourra montrer de même que le "Code Plan" est l'un des drivers du rachat. En effet comme défini c'est le nombre d'années au bout duquel le taux de prime n'est plus garanti, cela aura pour effet de déclencher un nombre conséquent de rachat.

III.4.2. Calibration des taux de rachat

Nous proposons une modélisation des taux de rachat en se basant uniquement sur les variables internes à notre disposition. Une approche beaucoup plus complète aurait consisté à prendre en compte les facteurs socio-économiques caractérisants Hong Kong, par exemple la fiscalité, le spread de crédit...

Le calcul Best Estimate des rachats se fera en utilisant la méthode de Mack-ChainLadder empruntée au provisionnement de l'assurance non vie. Effectivement l'assureur dispose d'information sur l'évolution des contrats de son portefeuille à partir de la date effective de souscription de la police. La ventilation de cette évolution selon le "Mode de Paiement" et le "Code Plan" rajoute un degré de granularité sur l'information portée par les triangles.

III.4.2.1. Méthode de Mack

Le modèle stochastique de Mack-ChainLadder repose sur trois hypothèses :

- Les années de survéance sont indépendantes, i.e : $\{C_{i,1} \dots C_{i,n}\}, \{C_{j,1} \dots C_{j,n}\}$ sont indépendants pour $i \neq j$.
- $\mathbb{E}(C_{i,k+1}/C_{i,1} \dots C_{i,k}) = \lambda_k * C_{i,k}$
- $\mathbb{V}(C_{i,k+1}/C_{i,1} \dots C_{i,k}) = \sigma_k^2 * C_{i,k}$

L'idée de Mack-Chain Ladder en P&C est que l'évolution des paiements cumulés dépend des facteurs de développement (link ratio λ_j) qui ne dépendent pas des années de survéance.

Année de survéance	0	1	2	3	4
201301	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
201302	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	...
201303	C_{31}	C_{32}	C_{33}
201304	C_{41}	C_{42}
201305	C_{51}

TABLE III.15 – Triangle des paiements cumulés

Les facteurs de développement représentent le coefficient de passage d'une année de développement à l'autre.

$$C_{i,j+1} = \lambda_j * C_{i,j}$$

où l'estimation de λ_j est donnée par

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} \quad \text{pour } j \text{ variant de } 1 \text{ à } n-1$$

Sous les deux premières hypothèses de Mack, cet estimateur est sans biais. En effet

$$\mathbb{E}(\hat{\lambda}_k) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\hat{\lambda}_k / C_{i,1} \dots C_{i,k}))$$

$$\mathbb{E}(\hat{\lambda}_k) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}} / C_{i,1} \dots C_{i,k}))$$

$$\mathbb{E}(\hat{\lambda}_k) = \mathbb{E}(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}} \sum_{i=1}^{n-k} \mathbb{E}(C_{i,k+1} / C_{i,1} \dots C_{i,k}))$$

$$\mathbb{E}(\hat{\lambda}_k) = \lambda_k$$

Cette formule permet d'estimer le triangle inférieur des montants cumulés III.15 en pointillés, et par conséquent de retrouver la réserve à mettre en place pour répondre aux engagements envers les assurés. Autre avantage de la méthode Mack est la possibilité de construire les intervalles de confiance sur la réserve constituée. En effet si on note par R_i la réserve à mettre en place pour une année de survenance donnée, Mack propose cet estimateur.

$$IC = [\hat{R}_i - 1.96 * \sqrt{se(R_i)}, \hat{R}_i + 1.96 * \sqrt{se(R_i)}]$$

où

$$se(R_i)^2 = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\lambda}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}} \right)$$

où

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k} \left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{\lambda}_k \right)^2$$

III.4.2.2. Application

Nous adaptons cette approche à notre problématique de constitution des cadences de rachat. Dans notre cas particulier le développement sera représenté par la durée de la police et la date de survenance par la date effective de la police. Nous choisissons de se tenir à un pas mensuel que ce soit au niveau des durées comme au niveau des mois de souscription pour tenir compte de la granularité de l'information. Nous traçons ci-dessous un exemple de triangle de PAY MODE=Annuel et de CodePlan=20.

Date effectiveDuration	0	1	2	3	4
201301	N ₁₁	N ₁₂	N ₁₃	N ₁₄	N ₁₅
201302	N ₂₁	N ₂₂	N ₂₃	N ₂₄	...
201303	N ₃₁	N ₃₂	N ₃₃

TABLE III.16 – Triangle des nombres de cotracts restants

Le lecteur gardera en tête que les estimations de Mack restent valables pour le cas trapèzes en faisant attention d'adapter les paramètres de la méthode sur les premières colonnes du trapèze. Nous estimons les taux de rachat pour 15 sous catégories distinctes, constituées de toutes les combinaisons possibles entre le PAY MODE={Annuel-Semestriel-Mensuel} et les Code Plan={10-15-20-25-Other}. Sur la figure III.17 nous représentons les taux de rachats respectifs à chaque durée pour les catégories "Annuel-20" et "Mensuel-20".

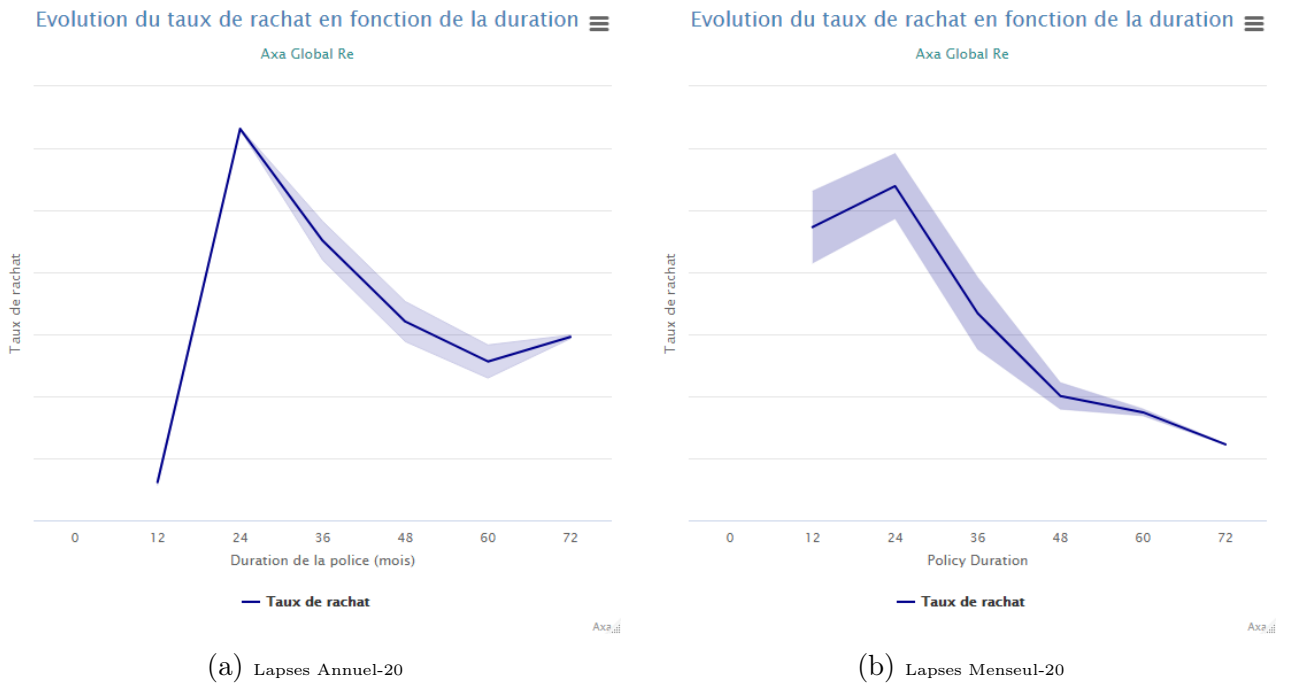
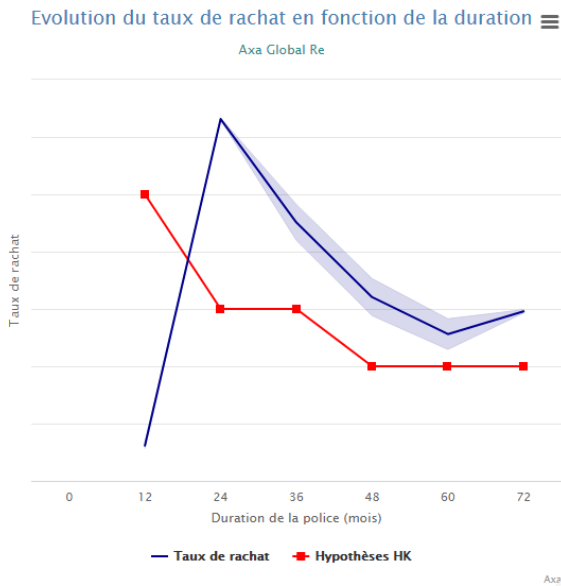


FIGURE III.17 – Evolution conditionnelle des taux de rachats

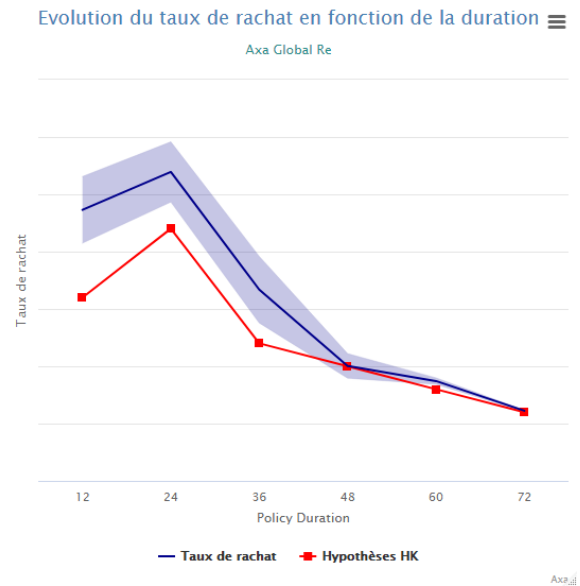
Nous avons volontairement caché les taux de rachat de notre portefeuille pour des raisons de confidentialité, toutefois l’allure des courbe est réelle et est tirée de l’expérience du portefeuille. Les deux graphiques affirment l’évolution assez rapide des taux de rachats durant les deux premières années passées dans le portefeuille, s’ensuit après une étape où les taux décroissent assez rapidement pour atteindre le régime stationnaire. Les intervalles de confiance sont relativement très étroit et témoignent de la bonne représentativité de l’échantillon selectionné. En effet, les combinaisons représentées en figure III.17 sont assez représentatives et concentrent un grand nombre d’assurés.

III.4.2.3. Confrontation des résultats avec les hypothèses d’Axa HK

Nous allons toutefois nous assurer des méthodes utilisées en réalisant une comparaison entre notre calibration et les hypothèses renseignées par AXA HK.



(a) Lapses Annuel-20



(b) Lapses Mensuel-20

FIGURE III.18 – Comparaison des estimations de taux de rachat

On note globalement une convergence vers les mêmes taux de rachat, en revanche pour la catégorie Annuel-20, nous sous estimons les taux de rachat durant la première année mais la courbe tend à compenser ce retard la deuxième année. Cette différence est liée principalement au cumul d'expérience d'AXA Hong Kong et au manque de données chez AGRe. Il existe toutefois des points de convergence.

Chapitre IV

Résultats du modèle de projection et analyse de sensibilité

IV.1. Présentation du modèle de projection

Dans cette partie nous nous intéressons au modèle de projection que nous avons développé chez AGRé. Ce modèle se base sur les chaînes de Markov, on suppose que l'assuré passe d'un état à un autre avec une certaine probabilité de transition et on suppose aussi que cet état dépend entièrement et uniquement de l'état précédent.

L'idée d'une telle modélisation est liée à la structure du produit. En effet, nous disposons de plusieurs choix de garanties possibles qu'on suppose entièrement indépendants.

Comme précisé dans la section II.1.1., le produit étudié permet de se couvrir contre les risques basiques tels que le décès, les maladies graves et les maladies mineures. Pour les garanties supplémentaires, l'assuré pourra choisir entre des couvertures contre les déclarations multiples, les maladies précoces ainsi que l'inflation.

Dans le cas particulier du produit étudié, les primes payées sont variables et croissent avec le risque de l'assuré qui se matérialise par les variables d'âge, de sexe et de catégorie Fumeur/non fumeur.

La méthode utilisée combine une démarche analytique et des simulations.

Nous présentons ci-dessous une vue globale sur les états que peut prendre la police disposant seulement des garanties basiques à chaque mois de projection.

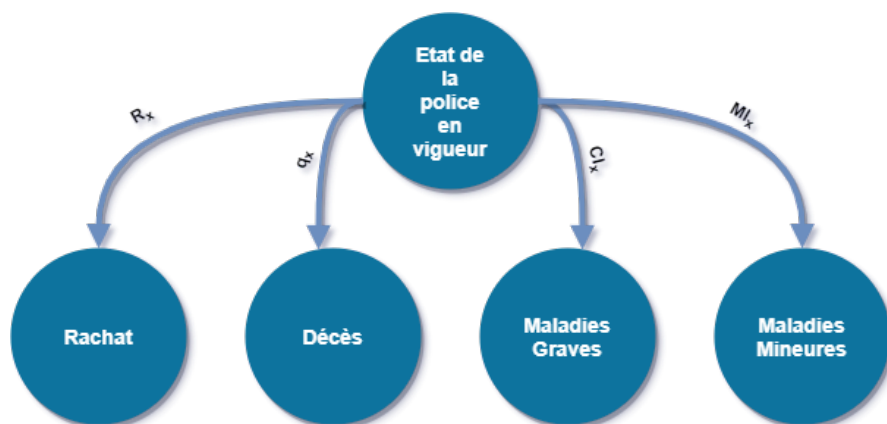


FIGURE IV.1 – Modèle des états

Où

- q_x dénote la probabilité de décès ;

- CI_x et MI_x représente le taux d'incidence respectivement des maladies graves et des maladies mineures ;
- R_x représente la probabilité de Rachat.

La probabilité pour que la police reste en vigueur est égale à $1 - R_x - CI_x - q_x$.
 Les états maladies graves, décès et rachats sont des états absorbants.

Le modèle résume les états possibles pour le produit proposant les garanties basiques(cf 6).
 Lorsqu'on est dans l'un des états absorbants¹ précitées ci-dessus, le montant indemnisé à raison du préjudice subi est égal aux sommes sous risque garanties par le réassureur. C'est ainsi que cette transaction marque la fin de couverture pour la police en question.

Dans le cas d'un sinistre mineur, l'assuré est toujours couvert par le traité de réassurance par contre le montant des sommes sous risques des garanties majeures et décès est revu à la baisse (cf II.1.).

IV.2. Algorithme de Projection

Le modèle est basé sur des simulations, nous répliquons les différentes polices N fois, où N correspond au nombre de simulations souhaité. Nous simulons par la suite l'état de chaque ligne de polices (Police*N) pour chaque mois de projection.

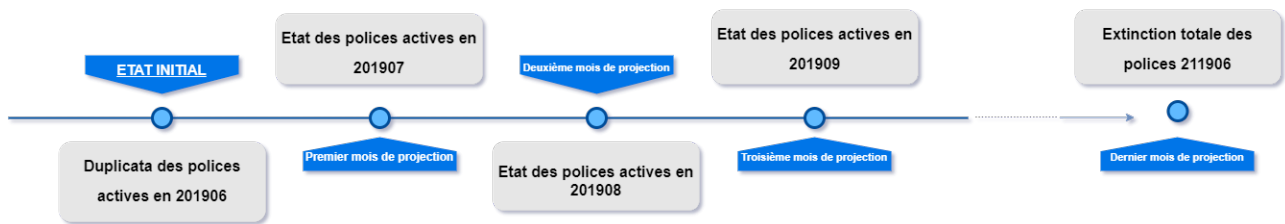


FIGURE IV.2 – Séquence de projections

Durant chaque mois de projection, la police peut traverser plusieurs états, nous exposons dans la figure ci-dessous IV.3 l'algorithme de fonctionnement du modèle.

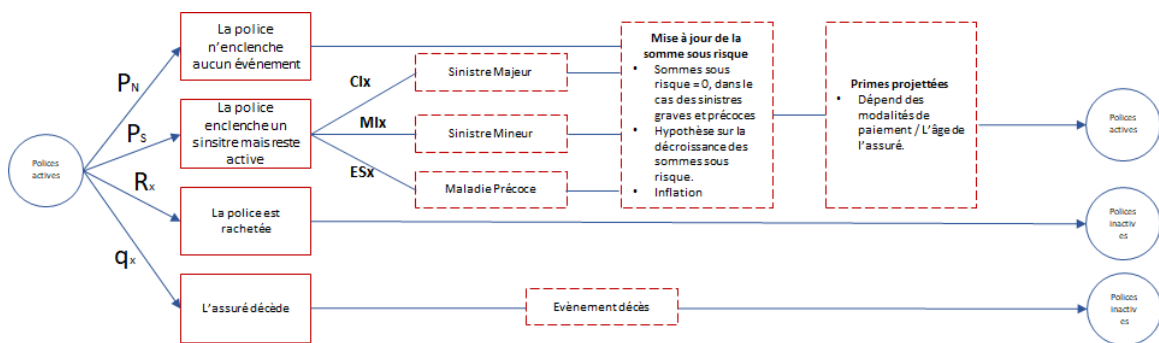


FIGURE IV.3 – Algorithme de projection

En partant de la dernière vision qu'on a du portefeuille, à savoir de 06/2019, nous simulons pour chacune des polices actives l'état du mois prochain de projection. Celle-ci peut soit être

1. Un état absorbant, c'est l'état dans lequel on reste à coup sûr lorsqu'on y parvient (Décès, Rachat, Maladies Graves).

rachetée, générer un sinistre, connaître un décès ou finalement être sans sinistre. Dans le cas des sinistres nous ne considérons que les sinistres majeurs, les sinistres mineurs et les maladies précoces. En effet les garanties sur les déclarations multiples sont minoritaires et ne sont pas très significatives dans notre cas. Egalement dans le cas d'un sinistre, la somme sous risque correspondante à la couverture est remise à zéro définitivement. Ensuite nous ajustons les sommes sous risques de l'inflation (pour le cas des polices disposant de garantie sur l'inflation) et de leur décroissance naturelle (IV.2.1.) . Nous calculons ensuite les primes futures pour les sommes sous risques non nulles et l'âge de l'assuré au mois prochain de projection. L'algorithme que nous avons implémenté se décline en plusieurs étapes :

- **Etape0 : Construction de la base de données de départ *State0* :**

Nous définissons notre base de données de départ, celle-ci a été construite en considérant la dernière vision qu'on a du portefeuille à savoir le 31/06/2019. Nous rassemblons dans cette base toutes les informations utiles sur l'état de la police assurée. Principalement, on dénombre les contrats rachetés et les contrats toujours en vigueur (*In Force*), que nous complétons par des informations sur les sommes sous risque, les modalités de paiement et les couvertures supplémentaires.

- **Etape1 : Simulations :**

Dans cette étape nous définissons le nombre de simulations et le nombre d'années de la période de projection. Nous procédons ensuite à des simulations sur l'ensemble de l'horizon de projection. Nous commençons par donner une vision globale de ce que fait le modèle pour un mois de projection que nous pourrions généraliser par la suite aux prochains mois de projection.

- **Sous Etape1 : Simulations pour le premier mois de projection :**

- * **Simuler l'état des polices :**

Pour chaque évènement nous simulons une loi de Bernoulli de paramètre $\alpha_{\text{évènement}}$ (calibré pour chaque évènement). Ainsi nous obtenons pour une police donnée plusieurs réalisations (Nombre de simulations) comme le montre la matrice suivante.

	Décès B(q_x)	Majeurs B(Cl_x)	Mineurs B(Ml_x)	Précoces B(PR_x)	Rachats B(R_x)
i. Police simulée 1	0	1	0	1	0
i. Police simulée 2	0	0	0	1	0
i. Police simulée 3	0	1	1	0	0
i. Police simulée 4	0	1	0	0	0
i. Police simulée 5	0	1	0	0	1

FIGURE IV.4 – Simulations des états de la police i au premier mois de la projection

Nous appliquons ensuite les conditions suivantes :

Le décès n'est reconnu que si la police est toujours en mode InForce ;

Le sinistre majeur n'est pris en compte que lorsque la police est active d'une part et qu'il n'a pas été précédé par un rachat ou un décès d'autre part ;

De même pour le sinistre mineur, il n'est pris en compte que si la police n'a pas été rachetée et n'a pas généré de décès ou de sinistre majeur.

La même règle qu'auparavant s'applique pour les polices disposant d'une couverture supplémentaire ;

Quant aux lapses nous supposons qu'ils ne sont pris en compte que lorsque la police n'a eu aucun sinistre.

- * **Mise à jour des Sommes sous risques** : C'est un facteur déterminant dans notre modèle. Il est par construction décroissant et permet de déterminer les charges des sinistres et les primes de réassurance. Nous mettons à jour les sommes sous risque pour chaque mois de projections, suivant une cadence très précise.
- * **Estimation des coûts des sinistres** : Après avoir appliqué les conditions ci-dessus sur la matrice, nous évaluons les coûts des éventuels sinistres via la formule suivante :

$$\boxed{\text{Sinistres} = \text{Ratio De Réassurance} * \text{Sommes Sous Risques}}$$

- * **Estimation des primes** : Le calcul des primes se fait via la formule 8, qui tient compte des modalités de paiement, de la catégorie fumeur / non fumeur et des sommes sous risque.
- * **Résumé des résultats** : On extrait les éléments clé de la projection : Le nombre d'assurés restants, le montant total des sinistres par garantie, le montant des primes par garanties...

Après un mois de projection, on remplace la table *state0* par la nouvelle table d'état, on refait les mêmes étapes citées en dessous et on s'arrête après avoir atteint le dernier mois de projection .

...

– **Sous Etape N : Dernier mois de projection.**

- **Etape2 : Résumé de l'information par année de projection.**
- **Fin de l'algorithme.**

IV.2.1. Décroissance des sommes sous risque

La projection de notre modèle tient compte de la décroissance des sommes sous risques, en effet c'est un facteur déterminant dans la projection des *sinistres* et des *primes*. La particularité des sommes sous risque est liée à la méthode particulière qu'utilise la cédante pour le calcul de ses réserves, effectivement elle dépend de sa vision de rachat du contrat. Sous l'hypothèse d'absence d'évènement pouvant accélérer la décroissance des sommes sous risque, en l'occurrence le rachat ou la survenance des sinistres, la courbe IV.5 prend l'allure suivante.

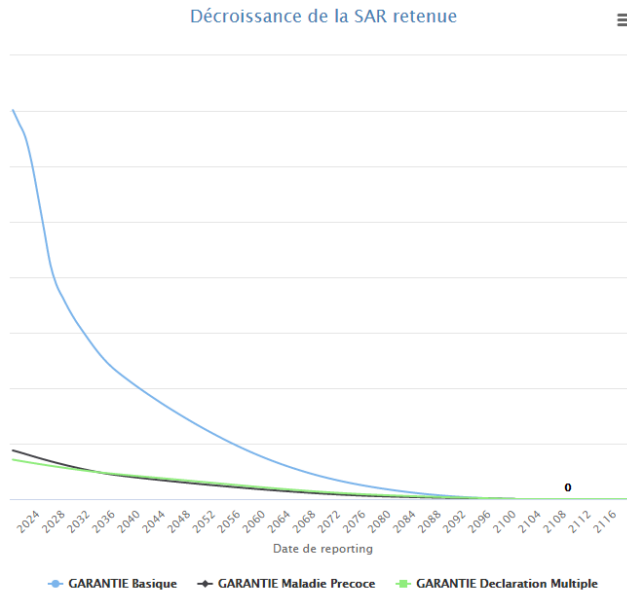


FIGURE IV.5 – Effet de la décroissance naturelle sur la projection de la SAR

Nous avons calibré ces courbes en vérifiant que, combiné aux autres événements affectant la SAR (rachat et sinistralité), on a obtenu une projection de la SAR semblable à la projection de Hong Kong avec leurs hypothèses Best Estimate.

IV.2.2. Projection des primes et des sinistres

Les primes de réassurance sont ventilées par garantie et sont évaluées selon la formule 8 décrite dans la partie du mémoire sur les données. Nous attirons l’attention sur le fait que seuls les contrats actifs¹ peuvent générer des flux non nuls et l’occurrence des flux dépend aussi du mode de paiement (annuel, semestriel ou mensuel).

Puisque nous avons opté pour une méthode par simulations, l’estimation de la prime de réassurance au mois de projection k se fait d’abord par police, en calculant la moyenne des réalisations, ensuite nous l’agrégeons selon la formule ci-dessous.

$$P_k = \sum_i \left(\frac{1}{\text{Nombre de Simulations}} \sum_{\text{simulations } j} \text{Primes de Réassurance}_{i,j} \right)$$

où P_k est l’estimation de la prime de réassurance pour le mois de projection k.

De la même manière, nous estimons les charges engendrées par chaque police simulée au mois de projection k. A l’image des primes, les coûts sont également ventilés par garantie et sont évalués selon la formule suivante selon que la police est encore active ou pas.

$$C_{i,k} = \text{Sommes Sous Risques Réassurés}_{i,k}$$

et enfin

$$C_k = \sum_i \left(\frac{1}{\text{Nombre de Simulations}} \sum_{\text{simulations } j} C_{i,j} \right)$$

1. Les contrats toujours en vigueur, qui n’ont pas été rachetés ou pour qui la somme sous risque réassurée n’a pas été liquidée en entier.

IV.3. Résultats du modèle de projection

Dans cette section nous présentons les résultats de notre modèle de projection en utilisant nos propres calibrations sur la fréquence des risques sous-jacents. Les hypothèses du modèle sont alors :

1. Tables de mortalité AGRe
2. Tables de Rachats AGRe
3. Tables d'incidence AGRe
4. Inflation fixé à 5%

IV.3.1. Primes et sinistres

Nous obtenons les premières estimations des primes et des sinistres. Nous optons pour une vision cumulée des deux séries afin de déterminer la rentabilité de ce portefeuille. Sur le graphique IV.6 nous pouvons remarquer qu'en vision cumulée les primes cédées semble couvrir les sinistres à charge du réassureur. Toutefois l'écart entre les deux cashflows reste très faible, ce qui n'est pas très rassurant notamment dans le cas d'une déviation de la sinistralité. Globalement le portefeuille semble être profitable selon nos hypothèses.

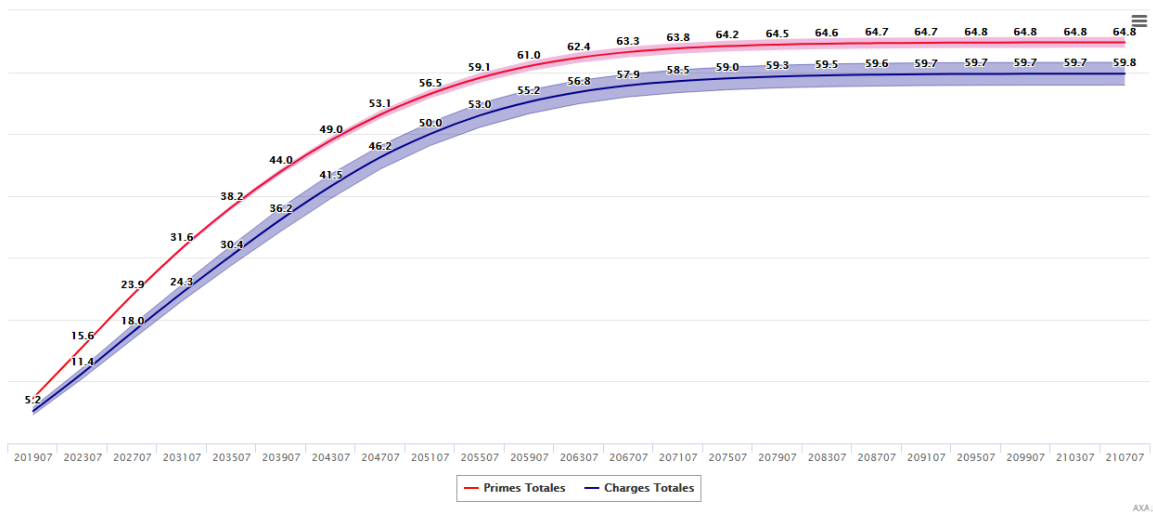


FIGURE IV.6 – Projection des primes et des sinistres cumulés

IV.3.2. Primes et sinistres par garanties

Ce graphique¹ résume l'information sur la projection des primes et des sinistres par garanties. Nous remarquons en premier lieu que toutes les primes couvrent la totalité des charges sauf pour la garantie *Maladies graves* (en vert clair) où on note qu'on a un décalage de l'ordre de 20. Le modèle permet ainsi de voir quelles sont les garanties qui contribuent le plus au résultat et à l'inverse celles qui impacte négativement le résultat à cause d'une tarification insuffisante.

1. Les séries servant à construire ce graphique ont été modifiées

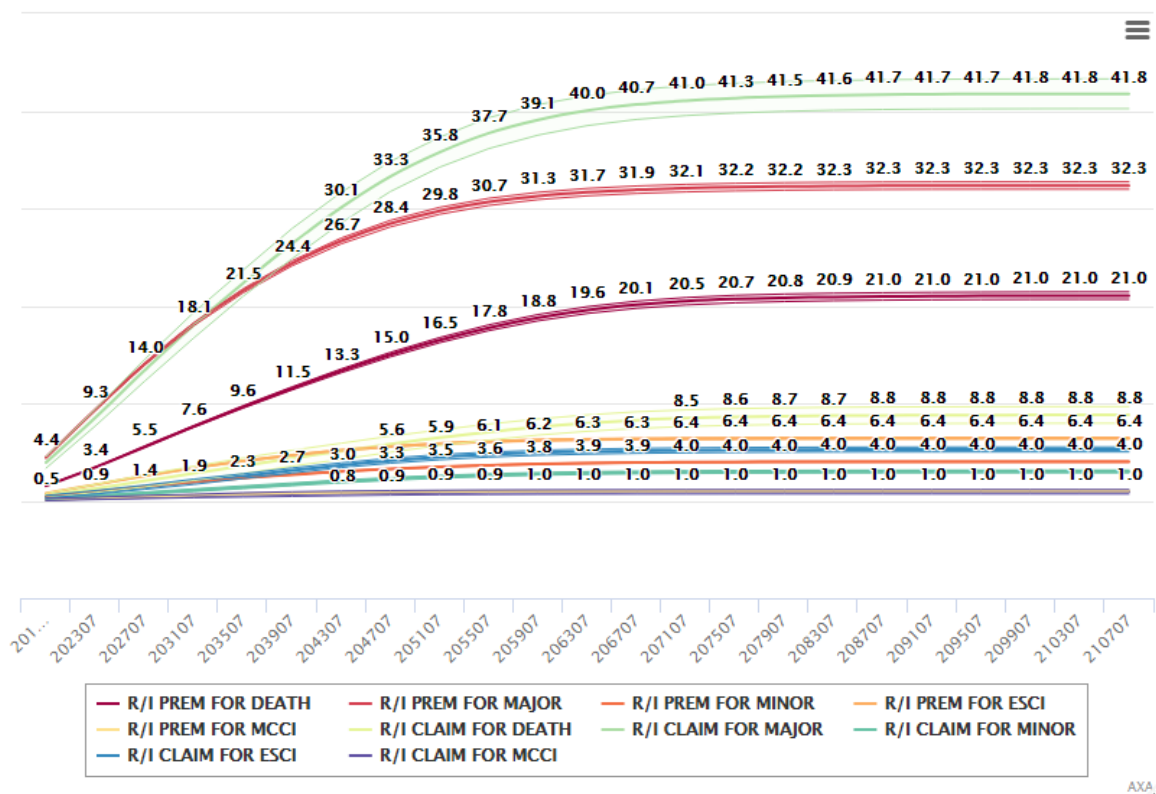


FIGURE IV.7 – Projection des primes et des sinistres cumulés par garanties

D'autres graphiques traçant l'évolution de l'âge moyen et du nombre d'individus restants dans le portefeuille sont donnés à titre illustratif dans l'annexe (figE.1).

IV.3.3. Fiabilité du modèle

L'outil de projection a été implémenté sous R, celui-ci simule mensuellement l'état des différentes polices toujours actives dans notre portefeuille en utilisant des loi de *Bernoulli* dont les paramètres ont été ajustés auparavant. Pour tester la qualité du modèle de projection, nous comparons les estimations obtenues avec notre outil sous les hypothèses d'AXA Hong Kong et les résultats propres à AXA HK issus de leur logiciel de projection *Prophet*. Les hypothèses sont les suivantes.

1. Table de mortalité AXA Hong Kong
2. Tables d'incidence AXA Hong Kong
3. Tables de Rachat AXA Hong Kong
4. Inflation Hong Kong

Nous pouvons remarquer sur la figIV.8 un écart significatif de 30%, qu'on pourra justifier notamment par :

1. La différence des modèles employés par les deux entités, AGRe a développé son propre outil de projection qui procède par simulations tandis qu'AXA HK utilise un outil déterministe *Prophet*.
2. Les SAR projetées par nos soins ne correspond pas à 100% à la SAR projeté par AXA HK. Rappelons que l'évolution de la SAR décrite dans la partie II.2.2. dépendait d'un

paramètre de Réserve propre à AXA Hong Kong et sur lequel on disposait que de peu d'informations. Sur la figure D.1 nous représentons la SAR à l'issu du modèle de projection (Tenant compte de la mortalité, l'incidence, rachats). On peut remarquer qu'en comparant avec les estimations de HK nous sous-estimons l'évolution de la SAR.

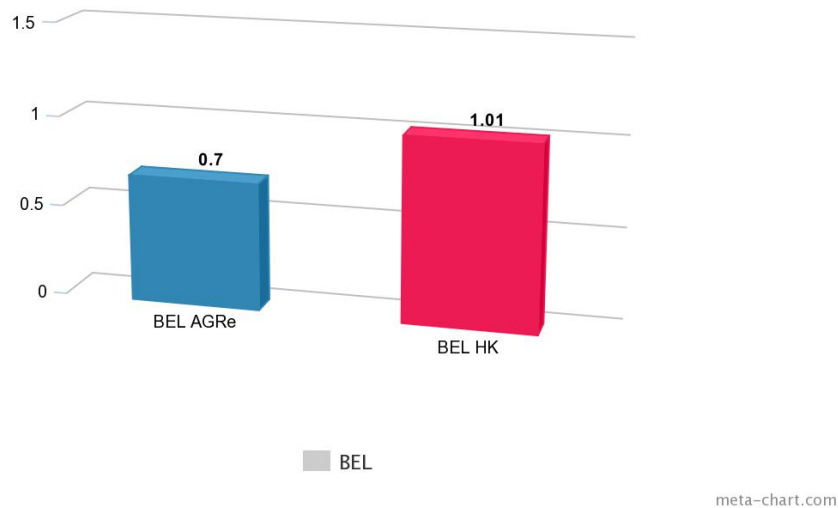


FIGURE IV.8 – Comparaison des deux estimations du BEL Vie

IV.4. Analyse de sensibilité du Loss Ratio

Dans cette section nous allons considérer un indicateur très utilisé en réassurance qui est le rapport entre *Sinistres* et *Primes* communément appelé le *Loss Ratio*. L'objectif étant de déterminer les facteurs influents sur cet indicateur et de prendre en conséquence les décisions adéquates.

Nous proposons ainsi d'évaluer en scénario central et en scénario stressé le *Loss Ratio* selon les hypothèses d'AXA HK et les hypothèse d'AGRe.

Le scénario stressé consiste à appliquer un choc de $\pm 10\%$ sur les entrées de notre modèle de projection.

1. Tables de mortalité : $\pm 10\%$ sur les quotients par âge.
2. Tables d'incidences : $\pm 10\%$ sur les quotients par âge et par catégorie Fumeur/Non fumeur.
3. Tables de Rachats : $\pm 10\%$ sur les taux de rachat.
4. Inflation : $\pm 10\%$ sur les taux d'inflation.

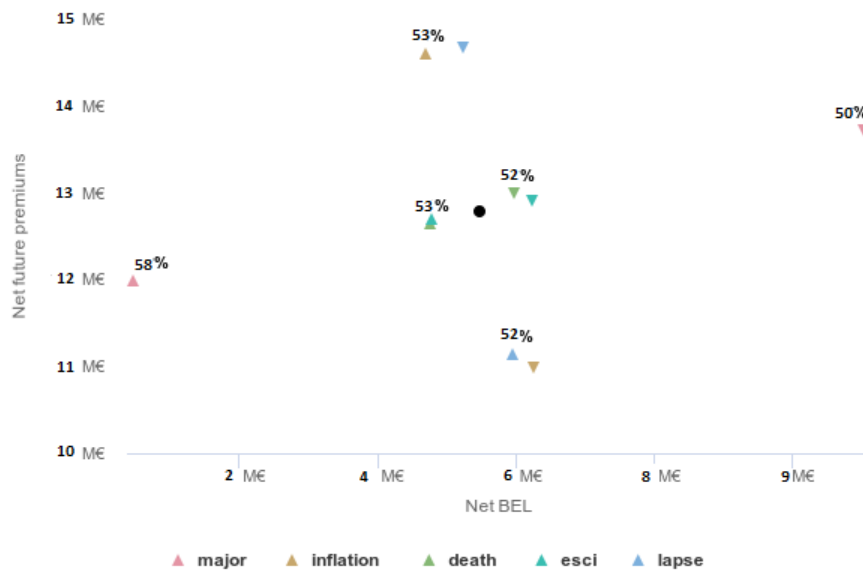


FIGURE IV.9 – Loss Ratio Scénario Central/Scénario Stressé Hypothèses HK

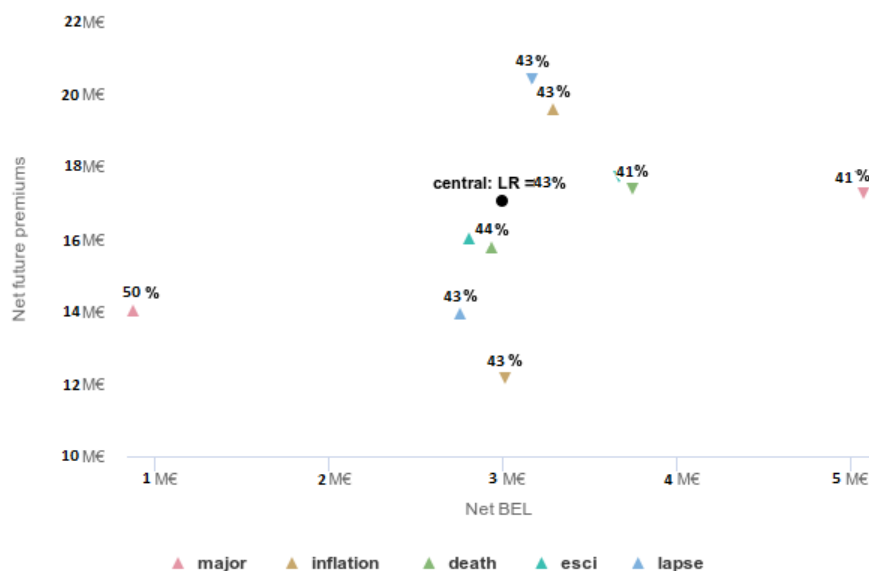


FIGURE IV.10 – Loss Ratio Scénario Central/Scénario Stressé Hypothèses AGRE

Des deux graphiques on peut tirer plusieurs conclusions. Le Loss Ratio n'est pas très sensible aux variations de certains paramètres, on note une variation de $\pm 1\%$ sur toutes les garanties sauf pour la garantie *Maladies majeures* où on note une variation de $\pm 10\%$. Une déviation de la sinistralité de cette garantie entraine une forte déviation du résultats et ce quelque soit les hypothèses utilisées. Par ailleurs on pourra remarquer qu'avec nos propres hypothèses, nous améliorons le Loss Ratio du produit réassuré, (56% avec les estimations d'AGRe vs 46% avec les estimations d'AXA HK).

Conclusion

L'objet de ce mémoire est le développement d'un outil de projection pour quantifier les engagements contractuels d'AXA Global Re envers l'entité Hong Kong.

Nous avons dans un premier temps fait une collecte et une remise en format des données qui était jusqu'ici utilisées uniquement par les équipes comptables. Cette étape nous a permis d'appréhender le produit et de mettre en place un ensemble d'indicateurs de suivi du risque depuis la date de souscription jusqu'à aujourd'hui.

Les principaux risques qui ont été traités sont la mortalité, le rachat et les taux d'incidence. Nous décidons de les modéliser en utilisant l'expérience de notre portefeuille. Nous avons ainsi exploré différentes méthodes pour calibrer les tables et pour choisir la meilleure approche nous sommes basés sur des critères et des statistiques précises. Ceci nous a permis ainsi à la fois de répondre aux recommandations de l'audit interne et plus généralement aux principes Solvabilité II sur les hypothèses Best Estimate tirées de l'expérience.

Par ailleurs, l'étude nous a permis de mettre en évidence des divergences sur la vision du risque et de la rentabilité de certaines garanties entre la cédante et AXA Global Re, qui peuvent s'expliquer par différentes expériences, mais qui vont conduire à davantage d'échanges entre les deux entités du Groupe afin d'aligner ces deux visions.

En outre, le modèle de projection développé permet une bonne paramétrisation des hypothèses selon des métriques vie comme recommandé par l'audit, on peut ainsi avoir une idée de l'impact de chaque hypothèse sur les indicateurs de rentabilité tel que le Loss Ratio.

Il est important de noter que sur les méthodes de calibration, il pourrait être intéressant de trouver un compromis entre HK et AGRé en cherchant à crédibiliser les courbes de HK (basées sur leur expérience globale, pas seulement le portefeuille en question) et les courbes calibrées uniquement à partir de l'expérience connue d'AGRé sur le portefeuille. Quant au modèle de projection, il serait aussi intéressant d'une part d'optimiser le temps de calcul en recherchant des groupes d'assurés homogènes (techniques de classification) mais aussi de modéliser le plus fidèlement la décroissance de la somme assurée en s'appuyant sur les paramètres de "reserves factor" tels que retenus par HK.

Bibliographie

- [1] Jacques Blondeau Christian Partrat. *La Réassurance Approche technique*. 2003.
- [2] Roger Yat-Nork Chung and Sir Michael Marmot. *People in Hong Kong Have the Longest Life Expectancy in the World : Some Possible Explanations*, 2020.
- [3] Commission de l'union européenne. *RÈGLEMENT DÉLÉGUÉ (UE) 2015/35 DE LA COMMISSION du 10 octobre 2014*, 2015.
- [4] Consulat général de France à Hong Kong. *Panorama du secteur assurantiel à Hong Kong*, 2019.
- [5] Denuit .M et Quashie .A. ModÈles d'extrapolation de la mortalité aux grands Âges.
- [6] Planchet .F et Thomas .J. Critères de validation : Aspects méthodologiques. *Institut des Actuaires*.
- [7] Pierre Thérond Frédéric Planchet. *Modèles de durées : Applications actuarielles*. 2006.
- [8] Pierre Thérond Frédéric Planchet. *Modélisation statistique des phénomènes de durée*. 2011.
- [9] Gabriel Benet. *Le système de santé à Hong Kong*, 2017.
- [10] Benajamin Gompertz. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1825.
- [11] Planchet F. Tomas J. Critères de validation : Aspects methodologiques. *Institut des actuaires*.
- [12] Meier P. Kaplan E.L. *Nonparametric estimation from incomplete observations*. 1959.
- [13] Olivier Lopez. Duration models, 2019-2020.
- [14] Society of actuaries. Introduction to life reinsurance, 1997.
- [15] Frederic Planchet. Méthodes de lissage et d'ajustement, 2020.
- [16] Frederic Planchet. Statistique des modèles non paramétriques, 2020.
- [17] Colin M. Ramsay. A note on the normal power approximation. *Astin Bulletin*.
- [18] I.C .Smart. Life reinsurance, institut and faculty of actuaries uk. 1970.
- [19] Swiss Re. *Financial Report*, 2019.
- [20] BRASS William. *On the scale of mortality*. 1971.

Glossaire

Acronyme	Signification
AGRe	Axa Global Re
SAR	Sum At Risk/ Sommes sous risques
Premiums	Primes
Claims/Loss	Reclamations/Sinistres
R/I	Reinsurance
BEL	Best Estimate Liabilities
MCCI	Multiple CLaims Benefit/Déclarations multiples
ESCI	Early Stage Benefit/Maladies précoces
Minor	Maladies Mineures
WH	Whittaker Henderson
HK	HONG KONG
XP	Excédent de plein
XS/XL	Excédent de sinistre/ Excess of loss
L&H	Life and Health
HKD	Hong Kong Dollars
Minor	Maladies mineures
ESCI	Maladie précoces
Major	Maladies graves/majeures

TABLE IV.1 – Acronymes utilisés

Annexe A

Taux de prime

I.1. Taux de prime appliqué à la garantie "Maladies Graves"

Age	Masculin/Fumeur	Masculin/Non Fumeur	Femmes/Fumeur	Femmes/Non Fumeur
0	1.5	1.1	1.2	0.8
1	1.6	1.2	1.33	1
.
.
.
99	23	22.6	22	21

TABLE A.1 – Taux de prime pour 10 000 HKD assurée

I.2. Taux de prime appliqué à la garantie "Maladies Précoces"

Age	Masculin/Fumeur	Masculin/Non Fumeur	Femmes/Fumeur	Femmes/Non Fumeur
0	1.2	1	1	0.8
1	1.6	1.2	1.33	1
.
.
.
99	20	19.6	19	18

TABLE A.2 – Taux de prime pour 10 000 HKD assurée

I.3. Taux de prime appliqué à la garantie "Maladies Mineures"

Age	Masculin/Fumeur	Masculin/Non Fumeur	Femmes/Fumeur	Femmes/Non Fumeur
0	0.5	0.4	0.4	0.3
1	0.6	0.5	0.5	0.4
.
.
.
99	13	12.8	12.6	12

TABLE A.3 – Taux de prime pour 10 000 HKD assurée

I.4. Taux de prime appliqué à la garantie "Maladies Mineures"

Age	Masculin	Féminin
0	0.4	0.3
1	0.5	0.4
.	.	.
.	.	.
.	.	.
99	15	13.6

TABLE A.4 – Taux de prime pour 10 000 HKD assurée

Annexe B

Comparaison des taux HK et des taux AGRe

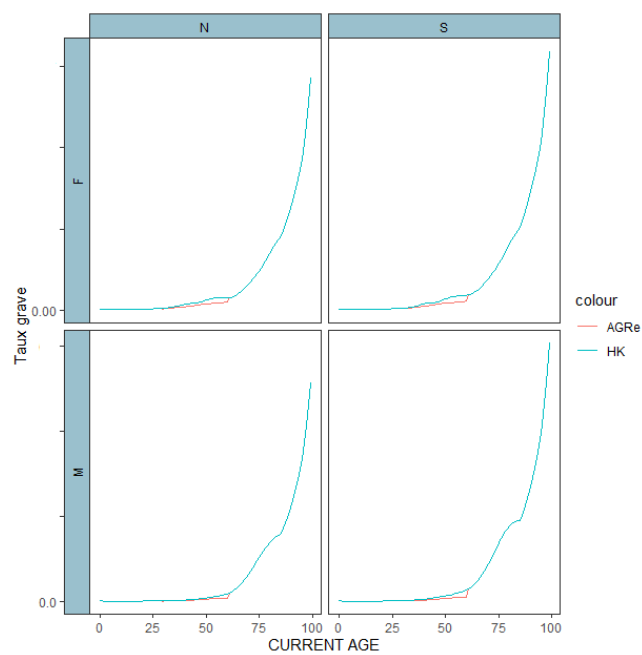


FIGURE B.1 – Ajustement des taux d’incidence des maladies graves. AXA vs AGRe

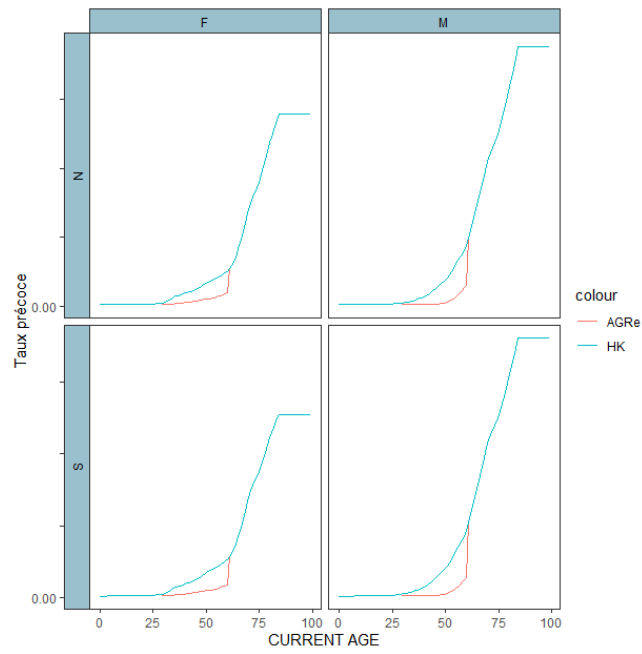


FIGURE B.2 – Ajustement des taux d’incidence des maladies précoces. AXA vs AGRe

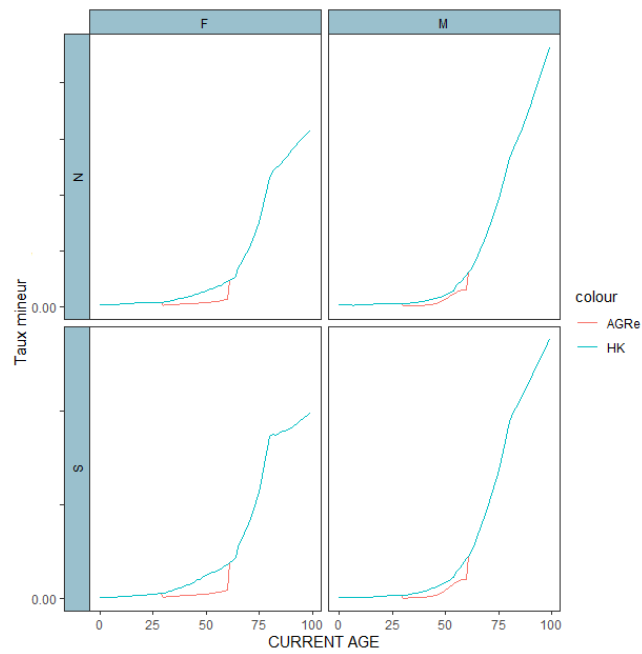
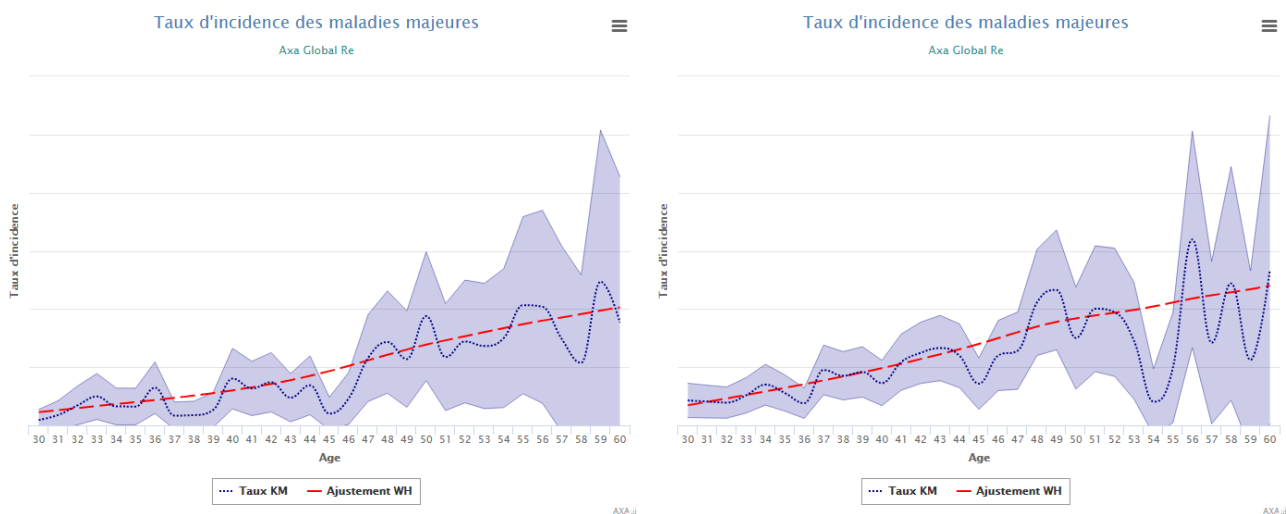


FIGURE B.3 – Ajustement des taux d’incidence des maladies mineures. AXA vs AGRe

Annexe C

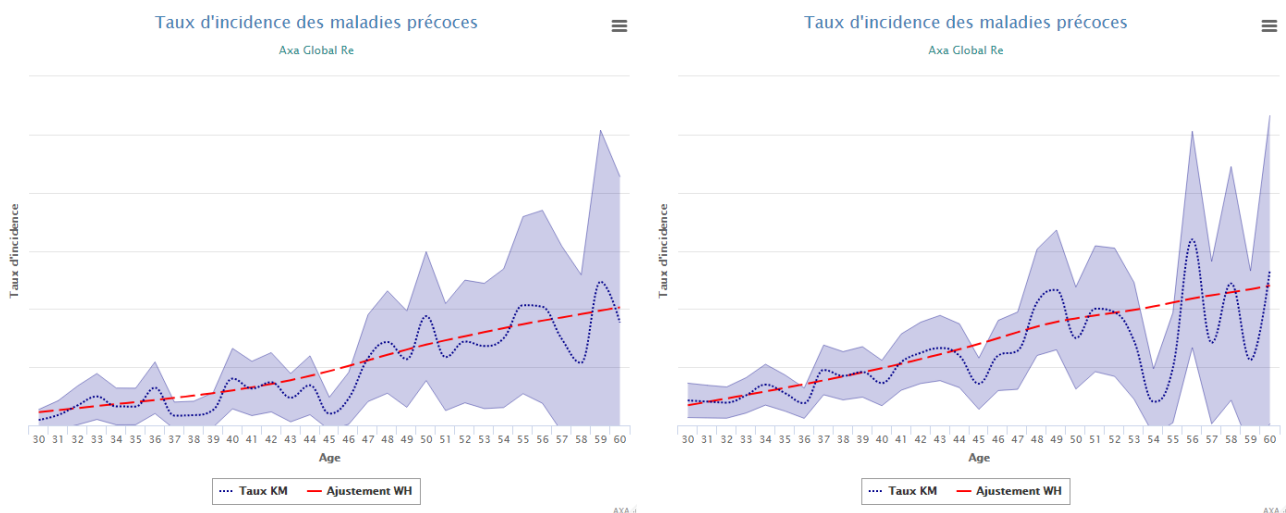
Ajustement Unisexe des lois d'incidence



(a) Population Masculine

(b) Population Féminine

FIGURE C.1 – Taux d'incidence des maladies majeures unisexe



(a) Population Masculine

(b) Population Féminine

FIGURE C.2 – Taux d'incidence des maladies précoces unisexe

Annexe D

Backtest des SAR

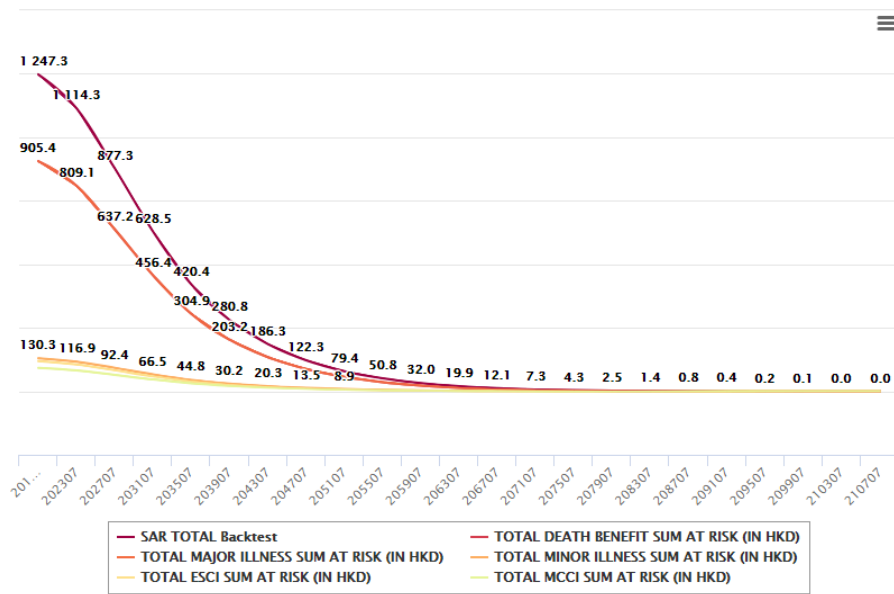
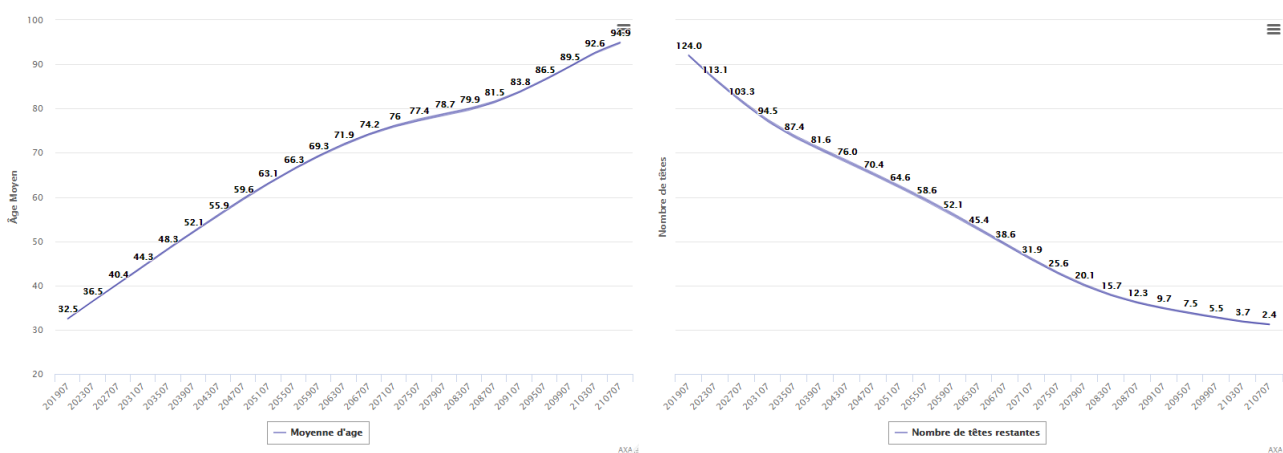


FIGURE D.1 – SAR Estimées AGRe vs SAR HK

Annexe E

Projections de l'âge moyen et du nombre d'individus restants.



(a) âge Moyen de la population

(b) Nombre d'individu restants

FIGURE E.1 – Projection de l'âge moyen et du nombre d'individus restants

Annexe F

Méthode de Nelder Mead

La méthode de Nelder-Mead est un algorithme d'optimisation non linéaire qui a été publiée¹ par John Nelder et Roger Mead (en) en 1965. C'est une méthode numérique heuristique qui cherche à minimiser une fonction continue dans un espace à plusieurs dimensions. Appelée également downhill simplex method, l'algorithme exploite le concept de simplexe qui est un polytope de $N+1$ sommets dans un espace à N dimensions. Partant initialement d'un tel simplexe, celui-ci subit des transformations simples au cours des itérations : il se déforme, se déplace et se réduit progressivement jusqu'à ce que ses sommets se rapprochent d'un point où la fonction est localement minimale. La méthode de Nelder-Mead avec recuit simulé est issue du couplage entre l'algorithme d'origine et le mécanisme empirique du recuit simulé.

Soit une fonction f définie sur un espace de dimension N . L'algorithme débute par la définition d'un simplexe non dégénéré choisi dans cet espace. Par itérations successives, le processus consiste à déterminer le point du simplexe où la fonction est maximale afin de le remplacer par la réflexion (c'est-à-dire le symétrique) de ce point par rapport au centre de gravité des N points restants. Si la valeur de la fonction en ce nouveau point est inférieure à toutes les autres valeurs prises sur les autres points, le simplexe est étiré dans cette direction. Sinon si la valeur de la fonction en ce nouveau point est meilleure que la deuxième moins bonne mais moins bonne que la meilleure, on garde cette valeur et on recommence. Sinon, il est supposé que l'allure locale de la fonction est une vallée, et le simplexe est contracté sur lui-même. Si cela ne donne toujours pas un meilleur point, le simplexe est réduit par une homothétie centrée sur le point du simplexe où la fonction est minimale.

Plus précisément :

1. Choix de $N+1$ points de l'espace des inconnues de dimension N
2. Calcul des valeurs de la fonction f en ces points, tri des points de façon à avoir :

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_{N+1})$$

. Il suffit en fait de connaître le premier et les deux derniers.

3. Calcul de x_0 , centre de gravité de tous les points sauf x_{n+1} .
4. Calcul de $x_r = x_0 + \alpha(x_0 - x_{N+1})$ (réflexion de x_{n+1} par rapport à x_0).
5. Soit $f(x_1) \leq f(x_r) < f(x_N)$, remplacement de x_{N+1} par x_r et retour à l'étape 2.
6. Soit $f(x_r) < f(x_1)$, calcul de $x_e = x_0 + \gamma(x_r - x_0)$ (expansion du simplexe). Si $f(x_e) \leq f(x_r)$, remplacement de x_{N+1} par x_e sinon, remplacement de x_{N+1} par x_r et retour à l'étape 2.

7. Soit $f(x_r) \geq f(x_N)$, calcul de $x_c = x_0 + \rho(x_{N+1} - x_0)$ (contraction du simplexe). Si $f(x_c) < f(x_{N+1})$, remplacement de x_{N+1} par x_c et retour à l'étape 2, sinon aller à l'étape 8.
8. Homothétie de rapport σ et de centre x_1 : remplacement de x_i par $x_1 + \sigma(x_i - x_1)$ et retour à l'étape 2.

Avec $\alpha, \gamma, \rho, \sigma$ des coefficients tels que $\alpha > 0$, $\gamma > 1$ et $0 < \rho \leq 0.5$. Des valeurs standards sont $\alpha = 1$, $\gamma = 2$, $\rho = 1/2$ et $\sigma = 1/2$.

Annexe G

Résidus de la population féminine

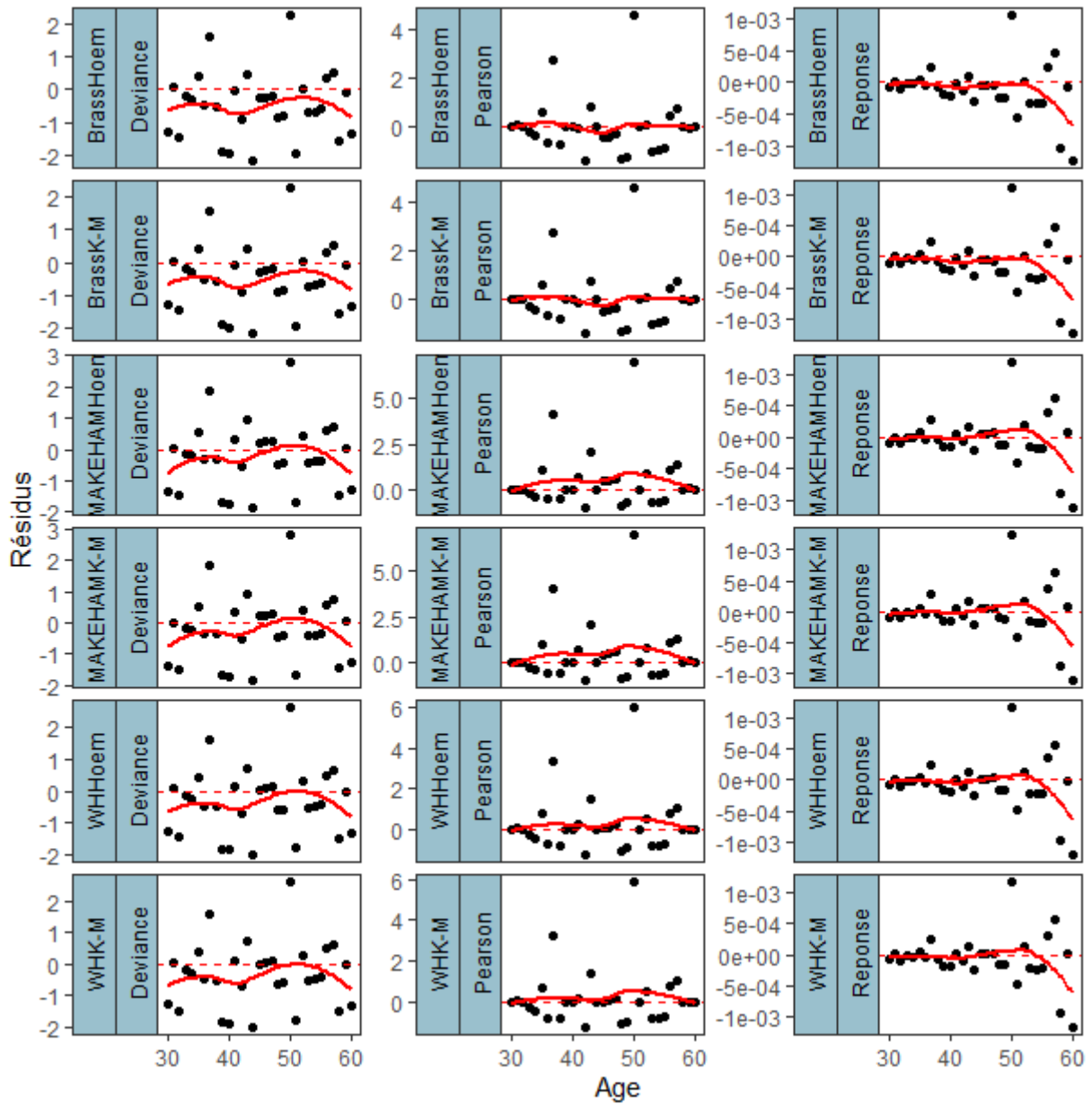


FIGURE G.1 – Résidus de la population féminine

Table des figures

1 Ajustement final de la table de mortalité	6
2 Ajustement des taux d'incidence des maladies graves. AXA vs AGRe	7
3 Ajustement final de la table de mortalité	10
4 Ajustement des taux d'incidence des maladies graves. AXA vs AGRe	11
I.1 Répartition des parts du marché de la réassurance Vie/Non Vie en 2017 entre les différents acteurs	2
I.2 Formes de réassurance	4
I.3 Distribution de la charge de l'assureur (en bleu) et du réassureur (en rouge) dans le cas d'un Quote-Part	5
I.4 Schéma de réassurance d'AGRe	9
I.5 Modèle simplifié du passif d'une compagnie d'assurance.	10
I.6 Décomposition du BEL_{vie}	12
I.7 Décomposition du $BEL_{Réserves}$	12
I.8 Décomposition du $BEL_{Charges}$	13
I.9 Schéma représentatif de l'approche proposée	15
II.1 Zones Géographiques de souscription	19
II.2 Evolution de la mortalité par âge de la population de Hong Kong	24
II.3 Sommes sous risque ventilé par type de garantie	26
II.4 Taux de cession des garanties basiques	27
II.5 Modalités de paiements-Primes de réassurance	28
II.6 Sinistres comptabilisés	29
II.7 BoxPlot des âges par date de Reporting	30
II.8 Sommes sous risque ventilé par type de garantie	31
II.9 Age moyen pondéré par les primes des garanties basiques	31
III.1 Exemple de censure à droite et de troncature à gauche.	35
III.2 Distribution des décès et de l'exposition par sexe	43
III.3 Taux annuel de décès	44
III.4 Estimation des taux par âge	45
III.5 Ajustement de Whittaker Henderson des taux de mortalité	46
III.6 Ajustement de BRASS des taux de mortalité	47
III.7 Ajustement de Makeham des taux de mortalité	48
III.8 Résidus de la population masculine	49
III.9 Ajustement final de la table de mortalité	51
III.10 Taux d'incidence moyen par produit et par classe	52
III.11 Taux d'incidence	53
III.12 Ajustement WH des taux d'incidences des maladies majeurs	54
III.13 Ajustement de WH des taux d'incidence des maladies précoces	56
III.14 Ajustement de WH des taux d'incidence des maladies mineures	57
III.15 Boxplot des taux de rachat en fonction de la catégorie d'âge	59

III.16	Boxplot des taux de rachat en fonction des modalités de paiement	59
III.17	Evolution conditionnelle des taux de rachats	62
III.18	Comparaison des estimations de taux de rachat	63
IV.1	Modèle des états	64
IV.2	Séquence de projections	65
IV.3	Algorithme de projection	65
IV.4	Simulations des états de la police i au premier mois de la projection	66
IV.5	Effet de la décroissance naturelle sur la projection de la SAR	68
IV.6	Projection des primes et des sinistres cumulés	69
IV.7	Projection des primes et des sinistres cumulés par garanties	70
IV.8	Comparaison des deux estimations du BEL Vie	71
IV.9	Loss Ratio Scénario Central/Scénario Stressé Hypothèses HK	72
IV.10	Loss Ratio Scénario Central/Scénario Stressé Hypothèses AGRE	72
B.1	Ajustement des taux d'incidence des maladies graves. AXA vs AGRE	80
B.2	Ajustement des taux d'incidence des maladies précoces. AXA vs AGRE	81
B.3	Ajustement des taux d'incidence des maladies mineures. AXA vs AGRE	81
C.1	Taux d'incidence des maladies majeures unisexe	82
C.2	Taux d'incidence des maladies précoces unisexe	82
D.1	SAR Estimées AGRE vs SAR HK	83
E.1	Projection de l'âge moyen et du nombre d'individus restants	84
G.1	Résidus de la population féminine	88

Liste des tableaux

I.1 Fonctionnement du Quote-Part	4
I.2 Exemple de fonctionnement de l'Excédent de plein	6
II.1 Garanties supplémentaires du produit de prévoyance individuelle	18
II.2 Méthodes de calcul des sommes sous risque	20
II.4 Valeurs de γ_i	21
II.3 Valeurs de β_i	21
II.5 Eléments pour la détermination des risques	23
II.6 Incohérences et traitements effectuées	26
III.1 Base de données brute KM	36
III.2 Base de données brute KM	37
III.3 Paramètre de la minimisation non linéaire	46
III.4 Paramètre de la minimisation sous contraintes de Makeham	47
III.5 Décès observés/Décès Estimés	50
III.6 Résultats des critères de la validation globale	50
III.7 Résultats des tests sur la garantie "Maladie Majeures"	54
III.8 Backtesting des résultats	55
III.9 Résultats de l'ajustement du modèle des maladies majeures	55
III.10 Résultats des tests ESCI	56
III.11 Backtesting des résultats	57
III.12 Résultats de l'ajustement unisexe de l'incidence des maladies précoces	57
III.13 Résultats des tests Minor	58
III.14 Résultats de l'ajustement unisexe de l'incidence des maladies mineures	58
III.15 Triangle des paiements cumulées	60
III.16 Triangle des nombres de cotrats restants	61
IV.1 Acronymes utilisés	76
A.1 Taux de prime pour 10 000 HKD assurée	77
A.2 Taux de prime pour 10 000 HKD assurée	78
A.3 Taux de prime pour 10 000 HKD assurée	78
A.4 Taux de prime pour 10 000 HKD assurée	79