Mémoire présenté le : 30 septembre 2021

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Claire BEC

Titre Impacts des risques financiers inhérents à la détention de produits structurés « Autocalls »

Confidentialité : X NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membre présents du jury de l'Institut des Actuaires
F. PICARD

F. PLANCHET

Membres présents du jury de l'ISFA
S. LOISEL

Entreprise : SPAC Actuaires

Directeur de mémoire en entreprise :
Nom : Alexandre CALLE
Signature :

Invité : -
Nom : -
Signature : -

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Résumé

Mots clefs : Produits structurés, autocalls, Modèle de Black and Scholes, Modèle d'Heston, Surface de volatilité, Descente de gradient, Monte Carlo.

Les produits structurés sont des produits complexes et risqués mais qui peuvent offrir de bons rendements. Ils se sont particulièrement développés ces dernières années parce qu'ils présentent une bonne rentabilité malgré leur risque. C'est notamment le cas des autocalls, produit structuré versant des coupons et s'arrêtant lorsque certaines conditions du marché sont remplies.

La valorisation de ces produits requiert une connaissance approfondie des mécanismes de structuration et une bonne maîtrise de l'ensemble des risques des sous-jacents. Un portefeuille est généralement constitué de plusieurs produits structurés, ce mémoire s'attache à la valorisation d'un d'entre eux : les autocalls.

Le risque du sous-jacent sur lequel est basé le produit est le risque le plus évident pour l'investisseur : il s'agit de prédire si le sous-jacent va évoluer à la hausse ou la baisse, et dans quelle mesure. C'est pourquoi, le modèle utilisé dans la diffusion du sous-jacent est primordial dans la valorisation de ces produits. Le modèle de Black and Scholes n'est pas vraiment adapté du fait de son hypothèse de volatilité constante sur la durée de vie du produit. Le modèle d'Heston paraît répondre à ce problème : sa volatilité est dite stochastique. Mais la calibration d'un modèle comme celui-ci est chronophage, c'est un modèle plus sophistiqué que celui de Black and Scholes.

Le but de ce mémoire est de comprendre les impacts du modèle choisi et de la calibration des paramètres sur la valorisation de ces produits. L'objectif est de saisir quels sont les enjeux pour une entreprise confrontée à la détention d'un tel produit qui doit valoriser le risque qui lui est associé.

Abstract

Key words : Structured products, autocalls, Black and Scholes model, Heston model, Volatility surface, Gradient descent, Monte Carlo.

Structured products are complex and risky but can offer good returns. They have become particularly popular in recent years because they offer good returns despite their risk. This is particularly true of autocalls, a structured product that pays coupons and stops when certain market conditions are met.

The valuation of these products requires an in-depth knowledge of the structuring mechanisms and a good command of all the risks of the underlying assets. A portfolio is generally made up of several structured products, this thesis focuses on the valuation of one of them : autocalls.

The risk of the underlying on which the product is based is the most obvious risk for the investor : it is to predict whether the underlying will move up or down, and to what extent. For this reason, the model used in the dissemination of the underlying asset is crucial for the valuation of these products. The Black-Scholes model is not really suitable because of its assumption of constant volatility over the life of the product. The Heston model seems to answer this problem : its volatility is said to be stochastic. But the calibration of a model like this one is time consuming, it is a more sophisticated model than the Black and Scholes one.

The aim of this thesis is to understand the impact of the chosen model and the calibration of the parameters on the valuation of these products. The objective is to understand what is at stake for a company confronted with the holding of such a product, which must value the risk associated with it.

Remerciements

Ce mémoire n'aurait pu se réaliser sans l'aide de nombreuses personnes que j'aimerais remercier ici.

Tout d'abord, mon tuteur professionnel, Alexandre Calle, qui a été présent pour moi tout au long de l'année malgré ses nombreux autres objectifs professionnels. Ses conseils tant sur l'interprétation des résultats que lors de la relecture m'ont permis de réaliser cette étude.

Je remercie Pierre Montesinos qui m'a aussi été d'une grande aide spécialement sur le point de vue technique de ce mémoire.

Je souhaite également remercier tous mes collègues pour leur accueil chaleureux chez SPAC Actuaires ainsi que l'encadrement professionnel qu'ils m'offrent, notamment Brigitte Ecary pour sa disponibilité.

Je tiens à remercier toute l'équipe pédagogique de l'I.S.F.A pour ces trois années d'enseignement et en particulier mon promoteur de mémoire Didier Rullière.

Enfin, ce mémoire signe aussi la fin de mes études. J'en profite donc pour remercier ma famille et mes amis, notamment les gagnantes, d'avoir été là pour moi durant cette période.

Sommaire

Résumé **1**

Abstract **2**

Remerciements **3**

Introduction et contexte **12**

1 Contexte et définitions **16**

1.1 Propriétés financières nécessaires à l'étude 16

1.1.1 Approche risque neutre 16

1.1.2 Mouvement brownien géométrique 18

1.1.3 Volatilité 19

1.1.4 Monte-Carlo 23

1.2 Produits structurés et autocalls 24

1.2.1 Allocation d'actifs 24

1.2.2 Les produits structurés 24

1.2.3 Fonctionnement des autocalls 27

2 Données de l'application **32**

3 Black and Scholes : première approche naïve **36**

3.1 Hypothèses et solutions des équations 36

3.2 Paramétrisation du drift 37

3.3 Implémentation dans R du prix de l'option 39

3.4 Surface de volatilité 40

3.5 Passage aux autocalls 42

3.6 Résultats dans le cadre du modèle de Black and Scholes 45

3.6.1 Avec les données historiques 45
3.6.2 Avec les données implicites 46

4 Modèle d'Heston **51**
4.1 Equations et présentation du modèle 51
4.1.1 Présentation générale 51
4.1.2 Prix d'un call 54
4.2 Calibration des paramètres 54
4.2.1 Partie théorique 54
4.2.2 Application à notre jeu de données 57
4.3 Validation des paramètres 64
4.4 Avec Monte-Carlo 66
4.5 Sensibilités aux paramètres 68
4.5.1 Sensibilité au sous-jacent initial 69
4.5.2 Sensibilité à la variance initiale V_{ini} 72
4.5.3 Sensibilité à la force de rappel κ^* 74
4.5.4 Sensibilité à la variance à l'infini θ^* 75
4.5.5 Sensibilité au paramètre de corrélation ρ 78
4.5.6 Sensibilité à la volatilité de la variance σ 79
4.5.7 Conclusion sur les sensibilités 80
4.6 Variation de la maturité du produit 82
4.7 Limites des modèles 85
4.7.1 Modèle de Black and Scholes 85
4.7.2 Modèle d'Heston 86

Conclusion **87**

Annexe 1 : Simulation dans R d'un mouvement brownien **90**

Annexe 2 : Initialisation pour le calcul **91**

Annexe 3 : Démonstration équation de Black and Scholes **92**

Annexe 4 : Démonstration de la formule d'évaluation de Black and Scholes **94**

Annexe 5 : Volatilité implicite dans le modèle de Black and Scholes et formule fermée **97**

Annexe 6 : Calcul avec le modèle de Black and Scholes : Monte Carlo **98**

Annexe 7 : Calcul d'un call avec le modèle d'Heston : Monte Carlo **100**

Annexe 8 : Calcul d'un call grâce à la formule d'Heston **101**

Annexe 9 : Calcul avec le modèle d'Heston : par les formules **105**

Annexe 10 : Calibration : Descente de gradient - 1 **106**

Annexe 11 : Calibration : Descente de gradient - 2 **107**

Annexe 12 : Calcul de l'erreur **108**

Liste des figures

1.1 Simulation d'un mouvement brownien et d'un mouvement brownien géométrique sur R 19

1.2 Place du couple rendement-risque des produits structurés dans le marché 25

1.3 Couples rendement-risque des produits structurés 26

1.4 Graphique des différents cas pour les autocalls sans mise en mémoire coupon 29

2.1 Schéma récapitulatif de l'autocall étudié à date d'évaluation 34

3.1 Taux sans risque de Bloomberg 38

3.2 Drift de l'action TOTAL 39

3.3 Surface de volatilité retrouvée (à gauche) et surface de volatilité Bloomberg (à droite) 41

3.4 Schéma des différents cas pour les autocalls 44

3.5 Pertes de l'autocall TOTAL calculées avec les paramètres historiques . . 45

3.6 Pertes de l'autocall TOTAL calculées avec une volatilité constante 46

3.7 Pertes de l'autocall TOTAL calculées avec les deux différentes nappes . . 49

3.8 Pertes de l'autocall TOTAL calculées avec différentes volatilités constantes 50

4.1 Convergence de V_{ini} 59

4.2 Convergence de κ^* 59

4.3 Convergence de θ^* 59

4.4 Convergence de ρ 59

4.5 Convergence de σ 60

4.6 Convergence de l'erreur 60

4.7 Convergence de κ^* 60

4.8 Convergence de ρ 60

4.9 Convergence de σ 61

4.10 Convergence de l'erreur 61

4.11 Convergence de l'erreur dans le cas où α est trop grand 62

4.12 Vérification de l'erreur 64

4.13 Représentation de l'erreur pour chaque call du marché 65

4.14 Représentation de l'erreur pour chaque call du marché avec Monte Carlo 68

4.15 Représentation de l'erreur pour chaque call du marché 70

4.16 Densité des cours à la première date de fixing 71

4.17 Densité des cours à la dernière date de fixing 71

4.18 Densité des cours à la première date de fixing 72

4.19 Densité des cours à la cinquième date de fixing 72

4.20 Densité des cours à la première date de fixing 73

4.21 Densité des cours à la dernière date de fixing 73

4.22 Densité des variances à la première date de fixing 73

4.23 Densité des variances à la dernière date de fixing 73

4.24 Densité des variances à la première date de fixing 75

4.25 Densité des variances à la dernière date de fixing 75

4.26 Densité des cours à la première date de fixing 77

4.27 Densité des cours à la dernière date de fixing 77

4.28 Densité des variances à la première date de fixing 77

4.29 Densité des variances à la dernière date de fixing 77

4.30 Densité des cours à la première date de fixing 79

4.31 Densité des cours à la dernière date de fixing 79

4.32 Densité des variances à la première date de fixing 80

4.33 Densité des variances à la dernière date de fixing 80

4.34 Modèles en fonction de la date de maturité du produit 83

Liste des tableaux

1.1 Inputs pour trouver les volatilités 22

1.2 Volatilités du sous-jacent TOTAL 22

3.1 Input de l'autocall évalué - données historiques 45

3.2 Input de l'autocall évalué - modèle de Black and Scholes 46

4.1 Evolution des paramètres dans le scénario 1 58

4.2 Evolution des paramètres dans le scénario 2 58

4.3 Evolution des paramètres dans le scénario 3 60

4.4 Evolution des paramètres dans le scénario 4 61

4.5 Evolution des paramètres dans le scénario 5 62

4.6 Evolution des paramètres dans le scénario 6 62

4.7 Evolution des paramètres dans le scénario 7 63

4.8 Evolution des paramètres dans le scénario 8 63

4.9 Erreur sur le calcul des put 66

4.10 Paramètres calibrés grâce aux prix du marché - Heston 69

4.11 Sensibilité au sous-jacent 69

4.12 Sensibilité à V_{ini} 72

4.13 Sensibilité à κ^* 74

4.14 Sensibilité à θ^* 76

4.15 Sensibilité à ρ 78

4.16 Sensibilité à σ 79

4.17 Sensibilité du produit en fonction du paramètre 80

Introduction et contexte

Une entreprise détient un portefeuille de produits structurés de type autocalls qui n'ont jamais fait l'objet d'une valorisation. Les Commissaires aux Comptes de l'entreprise l'avertisse d'un risque de perte en capital à l'échéance pour certains produits détenus. La société a ainsi souhaité valoriser son portefeuille à cette date. Elle demande donc une évaluation actuarielle de son portefeuille : mesurer les risques de pertes qui lui sont associés.

La problématique ayant été soulevée en toute fin de clôture des comptes, les délais de valorisation ont été extrêmement courts. Sans accès à un data provider de qualité dans les plus brefs délais, la première valorisation retenue est une approximation du premier ordre des pratiques des marchés financiers. La valorisation est faite à partir du modèle de Black and Scholes pour la dynamique de diffusion des valeurs des sous-jacents en retenant une approche historique quant aux paramètres nécessaires aux projections (volatilité et dividendes).

Du fait de la crise sanitaire "Covid 19", l'ensemble des marchés financiers ont fortement reculé sur l'année 2020 et la performance mesurée du portefeuille détenu s'est particulièrement dégradée sur l'année. Les chiffres exacts ne sont pas donnés par soucis de confidentialité.

Les effets de la crise sanitaire sur les cours boursiers couplés au constat que la première méthodologie n'était pas satisfaisante par rapport aux pratiques du marché ont accéléré la refonte de la première méthodologie retenue.

Les attentes de l'entreprise étaient multiples : comprendre les mécanismes d'une telle valorisation, appréhender les effets du modèle retenu sur les résultats obtenus, retenir une modélisation en phase avec les normes applicables en la matière et identifier les

potentielles marges de manoeuvre dans le processus de valorisation.

Les résultats, très dégradés, ont fait l'objet de discussions avec les Commissaires aux Comptes de l'entreprise. Cela a abouti à des ajustements sur la méthodologie jusqu'alors utilisée et la nécessité de la faire évoluer. En effet, le choix avait été fait de valoriser les cours grâce au modèle de Black and Scholes et de retenir ces paramètres :

— la volatilité historique sur la maturité résiduelle du produit, constante ;
— les taux de dividendes historiques, intégrant une dimension temporelle ;
— la courbe des taux emprunt de l'état français considérés comme taux sans risque.

Suite aux différents échanges entre la société et ses Commissaires aux Comptes, l'ajustement à opérer était d'intégrer les attentes du marchés, c'est-à-dire choisir les paramètres implicites, dépendants du temps. Plusieurs modèles peuvent être retenus pour modéliser la dynamique du sous-jacent : le modèle de Black and Scholes, le modèle CEV (Constant Elasticity of Variance Model), le modèle d'Heston, les modèles à sauts qui sont exposés dans les travaux Carr [4]...

Nous en retenons deux pour ce mémoire compte tenu de la demande client. D'une part, le modèle de Black and Scholes, auquel notre client était attaché et puisqu'il était utilisé jusqu'alors, il est nécessaire de rationaliser les écarts de valorisation avec la nouvelle méthode. D'autre part, le modèle d'Heston car plébiscité par les Commissaires aux Compte. Il s'agit de mesurer dans quelle mesure les modèles donnent des chiffrages différents et de savoir si un ajustement du modèle de Black and Scholes est envisageable pour approximer les chiffrages du modèle d'Heston.

Nous faisons le choix d'analyser un seul de ces autocalls : ce mémoire a une visée d'application sur cet autocall en particulier. Tous les résultats ne peuvent pas être généralisés même s'ils permettent une bonne appréhension globale des deux modèles étudiés sur ces produits.

Au cours de nos travaux, plusieurs problématiques ont été mises en lumière.

Tout d'abord, les données de marché sont des données court terme alors que le produit que nous étudions est un produit long terme car de maturité 7,5 ans : beaucoup de données sont donc extrapolées. Les calibrations des paramètres utilisés pour des projections long terme sont faites par rapport à un marché qui raisonne à plus court ou moyen terme.

De plus, aucun coût n'est pris en compte dans les valorisations, notamment les frais de transaction. Les entreprises qui ne sont pas sensibilisées à ces problématiques ne peuvent pas valoriser leur portefeuille elles-même et doivent faire appel à un accompagnement extérieur. Ces techniques de valorisation sont généralement délicates à mettre en place techniquement, chronophages et nécessitent une parfaite connaissance du fonctionnement des marchés financiers.

Un dernier point d'attention est la variabilité des résultats obtenus : d'un jour à l'autre, la calibration peut être sensiblement différente. En effet, les modèles s'appuient sur les anticipations du marché et ces dernières peuvent changer rapidement.

La structure de ce mémoire est la suivante.

Tout d'abord, nous reviendrons sur quelques propriétés importantes dans le monde de la finance, qui nous seront utiles pour la suite, parmi lesquelles l'approche risque neutre, les mouvements browniens géométriques, la méthode de Monte-Carlo et le fonctionnement de produits structurés particuliers : les autocalls.

L'autocall basé sur le sous-jacent qui est l'action TOTAL que nous étudions dans ce mémoire est présenté, il a une maturité de 7,5 ans.

Pour la valorisation des autocalls, nous devons modéliser la dynamique de diffusion du sous-jacent sur lequel se base l'autocall.

Le modèle de Black and Scholes, approche assez naïve, est retenu pour cela dans un premier temps. Deux paramètres sont alors à calibrer : l'espérance de rendement ainsi que la volatilité, cette dernière étant plus difficile à estimer conformément au marché. On expliquera comment nous avons implémenté le modèle en R pour simuler les variations des cours de sous-jacents et puis comment nous l'avons étendu à la valorisation de l'autocall.

Par la suite, les cours sont simulés grâce au modèle d'Heston. Nous présenterons la double équation différentielle supposée par ce modèle et établirons la calibration des différents paramètres à partir des prix observés sur le marché. Nous testerons cette calibration de différentes manières pour vérifier la robustesse de nos résultats. De la

même manière que pour le modèle de Black and Scholes, nous présenterons comment nous avons implémenté cette dynamique des cours en R dans le cadre de la valorisation du produit autocall détenu.

Enfin, nous appliquerons les deux modèles présentés aux données du produit présenté précédemment dans un but de comparaison des modèles. Nous évaluerons les sensibilités aux paramètres du modèle d'Heston. Enfin, nous étudierons la dépendance temps pour comprendre comment se comportent ces modèles à maturité pour des produits à court, moyen et long terme.

Pour finir, les annexes présentent des démonstrations théoriques ainsi que des algorithmes permettant de valoriser les produits. Ceux-ci sont codés en R ou VBA.

Chapitre 1

Contexte et définitions

1.1 Propriétés financières nécessaires à l'étude

L'objet de cette partie est d'introduire les propriétés élémentaires qui nous seront utiles dans la suite de ce mémoire. Elles sont essentielles pour bien comprendre les deux modèles qui y sont présentés. Ces propriétés sont également éxposées dans le livre de John Hull [7] et dans les travaux de Peter Tankov [11].

1.1.1 Approche risque neutre

Une calibration de modèles de projection du cours en univers risque neutre réside dans la minimisation des écarts entre les prix observés sur le marché et les prix théoriques retenus par le modèle. La projection des cours tient compte des anticipations faites par le marché.

La valorisation risque neutre consiste à simuler les flux futurs d'un produit financier avec ces paramètres estimés et à considérer la moyenne des flux futurs actualisés au taux sans risque.

L'hypothèse d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA) est vérifiée dans le cadre d'un marché où il est impossible d'obtenir un gain positif avec une probabilité strictement positive pour un investissement nul. Un marché est dit complet si tout actif peut être répliqué.

En supposant ces deux hypothèses vraies, la valeur en t d'un produit de maturité T est le montant actualisé de l'espérance risque neutre de son payoff. Mathématiquement,

sous la probabilité risque neutre notée Q, cela se traduit par :

$$P = \mathbb{E}^Q[e^{r(T-t)}F(S_T)]$$

où

— P est le prix du produit en t ;
— r est le taux d'intérêt sans risque qu'on suppose constant ;
— S_T est la valeur du cours calculée en T ;
— $F(S_T)$ est le payoff à maturité, soit la quantité que doit fournir le vendeur à l'échéance. Dans le cas d'un call, $F(S_T) = (S_T - K)_+$ où K est le *strike*.

Ainsi, les prix évoluent, en moyenne, au taux sans risque. L'espérance de rendement est alors la même pour les différents actifs.

Le risque neutre ne dépend pas du profil de l'investisseur : qu'il soit risquophobe ou non les paramètres seront les mêmes. C'est dans cet univers que sont généralement pricés les produits dérivés. C'est donc dans le cadre de cette approche risque neutre que les calculs de valorisation des produits étudiés seront faits.

La formule de parité Call-Put est vérifiée lorsqu'il y a AOA. En prenant en compte un taux de dividende continu (ie l'indice S_t verse en continu un dividende égal à qS_tdt), elle s'écrit :

$$C_t(T,K) - P_t(T,K) = S_t * exp(-q * (T-t)) - K * B(t,T)$$

où

— $C_t(T,K)$ est la valeur d'un call de maturité T et de *strike* K à l'instant t ;
— $P_t(T,K)$ représente la valeur du put de maturité T et de *strike* K à l'instant t ;
— S_t est le cours du sous-jacent à l'instant t ;
— K est le prix d'exercice ;
— $B(t,T)$ correspond à la valeur à l'instant t d'une obligation zéro coupon d'échéance T.

Nous pouvons ainsi retrouver le prix des Puts théoriques à partir de ceux des Calls annoncés par le marché grâce à cette formule. Ce ne seront pas tout à fait ceux observés sur le marché car l'hypothèse d'AOA n'est pas vérifiée en réalité.

Dans les comptes des entreprises, pour valoriser une option ou un produit structuré avec un modèle comme celui de Black and Scholes, on peut se placer :

— soit dans le cadre historique. C'est le cas par exemple, des valorisations d'AGA, de Stock Option, de phantom stock aux bénéfices des salariés de l'entreprise. La rentabilité de l'actif est alors estimée à partir des taux d'emprunt d'état France ;

— soit dans le cadre risque neutre. L'espérance de rentabilité instantanée de tout actif est alors égale au taux sans risque.

1.1.2 Mouvement brownien géométrique

Le mouvement brownien géométrique permet d'ajouter une dynamique aléatoire à la trajectoire des cours boursiers. En effet, le mouvement brownien est un processus stochastique continu qui permet de modéliser un comportement aléatoire en fonction du temps.

<u>Définition 1 :</u> Un processus stochastique fini est une séquence $X_1, ..., X_n$ de variables aléatoires définies sur l'espace Ω. Un processus stochastique continu sur I (en général, on pose $I =]0, \infty[$) est une collection $(X_t, t \in I)$ de variables aléatoires de Ω.

<u>Définition 2 :</u> Un processus stochastique $(W_t, t \geqslant 0)$ est un mouvement brownien de volatilité σ si :

1. $W_0 = 0$;
2. W_t suit une loi normale $\mathscr{N}(0, \sigma\sqrt{t})$;
3. (W_t) est un processus à accroissements stationnaires : pour $s < t$, l'accroissement $W_t - W_s$ ne dépend que de la valeur de $t - s$ ie $W_t - W_s$ suit une loi normale $\mathscr{N}(0, \sigma\sqrt{t-s})$;
4. (W_t) est un processus à accroissements indépendants : pour toute séquence de temps $t_1 < t_2 < ... < t_n$, $W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sont des variables aléatoires indépendantes.

<u>Définition 3 :</u> Un mouvement brownien géométrique est un processus stochastique de la forme $(exp(W_t), t \geqslant 0)$ où $(W_t, t \geqslant 0)$ est un mouvement brownien.

C'est la représentation d'une marche aléatoire au cours du temps, d'une dynamique composée d'une succession de pas effectués au hasard. Cette marche aléatoire n'a pas

de mémoire.

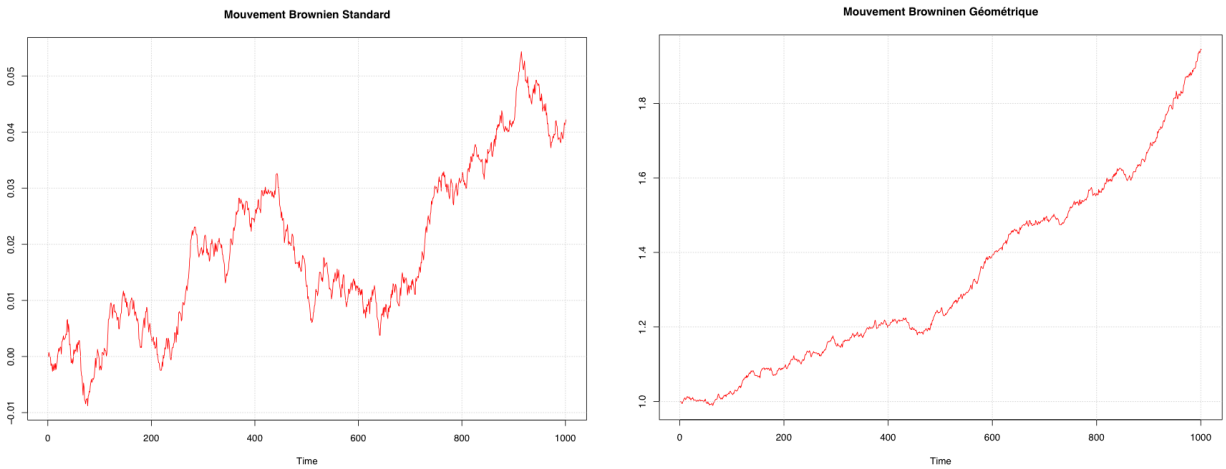

FIGURE 1.1 – Simulation d'un mouvement brownien et d'un mouvement brownien géométrique sur R

Les codes de ces graphiques sont présentés en Annexe 1.

La dynamique du cours en t se présente sous la forme suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

où

- S_t est le prix de l'actif à l'instant t ;
- μ représente le drift (dérivé du prix de l'actif par rapport au temps), c'est-à-dire la moyenne des rendements de l'actif ;
- σ est la volatilité, c'est-à-dire l'écart-type ;
- dW_t représente le mouvement brownien standard responsable du caractère aléatoire de la valeur de l'actif au cours du temps.

1.1.3 Volatilité

La volatilité d'un actif correspond à l'ampleur de ses variations par rapport à la moyenne au cours du temps. Elle permet donc de quantifier le risque. Plus la volatilité d'un actif est élevée, plus l'espérance de rentabilité doit être forte pour séduire les investisseurs (mais la possibilité de faire une perte aussi) et par conséquent l'actif est plus risqué. Un investisseur est prêt à prendre plus de risque uniquement si le gain est plus

important.

Dans le modèle de Black and Scholes, tous les paramètres sont connus ou observables hors l'espérance de rentabilité et la volatilité qui doivent être estimés. Ce mémoire considérera deux types de volatilités :

1. La volatilité historique est basée sur l'étude de l'historique des sous-jacents. Il faut alors choisir une période sur laquelle calculer la volatilité : elle peut être calculée sur différents horizons de temps suivant l'analyse désirée. Cette période doit être cohérente avec la maturité des observations. Par exemple, on ne considère pas une volatilité 1 an pour 5 ans de projection.

   Le calcul mathématique se fait de la manière suivante : on calcule les variations historiques, c'est-à-dire les différences entre les cours de clôture et la moyenne des variations du cours pour la période choisie. On prend ensuite la racine carrée de la moyenne de ces écarts. On obtient ainsi la volatilité historique. Le pas de temps de l'observation peut être journalier, hebdomadaire, mensuel... les différents résultats obtenus sont cohérents entre eux.

2. La volatilité implicite, que l'on notera σ^{BS} par la suite, est définie comme le paramètre qui, dans la formule de Black and Scholes (cf. paragraphe 3.3), conduit au prix observé sur le marché par inversion de la formule. Les autres paramètres de l'équation (date de calcul, date d'expiration, prix d'exercice...) sont évidemment connus. En connaissant le prix de marché pour une option de *strike* K et de maturité T, on peut calculer une valeur unique pour la volatilité, c'est la valeur qui permet de retrouver le prix actuel de l'option sur le marché.

   Cette volatilité dépend donc de la maturité et du *strike*, contrairement à la volatilité historique qui a uniquement une dépendance temporelle.

   Toutes les options (pour toutes les maturités et tous les prix d'exercice) n'étant pas cotées sur le marché, seuls quelques points peuvent être positionnés sur le graphique 3D. Nous devons donc procéder à une interpolation si l'on souhaite obtenir la surface de volatilité implicite.

   Elle sera réalisée en partie 2.

Pour optimiser le calcul de la volatilité implicite, on utilise l'algorithme de Newton-Raphson. Le principe est de partir d'une valeur proche d'une racine (ici, la valeur initiale fixée est $\frac{1}{2}$) puis de construire une suite progressive qui se rapproche de la valeur recherchée : la volatilité implicite.

A chaque itération, l'algorithme de Newton-Raphson cherche la tangente au point trouvé, notée f jusqu'à obtenir le σ qui vérifie $f(\sigma) = 0$. On procède ensuite à une dichotomie pour une convergence plus rapide.

Nous retrouvons cette méthode dans le code de l'Annexe 5.

Généralement, les petites entreprises qui n'ont pas accès au marché utilisent la volatilité historique : les données historiques sont accessibles gratuitement sur internet et son utilisation est autorisée dans certains référentiels comptables (IFRS 2 notamment).

La volatilité historique permet de quantifier les fluctuations passées d'un sous-jacent. Mais elle n'anticipe pas les comportements des investisseurs qui ont une grande influence sur les cours boursiers contrairement à la volatilité implicite. C'est pourquoi on préfèrera la volatilité implicite : elle tient compte des anticipations du marché et intègre donc plus d'informations.

Application pour évaluer l'impact sur le prix de l'option selon la nature de la volatilité : historique ou implicite :

Selon la méthode de calcul choisie, on obtient des volatilités différentes. Nous l'illustrons ici.

Prenons l'exemple des volatilités pour le sous-jacent de l'action TOTAL. Nous résumons dans ce tableau les inputs (données du marché et caractéristiques de l'option) pour trouver les deux volatilités :

Date de calcul	31/12/2020
Prix du sous-jacent S_0	35,30€
Type d'option	Call
Strike	35
Maturité	351 jours = 0,96 an

TABLE 1.1 – Inputs pour trouver les volatilités

S_0 correspond au cours de clôture au 31/12/2020.

On cherche donc à obtenir les volatilités : historique à échéance 0,96 an approximée à 1 an et implicite pour une maturité de 0,96 an et d'un *strike* de 35€.

Pour la volatilité historique, on relève tous les cours de clôture hebdomadaires du 31/12/2019 au 31/12/2020 (période de 1 an et on calcule l'écart-type des différences, méthode expliquée dans le paragraphe précédent). L'estimation de la volatilité des sous-jacents sur une période d'observation de 1 an calculée est $21,35\%$.

Pour la volatilité implicite, nous considérons un call qui a pour date d'expiration le 17/12/2021 (soit dans 351 jours) avec un prix d'exercice de 35€. Nous choisissons ce prix à la monnaie car le volume d'échange correspondant sur le marché est élevé, c'est un prix représentatif du marché. Le prix de ce call sur le marché est alors de 3,07€. On peut à partir de ces données trouver la volatilité implicite en inversant le prix de la formule de Black and Scholes. On trouve une volatilité de $29,20\%$.

On obtient les résultats ci-dessous :

	Volatilité calculée
Historique	21,35 %
Implicite	29,20 %
Ecart	36,88 %

TABLE 1.2 – Volatilités du sous-jacent TOTAL

Cette différence s'explique car la volatilité implicite repose sur le prix de marché qui est déterminé en fonction de l'offre et de la demande actuelle, c'est-à-dire que la volatilité implicite prend en compte les agissements des investisseurs, dépendants de leurs suppositions.

1.1.4 Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est utilisée dans de nombreux domaines. Nous appliquerons cette approche à notre problème de valorisation, et que nous présentons ci-dessous. En effet, nous utilisons Monte Carlo car il n'existe pas de formule fermée pour ce produit et que le produit est path dependant : le cours doit être calculé à plusieurs dates et le cours S_t est fabriqué à partir du cours S_{t-1}.

La méthode de Monte-Carlo vise à simuler N trajectoires de cours aléatoires sous la probabilité risque neutre pour pouvoir en déduire par exemple le cours moyen d'une action à une maturité donnée, le prix d'option, la valorisation d'autocalls... Les paramètres doivent être préalablement définis.

Cette méthode repose sur la loi des grands nombres. En posant la somme empirique :

$$S_N = \frac{1}{N} * \sum_{n=1}^{N} S_n$$

où S_n correspond à une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées comme par exemple le cours du sous-jacent dans notre étude.

Alors, S_N tend vers $\mathbb{E}[S_1]$ presque sûrement lorsque N tend vers $+\infty$. La somme empirique correspond à l'estimateur de Monte-Carlo.

Nous prenons ici l'exemple d'un actif, et par souci de simplification, d'une option. Pour la valorisation des autocalls, le même principe sera appliqué mais avec plus de spécificités puisque le produit est plus complexe.

Les différentes étapes dans cette étude pour trouver le prix d'une option sont les suivantes :

1. On simule une série de N cours de bourse sous la probabilité risque neutre grâce à la formule de Black and Scholes que l'on note $(S_t)_{t\in[0,T]}$. Les paramètres implicites sont ici utilisés : volatilité implicite et drift de marché.
2. On calcule ensuite la moyenne de la valeur des actions sur la totalité des simulations : à chaque fois que le spot total est dans la monnaie i.e. le prix d'exercice est inférieur (resp. supérieur) au cours final du sous-jacent pour un call (resp.

pour un put), on calcule le payoff. On cherche donc à calculer le gain de levée de l'option et cela à chaque simulation.

3. On trace un graphique des moyennes en fonction du nombre de simulations pour vérifier la convergence des résultats, qu'ils soient bien stabilisés (et donc que la règle de la loi des grands nombres a bien été respectée).

Cette méthode est assez simple à mettre en place. Pour un call, la convergence est rapide. Mais Monte Carlo a alors assez peu d'interêt puisqu'il existe une formule fermée pour la valorisation des options.

En revanche, les produits plus exotiques peuvent nécessiter bien plus de simulations pour observer une convergence satisfaisante.

1.2 Produits structurés et autocalls

1.2.1 Allocation d'actifs

Le calibrage des risques au sein d'un portefeuille est important pour l'investisseur. C'est ce que met en avant l'étude de Joao [1]. En effet, il doit avoir une vision claire des risques liés à son portefeuille : son objectif est d'optimiser le couple rentabilité-risque par rapport à une stratégie d'investissement. La rentabilité est généralement de même monotonie que le risque puisque l'investisseur est souvent prêt à prendre un risque plus important si la rentabilité de son portefeuille est meilleure.

Cependant, chaque investisseur est plus ou moins "risquophobe" ; il se fait son propre jugement sur le couple risque-rendement. L'appétence au risque est différente d'une stratégie à une autre.

1.2.2 Les produits structurés

Le plus souvent, un portefeuille est constitué de différents instruments financiers qui ont pour but de maximiser le rendement. Ces instruments financiers sont des contrats qui peuvent se négocier s'ils sont échangés dans le marché gré à gré (la transaction est conclue directement entre l'acheteur et le vendeur) ou des contrats standardisés s'ils sont achetés en bourse (marché organisé).

Les instruments financiers sont créés à partir d'associations d'options vanilles (options classiques). La combinaison d'options permet d'obtenir des produits plus spécifiques, plus complets. Ils s'adaptent précisément aux besoins des investisseurs.

C'est le cas des produits structurés qui sont généralement composés de plusieurs éléments (au moins deux) : l'un, obligataire, assurant la protection du capital et l'autre, optionnel, optimisant le rendement du produit.

On situe le couple rendement-risque des produits structurés pour le comparer à ceux d'autres produits financiers plus connus comme les obligations ou actions.

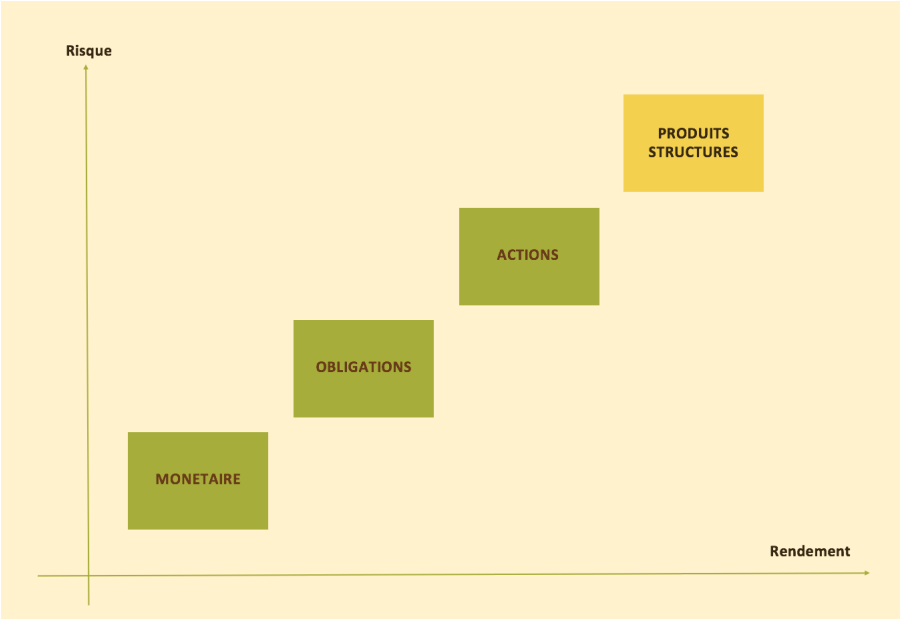

FIGURE 1.2 – Place du couple rendement-risque des produits structurés dans le marché

Parmi les produits structurés, nous distinguons deux grandes familles :

— Les produits à effet de levier : absence de garantie du capital à maturité. Ces produits permettent d'avoir une exposition plus importante sur les marchés sans avoir à augmenter le capital investi ;

— Les produits d'investissement se divisent en trois catégories :
  1. les produits d'investissement à protection de capital ;
  2. les produits d'investissement d'optimisation de la performance ;
  3. les produits d'investissement de participation.

  Cela dépend de la garantie du capital investi qui est respectivement totale, partielle ou faible. Avec par conséquence, le risque de perte de capital de plus en plus élevé.

Le graphique ci-dessous permet de cartographier les différents produits structurés :

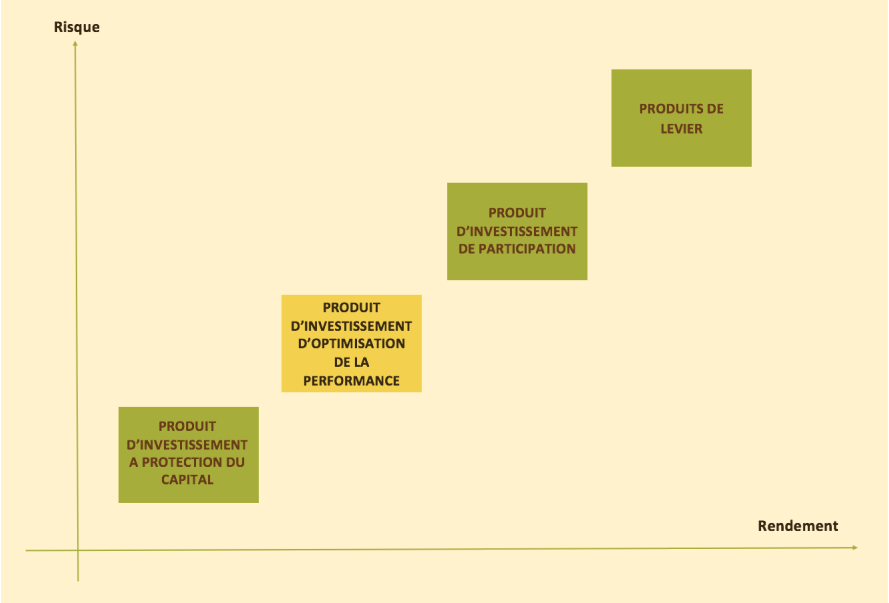

FIGURE 1.3 – Couples rendement-risque des produits structurés

Le prix du produit structuré dépend du prix du sous-jacent à la date de calcul mais également de l'évolution de la volatilité, des taux, des dividendes... Il faut donc prendre en compte tous ces éléments lors de la tarification des produits structurés.

Les autocalls en font partie : ce sont des produits d'investissement et plus précisément des produits d'optimisation de la performance dans la mesure où le capital investi n'est pas garanti. Le but de ce mémoire est de trouver une valorisation du risque encouru par les détenteurs d'autocalls afin de mesurer les risques de perte de l'investissement initial.

1.2.3 Fonctionnement des autocalls

Autocall est l'abréviation de « Automatically Callable », c'est-à-dire automatiquement remboursable. Un autocall est lié à un objet qui peut être : le sous-jacent d'une ou plusieurs actions, un indice boursier, des taux, des devises, des matières premières... par exemple le CAC40, l'action TOTAL. Un autocall est caractérisé par trois barrières : une barrière de coupon, une barrière d'autocall et une barrière de protection du capital, elles sont déterminées à la date de lancement du produit. C'est aussi à cette date que les échéances des coupons sont également fixés. Les dates de détachement de coupon peuvent être annuelles, semestrielles, journalières... selon le choix des investisseurs.

Il existe deux types d'autocalls :

— Les Athena : les éventuels coupons ne sont pas détachés périodiquement mais sont valorisés dans la valeur de la part (ils sont perçus à maturité).

— Les Phoenix : les éventuels coupons sont perçus au fur et à mesure des dates d'observation. Leur fonctionnement est, mis à part cette nuance, similaire.

Ces différences sont également explicitées dans le mémoire de C. de Goriainoff [6].

Revenons sur les 3 barrières :

— **Barrière coupon** Aux dates de détachement de coupon, appelées dates de fixing du coupon, le cours du sous-jacent est relevé. On compare alors cette valeur avec la barrière coupon prédéfinie. Plusieurs cas de figure peuvent alors se présenter :

  1. La valeur du sous-jacent est supérieure ou égale à cette barrière : l'investisseur bénéficie du coupon attendu, conformément au taux d'intérêt (directement ou à la date de maturité en fonction de la nature de l'autocall : Athena ou Phoenix).
  2. Sinon, le coupon n'est pas remis. Si l'option "effet mémoire" de l'autocall a

été choisie par l'investisseur, il n'est pas perdu : celui-ci percevra le coupon non-remis à la période suivante à la condition que le sous-jacent ait franchi la barrière coupon ultérieurement.

— **Barrière autocall** Lorsque le cours du sous-jacent atteint cette barrière à une des dates de fixing, le produit est dit « autocallé ». Le produit est alors automatiquement remboursé au pair (100% du nominal) dans un délai défini lors de l'investissement initial et un (ou plusieurs dans certains cas rares) coupon est perçu. Le produit s'arrête alors. Cette barrière peut être placée à l'infiniment positif afin de s'assurer que le produit arrive à maturité.

— **Barrière protection du capital** Arrivé à maturité, si le produit n'a pas été autocallé (la barrière autocall n'a jamais été atteinte à une des dates de fixing), le montant initial investi est remboursé à l'échéance de la durée de détention. Deux cas sont alors à distinguer :
  1. A la date finale de constatation, le sous-jacent est supérieur ou égal à la barrière de protection de capital, alors le montant initial investi est remboursé au pair mais le détenteur ne reçoit pas nécéssairement de coupon.
  2. A la date finale de constatation, le sous-jacent est inférieur à la barrière de protection de capital, le montant est remboursé partiellement et les coupons ne sont pas remis. La décote de remboursement correspond à la variation du sous-jacent pendant la période de détention : le capital est tronqué de la performance du titre sur la durée du produit. L'investisseur constate une perte sur son investissement : il est exposé à la performance négative du sous-jacent.

A la date de départ, on fixe :
— La Valeur de Constatation Initiale (VCI) correspondant au cours du sous-jacent à la date de début du produit ;
— Les trois barrières précédemment citées et exprimées en pourcentage de la VCI ;
— Les coupons (souvent exprimés en pourcentage du montant initial investi) ;
— La périodicité des dates de fixing ;
— La maturité ;
— Le choix de l'effet mémoire ou non ;
— La possibilité d'un délai de franchise : le produit ne pourra pas être autocallé avant la fin de ce délai même si le niveau du sous-jacent est supérieur à la barrière

autocall à une des dates de constatation. La franchise correspond donc à un laps de temps durant lequel l'émetteur n'effectue pas le remboursement de la somme due.

On peut illustrer ces différents cas de figure par le schéma suivant. En supposant que le produit ait trois dates de fixing : 06/2019, 12/2019 et la dernière qui correspond à la date de fin du produit : 06/2020.

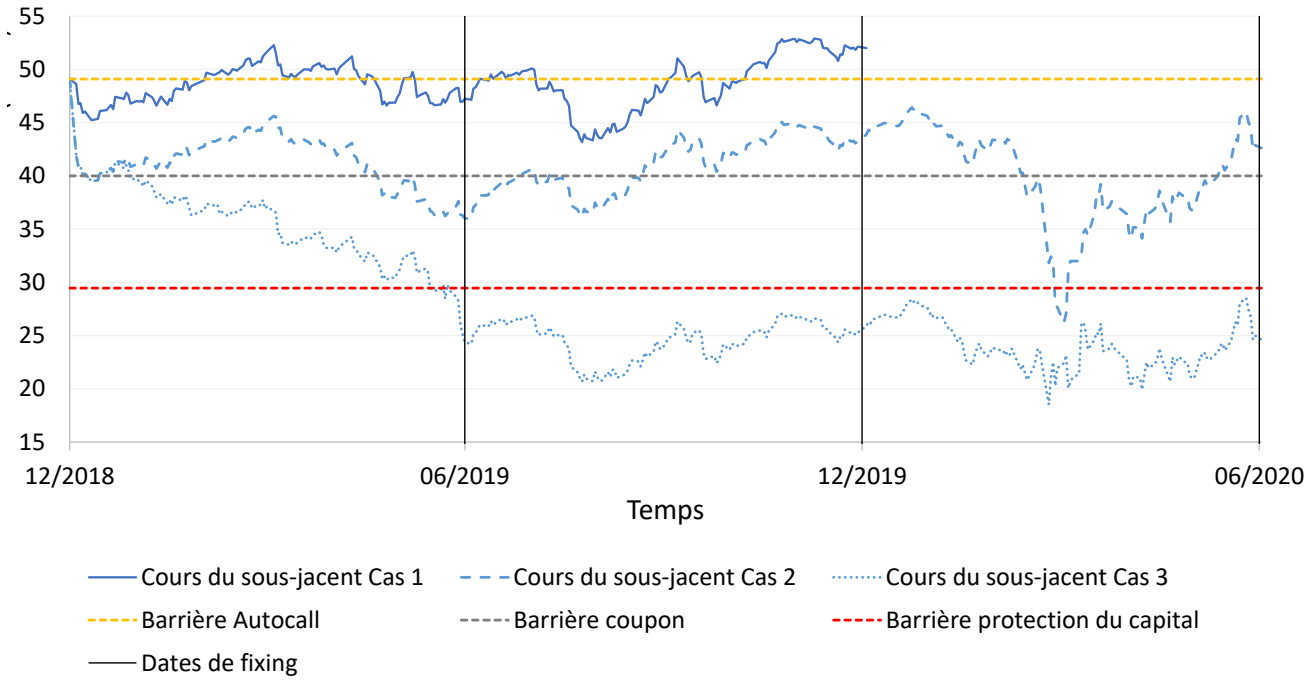

FIGURE 1.4 – Graphique des différents cas pour les autocalls sans mise en mémoire coupon

Dans le cas 1, l'investisseur recevra un coupon au 06/2019 et 100% du capital investi ainsi qu'un autre coupon au 12/2019. Cependant, le produit est autocallé à la période 2 donc le produit est stoppé et n'arrivera pas à maturité.

Dans le cas 2, le détenteur de l'autocall ne reçoit pas de coupon lors de la première période. Il recevra un coupon au 12/2019 si l'autocall est sans effet mémoire, deux sinon. Il reçoit ensuite 100% du capital investi au 06/2020 et un autre coupon car la valeur du sous-jacent est supérieure à la barrière de protection du capital à la fin du produit.

Enfin, dans le cas 3, désavantageux pour l'investisseur, celui-ci ne recevra aucun coupon puisqu'à chaque date de fixing, la valeur du sous-jacent est inférieure à la barrière coupon et il verra de plus son capital initial remboursé partiellement, décoté de la performance du titre sur la durée de vie du produit puisque le sous-jacent est inférieur à la barrière de protection de capital en T = 06/2020.

On note :
- C : Capital initial investi ;
- c : Coupon (barrière) ;
- S_t : Cours du sous-jacent en t ;
- T : Date de maturité ;
- BA : Barrière autocall ;
- BP : Barrière protection du capital ;
- BC : Barrière coupon.

Maintenant que l'on a bien assimilé comment fonctionnaient les autocalls, on peut exprimer P, le payoff de l'autocall sans effet mémoire (par souci de simplification) en fonction de N, le nombre de coupons que l'investisseur touche jusqu'à maturité de l'autocall.

Pour exprimer N, on vérifie à chaque période :
- Que le sous-jacent soit au-dessus de la barrière coupon
- Que pour les périodes précédentes, le sous-jacent n'était pas en-dessus de la barrière autocall (auquel cas l'autocall est stoppé)

$$N = \mathbb{1}_{S_1>BC} + \mathbb{1}_{S_2>BC} * \mathbb{1}_{S_1<BA} + ... + \mathbb{1}_{S_T>BC} * \mathbb{1}_{S_t<BA,1\leqslant t\leqslant T-1}$$

Pour exprimer P, on procède à une disjonction de deux cas :

- Premier cas : Le sous-jacent n'est pas en dessous de la barrière de protection du capital (qu'il ait dépassé la barrière autocall ou non est pris en compte dans le calcul de N) i.e. l'évènement $S_T > BP \cap \max_{1\leqslant t\leqslant T} S_t > BA$ ou l'évènement $\exists t \in [\![1, T]\!]; S_t > BA$ est réalisé. Ceci correspond aux cas 1 et 2 de l'illustration.

$$P = C * (1 + N * c)$$

— Second cas : Le sous-jacent est en dessous de la barrière de protection de capital en T i.e. l'évènement $S_T < BP$ est réalisé. Ceci correspond au cas 3 de notre illustration.

$$P = C * (1 - \frac{S_0 - S_T}{S_0} + N * c)$$

Donc, on obtient la formule globale :

$$P = C * ((1 - \frac{S_0 - S_T}{S_0}) * \mathbb{1}_{S_T < BP} + \mathbb{1}_{S_T > BP} + N * c)$$

Par conséquent, les autocalls permettent aux épargnants de s'exposer aux marchés actions, qui sont rentables mais risqués, avec une protection du capital investi partielle.

En revanche, les autocalls présentent aussi des désavantages dont les principaux sont :

— La durée de l'investissement n'est pas connue à l'avance (cf. cas 2 lorsque le produit est autocallé) même si elle est limitée par la date de maturité.
— Le gain maximal est connu à l'avance : il est donc plafonné. Le maximum correspond aux coupons de chaque période.
— Le détenteur d'autocall subit un risque de perte en capital lié à l'évolution du sous-jacent.
— L'émetteur peut faire défaut.

Pour information, il existe des autocalls appelés "Worst-Of". Ils fonctionnent de la même manière que ceux précédemment décrits avec une spécificité : le sous-jacent n'est pas une seule action individuelle ou un seul indice de référence mais le Worst-Of repose sur plusieurs sous-jacents (généralement des actions de même type).

Ce type de produit est dit autocallé lorsque l'ensemble des sous-jacents le sont. Il existe de plus un effet cliquet : quand un des sous-jacents du Worst-Of s'autocalle, il le reste sur toute la période de l'investissement. Il n'est donc pas nécessaire que les sous-jacents soient autocallés simultanément pour que le produit Worst-Of le soit.

Ces produits spécifiques nécessitent notamment de tenir compte des corrélations entre tous les sous-jacents et demandent plus de simulations qu'un autocall avec un seul sous-jancent.

Chapitre 2

Données de l'application

Nous présentons dans cette partie l'autocall qui sera étudié dans toute la suite du mémoire. Il faut bien noter ses différentes caractéristiques, les explications des résultats en dépendent. Ses propriétés sont les suivantes :

— L'autocall est adossé à l'action TOTAL. Pour la partie Application du modèle de Black and Scholes, on pourra prendre le drift et la nappe de volatilité trouvée en partie 2. Pour la partie Application du modèle d'Heston, nous pourrons donc reprendre les paramètres trouvés précédemment grâce à la calibration présentée dans la partie 3.4 Calibration des paramètres.

— L'autocall est un autocall Athéna avec effet mémoire des coupons. Il n'y a pas de délai de franchise : le produit peut-être autocallé à n'importe quelle date de fixing.

— La date de début du produit est le 14/12/2018. A cette date, le cours du sous-jacent de l'action TOTAL vaut 49,10 €. C'est la VCI.

— La barrière autocall est égale à 100% de la VCI (donc fixée à 49,10€).

— La barrière protection du capital et la barrière coupon sont toutes les deux égales à 60% de la VCI. Elle est donc fixée à $60\% * 49,10 = 29,46$€. Si le cours du sous-jacent est inférieur à cette barrière à la fin du produit, le montant initial investi sera remboursé partiellement.

— La date d'évaluation du produit est fixée au 31/12/2020. A cette date fixée, le cours du sous-jacent de l'action TOTAL est 35,3€. On fixe donc $S_0 = 35,30$€.

— Le montant initial investi est de 3 000 000 € et le taux par fixing est de $2,50\%$. La valeur d'un coupon est donc de $Montant\ initial\ investi * Taux\ par\ fixing =$ 75 000€.

— La périodicité des coupons est semestrielle : six mois séparent chaque date de fixing. A la date de calcul, la prochaine date de fixing est le 14/06/2021.
On étudie la valeur du sous-jacent simulé et sa position par rapport aux différentes barrières tous les six mois par la suite : le 14/06/2021, le 14/12/2021... et cela jusqu'à la date de fin du produit qui est fixée au 14/06/2028. La durée initiale totale du produit est de 9,5 ans, dont près de 2 ans déjà écoulés. Il reste donc 15 estimations du cours du sous-jacent à faire (pour les 15 dates de fixing restantes). Pour information, tous les coupons prévus jusqu'au 13/12/2020 ont été perçus et aucun coupon n'est donc mis en mémoire à la date de valorisation.
On calcule la valeur du sous-jacent à ces dates de fixing grâce au modèle de Black and Scholes dans un premier temps puis grâce au modèle d'Heston ensuite. On procède ensuite à une comparaison des résultats des modèles.

— A la date d'évaluation, quatre coupons ont déjà été perçus, correspondants à un montant de 300 000€ égal à $75\ 000 * 4$. En effet, la date de début du produit est antérieure à la date d'évaluation. Quatre dates de fixing ont été passées lorsqu'on se place au 31/12/2020. A chaque fois, un coupon est perçu puisque la valeur du cours boursier à chacune de ces dates est supérieure à la barrière coupon définie dans le contrat et inférieur à la barrière autocall. Le produit n'est pas autocallé. (cf. Figure 4.1 pour illustration)

— L'investisseur peut au mieux obtenir 19 coupons : les 4 qu'il a déjà perçu et 15 autres qu'il obtiendrait si le cours reste au-dessus de la barrière coupon jusqu'à l'échéance du produit. La plus-value totale maximum perçue par l'investisseur est donc de $75\ 000 * 19 = 1\ 425\ 000$ €.

On peut résumer l'historique de cet autocall par ce schéma :

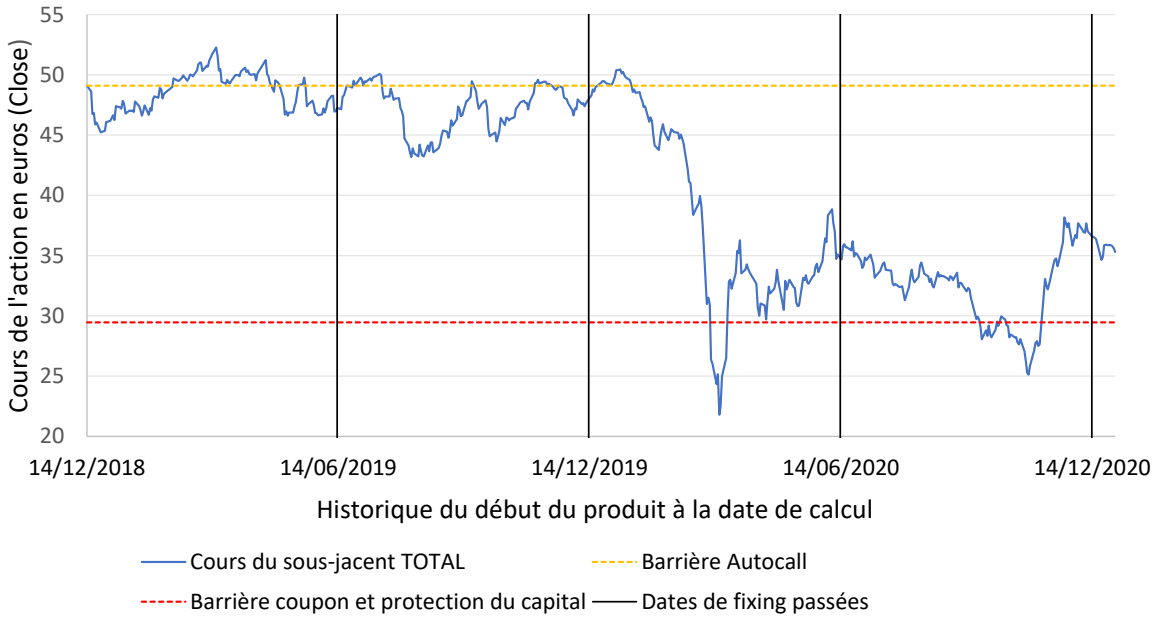

FIGURE 2.1 – Schéma récapitulatif de l'autocall étudié à date d'évaluation

Effectivement, le graphique permet d'affirmer que le produit n'a pas encore été autocallé à la date d'évaluation puisque le cours n'a jamais franchi la barrière Autocall à une date de fixing.

De plus, l'investisseur a perçu la totalité des coupons sans avoir recours à l'effet mémoire puisque le cours a été au dessus de la barrière coupon à chaque date de fixing.

On s'interroge maintenant sur le futur du cours pour les 7,5 prochaines années.

Nous remarquons bien, graphiquement, que c'est la hauteur des sauts et donc la volatilité qui va jouer le rôle déterminant pour ce mémoire. En effet, si les sauts sont importants d'une date de fixing à une autre, alors la probabilité de passer la barrière Autocall ou la barrière protection du capital sera plus élevée que si les sauts sont de moindre mesure.

De plus, nous avons compris que les flux d'un produit autocall à effet mémoire comme celui-ci sont très complexes et qu'ils ne peuvent pas être modélisés ou anticipés grâce à une formule fermée. Nous allons donc appliquer Monte Carlo avec un grand nombre de simulations au modèle de Black and Scholes qui présentera une grande limite puisqu'il faut alors fixer une volatilité constante. Le modèle de Heston sera présenté en solution à ce problème par la suite.

Chapitre 3

Black and Scholes : première approche naïve

3.1 Hypothèses et solutions des équations

Nous allons dans un premier temps modéliser le cours des actions à l'aide du modèle de Black and Scholes. Nous rappelons ici les hypothèses et le fonctionnement de ce modèle.

Ce modèle suppose certaines conditions, à savoir :

— Le prix de l'actif sous jacent S_t suit un mouvement brownien W_t avec une volatilité σ constante et un drift μ qui est égal au taux d'intérêt sans risque noté r auquel on soustrait le taux de dividendes.
— Les coûts dus aux transactions sont considérés comme nuls.
— On se place dans un marché avec Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA).
— La vente à découvert est autorisée.
— Le temps est continu.
— Il n'y a pas de restrictions sur le volume des transactions.

L'hypothèse la plus forte du modèle est que les log-rendements des actifs suivent des lois normales. Ceci équivaut à dire que les rendements suivent une loi log-normale.

L'équation de Black and Scholes se note :

$$\boxed{S_t = S_0 * exp[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t]}$$

C'est avec la forme discrétisée de l'équation que les projections du cours seront faites puisque nous avons besoin de la valeur des cours à chaque date de fixing :

$$S_{t+\Delta t} = S_t * exp[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\mathcal{N}(0,1)]$$

La démonstration de ces équations est disponible en Annexe 3.

Cette formule permet de diffuser les cours du sous-jacent. Pour cela, deux éléments sont à paramétrer dans ce modèle : la volatilité σ et le drift μ.

Le propre d'une valorisation financière est de capter les anticipations des marchés financiers dans la calibration des dynamiques de diffusion des sous-jacents. C'est pourquoi, nous choisissons une approche implicite et non historique.

Cette calibration est faite de manière à prendre en compte une dépendance temporelle des paramètres du modèle : à chaque date où le cours du sous-jacent est calculé (c'est-à-dire à chaque date de fixing), la volatilité choisie ainsi que le drift seront différents. C'est une amélioration du modèle de Black and Scholes qui en fait des variables dépendant du temps.

Le modèle tient donc compte de l'anticipation et l'évolution dans le temps des valeurs de ces deux paramètres par le marché.

3.2 Paramétrisation du drift

Le drift d'un sous-jacent correspond à la pente moyenne des trajectoires simulées. Par exemple, un drift négatif se traduit par une baisse de la valeur du sous-jacent simulée.

Pour rappel, l'ensemble des modèles de projection pour ce type de produits se placent dans le cadre d'un univers risque neutre. Cela revient à dire que la modélisation financière repose sur l'absence d'opportunité d'arbitrage : tous les actifs doivent avoir un rendement commun appelé taux sans risque.

Dans le cas des autocalls, le sous-jacent est basé sur des cours d'actions. Donc, la risque-neutralité nécessite de définir un drift s'obtenant comme la différence entre un taux continu sans risque $r(t)$ et un taux de rendement continu issu des versements de dividendes $q(t)$; t correspond à la maturité.

En effet, si une action a un taux de dividende égal à $q(t)$ alors les projections en risque neutre doivent se faire avec un rendement de $r(t) - q(t)$ pour que le rendement escompté de l'action soit $r(t)$.

Le paramètre $\mu(t) = r(t) - q(t)$ dépend uniquement du temps, il est le même pour tous les *strikes*.

Bloomberg (data provider, groupe fournissant des données financières) nous fournit la courbe des taux sans risque attendue des marchés intégrant une dimension temporelle. Elle ne dépend pas du sous-jacent, uniquement du marché.

On le représente ci-dessous, à date de calcul 31/12/2020 :

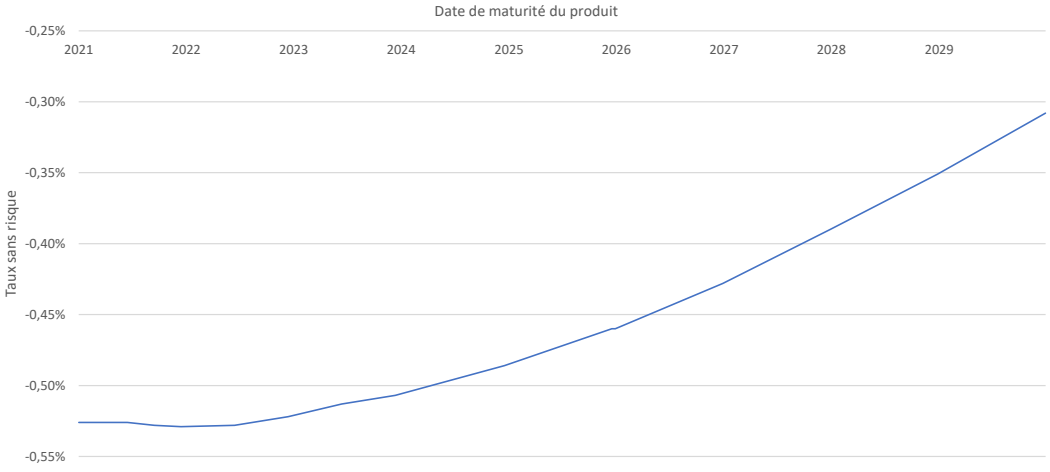

FIGURE 3.1 – Taux sans risque de Bloomberg

Le but de ce paragraphe est donc de déterminer le taux de dividende.

Pour calculer le taux de dividendes, Bloomberg nous donne accès aux dates de versements et aux montants estimés.

Nous déterminons le drift en inversant les fowards implicites du marché.

Grâce à la relation de parité call-put rappelée dans la partie "1.1.1 Approche Risque Neutre", nous pouvons trouver les prix des forwards implicites puisque nous avons à disposition les prix des calls et des puts. Ces prix correspondent à la capitalisation du niveau du sous-jacent $r(t) - q(t)$ sur une période donnée. On peut donc retrouver directement le drift.

Pour l'action TOTAL, on représente le drift annualisé du marché ci-dessous :

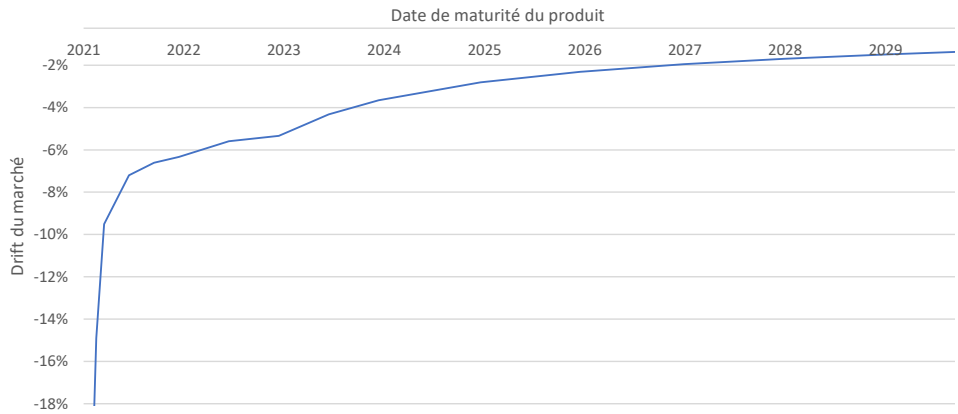

FIGURE 3.2 – Drift de l'action TOTAL

3.3 Implémentation dans R du prix de l'option

La formule d'évaluation de Black and Scholes permettant de calculer la valeur d'une option européenne sur une action avec dividendes à la date t est :

$$P = S_t * exp(-q * \Delta t) * pnorm(d_1) - Kexp(-r * \Delta t) * pnorm(d_2)$$

où $pnorm(x)$ désigne la fonction de répartition d'une loi normale centrée-réduite. Ici, $pnorm(d_i)$ est donc la probabilité qu'une variable suivant une loi normale soit inférieure à d_i.

et en notant

$$\begin{cases} d_1 & = & \frac{log(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t}{\sigma * \sqrt{\Delta t}} \\ d_2 & = & d_1 - \sigma * \sqrt{\Delta t} \end{cases}$$

La démonstration de cette formule est présente en annexe 4.

C'est cette formule qui permet de calculer la volatilité implicite : le principe est de comparer le prix du marché (donné) avec le P calculé grâce à cette formule. On fait varier la volatilité jusqu'à obtenir une valeur très proche de celle du marché.

Nous implémentons cette équation grâce au logiciel R. Pour se faire, on créé une fonction qui prend comme arguments :

- Le temps restant, égal à la différence entre la date d'expiration et la date de calcul, que l'on divise par 365. Ce temps est donc exprimé en années, on le note Δt ;
- Le prix du sous-jacent S_t ;
- Le *strike* noté K ;
- Le taux d'intérêt r et q le taux de dividende ;
- La volatilité notée σ.

Nous retrouvons le code correspondant à cette partie en annexe 5.

3.4 Surface de volatilité

Dans cette partie, nous cherchons à répliquer la surface de volatilité du modèle de Black and Scholes disponible sur Bloomberg. Cette nappe de volatilité met en lumière que la volatilité dépend à la fois du *strike* et de la maturité. Pour plus de précision, le lecteur pourra se référer aux travaux de Tankov [12].

Pour cela, nous prenons en input un vecteur composé de couples (Maturité, *strike*) auquel est associé un vecteur de prix du call. Nous considérons ici le prix Mid, c'est-à-dire la moyenne entre l'Ask (offre, prix de vente) et le Bid (demande, prix d'achat). Le Mid correspond donc à la rencontre entre l'offre et la demande. C'est le prix le plus juste : par exemple, le Bid est influencé par le fait que les acheteurs veulent acheter moins cher.

Ces données nous sont fournies par le terminal Bloomberg. Nous prenons ici l'exemple des options TOTAL. Nous avons à disposition 71 couples (Maturité, *strike*) et donc 71 prix de call correspondants. La date de calcul est fixée au 31/12/2020. La maturité varie

de 15 à 715 jours et le *strike* entre 22 et 55 euros.

Pour chaque couple (Maturité, *strike*), nous calculons la volatilité implicite associée grâce à l'algorithme de Newton-Raphson détaillé dans la partie "1.1.3 Volatilité". Nous faisons une interpolation linéaire 3D entre les volatilités trouvées pour chaque couple (Maturité, *strike*) grâce au package "rgl" de R.

Nous obtenons la représentation suivante : à gauche, la surface de volatilité obtenue et à droite, la surface de volatilité donnée par Bloomberg.

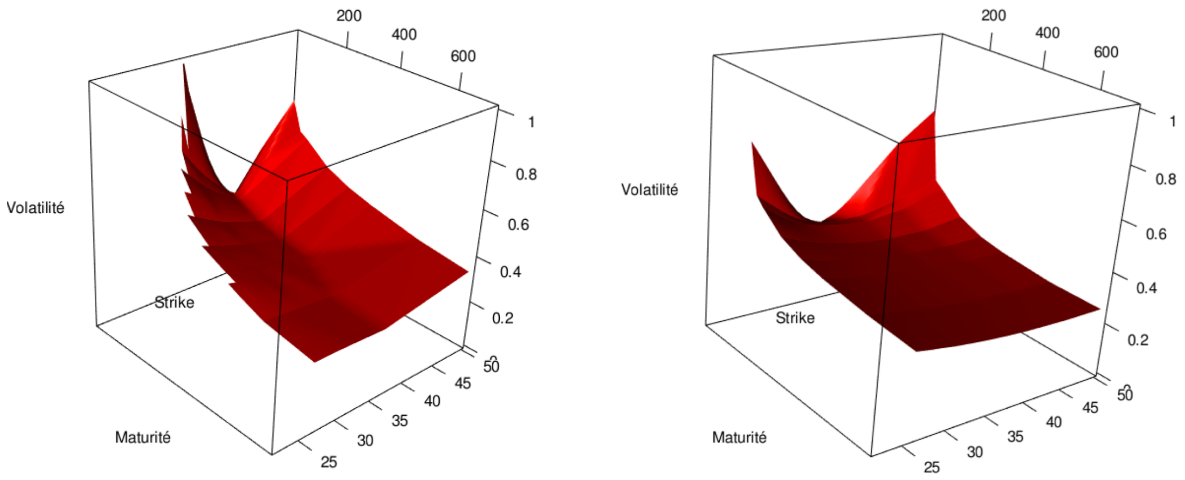

FIGURE 3.3 – Surface de volatilité retrouvée (à gauche) et surface de volatilité Bloomberg (à droite)

Nous remarquons que les surfaces sont très proches avec quelques écarts cependant dus à une interpolation différente. En effet, Bloomberg a ses propres techniques d'extrapolation.

On observe le smile de volatilité : la volatilité est évaluée plus haute par les marchés en dehors de la monnaie (lorsque le prix d'exercice est éloigné du prix du sous-jacent) en raison d'un risque plus élevé.

La seconde observation qui doit être faite, c'est que la surface de volatilité s'arrête à des observations de 715 jours soit environ 2 ans. Le marché ne donne pas de prix d'option pour des maturités plus élevées. Comme l'autocall étudié a une maturité de 7,5 ans, les volatilités qui seront utilisées par la suite seront des volatilités extrapolées.

3.5 Passage aux autocalls

Pour rappel, la valorisation des autocalls nécessite la modélisation du sous-jacent sur lequel il repose. Nous supposons dans cette partie que nous avons obtenu la dynamique des sous-jacents. Nous pouvons alors calculer le prix des autocalls.

Ci-dessous notre démarche globale pour la valorisation des autocalls.

Nous appliquons Monte-Carlo en faisant 10 000 simulations.

A chaque date théorique de fixing (journalière, trimestrielle, semestrielle, annuelle), on calcule le cours du sous-jacent grâce au modèle de Black and Scholes :

$$S_{n+1} = S_n * exp[(\mu[n] - \frac{\sigma^2}{2}) * \frac{date(n+1) - date(n)}{365,25} + \sigma\sqrt{\frac{date(n+1) - date(n)}{365,25}} * alea]$$

où

— μ est le drift ;
— S_n désigne le cours du sous-jacent lors du n-ième fixing ;
— $date(n)$ correspond aux dates de fixing des coupons, c'est-à-dire à l'échéance du n-ième coupon ;
— $alea$ qui désigne la loi normale inverse d'un générateur aléatoire.

On compare ensuite cette valeur obtenue de S_n à la barrière autocall pour chaque date de fixing. Alors, deux cas sont possibles :

— Soit la valeur calculée est supérieure ou égale à la barrière autocall et alors le produit est autocallé : il est alors remboursé automatiquement au pair (i.e. 100% du nominal ou encore 100% du montant investi) dans un délai défini lors de l'investissement initial et les taux d'intérêts et les échéances de coupons sont arrêtés pour toute la période de détention. Il ne faut pas omettre l'éventuelle franchise durant laquelle le produit ne peut pas être autocallé ;

— Soit la valeur calculée est inférieure à la barrière autocall et on réitère l'opération pour la date de fixing suivante.

Ensuite, pour toutes les dates de fixing précédant la date à laquelle le produit est autocallé (s'il l'est, sinon, on arrête la boucle à la date d'expiration du produit), on compare le cours du sous-jacent à la valeur de la barrière coupon :

— Si la valeur de l'action ou de l'indice est supérieure ou égale à la barrière coupon alors le détenteur de l'autocall perçoit le coupon attendu, conformément au taux d'intérêt ;

— Si le cours du sous-jacent est inférieur à la barrière coupon alors le coupon n'est pas dû sans pour autant être perdu : l'effet mémoire permet au détenteur de percevoir le coupon à une date de fixing ultérieure.

Enfin, lors de la dernière date de constatation, trois cas s'offrent à nous :

— Soit le produit a déjà été autocallé et le détenteur de l'autocall a déjà perçu ses gains ;

— Soit le produit est autocallé durant la dernière date de fixing. Le détenteur a alors un gain de :

$$Montant\ initial + Nombre\ de\ coupons * Taux\ par\ fixing * Montant\ initial$$

— Soit le produit n'est pas autocallé et le détenteur reçoit :

1. Le cours du sous-jacent est supérieur ou égal à la barrière de protection du capital et le montant initial est entièrement remboursé ;
2. Le cours du sous-jacent est inférieur à la barrière de protection du capital : le montant est remboursé partiellement. La décote de remboursement correspond à la variation du sous-jacent durant la période de détention du produit.

En résumé, notre algorithme enregistre, pour chaque simulation, le nombre de coupons dont le détenteur bénéficie durant la durée de vie du produit en fonction de si la valeur du cours du sous-jacent devient supérieure à la barrière autocall, à la barrière coupon et à la barrière de protection du capital (lors du dernier fixing pour cette dernière barrière).

On peut résumer tous les différents cas cités précédemment par le schéma ci-dessous :

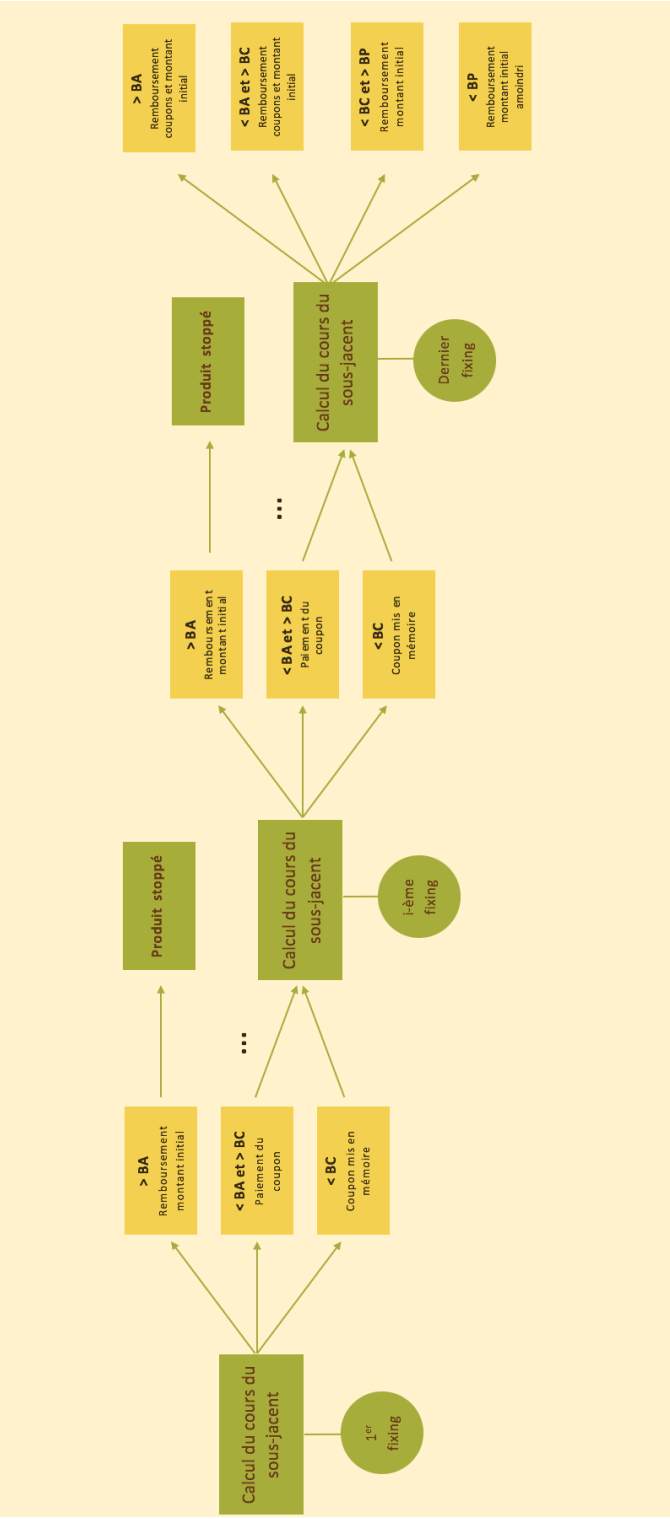

FIGURE 3.4 – Schéma des différents cas pour les autocalls

3.6 Résultats dans le cadre du modèle de Black and Scholes

3.6.1 Avec les données historiques

En prenant comme paramètres :

Taux sans risque	Taux d'emprunt de l'Etat français
Dividendes	6% annuel
Volatilité	Historique

TABLE 3.1 – Input de l'autocall évalué - données historiques

Les volatilités sont d'environ 20% mais dépendent de la date de fixing.
Alors, le risque de pertes évalué est de -768 000 €.

Les résultats sont représentés ci-dessous :

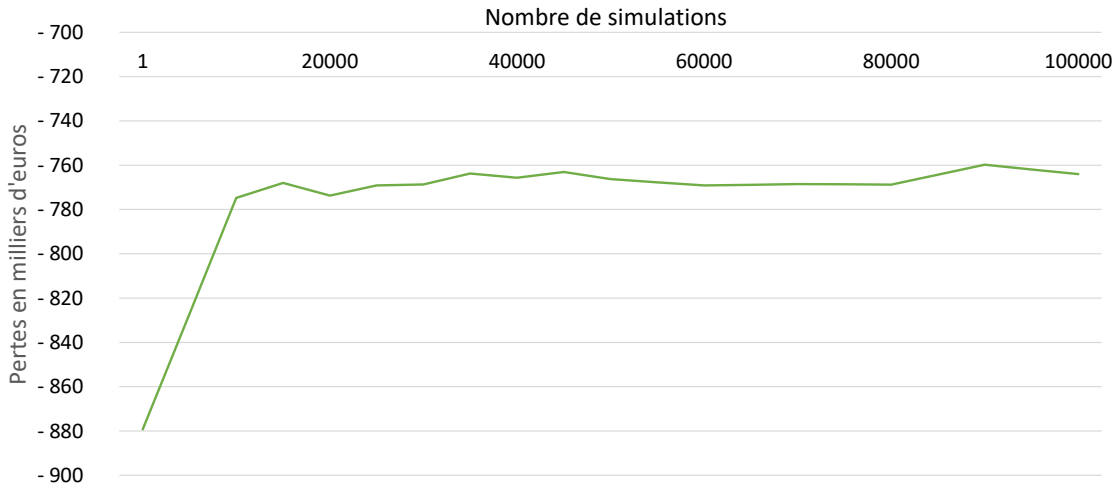

FIGURE 3.5 – Pertes de l'autocall TOTAL calculées avec les paramètres historiques

Comme expliqué précédemment, ces paramètres ne prennent pas en compte les anticipations du marché et ce modèle n'est donc pas retenu.

3.6.2 Avec les données implicites

Dans ce cadre là, il faut alors choisir une volatilité à utiliser dans le cadre de la valorisation des autocalls, c'est-à-dire fixer quel *strike* et quelle maturité on choisit sur la surface de volatilité précédemment trouvée. On fait plusieurs propositions :

1. La volatilité correspondant à la formule inversée de Black and Scholes avec :
- le prix du sous-jacent à la date de calcul
- la maturité étant fixée comme la durée entre la date de calcul et la dernière date de fixing.

Autrement dit, on retient la volatilité sur la nappe correspondant au sous-jacent 35,3€ et à la maturité 7,5 ans. Le résultat obtenu est de -571 000 €

Drift	Implicite
Volatilité	20,56%
Maturité	7,5 ans

TABLE 3.2 – Input de l'autocall évalué - modèle de Black and Scholes

Les résultats sont présentés ci-dessous :

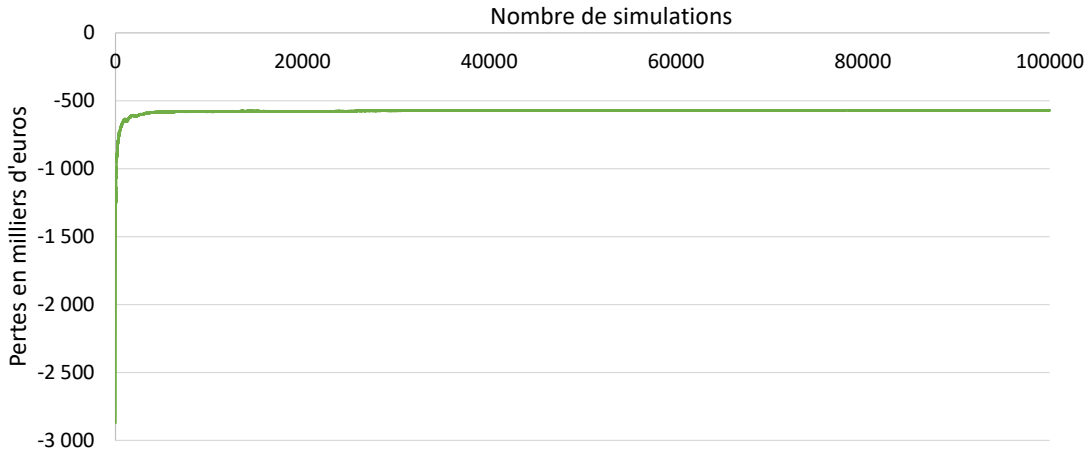

FIGURE 3.6 – Pertes de l'autocall TOTAL calculées avec une volatilité constante

Les pertes sont moins élevées que dans le cadre des données historiques car le drift associé est moins dégradé.

2. On simule deux jeux de données : des cours qui ont pour volatilité celle correspondant à un *strike* égal à la barrière protection du capital, d'autres avec une volatilité correspondant à celle correspondant à un *strike* égal à la barrière autocall. Cela nous permet de calculer, pour chaque date de fixing, les probabilités cherchées. Cependant, cette méthode donne des aberrations puisque l'on trouve des volatilités négatives. Il faut garder à l'esprit que, de plus, nous avons une simplification dans notre modèle puisque nous avons seulement deux barrières... qu'en serait-il si nous en avions trois ? (c'est-à-dire que la barrière de protection du capital et la barrière coupon ne seraient pas confondues). Cette méthode est très difficile à mettre en place et nous conduit à des aberrations.

Les probabilités théoriques d'être au dessous de la barrière protection du capital et coupon, au dessus de la barrière Autocall ou entre les deux barrières sont retrouvées lorsque le cours est simulé à partir de S_0 pour chaque date de fixing. Or ceci est une aberration parce qu'il n'y plus de lien entre deux dates de fixing consécutives.

En effet, le cours peut alors avoir des variations anormales puisqu'il n'est basé que sur le sous-jacent initial. Il peut être très en dessous de S_0 pour une date de fixing par exemple puis très au-dessus à la suivante, ce qui n'est pas conforme à la réalité.

Nous construisons donc S_t à partir du cours S_{t-1} avec la formule de discrétisation déjà vue. Les valeurs possibles en t sont conditionnées par celles de $t-1$: on construit des chemins de cours.

Pour s'en convaincre, en prenant x et y deux réels, on écrit :

$$P(S_t \leqslant x | S_{t-1} < y) = \frac{P(S_t \leqslant x, S_{t-1} < y)}{P(S_{t-1} < y)}$$

Or,

$$P(S_t \leqslant x, S_{t-1} < y) = P(S_{t-1} * exp(r_2 t_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} t_2 + \sigma_2 \sqrt{t_2} X_2) \leqslant x, S_0 * exp(r_1 t_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} t_1 + \sigma_1 \sqrt{t_1} X_1) > y)$$

$$= P(S_0 * exp(r_1 t_1 + r_2 t_2 - (\frac{\sigma_1^2}{2} t_1 + \frac{\sigma_2^2}{2} t_2) + \sigma_1 \sqrt{t_1} X_1 + \sigma_2 \sqrt{t_2} X_2) \leqslant x, S_0 * exp(r_1 t_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} t_1 + \sigma_1 \sqrt{t_1} X_1) > y)$$

$$= P(\sigma_1\sqrt{t_1}X_1 + \sigma_2\sqrt{t_2}X_2 \leqslant a, \sigma_1\sqrt{t_1}X_1 > b)$$

où

$$a = ln(\frac{x}{S_0}) - (r_1t_1 + r_2t_2 - (\frac{\sigma_1^2}{2}t_1 + \frac{\sigma_2^2}{2}t_2)$$

$$b = ln(\frac{y}{S_0}) - (r_1t_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}t_1)$$

Si X_1 et X_2 sont indépendants alors,

$$\sigma_1\sqrt{t_1}X_1 + \sigma_2\sqrt{t_2}X_2 \sim \mathcal{N}(0,\, \sigma_1^2t_1 + \sigma_2^2t_2)$$

Et,

$$Cov(\sigma_1\sqrt{t_1}X_1+\sigma_2\sqrt{t_2}X_2, \sigma_1\sqrt{t_1}X_1) = \sigma_1^2t_1Cov(X_1, X_1)+\sigma_1\sqrt{t_1}*\sigma_2\sqrt{t_2}*Cov(X_1, X_2) = \sigma_1^2t_1$$

car $Cov(X_1, X_2) = 0$

Donc il n'y a pas indépendance et on ne peut pas s'affranchir des chemins.

3. Enfin, la dernière méthode proposée est un modèle de Black and Scholes "hybride". Le principe est de "se balader" sur la nappe de volatilité trouvée au paragraphe précédent : c'est-à-dire que à chaque date de fixing et pour chaque itération de Monte Carlo, on détermine la volatilité en fonction de la valeur du sous-jacent et de la date de fixing à laquelle on se place.

La valorisation du produit est faite en utilisant d'abord directement la surface de volatilité de Bloomberg puis ensuite celle calculée en inversant les prix dans la formule de Black and Scholes (cf. figure 2.3).

La perte est estimée à - 653 471€ lorsque la surface de volatilité de Bloomberg est utilisée et de -617 529€ lorsque la surface calculée en inversant le prix des calls est utilisée. Le résultat est présenté ci-dessous :

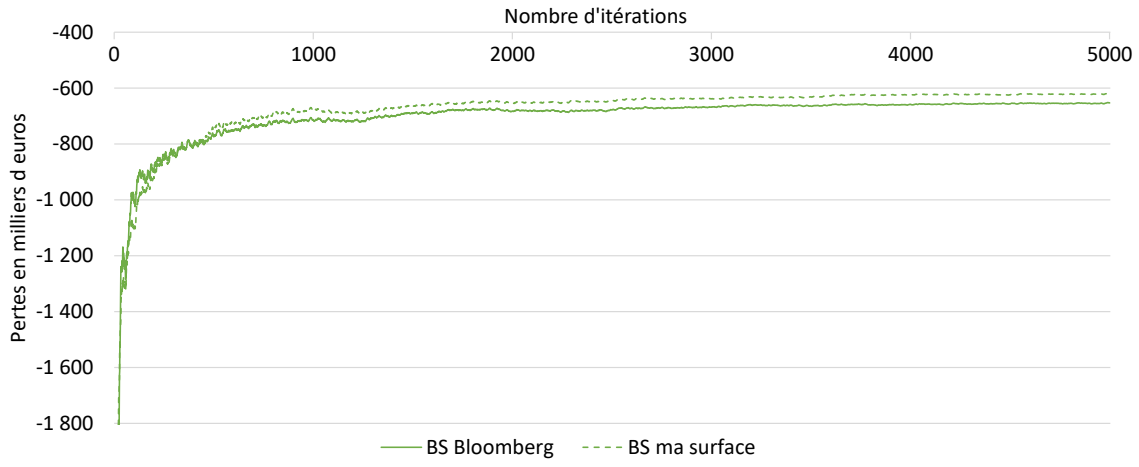

FIGURE 3.7 – Pertes de l'autocall TOTAL calculées avec les deux différentes nappes

La courbe en pointillé (avec la surface calculée) est très proche de celle en trait plein (avec directement la surface renseignée dans le terminal Bloomberg). Le résultat varie d'environ 5%.

Cependant, pour que la relation de diffusion trouvée en "3.1. Hypothèses et solutions des équations" en partant de zero soit vérifiée ainsi que la forme discrétisée, la volatilité doit être constante. Les modèles proposés 2 et 3 sont donc invalidés.

Il faut donc choisir une seule et unique volatilité pour la totalité du produit (sans lui donner une dépendance temporelle) pour que le modèle de Black and Scholes soit valide. Mais cela nous offre un faisceau de résultats présenté ici. Le modèle est très sensible à la volatilité puisque lorsque la volatilité augmente de 1%, la perte augmente de -35 000 euros, ce qui est non négligeable. L'impact de la volatilité est très fort.

Cet écart est du au fait que si la volatilité est élevée, alors les cours peuvent être soit très hauts mais le produit est alors autocallé et les gains sont plafonnés, soit très bas auquel cas les pertes peuvent être très lourdes. Pour ce produit et à cette date de calcul, les pertes sont donc plus grandes avec une forte volatilité. Il est cependant bien à noter qu'avec un autre sous-jacent initial par exemple, les résultats auraient été différents.

Les pertes estimées sont représentées en fonction de la volatilité choisie ci-dessous :

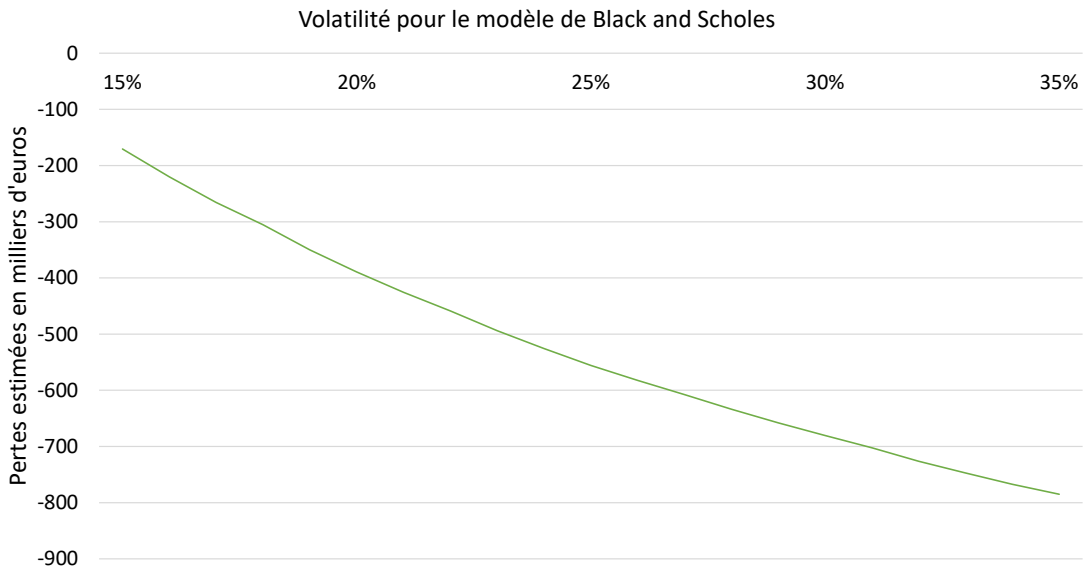

FIGURE 3.8 – Pertes de l'autocall TOTAL calculées avec différentes volatilités constantes

Dans le cadre du modèle de Black and Scholes, l'autocall peut être valorisé avec n'importe quelle valeur comprise entre -200 000 € et -700 000 €, ce qui est une fourchette trop large.

Nous faisons la même démarche avec un autre modèle, plus récent : celui d'Heston. Ce modèle s'affranchit du fait que la volatilité soit constante, c'est une amélioration par rapport au modèle de Black and Scholes. En effet, le modèle d'Heston utilise une volatilité stochastique, ce qui est plus proche de la réalité. En revanche, il est plus difficile à mettre en place notamment à cause du travail de calibration des nombreux paramètres.

Chapitre 4

Modèle d'Heston

Dans cette partie, nous étudions la dynamique de diffusion des sous-jacents avec le modèle d'Heston.

Ce modèle, développé en 1993, est couramment utilisé en finance. Son principal avantage est qu'il est fonction d'une volatilité stochastique, contrairement au modèle de Black and Scholes. Ce modèle est plus proche de la réalité puisqu'il ajoute une dimension aléatoire à la volatilité avec un deuxième mouvement brownien. Au vu de ses équations et de ses nombreux paramètres à évaluer, il est plus difficile à mettre en œuvre que le modèle de Black and Scholes.

4.1 Equations et présentation du modèle

4.1.1 Présentation générale

Le modèle d'Heston a le même but que celui de Black and Scholes : modéliser les cours des actifs au cours du temps. On retrouve de plus la même forme d'équation que dans le modèle de Black and Scholes pour la modélisation de la dynamique du cours du sous-jacent (cf. la première équation du système ci-dessous).

L'équation différentielle de la variance reprend, quant à elle, le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR) : c'est cette équation qui rend la variance du modèle d'Heston stochastique.

Le modèle de Black and Scholes couvre uniquement l'incertitude liée au prix du sous-jacent (S_t). Dans le cas d'Heston, l'incertitude venant du caractère stochastique de la volatilité est également prise en compte.

Ce modèle suppose que le prix du sous-jacent noté S et la variance notée v suivent le système d'équations différentielles suivant dépendant de paramètre explicités ci-dessous :

$$\begin{cases} dS_t &= \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dZ_1 \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t} dZ_2 \end{cases}$$

où l'on note :

— μ_t est la tendance instantanée à l'instant t de S_t, le taux de rendement espéré instantané de l'action comme dans le cadre du modèle de Black and Scholes ;

— $\sqrt{v_t}$ correspond à la volatilité du rendement de l'action, c'est la racine de la variance ;

— θ est la variance à l'infini, c'est-à-dire la moyenne de la variance à long terme : lorsque t tend vers l'infini, v_t tend vers θ ;

— κ représente la vitesse de retour à la moyenne donc la rapidité avec laquelle la volatilité se rapproche de θ. Il s'exprime en $temps^{-1}$: plus κ est grand, plus la valeur θ sera atteinte rapidement.

— σ correspond à la volatilité de la variance. Il contrôle le coefficient d'acuité de la distribution des rendements : plus il est petit, plus la concentration à proximité du centre de probabilité est importante ;

— V_{ini}, un autre paramètre à estimer, est la variance à l'instant 0.

et avec une corrélation notée $\rho \in [-1, 1]$ entre les deux mouvements browniens Z_1 et Z_2 sous la probabilité historique. Cela se traduit mathématiquement par :

$$< dZ_1, dZ_2 >= \rho dt$$

Cette corrélation s'observe assez bien lorsqu'on étudie les marchés. En effet, le sous-jacent est lié à la volatilité : lorsque la volatilité augmente, S_t diminue ou augmente fortement. Si le facteur de corrélation ρ entre le cours de l'action et sa volatilité est négatif, cela signifie que lorsque le cours du sous-jacent est faible, la volatilité va être

inversement proportionnelle, c'est-à-dire qu'elle va augmenter pour essayer de "remonter" le cours. En revanche, cela induit aussi, que si ρ est négatif, la probabilité de faire de très grandes pertes est plus importante que celle prédite par le modèle de Black and Scholes.

Le processus risque neutre de la variance (dans la seconde équation) est obtenu en introduisant un coefficient λ qui correspond à une prime de risque. Les équations différentielles obtenues en risque neutre sont :

$$\begin{cases} dS_t &= \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dZ_1' \\ dv_t &= [\kappa(\theta - v_t) - \lambda * v_t]dt + \sigma\sqrt{v_t} dZ_2' \end{cases}$$

avec

$$< dZ_1', dZ_2' >= \rho dt$$

En posant $\kappa^* = \kappa + \ \lambda$ et $\theta^* = \frac{\kappa * \theta}{\kappa + \lambda}$, on obtient la forme simplifiée :

$$\begin{cases} dS_t &= \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dZ_1' \\ dv_t &= [\kappa^*(\theta^* - v_t)]dt + \sigma\sqrt{v_t} dZ_2' \end{cases}$$

où

$$< dZ_1', dZ_2' >= \rho dt$$

et

$$Z_2' = Z_2 + \frac{\lambda(S_t, v_t, t)}{\sigma\sqrt{v_t}} t$$

— θ^* est la variance à l'infini en risque neutre : lorsque t tend vers l'infini, v_t tend vers θ^* ;

— κ^* représente la vitesse de retour à la moyenne en risque neutre donc la rapidité avec laquelle la volatilité se rapproche de θ^*.

Avec la condition de Feller : $2\kappa^*\theta^* > \sigma^2$ qui permet d'assurer que la volatilité reste positive.

Cette condition est reprise dans le mémoire de Bégin [3].

Le but est d'estimer les paramètres risque neutre grâce aux données du marché. Ensuite, nous les injecterons dans le modèle d'Heston pour obtenir les cours du sous-jacent aux différentes dates de fixing. Grâce à Monte Carlo, nous pourrons valoriser les produits structurés, de même que pour Black and Scholes.

4.1.2 Prix d'un call

Le modèle d'Heston fournit une solution analytique : il est possible d'exprimer le prix d'un call européen. Cette expression est démontrée en Annexe 8, elle s'écrit :

$$C = S * (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} * \int_0^\infty P_1 \, \mathrm{d}\phi) - K \exp(-r\tau)(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty P_2 \, \mathrm{d}\phi)$$

où P_1 et P_2 sont des fonctions définies en annexe 8 qui dépendent de $\phi, S, K, \tau, r, v_0, v_T, \rho, \kappa et \sigma$.

Nous l'implémentons en R.

A ce niveau-là, les différentes étapes de notre démarche vont être les suivantes :

— Calibrer les différents paramètres risque neutre du modèle, à savoir le vecteur des paramètres que l'on obtient grâce aux valeurs du marché. On note ce vecteur : $V = (V_{ini}, \kappa^*, \theta^*, \rho, \sigma)$.

— Calculer les prix des autocalls grâce à la méthode de Monte-Carlo ;

— Comparer les prix obtenus avec ceux donnés par le modèle de Black and Scholes.

4.2 Calibration des paramètres

4.2.1 Partie théorique

Dans la partie précédente, nous avons implémenté un code permettant de calculer le prix d'une option grâce au modèle d'Heston. Une fois les données intrinsèques au call fixées (*strike*, Maturité, Cours du sous-jacent en 0 et drift), le résultat obtenu dépend uniquement du vecteur paramètre V précédemment défini.

Le drift est obtenu de la même manière que dans le modèle de Black and Scholes, se référer à la partie "2.2 Paramétrisation du drift". Il dépend donc uniquement de la

maturité du produit, reflétant les conditions du marché à date. Le cours du sous-jacent à date de calcul est également fourni par le marché, il est unique.

On cherche ici à créer un algorithme de calibration à partir des prix des call, c'est-à-dire trouver un vecteur V optimal minimisant les écarts entre les prix calculés par le modèle et les prix observés sur le marché. On fait le choix de calibrer les paramètres risque neutre : un paramètre en moins est alors à estimer (λ), ce qui réduit la complexité de notre algorithme. Le but est de trouver les cinq paramètres qui rapprochent au mieux ces prix pour chaque *strike* et chaque maturité qui sont à disposition sur Bloomberg. De même que dans le modèle de Black and Scholes et pour la même raison, nous basons notre calibration sur les prix Mid du marché.

Il est à noter que l'on pourrait suivre la même démarche en comparant les volatilités retenues par le modèle (en calculant la volatilité implicite des prix des calls obtenus grâce à l'équation trouvée en 3.1.2.) à celles observées sur le marché (nappe de volatilité présentée en partie 2.). Pour simplifier les calculs, nous choisissons de faire la calibration directement sur les prix des calls, la volatilité demandant des calculs supplémentaires puisqu'il faut inverser les prix obtenus avec le modèle.

On souhaite donc minimiser l'erreur quadratique entre les prix retenus par Heston, calculés grâce à la formule présentée dans le paragraphe précédent et ceux du marché, donnés directement par le terminal Bloomberg. La mesure d'erreur à minimiser est notée :

$$Erreur(V) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (prixHeston_i(V) - prixObserve_i)^2}$$

L'indice i varie entre 1 et m, le nombre de prix de calls disponibles sur le marché.

Par exemple, $prixObserve_1$ correspond au prix du call associé au premier couple (Maturité, *strike*) donné par le marché.

$prixHeston_1(V)$, quant à lui, correspond au prix trouvé grâce au modèle d'Heston avec : ce même couple (Maturité, *strike*), le drift associé à cette maturité et le vecteur de paramètre V. Le cours du sous-jacent en 0 est le même pour tous les indices i.

Cette somme dépend donc uniquement du vecteur V de paramètres, ce qui justifie le choix de cette somme comme erreur à minimiser pour trouver le meilleur V. L'algorithme

qui permet de minimiser $Erreur(V)$ est un algorithme de descente de gradient. C'est une variante de l'algorithme de Newton-Raphson, précédemment décrit mais pour plusieurs dimensions. Nous avons 5 paramètres à trouver, nous travaillons donc en dimension 5.

Le calcul de cette erreur est codé en annexe 12.

Il existe d'autres algorithmes d'optimisation pour trouver le minimum d'une fonction à plusieurs variables comme l'algorithme de Levenberg-Marquardt analysé par Lourakis [9] ou celui de Fletcher-Reeves présenté dans l'étude de Chen, Yi et Guangbo [5].

Cet algorithme est itératif : un vecteur initial de paramètres V_0 est à choisir et il faut vérifier ensuite que chaque paramètre converge bien après un grand nombre d'itérations que l'on note N.

A chaque itération k variant de 0 à N, on calcule le prix de l'option avec le vecteur de paramètres V_k que l'on compare avec celui du marché.

L'algorithme de descente de gradient indique qu'il faut réitérer un grand nombre de fois la relation suivante :

$$V_{k+1} = V_k - \alpha * (prixHeston(V_k) - prixObserve) * M_{gradient}(V_k)$$

où

— V_k correspond au vecteur ligne de paramètres à l'itération k, il est de dimension 5 ;

— α correspond au pas que l'on doit fixer. C'est le taux d'apprentissage : plus α est grand, plus la direction indiquée par le gradient sera suivie de loin ;

— $prixHeston(V_k) - prixObserve$ correspond au vecteur ligne de dimension m et contient les différences entre les prix calculés avec le modèle d'Heston et ceux du marché pour les m couples (Maturité, *strike*) ;

— $M_{gradient}(V_k)$ est la matrice gradient, de dimension $m * 5$ définie comme suit.

Le calcul de la matrice gradient se fait de la manière suivante.

L'indice i varie entre 1 et m et correspond au numéro du couple (Maturité, *strike*). L'indice l variant entre 1 et 5 désigne l'indice du paramètre dans V_k (par exemple, $V_k[1]$ correspond à la volatilité initiale à l'itération k).

Pour chaque couple (Maturité, *strike*) et pour chaque paramètre, on fait cette opération :

On ajoute puis on soustrait une petite quantité dx à $V_k[l]$ de manière à créer deux nouveaux vecteurs paramètres notés $V_{sup,k}[l]$ et $V_{inf,k}[l]$. On calcule alors les deux prix call associés à ces vecteurs paramètres. La différence entre les deux prix trouvés divisée par dx constitue la composante $M_{gradient}[i, l]$.

$$M_{gradient}[i, l](V_k) = \frac{prixHeston_i(V_{sup,k}[l]) - prixHeston_i(V_{inf,k}[l])}{dx}$$

Autrement dit, et de manière moins calculatoire, $M_{gradient}[i, l]$ correspond à l'écart des prix correspondant au couple (Maturité, *strike*) numéro i selon le modèle d'Heston si l'on choque en positif et en négatif le paramètre l. On peut interpréter ça comme étant la dérivée du prix en fonction de chaque paramètre.

Un mauvais vecteur d'initialisation ou un taux d'apprentissage peu approprié peut empêcher l'algorithme de converger vers le minimum.

4.2.2 Application à notre jeu de données

Nous reprenons le jeu de données Bloomberg étudié dans la partie précédente basé sur le sous-jacent de l'action TOTAL au 31/12/2020. Dans notre application, $m = 71$ puisque 71 prix de call correspondant à des couples (Maturité, *strike*) différents sont à notre disposition.

Nous simulons plusieurs scénarii avec différents V_0 pour avoir différents minimums et choisir le vecteur de paramètre le plus adapté.

Scénario 1 :

	$Erreur$	V_{ini}	κ^*	θ^*	ρ	σ	$2\kappa^*\theta^* > \sigma^2$
Initial	7,37	0,11	4,10	0,02	0,85	0,28	OUI
Final	1,62	0,16	4,10	0,06	0,80	0,04	OUI

TABLE 4.1 – Evolution des paramètres dans le scénario 1

Pour ce scénario, 500 simulations ont été réalisées avec un taux d'apprentissage fixé $\alpha = 0,0001$. On observe que l'erreur a nettement diminué, on retient pour l'instant ce scénario.

On teste l'algorithme avec un autre vecteur initial pour tenter d'obtenir une erreur plus faible. Pour ce scénario, nous fixons le ρ négatif : la corrélation entre les deux étant le plus souvent négative comme expliqué précédemment.

Scénario 2 :

	$Erreur$	V_{ini}	κ^*	θ^*	ρ	σ	$2\kappa^*\theta^* > \sigma^2$
Initial	7,22	0,11	4,10	0,02	-0,70	0,28	OUI
Final	0,88	0,17	4,09	0,06	-0,73	0,35	OUI

TABLE 4.2 – Evolution des paramètres dans le scénario 2

Avec un $\alpha = 0,0001$ et après 500 simulations, l'erreur finale de ce scénario est bien plus faible que dans le scénario 1. On retient donc ces paramètres.

De plus, V_{ini}, κ^* et θ^* tendent vers les mêmes valeurs que dans le cas 1, ce qui est rassurant. Comme la valeur initiale de ρ n'est pas la même dans les deux cas, celle de σ évolue différemment également : ces deux paramètres sont liés par une multiplication dans le modèle (cf. équation en 1.1).

On trace la convergence de chaque paramètre et de l'erreur pour vérifier que chacun converge vers une valeur unique : à chaque simulation, on pointe le nouveau paramètre retenu.

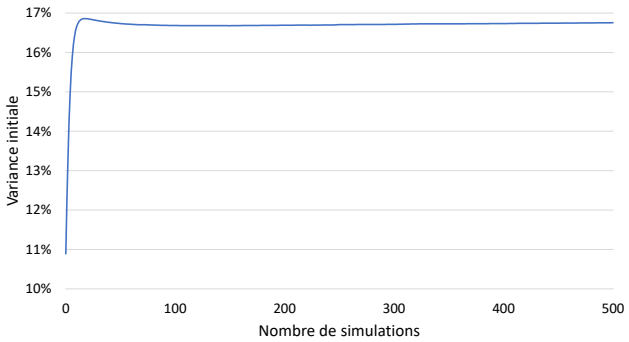

FIGURE 4.1 – Convergence de V_{ini}

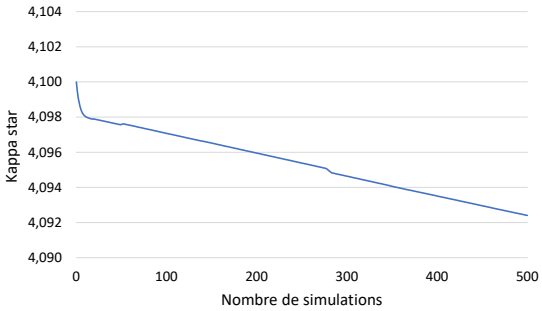

FIGURE 4.2 – Convergence de κ^*

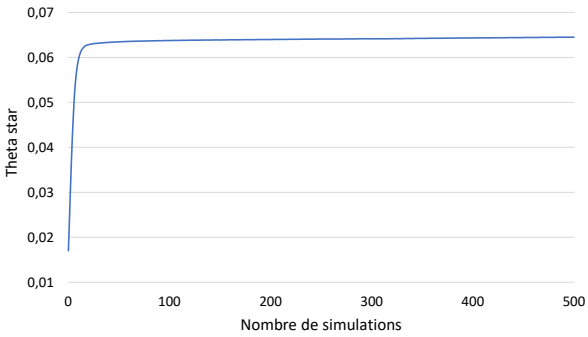

FIGURE 4.3 – Convergence de θ^*

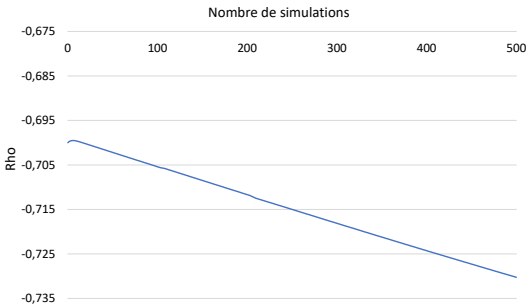

FIGURE 4.4 – Convergence de ρ

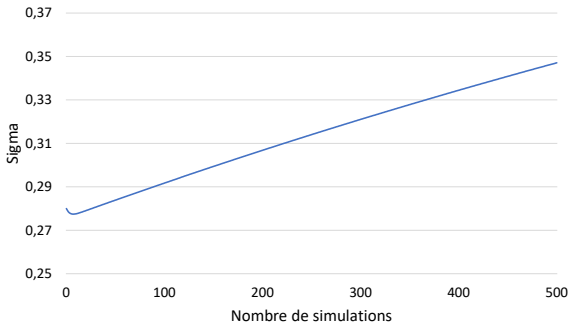

FIGURE 4.5 – Convergence de σ

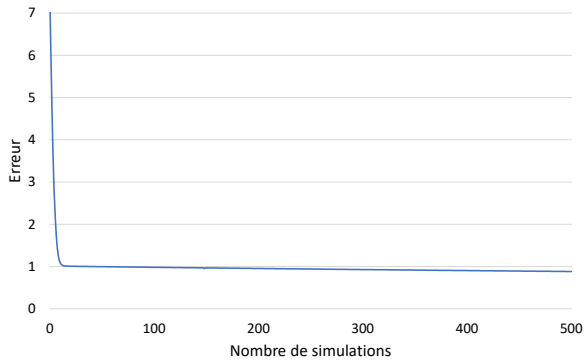

FIGURE 4.6 – Convergence de l'erreur

Les paramètres κ^*, ρ et θ^* ne convergent pas. Certains paramètres convergent plus vite que d'autres. Pour minimiser encore l'erreur obtenue avec le vecteur paramètre V = (0,17 ; 4,09 ; 0,06 ; -0,73 ; 0,35) et obtenir une convergence de tous les paramètres, nous entrons ce vecteur en vecteur initial et obtenons :

<u>Scénario 3 :</u>

	$Erreur$	V_{ini}	κ^*	θ^*	ρ	σ	$2\kappa^*\theta^* > \sigma^2$
Initial	0,88	0,17	4,09	0,06	-0,73	0,35	OUI
Final	0,69	0,17	4,06	0,07	-0,82	0,52	OUI

TABLE 4.3 – Evolution des paramètres dans le scénario 3

Pour les paramètres qui convergeaient déjà au scénario précédent, on observe une droite en fonction des simulations avec des variations très légères. Pour les trois autres paramètres, on les représente ci-dessous ainsi que l'erreur :

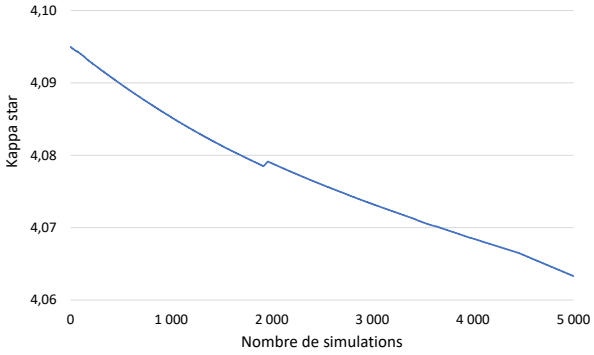

FIGURE 4.7 – Convergence de κ^*

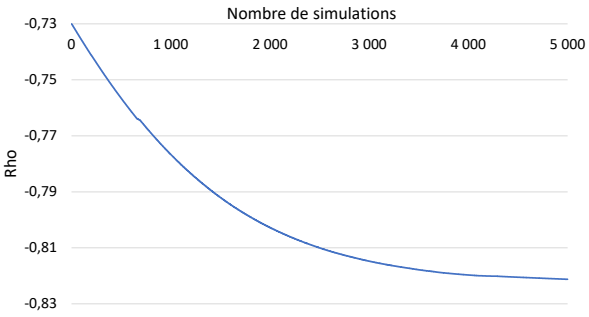

FIGURE 4.8 – Convergence de ρ

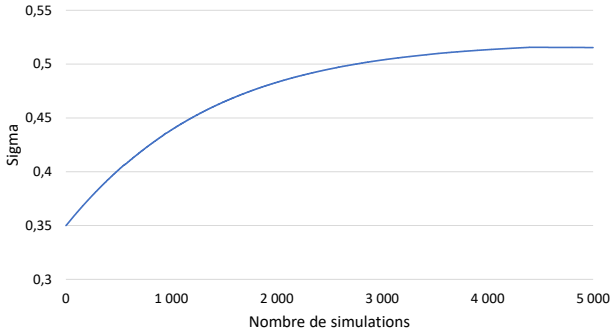

FIGURE 4.9 – Convergence de σ

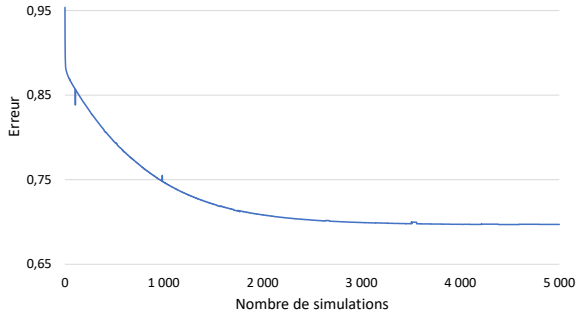

FIGURE 4.10 – Convergence de l'erreur

Les paramètres ρ et θ convergent maintenant. κ^*, lui, ne converge toujours pas. On pourrait surement obtenir une erreur plus faible encore en faisant retourner la descente de gradient mais on fait le choix de s'arrêter là, l'erreur obtenue est acceptable.

On réitère depuis le début en choisissant un autre vecteur initial.

<u>Scénario 4 :</u>

	$Erreur$	V_{ini}	κ^*	θ^*	ρ	σ	$2\kappa^*\theta^* > \sigma^2$
Initial	1,58	0,11	2,00	0,07	-0,50	0,30	OUI
Final	0,63	0,15	2,00	0,06	-0,59	0,49	NON

TABLE 4.4 – Evolution des paramètres dans le scénario 4

Dans ce scénario, avec un $\alpha = 0,0001$ et après 5 000 simulations, l'erreur est certes plus faible que dans le cas 2 mais la condition sur les paramètres n'est pas vérifiée. Nous ne pouvons donc pas retenir ce vecteur paramètre. Les simulations sont refaites avec un α dix fois plus grand (Scénario 4) puis dix fois plus petit (Scénario 5).

Scénario 5 :

	$Erreur$	V_{ini}	κ^*	θ^*	ρ	σ	$2\kappa^*\theta^* > \sigma^2$
Initial	1,58	0,11	2,00	0,07	-0,50	0,30	OUI
Final	6,33	0,34	3,31	0,05	-0,59	0,27	OUI

TABLE 4.5 – Evolution des paramètres dans le scénario 5

Dans ce scénario, on observe une grande erreur. Ceci est dû au fait que les paramètres oscillent à droite et à gauche du minimum sans jamais l'atteindre : le pas fixé $\alpha = 0,001$ est trop grand. C'est ce qu'on observe sur ce graphique :

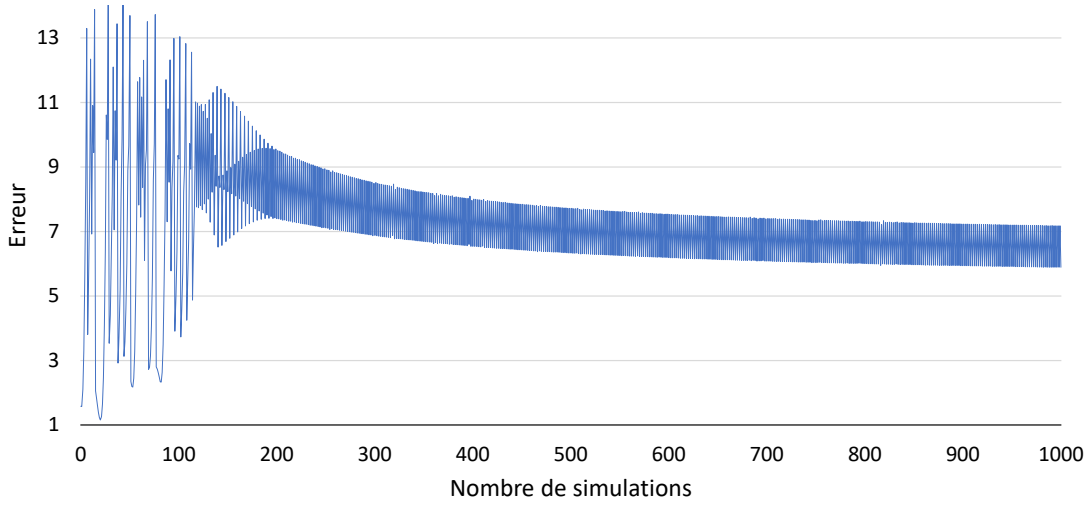

FIGURE 4.11 – Convergence de l'erreur dans le cas où α est trop grand

Scénario 6 :

	$Erreur$	V_{ini}	κ^*	θ^*	ρ	σ	$2\kappa^*\theta^* > \sigma^2$
Initial	1,58	0,11	2,00	0,07	-0,50	0,30	OUI
Final	0,90	0,14	2,00	0,06	-0,51	0,31	OUI

TABLE 4.6 – Evolution des paramètres dans le scénario 6

Dans ce scénario, on se rapproche de la solution trouvée dans le scénario 4 avec une rapidité moindre puisque $\alpha = 0,00001$. Avec un grand nombre de simulation, on retrouve le vecteur obtenu en scénario 4.

Le scénario 7 est une autre tentative de trouver un autre minimum avec des paramètres initiaux très différents de précédemment.

Scénario 7 :

	$Erreur$	V_{ini}	κ^*	θ^*	ρ	σ	$2\kappa^*\theta^* > \sigma^2$
Initial	6,12	0,04	1,00	0,24	-0,20	0,20	OUI
Final	0,69	0,14	1,02	0,05	-0,42	0,53	NON

TABLE 4.7 – Evolution des paramètres dans le scénario 7

Encore une fois, la condition sur les paramètres n'est pas vérifiée et le scénario n'est donc pas retenu. Le paramètre V_{ini} qui est le paramètre le plus important dans la calibration (cf. partie sur les sensibilités) se rapproche du V_{ini} du scénario 2, ce qui nous conforte dans notre choix. Il en est de même pour θ.

Parmi tous ces scénarios, deux minimums ont été trouvés : celui en scénario 1 et celui en scénario 3. Le vecteur de paramètre du second cas est retenu puisque l'erreur globale (somme sur les 71 prix) est significativement plus petite.

Nous renouvelons encore cette opération pour vérifier que le minimum est bien atteint :

Scénario 8 :

	$Erreur$	V_{ini}	κ^*	θ^*	ρ	σ	$2\kappa^*\theta^* > \sigma^2$
Initial	0,69	0,17	4,06	0,07	-0,82	0,52	OUI
Final	0,69	0,17	4,04	0,07	-0,82	0,51	OUI

TABLE 4.8 – Evolution des paramètres dans le scénario 8

Le vecteur de paramètre n'est presque pas modifié, l'erreur diminue toujours mais à la marge. Elle est représentée ci-dessous :

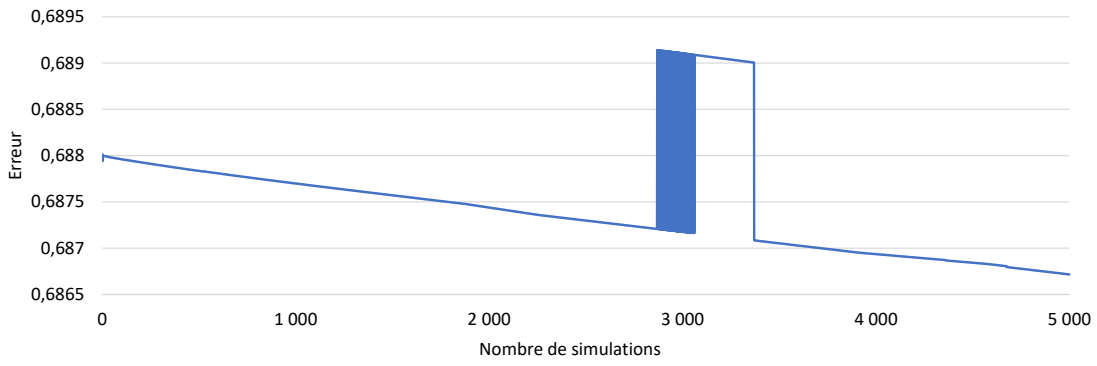

FIGURE 4.12 – Vérification de l'erreur

Le saut observé à partir de la simulation 3 000 est dû au fait que l'algorithme cherche une nouvelle solution au problème de minimisation, mais il revient bien vers le minimum que nous choisissons, qu'il juge meilleur. On pose :

$$V = (0,17\ ;4,03\ ;0,07\ ;-0,82\ ;0,51)$$

Le code correspondant à cette descente de gradient est disponible dans les Annexes 10 et 11.

4.3 Validation des paramètres

Pour valider le vecteur de paramètre choisi dans le paragraphe précédent, nous calculons l'erreur entre les prix obtenus grâce à Heston et ce vecteur de paramètre avec les prix du marché.

Nous représentons cette erreur ci-dessous.

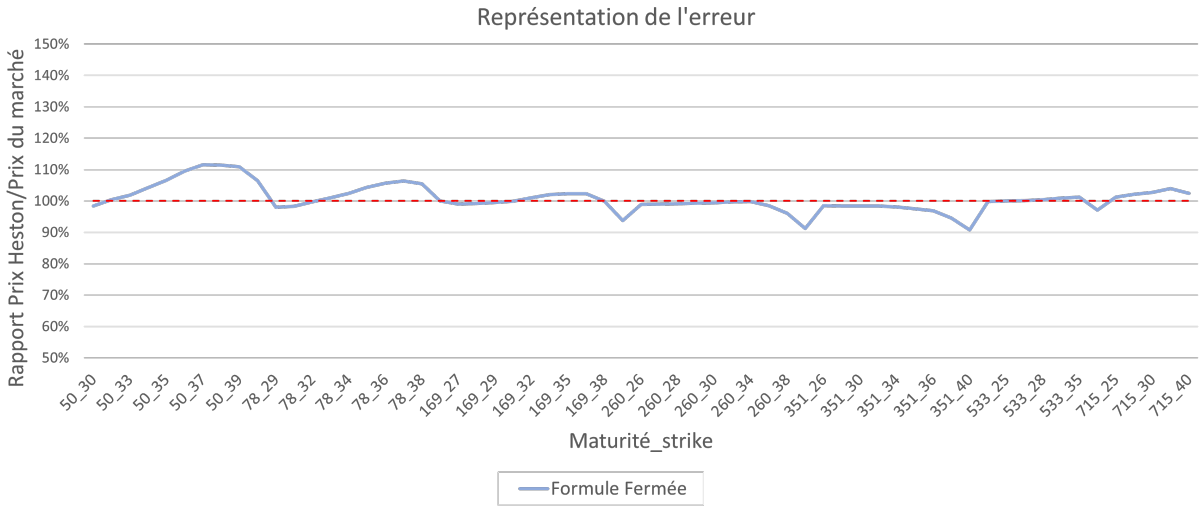

FIGURE 4.13 – Représentation de l'erreur pour chaque call du marché

L'abscisse est notée de cette manière : $Maturite_strike$. Par exemple, le point 78_37 correspond au call ayant un *strike* de 37 et une maturité de 78 jours.

Les prix sont très proches de ceux du marché. Pour les maturités courtes, le modèle d'Heston réplique moins bien les prix. Il est plus adapté pour les maturités longues puisque la volatilité aura été calculée un grand nombre de fois et donc couvrira mieux tous les cas de figure.

A chaque maturité, on remarque la même forme d'erreur avec une sous-estimation des prix pour les *strikes* bien inférieurs au cours du sous-jacent au 31/12/2020 (35,3) et une sur-estimation pour les *strikes* supérieurs. La meilleur estimation est lorsque le *strike* est à la monnaie. Aussi, plus la maturité est grande, moins les écarts sont forts.

On observe une grande erreur pour le call de maturité 15 et de *strike* 40 : ce call vaut 10 centimes sur le marché et seulement 2 avec notre modèle.

Globalement, les rapports entre les prix d'Heston obtenus avec le vecteur paramètre retenu et ceux du marché oscillent autour de la valeur de 100 % : le vecteur paramètre est donc validé.

Pour s'en assurer, nous répliquons les prix des puts. Grâce à la formule trouvée en 3.1.2, on peut écrire, avec les mêmes notations et en notant P, le prix du put :

$$P = K\exp(-r\tau)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty P_2\,\mathrm{d}\phi) - S * \exp(-q\tau) * (\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} * \int_0^\infty P_1\,\mathrm{d}\phi)$$

Pour chaque put du marché (Maturité, *strike*), nous calculons le prix du put associé par cette formule fermée. Nous calculons alors l'erreur, de la même manière que pour les call. Nous faisons cette opération et pour le vecteur obtenu en scénario 1 (qui avait été validé malgré une erreur trop grande) et en scénario 8 (paramètres retenus). L'erreur suivante est obtenue :

	Erreur
Scénario 1	6,35
Scénario 8	3,19

TABLE 4.9 – Erreur sur le calcul des put

L'erreur est bien entendu plus grande sur les puts que sur les calls puisque la calibration a été faite sur les calls. C'est donc l'erreur sur les calls qui a été minimisée. Il était également entendu que l'erreur soit différente de celle trouvée sur les calls : la relation de parité call-put n'est pas tout à fait respectée en réalité puisque la condition d'opportunité d'arbritage n'est pas tout à fait remplie.

L'erreur du vecteur paramètre validé (qui correspond au scénario 8) est bien moins importante que celle trouvée avec le scénario 1. Cela nous conforte dans notre choix de paramétrisation même si l'argument principal pour affirmer que notre paramétrisation est robuste est l'erreur très faible retrouvée sur les prix des calls.

4.4 Avec Monte-Carlo

En reprenant la méthode de Monte-Carlo dans le cadre du modèle d'Heston, on simule un grand nombre de trajectoires comme ci-après.

Les paramètres sont fixés grâce à la partie précédente (Calibration des paramètres). Ensuite, pour chaque jour, nous allons calculer deux éléments : le cours du sous-jacent et la volatilité. Nous regardons la valeur du cours uniquement pour les dates de fixing, à savoir tous les six mois, mais le modèle de Heston anticipe un cours et une volatilité continue. C'est pourquoi nous choisissons un pas journalier.

1. Pour le cours du sous-jacent, on part de S_0, le marché nous le fournit. C'est la valeur de l'action à la date de calcul. Ensuite, pour tout $n \in [1, N]$, où N représente le nombre de jours restants de vie du produit structuré, on a :

$$ln(S_{n+1}) = ln(S_n) + (\mu - \frac{1}{2}v_n) * \Delta t + \sqrt{v_n} * \sqrt{\Delta t} * \epsilon_{S,n+1}$$

   où v_n est la volatilité au jour n et $\Delta t = 1$.

2. Pour la volatilité, on part de la volatilité initiale v_0, calculée grâce à la partie précédente. Puis, pour chaque date de fixing, on calcule la volatilité de la façon suivante :

$$ln(v_{n+1}) = ln(v_n) + \frac{1}{v_n}(\kappa(\theta - v_n) - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\frac{1}{\sqrt{v_n}} * \sqrt{\Delta t} * \epsilon_{v,n+1}$$

où $\epsilon_{S,n+1}$ et $\epsilon_{v,n+1}$ sont corrélés par ρ, ce qui se note : $\rho = Corr(\epsilon_{S,n+1}, \epsilon_{v,n+1})$.
Donc le générateur aléatoire pris en compte pour la volatilité est :

$$\epsilon_{v,n+1} = \rho * \epsilon_{S,n+1} + \sqrt{1 - \rho^2} * \epsilon_{n+1}$$

Les expressions de $ln(S_{n+1})$ et de $ln(v_{n+1})$ nous permettent de calculer le prix de l'actif. Cependant, nous allons générer plusieurs trajectoires et ainsi couvrir un maximum de possibilités de variations du cours. Nous ferons une moyenne sur ces résultats pour obtenir un prix le plus juste possible.

Pour valider cette diffusion des cours, nous souhaitons retrouver le prix des calls donnés par le marché grâce à Monte Carlo. Nous traçons de la même manière que pour la validation de la paramétrisation l'erreur entre les prix obtenus avec Monte Carlo et ceux du marché.

La courbe suivante est obtenue :

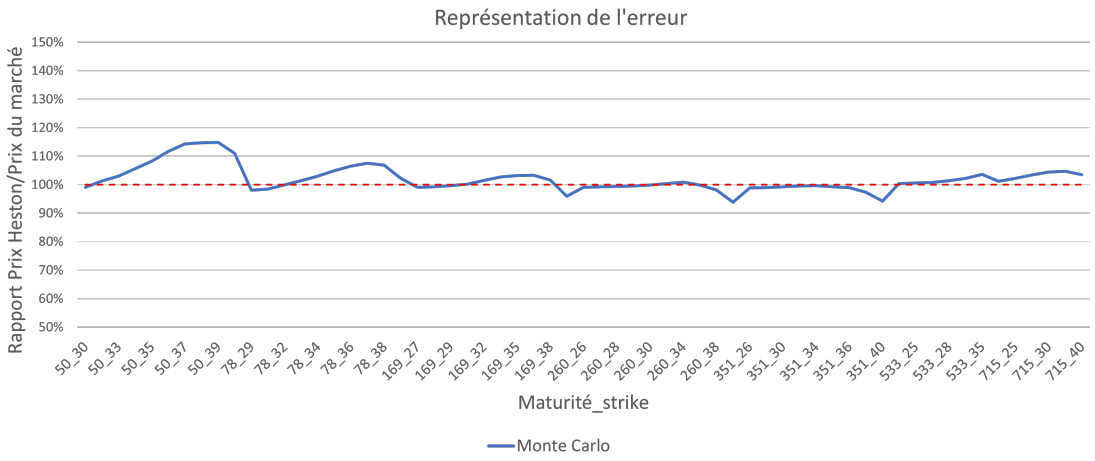

FIGURE 4.14 – Représentation de l'erreur pour chaque call du marché avec Monte Carlo

La courbe d'erreur obtenue avec les simulations de Monte-Carlo est très proche de celle observée avec la formule fermée. Ce graphique confirme donc bien que la dynamique de Monte Carlo est codée correctement.

4.5 Sensibilités aux paramètres

Nous étudions ici la sensibilité au prix du sous-jacent initial et aux paramètres sur les pertes/gains encourus dans le modèle d'Heston. On représente graphiquement les effets des différents paramètres sur les pertes moyennes projetées.

Le but de cette partie est de mieux comprendre les paramètres utilisés dans le modèle d'Heston. En effet, les paramètres du vecteur de paramètres final trouvé sont tous liés entre eux. Le marché donne ce vecteur, le but n'est pas de le changer mais d'apprécier les impacts des paramètres sur la valorisation du produit.

Nous allons donc "choquer" les paramètres trouvés précédemment un par un et étudier l'impact sur les résultats obtenus afin de mesurer l'effet de chacun.

Pour rappel, d'après la partie précédente, les paramètres sont fixés de la manière suivante :

	Paramètre calibré
Sous-jacent initial	35,30
Variance initiale	17 %
κ^*	4,03
θ^*	7 %
ρ	-0,82
σ	0,51

TABLE 4.10 – Paramètres calibrés grâce aux prix du marché - Heston

Il est cependant bien à noter que si une des caractéristiques de l'autocall avait été différente alors les sensibilités auraient pu être très différente. Il faut donc bien garder à l'esprit que cette partie est une application de ce qui a été vu précédemment dans le cadre d'un autocall particulier (présenté en partie 2).

Les travaux Rui et Raquel [10] donnent les différentes probabilités d'être autocallé pour des produits ayant des caractéristiques différentes.

4.5.1 Sensibilité au sous-jacent initial

Nous faisons varier le sous-jacent de départ. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	Sous-jacent initial		
Variation du paramètre	Valeur du paramètre	Pertes associées	En pourcentage
50%	17,65	-1 844 987	318,5 %
90%	31,77	-741 455	128,0 %
Scénario central	35,30	-579 334	100,0 %
110%	38,83	-431 087	74,4%
150%	52,95	-325 519	56,2 %

TABLE 4.11 – Sensibilité au sous-jacent

La représentation graphique de la convergence des pertes estimées est représentée ici. On observe la même convergence dans chacun des cas suivants (pour chaque paramètre), elle n'est par la suite plus représentée.

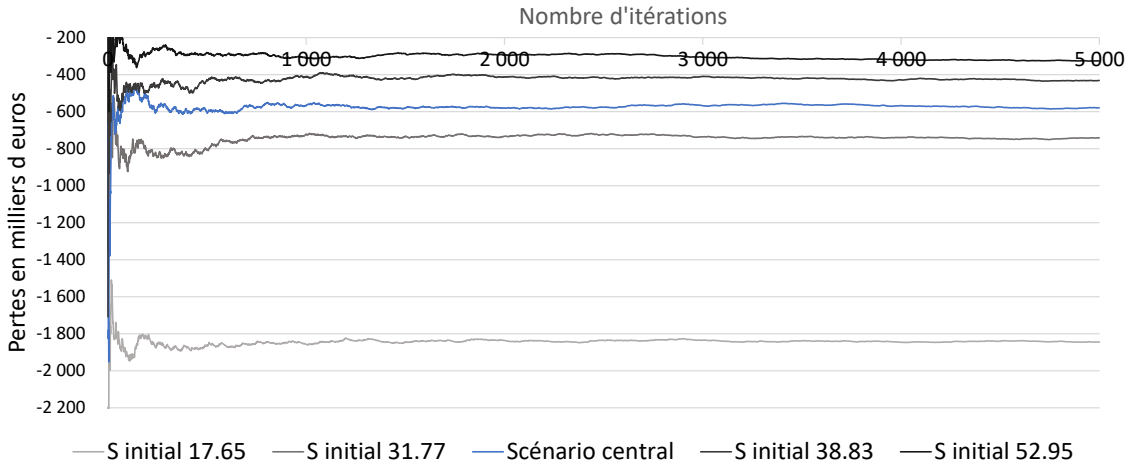

FIGURE 4.15 – Représentation de l'erreur pour chaque call du marché

On observe que plus la valeur du sous-jacent initial est élevée, moins les pertes sont importantes. En effet, plus le sous-jacent initial est grand, plus la probabilité que le cours du sous-jacent soit supérieur à la barrière coupon à une des dates de fixing est élevée. De plus, la probabilité que le sous-jacent soit inférieur à la barrière de protection de capital est aussi plus faible. La perte projetée est donc plus faible.

Les différences de pertes estimées sont très différentes lorsque le sous-jacent initial est modifié : il faut que ce paramètre soit fixé correctement.

Ci-dessous la densité des cours du sous-jacent à la première et dernière date de fixing :

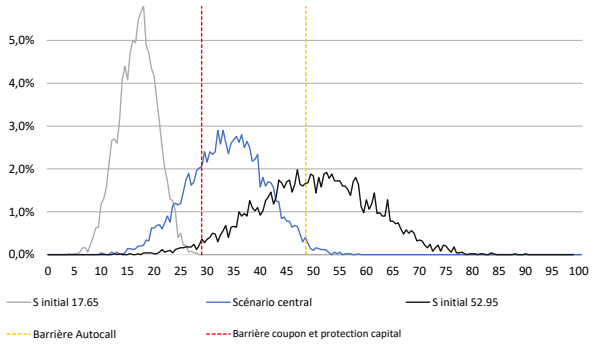

FIGURE 4.16 – Densité des cours à la première date de fixing

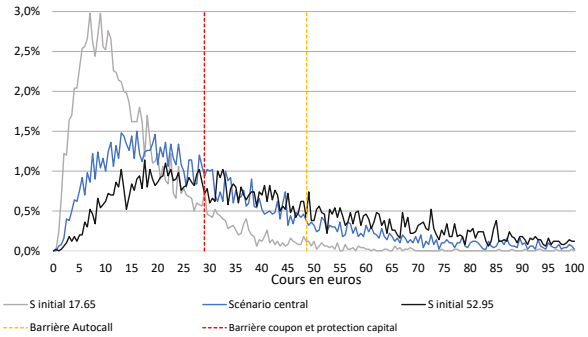

FIGURE 4.17 – Densité des cours à la dernière date de fixing

On observe un caractère non symétrique des résultats. La perte estimée avec un sous-jacent initial = 17,65 est bien plus importante que celle dans le scénario central

Ces graphiques expliquent pourquoi : très peu de cours sont au dessus de la barrière coupon et protection du capital à toutes les dates de fixing donc très peu de coupons sont gagnés. La perte du capital est importante puisqu'une grande partie des cours sont en dessous de la barrière de protection du capital à la dernière date de fixing. La courbe noire, elle, est plus proche de la bleue (scénario central) à la dernière date de fixing et beaucoup de cours sont autocallés dès la première date de fixing, ce qui explique que l'écart entre le scénario central et le S initial = 52,95 est moins important que entre S initial = 17,65 et le scénario central.

Il est à noter que les pics observés sur ces graphiques est du au nombre trop faible de simulations, fixé à 5 000. En augmentant le nombre de simulations, les courbes seraient alors lisses. Pour que le temps de calcul des programmes soit plus rapide, nous conservons le nombre de simulations à 5 000 pour la suite.

C'est ce que nous observons sur la courbe ci-dessous :

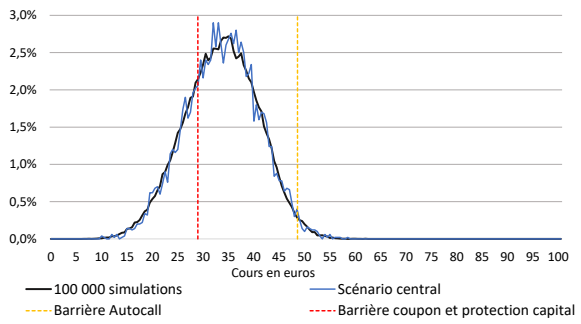

FIGURE 4.18 – Densité des cours à la première date de fixing

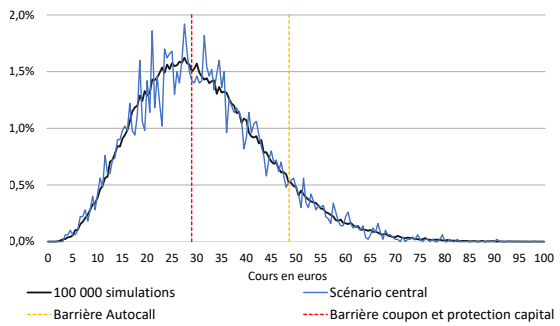

FIGURE 4.19 – Densité des cours à la cinquième date de fixing

4.5.2 Sensibilité à la variance initiale V_{ini}

Nous représentons les résultats en faisant varier la volatilité dans ce tableau :

	Variance initiale		
Variation du paramètre	Valeur du paramètre	Pertes associées	En pourcentage
50%	0,09	-531 780	91,7 %
90%	0,15	-533 847	92,1 %
Scénario central	0,17	-579 334	100,0 %
110%	0,19	-575 749	99,3 %
150%	0,26	-599 273	103,3 %

TABLE 4.12 – Sensibilité à V_{ini}

Nous observons que plus la volatilité initiale est importante, plus la perte estimée est grande. Lorsque la volatilité est élevée, les cours peuvent monter en flèche mais cela ne compense pas le fait que l'autre partie des cours sont en baisse forte. En effet, pour les cours en forte baisse, aucun coupon ne sera touché et les pertes peuvent être très importantes. Les cours qui montent en flèche, eux, engendrent l'arrêt du produit et donc

la privation d'éventuels coupons. Le gain est plafonné. Autrement dit, la proportion de crash tire les pertes vers le bas, cela n'est pas compensé par les hausses.

Pour illustrer ces explications, nous traçons les densités des cours et des variances ci-dessous :

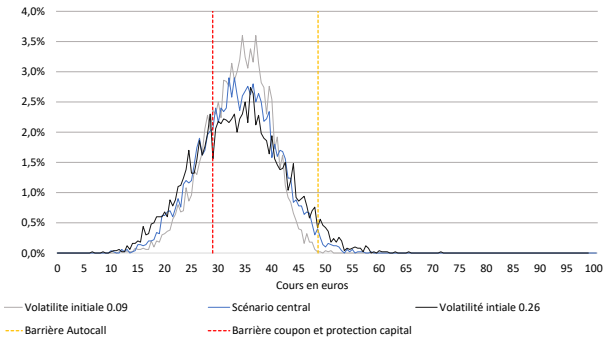

FIGURE 4.20 – Densité des cours à la première date de fixing

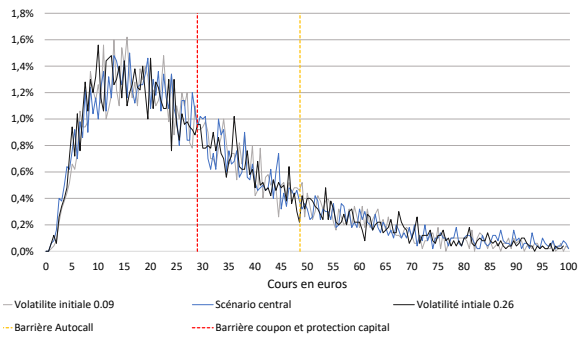

FIGURE 4.21 – Densité des cours à la dernière date de fixing

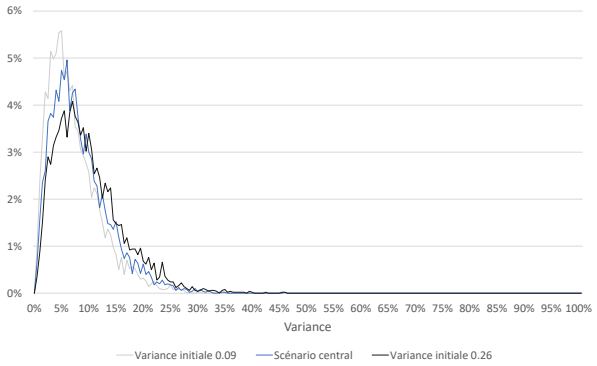

FIGURE 4.22 – Densité des variances à la première date de fixing

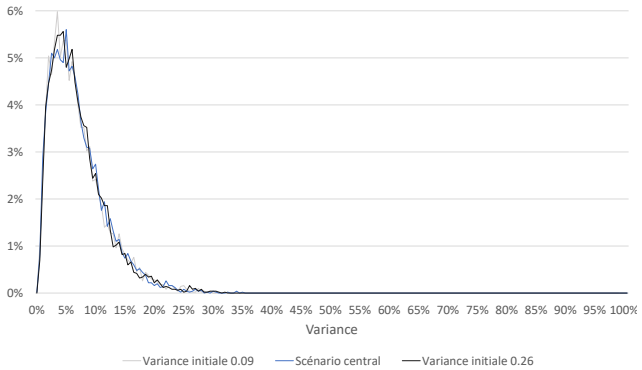

FIGURE 4.23 – Densité des variances à la dernière date de fixing

Par définition de la variance, plus elle est élevée, plus les sous-jacents prends des valeurs éloignées de la valeur initiale. C'est pour cela qu'on observe un pic plus grand, avec beaucoup de valeur concentrées autour du 35,30€ initial pour une variance faible

de 9% et un pic au contraire plus écrasé pour la variance initiale de 26%. Ainsi, pour la variance initiale de 9%, plus de cours sont entre les deux barrières aux premières dates de fixing et moins sont autocallés (moins de valeurs extrêmes pour une variance faible). Cela explique des pertes moins importantes pour une variance faible.

Pour la densité des variances, on pourrait s'attendre à un pic aux environs de la variance initiale pour la première date de fixing. Cependant, on remarque que les pics sont déjà bien décalés vers la gauche. C'est notamment le cas de la courbe noire : la moyenne des variances à la première date de fixing pour une variance de 0,26 est 0,10. Ceci est du au fait qu'entre la première date de fixing (14/06/2021) et la date de calcul (31/12/2020), il y a déjà eu 165 jours donc 165 variances calculées puisque le pas est journalier. La variance se rapproche de $\theta^* = 0,07$, c'est pour cela qu'on observe un décalage dès la première date de fixing. Si l'on regardait au 01/01/2021, on trouverait des pics parfaitement centrés sur les variances initiales. A la dernière date de fixing, sur la figure 3.20, toutes les volatilités sont presque confondues, le pic se situant cette fois logiquement vers θ^*.

Ceci explique que les cours soient eux aussi confondus à la dernière date de fixing. Pour ce produit, la variance initiale a finalement peu d'impact. C'est pour ça que l'on observe des valeurs pas totalement cohérentes dans le tableau 4.12.

4.5.3 Sensibilité à la force de rappel κ^*

Le tableau ci-dessous résume les pertes associées à différentes valeurs de κ^* :

	Force de rappel		
Variation du paramètre	Valeur du paramètre	Pertes associées	En pourcentage
50%	2,02	-498 715	86,1 %
90%	3,63	-566 118	97,7 %
Scénario central	4,04	-579 334	100,0 %
110%	4,44	-562 097	97,0 %
150%	6,05	-577 867	99,7 %

TABLE 4.13 – Sensibilité à κ^*

On représente ci-dessous la densité de la variance pour plusieurs valeurs de κ^* :

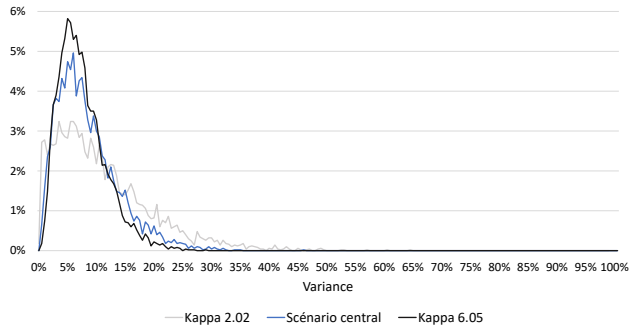

FIGURE 4.24 – Densité des variances à la première date de fixing

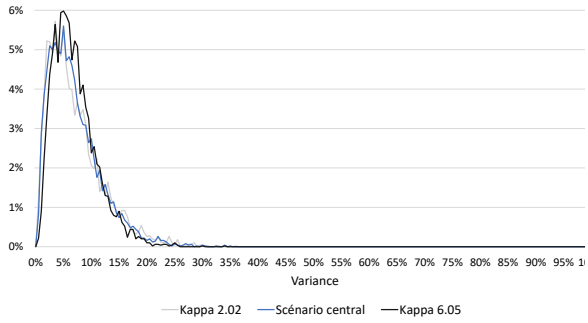

FIGURE 4.25 – Densité des variances à la dernière date de fixing

Sur le graphique 4.21, la variance converge vers θ^* dans les trois cas mais de manière plus ou moins rapide. En effet, lorsque $\kappa^* = 6,05$, la variance a déjà sa forme finale (même forme que sur le graphique 4.22). Autrement dit, après 165 variances calculées (car il y a 165 jours écoulés entre la date de calcul et la première date de fixing), la variance a déjà parfaitement convergé vers θ^* pour un κ^* assez grand. A la dernière date de fixing, la variance a atteint sa forme définitive pour toutes les valeurs de κ^*.

En revanche, ce paramètre a très peu d'impact sur les cours des sous-jacents et donc sur les pertes estimées.

4.5.4 Sensibilité à la variance à l'infini θ^*

Les résultats des pertes trouvées en fonction de différentes valeurs de θ^*, les autres étant fixées sont résumés dans ce tableau :

	Variance à l'infini		
Variation du paramètre	Valeur du paramètre	Pertes associées	En pourcentage
50%	3,37 %	-322 116	55,6 %
90%	6,07 %	-555 673	95,9 %
Scénario central	6,75 %	-579 334	100,0 %
110%	7,42 %	-608 284	105,0 %
150%	10,12 %	-694 793	119,9 %

TABLE 4.14 – Sensibilité à θ^*

Plus la variance à l'infini est grande, plus les pertes sont importantes. On utilise le même argument que pour la variance initiale pour expliquer ceci. Si la variance à l'infini est grande, alors d'une part les pertes possibles sont importantes et d'autre part, le produit a de chance d'être autocallé. En somme, la probabilité d'être entre les deux barrières (et donc de gagner un coupon sans être autocallé) est plus élevée si la variance est faible.

Cependant, on remarque que les écarts sont bien plus importants lorsque l'on fait varier la variance à l'infini que lorsqu'on fait varier la variance initiale. Cela vient du fait que le κ^* est grand (4,04) et que donc la variance atteint rapidement la variance à l'infini. Autrement dit, la variance est rapidement proche de la variance à l'infini donc la variance initiale a beaucoup moins d'impact. En effet, dans le scénario central, la variance initiale est fixée à $17,05\%$ au $31/12/2020$. A la première date de fixing, sa moyenne est égale à $8,18\%$ puis à la seconde, elle est à $6,99\%$ puis elle est décroissante jusqu'à la dernière date de fixing où elle est égale à $6,68\%$.

Les densités des cours et des volatilités sont représentées ci-dessous :

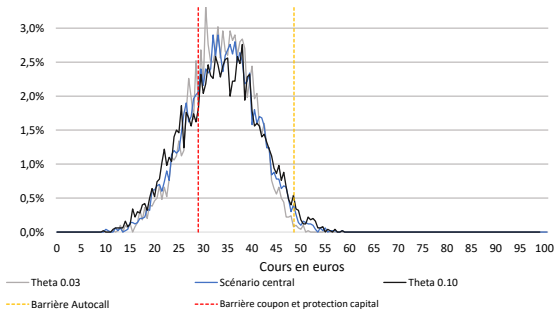

FIGURE 4.26 – Densité des cours à la première date de fixing

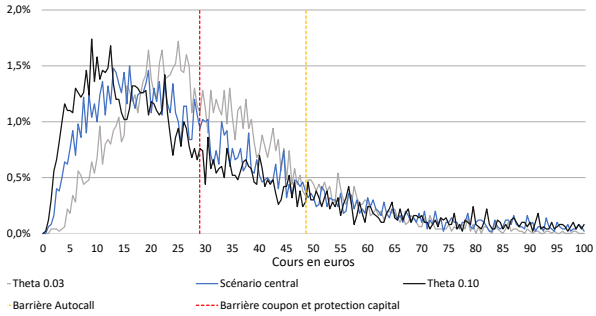

FIGURE 4.27 – Densité des cours à la dernière date de fixing

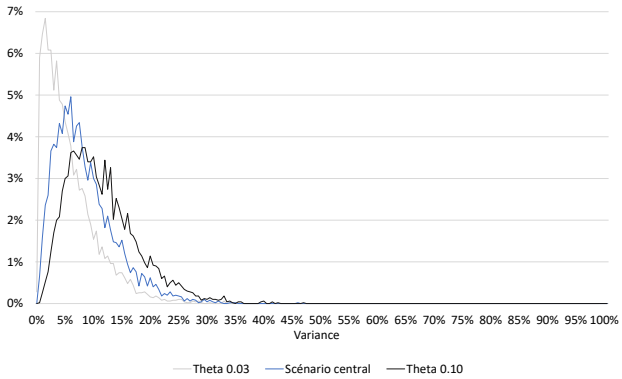

FIGURE 4.28 – Densité des variances à la première date de fixing

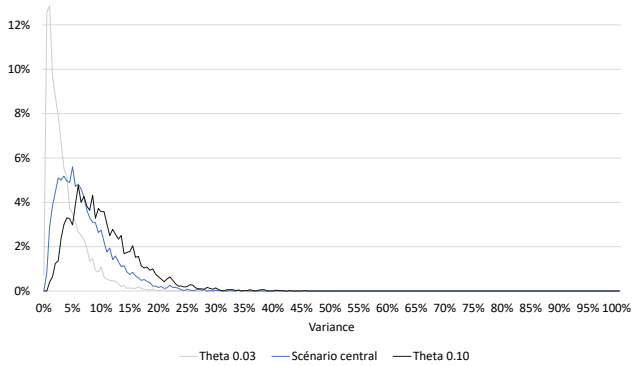

FIGURE 4.29 – Densité des variances à la dernière date de fixing

Sur la figure 4.25, les pics sont déjà centrés proche de la valeur de θ^*. C'est complètement le cas sur la figure 4.26. Les pics sont plus évasés pour les courbes correspondant à une variance à l'infini élevée car il y a plus de valeurs possibles aux alentours du 0,10 par exemple. Pour le 0,03, les valeurs sont bloquées par le 0.

A la dernière date de fixing, on observe effectivement qu'il y a beaucoup plus de cours en dessous de la barrière de protection du capital sur la courbe noire que sur la courbe grise claire, ce qui entraîne de fortes pertes.

4.5.5 Sensibilité au paramètre de corrélation ρ

Les résultats des pertes trouvées en fonction de différentes valeurs de ρ, les autres paramètres étant fixés sont résumés dans ce tableau :

	Facteur de corrélation		
Variation du paramètre	Valeur du paramètre	Pertes associées	En pourcentage
	-0,9	-542 595	93,7%
Scénario central	-0,82	-579 334	100,0 %
	-0,5	-619 305	106,9 %
	0	-617 050	106,5 %
	0,5	-701 927	121,2 %
	0,9	-754 265	130,2 %

TABLE 4.15 – Sensibilité à ρ

Les pertes sont plus importantes lorsque le facteur ρ est grand. En effet, si ρ est positif, alors la variance est proportionnelle à l'évolution du cours : si le cours diminue alors la variance aussi, ce qui "bloque" les valeurs basses là où elles sont. Si le cours augmente, alors la variance aussi, lui permettant soit d'obtenir de très grande valeur (ce qui a peu d'impact dans notre cas puisque le produit est alors autocallé), soit de prendre de faibles valeurs qui sont à leur tour stockée à cette hauteur. Ce cas de figure est donc très dégradateur pour le produit autocall, c'est ce qui explique les grandes pertes pour un ρ grand.

Au contraire, si le ρ est négatif alors lorsque le cours prend de faibles valeurs, la variance est grande ce qui lui donne une chance de retrouver des valeurs hautes et lorsque le cours augmente alors il reste à cette hauteur. Il est donc préférable pour l'investisseur que le ρ soit négatif.

C'est ce qu'on observe sur les densités des cours :

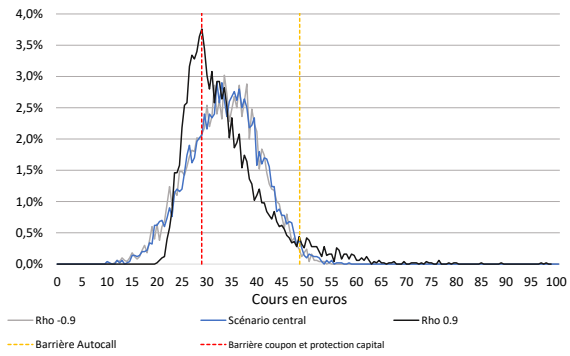

FIGURE 4.30 – Densité des cours à la première date de fixing

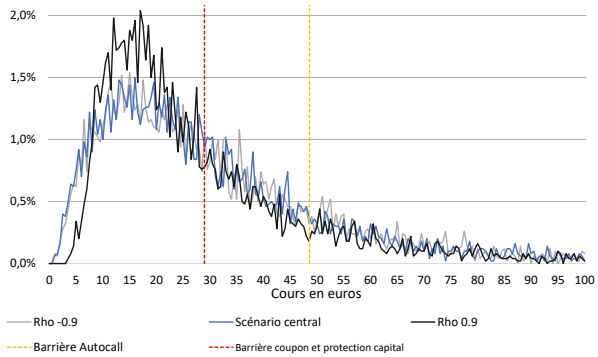

FIGURE 4.31 – Densité des cours à la dernière date de fixing

La figure 4.27 met en lumière le paragraphe précédent : les valeurs sont rassemblées autour d'une valeur plus faible que celle de départ (35,3) et il y a assez peu de valeurs extrêmes sur la courbe noire ($\rho = 0,9$). Au contraire, les valeurs sont mieux réparties et plus à la hausse de manière générale pour le scénario où le facteur de corrélation est faible. Ainsi, plus de coupons seront perçus si le paramètre ρ est négatif.

A la dernière date de fixing, on observe plus de valeurs très basses pour la courbe grise claire alors que les valeurs sont plus regroupées pour la courbe noire.

4.5.6 Sensibilité à la volatilité de la variance σ

Le tableau ci-dessous résume les pertes associées à différentes valeurs de σ :

	Volatilité de la variance		
Variation du paramètre	Valeur du paramètre	Pertes associées	En pourcentage
50%	0,26	-645 183	111,4 %
90%	0,46	-601 220	103,8 %
Scénario central	0,51	-579 334	100,0 %
110%	0,57	-513 087	88,6 %
150%	0,77	-544 420	94,0 %

TABLE 4.16 – Sensibilité à σ

On observe que plus σ est petit, plus les pertes sont importantes. En effet, plus σ est petit, plus les volatilités sont centrées.

C'est ce qu'on observe sur les densités de variance ci-dessous :

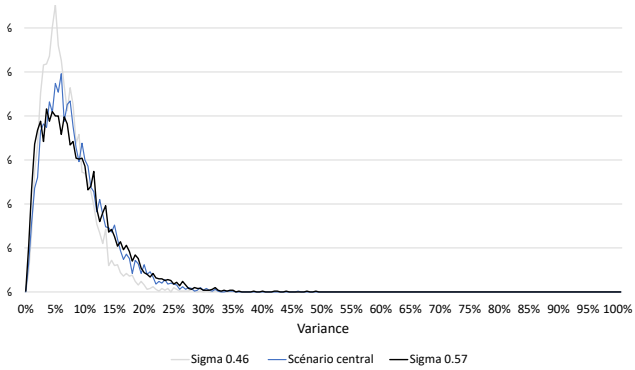

FIGURE 4.32 – Densité des variances à la première date de fixing

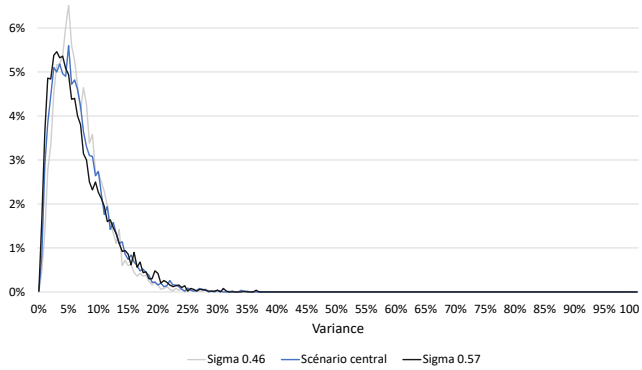

FIGURE 4.33 – Densité des variances à la dernière date de fixing

La moyenne de la variance au premier fixing pour $\sigma = 0,46$ est de 8,32% alors qu'elle est de 8,40% lorsque $\sigma = 0,57$. Ceci explique que les pertes sont plus importantes pour sigma petit. (cf. explication de la variance initiale ou à l'infini). Un peu bancal...

4.5.7 Conclusion sur les sensibilités

On récapitule dans le tableau ci-dessous les résultats trouvés dans cette partie. Il faut bien noter cependant que ce tableau oublie un certain nombre de subtilités expliquées plus haut et que ces variations sont vraies uniquement dans le cadre de ce produit et à cette date de valorisation précise.

Paramètre	Sens de variation
S_0	$++$
V_0	$-$
κ^*	$+$
θ^*	$--$
ρ	$-$
σ	$--$

TABLE 4.17 – Sensibilité du produit en fonction du paramètre

Ce tableau permet une certaine appréhension de l'importance des paramètres, dans sa globalité. Ce tableau est à lire de cette façon : lorsque le sous-jacent initial S_0 augmente, alors le gain augmente (dans notre cas, les pertes sont moins importantes).

La vitesse de croissance ou décroissance des pertes en fonction des paramètres est difficile à estimer : l'évolution des pertes est souvent concave.

On peut cependant classer les paramètres selon leur importance de la manière suivante : S_0, θ^*, σ, V_{ini}, κ^*. On ne peut pas classer ρ puisque la variation de ses paramètres n'est pas la même que pour les autres (50%, 90%, 110%, 150%).

Comparaison des modèles

4.6 Variation de la maturité du produit

La maturité du produit est fixée au 14/06/2028, la date du début du calcul au 31/12/2020. Cette partie s'attache à l'étude du produit considéré jusqu'à présent mais à plus court terme. Pour cela, nous simulons une date de fin de produit à chaque date de fixing, du 14/06/2021 au 14/06/2028.

Lorsque la maturité du produit est plus longue, il y a d'un côté un gain de coupons supplémentaires possibles mais aussi le cours peut atteindre des valeurs extrêmes et basses : les itérations sur le cours sont plus nombreuses, le cône des projections s'évase donc. On s'attend donc à des pertes plus importantes lorsque la maturité est longue.

Ce calcul est effectué dans un premier temps avec la méthode de Monte Carlo pour le modèle d'Heston avec le calibrage des paramètres déjà présenté précédemment. C'est une des grandes forces du modèle d'Heston : les paramètres ne dépendent pas de la maturité du produit.

Puis, le même travail est effectué avec le modèle de Black and Scholes en considérant plusieurs volatilités : 20%, 25%, 30% et 35%.

Sur ce produit, plus la volatilité est élevée, plus les pertes sont grandes (cf. la courbe décroissante sur le schéma 3.8 avec le faisceau de résultats pour différentes volatilités constantes) car plus de scenarii où le sous-jacent est en dessous de la barrière.

La représentation des pertes encourues selon le modèle retenu, et en fonction de la maturité est représenté ci-dessous :

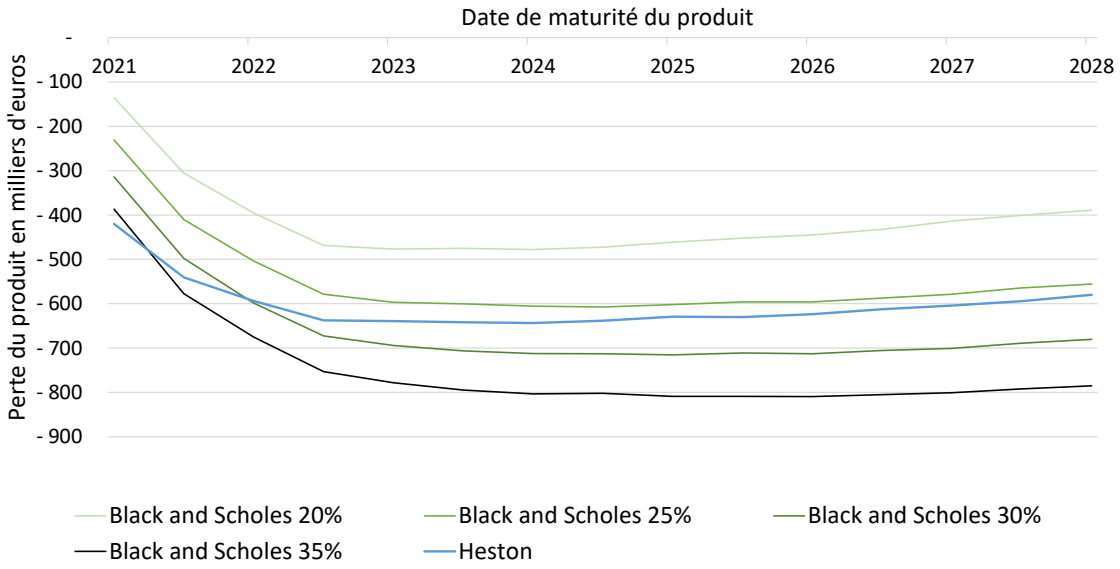

FIGURE 4.34 – Modèles en fonction de la date de maturité du produit

On observe que les résultats sont très variables à court terme. Puis, les pertes se stabilisent à moyen et long terme.

La stabilisation des pertes vient sûrement du fait que la variance à long terme dans le modèle d'Heston est atteinte en moyenne. Pour le modèle de Black and Scholes, la volatilité implicite se stabilise. Les pertes liées au fait que le cours est sous la barrière de protection du capital sont stabilisées comme la variance reste stable : le cône d'évasion est identique selon les maturités. Les coupons gagnés, eux, sont de plus en plus nombreux, d'où cette légère croissance.

Les pertes sont plus élevées lorsque la volatilité est grande. Les courbes correspondant au modèle de Black and Scholes ont logiquement la même forme puisque toutes les hypothèses hors la volatilité sont les mêmes. Elles s'évasent cependant au cours du temps : l'écart constaté à court terme augmente dans le temps.

Nous allons analyser les écarts relatifs entre les modèles pour pouvoir approximer les chiffrages fournis par Heston grâce à un modèle de Black and Scholes.

On remarque que la courbe associée au modèle de Black and Scholes avec une volatilité de 25% correspond assez bien au modèle d'Heston pour cette maturité. Cependant, ce raisonnement a deux limites :

- Cette volatilité de Black and Scholes fixée correspond bien à ce produit en particulier mais si un des éléments caractéristiques de l'autocall venait à changer, comme la hauteur des barrières autocall ou protection du capital, cette volatilité ne serait surement pas la bonne.

C'est ce qu'illustre le schéma précédent : si la maturité du produit venait à changer, alors la volatilité à utiliser dans le modèle de Black and Scholes ne serait pas la même.

Pour des maturités longues, ce sera effectivement 25%. Mais pour des maturités plus courtes, à 2 ans par exemple, retenir une volatilité de 30% semble plus approprié. Pour des maturités encore plus courtes, d'un an, c'est 35% qui semble le mieux approximer les résultats d'Heston.

- Pour obtenir cette volatilité, il faut commencer par calibrer le modèle d'Heston, qui est couteux en temps. En effet, il est nécessaire d'avoir les résultats d'Heston : on ne peut pas paramétrer correctement Black and Scholes sans Heston.

On cherche cependant à analyser les différences entre les modèles selon la maturité du produit.

En effet, on remarque que la volatilité qu'il faut utiliser dans le modèle de Black and Scholes correspond environ à la volatilité sur la nappe de volatilité Heston de Bloomberg associée à la maturité du produit.

A court terme, c'est-à-dire pour des produits de maturité 1 an, la volatilité implicite trouvée sur la figure 4.36 peut être reportée dans le modèle de Black and Scholes et cela conduit à des résultats très cohérents.

Cette observation n'est pas surprenante : si les dates de fixing sont peu nombreuses alors le produit est beaucoup plus simple et peut s'apparenter à une option. Nous avons vu que le modèle de Black and Scholes est très satisfaisant sur ce genre de produit.

On peut donc conclure, que pour des autocalls ayant une maturité courte, il n'est pas nécessaire de calibrer le modèle d'Heston : celui de Black and Scholes suffit. Black and Scholes bien calibré devrait fournir une assez bonne estimation des résultats qui

seraient obtenus avec Heston.

En revanche, à moyen terme, c'est-à-dire lorsque les dates de fixing se font plus nombreuses, le produit devient plus sophistiqué. On s'aperçoit alors que les volatilités observées sur la nappe Bloomberg ne correspondent pas à celles qui font concorder les pertes d'Heston avec celles de Black and Scholes.

Par exemple, sur ce produit étudié, pour une date de maturité en 2025, il faudrait que la volatilité retenue dans le modèle de Black and Scholes soit d'environ 26%, ceci est observable sur le graphique 4.35. Or, sur le graphique 4.36, la volatilité est aux alentours de 20%. L'écart observé n'est à priori pas rationnalisable.

En conclusion, le modèle d'Heston est approprié pour ce genre de produit. Les résultats d'Heston ne peuvent pas être approximés par le modèle de Black and Scholes.

Enfin, à long terme, il semblerait que les volatilités soient cohérentes : il faut entrer une volatilité d'environ 26% pour que les pertes calculées par les deux modèles soient approximativement égales.

Pour rappel, le paramètre de variance à long terme calibré dans la partie sur le modèle d'Heston a été fixé à : $\theta^* = 26\%^2 = 0,07$. De même, la volatilité initiale observée sur le graphique 4.38 semble correspondre au V_{ini} calibré dans la partie précédente.

Cette volatilité correspond bien à celle observée à 7,5 ans sur le graphique 4.36. Ceci est surement dû au fait que la volatilité finale à peu près égale à 27% pour tous les *strikes* sur la nappe de volatilité Heston. C'est donc la volatilité à utiliser dans tous les cas de simulation. Cependant, cette volatilité ne dépend pas du temps et donc ne varie pas selon les dates de fixing. Ce résultat ne peut donc pas être généralisé à tous les produits. Ce n'est vrai que pour ce produit en particulier. On préfèrera donc le modèle d'Heston pour les produits à long terme.

4.7 Limites des modèles

4.7.1 Modèle de Black and Scholes

Le modèle de Black and Scholes est un des modèles les plus utilisés pour la tarification des options et il est très pertinent pour cela. En effet, on peut, à partir de ce modèle

trouver une formule fermée pour la valorisation d'option.

Cependant, il n'existe pas de formule fermée pour les produits structurés : Monte Carlo est alors utilisé pour remédier à cela. Il faut alors fixer une volatilité constante, ce qui ne fait pas sens pour des produits structurés comme les autocalls où des dates de fixing interviennent. En effet, la volatilité varie en fonction du *strike* et de la maturité. Autrement dit, le modèle de Black and Scholes n'est pas adapté à la valorisation de produit path dependant.

Enfin, ce modèle suppose plusieurs conditions qui ne sont pas forcément vérifiées dans le cas réel. Une des hypothèses centrales du modèle est que les variations de l'actif sous-jacent suivent une distribution normale, sous-estimant les krachs boursiers. Il suppose aussi l'absence d'opportunité d'arbitrage ou que les coûts de transaction ou frais de courtage sont nuls.

4.7.2 Modèle d'Heston

Le modèle d'Heston remédie au plus grand problème de Black and Scholes. Par sa volatilité stochastique, il est capable de gérer une volatilité par échéance et il s'adapte à plus de situations.

La calibration des différents paramètres du modèle est difficile à mettre en place. De plus, cela demande notamment d'avoir certaines données : connaître le prix des calls s'appuyant sur le cours du sous-jacent de l'entreprise correspondant à plusieurs *strikes* et à plusieurs échéances. Ces données ne sont pas accessibles directement sur internet. Elles sont accessibles grâce à des data provider mais qui demandent un certain investissement financier.

Cependant, la calibration des cinq paramètres du modèle d'Heston capte plus d'informations provenant du marché que dans le modèle de Black and Scholes où seulement la volatilité est calibrée à partir du marché. C'est un argument supplémentaire pour choisir le modèle d'Heston dans les simulations.

Conclusion

Le but de ce mémoire est la valorisation d'un autocall en particulier. Pour cela, le cours du sous-jacent peut être modélisé au moyen de plusieurs modèles comme Black and Scholes, Heston ou d'autres encore. Différentes simulations sont réalisées par la méthode de Monte Carlo afin de couvrir toutes les possibilités de variations des cours. Une moyenne sur les payoffs de toutes ces simulations nous donnent une estimation des gains ou des pertes encourues.

Le modèle de Black and Scholes est plus simple à mettre en place dans la mesure où il n'y a que deux paramètres à estimer contre cinq pour le modèle d'Heston. De plus, il n'y a qu'une équation pour calculer le cours. Dans le modèle d'Heston, il y en a deux puisqu'il faut, à chaque pas de temps, simuler et le cours du sous-jacent et la volatilité.

Le modèle de Black and Scholes est adapté pour des produits très simples. Il convient de l'utiliser pour la valorisation d'options ou d'autocall à très court terme. Dans ce cas, il faut vérifier que le marché anticipe une volatilité à peu près constante. Pour des autocalls à moyen terme, le modèle d'Heston est plus adapté et ne peut être approximé d'une manière généralisée par Black and Scholes.

Ce produit a été valorisé au 31/12/2020. La plupart des résultats trouvés sont spécifiques à ce produit.

S'il avait été valorisé avec le modèle d'Heston à date de début du produit (14/12/2018), le résultat aurait été différent notamment parce que le cours du sous-jacent initial serait différent.

On pourrait alors déduire l'espérance de gain pour l'acheteur et le vendeur et ainsi déterminer la marge de risque prise par le vendeur.

Les résultats étant extrêmement sensibles à la date de valorisation, les entreprises

qui investissent dans des produits comme les autocalls et qui ne les valorisent qu'une fois par an s'exposent à une grande variabilité des résultats d'une année à l'autre. Ces entreprises doivent être vigilantes quant à l'évolution des marchés financiers. En effet, les prédictions du marché changent quotidiennement. Le mieux serait que les entreprises valorisent le produit plus d'une fois par an et provisionnent leurs comptes en fonction de cette valorisation. Mais cela demande une aide extérieure, compétente dans ce domaine.

Bibliographie

[1] F. Afonso Joao. Allocation stratégique d'actifs sous solvabilité 2 dans le cadre de l'assurance vie, 2014.

[2] Adel Ben Haj Yedder. Modèle de heston, Juin 2007.

[3] J-F Bégin. New simulation schemes for the heston model, 2012.

[4] P. Carr. Merton's jump diffusion, 2005.

[5] Chen Chen, Ma Yi, and Ren Guangbo. A convolutional neural network with fletcher-reeves algorithm for hyperspectral image classification, Juin 2019.

[6] Christelle De Goriaïnoff. Etude sur l'intégration de produits structurés dans l'allocation d'actifs d'un institut de prévoyance, Septembre 2017.

[7] John Hull. *Options, futures et autres actifs dérivés.* Pearson Education France, 2008.

[8] Laurent Lefevere and Antoine Longevialle. Calibration des modèles.

[9] Manolis Lourakis. A brief description of the levenberg-marquardt algorithm implemened by levmar, Février 2005.

[10] Albuquerque Rui, Gaspar Raquel, and Michel Allen. Investment analysis of autocallable contingent income securities, 2015.

[11] Peter Tankov. Calibration de modèles et couverture de produits dérivés, 2006.

[12] Peter Tankov. Surface de volatilité, Février 2015.

Annexe 1 : Simulation dans R d'un mouvement brownien

1. Mouvement brownien

```
####Mouvement brownien####
T <- 1
n <- 1000
delta <- T/n
x <- numeric(n)
for (i in 1:n) x[i + 1] <- x[i] + delta * rnorm(1)
plot.ts(x, xlab = "", ylab = "", main = "Mouvement Brownien Standard", col = 2)
grid()
```

2. Mouvement brownien géométrique

```
####Mouvement brownien géométrique####
#On prend les memes parametres
T <- 1
n <- 1000
dt <- T/n
dW <- sqrt(dt) * rnorm(n)
param <- c(0.75, 0.1)
X <- numeric(n)
X[1] <- 1
for (i in 1:n) {
  X[i + 1] <- X[i] + param[1] * X[i] * dt + param[2] * X[i] * dW[i]
}
plot.ts(X, ylab = "", type = "l", main = "Mouvement Browninen Géométrique", col = 2)
grid()
```

Annexe 2 : Initialisation pour le calcul

```r
#### 1. Données ####

# Packages
install.packages("NMOF")
library("NMOF")
install.packages("rgl")
library("rgl")
install.packages("akima")
library("akima")
install.packages("plot3D")
library("plot3D")

date_calcul <- as.Date("2020-12-31")
Prix_sousjac <- 35.3

input_path <- "/Users/clairebec/Desktop/"
Prix_call_marche_mat <- read.csv(file = paste0(input_path,"mid_bloomberg.csv"), header = TRUE, sep = ";", stringsAsFactors = TRUE)
dim(Prix_call_marche_mat)
Prix_call_marche_y <- Prix_call_marche_mat[,6]
Strike <- Prix_call_marche_mat[,5]
r_q_vect <- Prix_call_marche_mat[,3]/100
tau <- Prix_call_marche_mat[,4]/365
r_vect <- Prix_call_marche_mat[,2]/100
q_vect <- Prix_call_marche_mat[,1]/100
```

Annexe 3 : Démonstration équation de Black and Scholes

Nous rappelons ci-dessous le lemme d'Itô qui nous sera utile dans la résolution des équations.

Rappel sur le lemme d'Itô :

Soit un processus stochastique d'Itô X_t de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s \, \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_s \, \mathrm{d}W_s$$

En passant à la dérivée, on obtient :

$$dX_t = \mu_t + \sigma_t dW_t$$

ce qui correspond bien à l'écriture du mouvement brownien.

Si $f(X_t, t)$ est une fonction de classe C^2 où

$$\begin{array}{rcccc} X_t & : & R * R_+ & \rightarrow & R \\ & & (x,t) & \mapsto & X_t \end{array}$$

Alors, la formule d'Itô s'écrit :

$$d(f(X_t,t)) = \frac{\delta f}{\delta t}(X_t,t)dt + \frac{\delta f}{\delta x}(X_t,t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(X_t,t)\sigma_t^2 dt$$

Or, nous rappelons que le mouvement brownien en t s'écrit selon la forme suivante (Pour les notations, se référer à la partie 1.1.2. Mouvement géométrique brownien) :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

On divise l'équation par le sous-jacent (supposé non-nul par définition) pour obtenir :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

On résout cette équation en utilisant le lemme d'Itô. Pour cela, on pose : $Y_t = ln(S_t)$. Alors,

$$dY_t = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{(S_t\sigma)^2}{2S_t^2}dt$$

On remplace par la valeur de dS_t. D'où :

$$dY_t = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dW_t$$

On intègre cette équation. Comme par convention, $W_0 = 0$, on obtient :

$$Y_t - Y_0 = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t$$

En passant à l'exponentielle, on parvient à l'équation de Black and Scholes, à savoir :

$$\boxed{S_t = S_0 * exp[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t]}$$

C'est avec cette formule que les projections seront faites. Pour simplifier les calculs, nous discrétisons la formule trouvée précédemment. Il faudra par la suite fixer un pas de discrétisation, noté Δt. Nous utiliserons donc la formule sous cette forme :

$$S_{t+\Delta t} = S_t * exp[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma(W_{t+\Delta t} - W_t)]$$

Or, on sait que les accroissements sont indépendants et qu'ils suivent des lois normales centrées, de variance l'accroissement, ce qui s'écrit :

$$W_{t+\Delta t} - W_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient comme équation finale :

$$S_{t+\Delta t} = S_t * exp[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\mathcal{N}(0,1)]$$

Annexe 4 : Démonstration de la formule d'évaluation de Black and Scholes

Nous cherchons ici à démontrer la formule d'évaluation de Black and Scholes permettant de calculer la valeur d'une option européenne sur une action sans dividendes à la date t :

$$P = S_t * pnorm(d_1) - Kexp(-r * \Delta t) * pnorm(d_2)$$

en notant

$$\begin{cases} d_1 & = & \frac{log(\frac{S_t}{K})+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t}{\sigma*\sqrt{\Delta t}} \\ d_2 & = & d_1 - \sigma * \sqrt{\Delta t} \end{cases}$$

Dans un premier temps, nous cherchons à montrer le résultat suivant :
On suppose que S suit une loi log-normale. Alors,

$$E[max(S-K;0)] = E(S)N(d_1) - KN(d_2)$$

en notant

$$\begin{cases} d_1 & = & \frac{ln(\frac{E(S)}{K})+\frac{s^2}{2}}{s} \\ d_2 & = & \frac{ln(\frac{E(S)}{K})-\frac{s^2}{2}}{s} \end{cases}$$

où E désigne l'espérance et s l'écart-type de $ln(S)$.
On note g(S) la fonction de densité de probabilité de S. Alors,

$$E[max(S-K;0)] = \int_K^\infty (S-K)g(S)\mathrm{d}S$$

D'après les propriétés de la loi log-normale, l'espérance est :

$$E(S) = exp(m + \frac{s^2}{2})$$

Donc, sa moyenne notée m est égale à :

$$m = ln[E(S)] - \frac{s^2}{2}$$

On note Q le changement de variable :

$$Q = \frac{ln(S) - m}{s} \Leftrightarrow S = exp(Qs + m)$$

Q est une gaussienne centrée réduite. Donc, sa fonction de densité s'écrit :

$$h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(\frac{-Q^2}{2})$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient :

$$E[max(S - K; 0)] = \int_{\frac{ln(K)-m}{s}}^{\infty} (exp(Qs + m) - K)h(Q)\mathrm{d}Q$$

Or,

$$\begin{aligned} exp(Qs + m)h(Q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(\frac{-Q^2 + 2Qs + 2m}{2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(\frac{-(Q - s)^2 + s^2 + 2m}{2}) \\ &= exp(\frac{s^2}{2} + m)h(Q - s) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E[max(S - K; 0)] = exp(\frac{s^2}{2} + m) \int_{\frac{ln(K)-m}{s}}^{\infty} h(Q - s)\mathrm{d}Q - K \int_{\frac{ln(K)-m}{s}}^{\infty} h(Q)\mathrm{d}Q$$

En notant $pnorm(x)$ la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{ln(K)-m}{s}}^{\infty} h(Q - s)\mathrm{d}Q &= 1 - pnorm[\frac{ln(K) - m}{s} - s] \\ &= pnorm[\frac{-ln(K) + m}{s} + s] \end{aligned}$$

par parité de la loi normale centrée-réduite.

En faisant de même avec la deuxième intégrale et en substituant m par son expression, nous obtenons :

$$\begin{aligned} E[max(S-K;0)] &= exp(\frac{s^2}{2}+m)pnorm[\frac{ln(\frac{E(S)}{K})+\frac{s^2}{2}}{s}] - Kpnorm[\frac{ln(\frac{E(S)}{K})-\frac{s^2}{2}}{s}] \\ &= [E(S)]pnorm[d_1] - Kpnorm[d_2] \end{aligned}$$

Or, le prix d'un call d'échéance T est donné par :

$$P = exp(-rT) * E[max(S_T - K;0)]$$

où E est l'espérance mathématique sous la probabilité risque neutre.

Selon l'hypothèse du modèle, S_T suit une log-normale. Donc, $E(S_T) = S_0 exp(rT)$ et l'écart-type de $ln(S_T)$ est $\sigma\sqrt{T}$.

D'après le résultat démontré précédemment,

$$P = S_t * pnorm(d_1) - Kexp(-r*T) * pnorm(d_2)$$

en notant

$$\begin{cases} d_1 &= \frac{log(\frac{S_t}{K})+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma*\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma*\sqrt{T} \end{cases}$$

Annexe 5 : Volatilité implicite dans le modèle de Black and Scholes et formule fermée

```r
#### 2. Calcul la volatilite implicite du modele BS grâce à l'algorithme de Newton ####
N <- 100
x <- rep(0,N+1)
y <- rep(1,N+1)
z <- rep(0,N)
for (i in 1:N){
  z[i+1] <- (x[i]+y[i])/2
  if (Prix_call_marche > BS_vol(z[i+1]/(1-z[i+1]))){
    x[i+1] <- z[i+1]
    y[i+1] <- y[i]}
  else {
    x[i+1] <- x[i]
    y[i+1] <- z[i+1]
  }
}


z <- (x[N]+y[N])/2
vol_implicite <- z/(1-z)

vol_implicite


#### 3. Calcul valeur option modele BS ####
Prix_BS <- function(time, Prix_sousjac, Strike, r, vol_implicite){
  d1 <- (log(Prix_sousjac/Strike) + (r+0.5*vol_implicite^2)*time)/(vol_implicite*sqrt(time))
  d2 <- d1 - vol_implicite*sqrt(time)
  return(Prix_sousjac*pnorm(d1)-Strike*exp(-r*time)*pnorm(d2))
}

```

Annexe 6 : Calcul avec le modèle de Black and Scholes : Monte Carlo

```r
cours_moy <- NULL
result_bs <- NULL

Autocall_BlackScholes <- function(date_de_fixing, tx_ss_risque, dividendes, vect_vol, time_diff){
  moy_cours_BS <- rep(0, length(date_de_fixing))
  moy_gen_al <- rep(0, length(date_de_fixing))
  total_bs <- 0
  cours <-0
  cours_par_date_fixing <- rep(0,length(date_de_fixing))
  simulation_PG_BS <- rep(0,length(date_de_fixing))
  cours_moy <- NULL
  result_bs <- NULL
  for (k in 1:N){
    cours_BS <- rep(0, length(date_de_fixing))
    vol_BS <- rep(0, length(date_de_fixing))
    produit_autocalle <- rep(0, length(date_de_fixing))
    coupons_a_verser <- rep(0, length(date_de_fixing))
    nb_coupons_a_payer <- rep(0, length(date_de_fixing))
    simulation_PG <- rep(0, length(date_de_fixing))
    cours_BS[1] <- 35.30
    cours_par_date_fixing[1] <- 35.30
    vol_BS[1] <- 0.35
    for (i in 2:length(date_de_fixing)){
      cours_BS[i] <- cours_BS[i-1]*exp((tx_ss_risque[i]-dividendes[i]-(vol_BS[i-1]**2)/2)*(time_diff[i-1]/365.25)+vol_BS[i-1]*
                                       sqrt(time_diff[i-1]/365.25)*qnorm(Haltonbase(graine[i-1], k)))
      #vol_BS[i] <- volatilite_nappe_BS(Temps_restant_autocall[i],cours_BS[i]) #balade nappe
      vol_BS[i] <- 0.35 #vol constante
      moy_cours_BS[i] <- moy_cours_BS[i]+cours_BS[i]
      moy_gen_al[i] <- moy_gen_al[i] + qnorm(Haltonbase(graine[i-1], k))
      if (cours_BS[i] < Barriere_autocall | sum(produit_autocalle) != 0) {
        produit_autocalle[i] <- 0}
      else {
        produit_autocalle[i] <- 1}
```

```
      if (cours_BS[i] < Barriere_coupon | sum(produit_autocalle[1:i-1]) != 0) {
        coupons_a_verser[i] <- 0}
      else {
        coupons_a_verser[i] <- 1}
      if (coupons_a_verser[i] == 1) {
        nb_coupons_a_payer[i] <- i-1-sum(nb_coupons_a_payer[1:i-1])
      }
      else {
        nb_coupons_a_payer[i] <- 0}
      if (i == length(date_de_fixing)) {
        if (sum(produit_autocalle[1:i-1]) != 0){
          simulation_PG[i] <- 0
        }
        else if (produit_autocalle[i] == 1){
          simulation_PG[i] <- nb_coupons_a_payer[i] * Montant_ini * Taux_par_fixing}
        else if (cours_BS[i] > Barriere_prot_capital & cours_BS[i] > Barriere_coupon){
          simulation_PG[i] <- nb_coupons_a_payer[i] * Montant_ini * Taux_par_fixing }
        else if (cours_BS[i] > Barriere_prot_capital & cours_BS[i] < Barriere_coupon){
          simulation_PG[i] <- 0
        }
        else {
          simulation_PG[i] <- (cours_BS[i]/VCI -1)*Montant_ini
        }
      }
      else {
        simulation_PG[i] <- nb_coupons_a_payer[i] * Montant_ini * Taux_par_fixing}
      simulation_PG_BS[i] <- simulation_PG_BS[i] + simulation_PG[i]
      cours_par_date_fixing[i] <- cours_par_date_fixing[i] +cours_BS[i]
    }
    cours <- cours + sum(cours_BS)
    cours_moy[k] <- cours/k
    total_bs <- total_bs +sum(simulation_PG)
    result_bs[k] <- total_bs/k
  }
```

Annexe 7 : Calcul d'un call avec le modèle d'Heston : Monte Carlo

```r
# fonction
Call_Heston_MonteCarlo <- function(Prix_sousjac, Strike, tau,r_vect, q_vect){
  total <- 0
  cours <-0
  cours_moy <- NULL
  valeur_call <- NULL
  result_heston <- rep(0,N)
  total_call_heston <- 0
for (k in 1:N){
  cours_Heston <- rep(0, 3)
  volatilite_Heston <- v_Heston <-  rep(0, 3)
  valeur_call <- 0
  #volatilite_Heston <- rep(V_ini, length(date_de_fixing))
  cours_Heston[1] <- 35.3
  volatilite_Heston[1] <- v_Heston[1] <- V_ini
  alea <- 0
  Z_V_1 <- rnorm(1)
  v_Heston[2] <- (v_Heston[1] + kappa_star*theta_star*14/365.25+sigma*sqrt(v_Heston[1])*sqrt(14/365.25)*Z_V_1+1/4*sigma^2*14/365.25*
                  (Z_V_1^2-1))/(1+kappa_star*14/365.25)
  cours_Heston[2] <- exp(log(cours_Heston[1]) + (-0.526/100 - 88.707/100-pmax(v_Heston[1],0)/2)*14/365.25+
                         sqrt(pmax(v_Heston[1],0))*sqrt(14/365.25)*(Rho*Z_V_1 + sqrt(1-Rho^2)*rnorm(1)))
  Z_V_2 <- rnorm(1)
  v_Heston[3] <- (v_Heston[2] + kappa_star*theta_star*tau+sigma*sqrt(v_Heston[2])*sqrt(tau)*Z_V_2+1/4*sigma^2*tau*
                  (Z_V_2^2-1))/(1+kappa_star*tau)
  cours_Heston[3] <- exp(log(cours_Heston[2]) + (r_vect - q_vect-pmax(v_Heston[2],0)/2)*tau+sqrt(pmax(v_Heston[2],0))*
                         sqrt(tau)*(Rho*Z_V_2 + sqrt(1-Rho^2)*rnorm(1)))
  valeur_call <- max(cours_Heston[3]-Strike,0)
  total_call_heston <- total_call_heston +valeur_call
  result_heston[k] <- total_call_heston/k
}
result_heston[N]}
```

Annexe 8 : Calcul d'un call grâce à la formule d'Heston

Pour résoudre les équations différentielles du modèle d'Heston, on construit un portefeuille sans risque Π constitué d'une option V_1, d'α unités de sous-jacent S_t et de β options V_2. En effet, les actifs permettent de contrôler le risque lié aux variations du sous-jacent et les options V_2 couvrent le risque dû aux variations de la volatilité. Ainsi, on note :

$$\Pi_t = V_1(S, v, t) - \alpha S_t - \beta V_2(S, v, t)$$

A bien noter : si on était dans le cadre du modèle de Black and Scholes, le dernier terme ne figurerait pas puisque la volatilité est supposée constante.

On suppose de plus le portefeuille autofinancé. Ceci signifie, que en notant δ_n la quantité d'actifs non risqués B_n et γ_n la quantité d'actifs risqués notés S_n, on a la relation pour tout $n \in N$:

$$\delta_n B_n + \gamma_n S_n = \delta_{n+1} B_n + \gamma_{n+1} S_n$$

Donc, comme le portefeuille est autofinancé :

$$d\Pi_t = dV_1(S, v, t) - \alpha dS_t - \beta dV_2(S, v, t)$$

On cherche à exprimer α et β en fonction des dérivés partielles de $V_1(S, v, t)$ et de $V_2(S, v, t)$.

On applique alors le lemme d'Itô aux options V_1 et V_2, on trouve, pour $i \in \{1, 2\}$:

$$dV_i = \frac{\partial V_i}{\partial t} dt + \frac{\partial V_i}{\partial v} dV + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 V_i}{\partial v^2}\sigma^2 v + \frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2} v S^2 + 2\frac{\partial^2 V_i}{\partial S \partial v} v \sigma S \rho) dt$$

Donc, en remplaçant dans l'expression de $d\Pi$ et en regroupant les termes, on obtient :

$$d\Pi_t = (\tfrac{\partial V_1}{\partial t} - \beta\tfrac{\partial V_2}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}\sigma^2 v + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 V_1}{\partial S^2}vS^2 + \tfrac{\partial^2 V_1}{\partial S\partial v}v\sigma S\rho - \tfrac{\beta}{2}\tfrac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}\sigma^2 v - \tfrac{\beta}{2}\tfrac{\partial^2 V_1}{\partial S^2}vS^2 - \beta\tfrac{\partial^2 V_1}{\partial S\partial v}v\sigma S\rho)dt$$
$$+ (\frac{\partial V_1}{\partial S} - \alpha - \beta\frac{\partial V_2}{\partial S})dS + (\frac{\partial V_1}{\partial v} - \beta\frac{\partial V_2}{\partial v})dV \quad (4.1)$$

Le portefeuille est supposé sans risque, c'est-à-dire que les termes en dS et dV doivent s'annuler, soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial S} - \alpha - \beta\frac{\partial V_2}{\partial S} & = & 0 \\ \frac{\partial V_1}{\partial v} - \beta\frac{\partial V_2}{\partial v} & = & 0 \end{cases}$$

En résolvant le système, on trouve :

$$\begin{cases} \alpha & = & \frac{\partial V_1}{\partial S} + \frac{\frac{\partial V_1}{\partial v}}{\frac{\partial V_2}{\partial v}} * \frac{\partial V_2}{\partial S} \\ \beta & = & \frac{\frac{\partial V_1}{\partial v}}{\frac{\partial V_2}{\partial v}} \end{cases}$$

De plus, l'hypothèse d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage entraîne que pour tout instant t le rendement du portefeuille Π qui est sans risque doit être égal au rendement de ce portefeuille placé de manière monétaire (sous le taux sans risque). Ce qui équivaut donc à :

$$d\Pi = r\Pi dt = r(V_1 - \alpha S_t - \beta r V_2)dt$$

En simplifiant par dt et en remplaçant α et β par les valeurs trouvées précédemment, on trouve :

D'un coté :

$$rV_1 - \alpha rS - \beta rV_2 = \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial v^2}\sigma^2 v + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2}vS^2 + \frac{\partial^2 V_1}{\partial v\partial S}vS\rho\sigma$$
$$- \frac{\frac{\partial V_1}{\partial v}}{\frac{\partial V_2}{\partial v}}[\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_2}{\partial v^2}\sigma^2 v + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2}vS^2 + \frac{\partial^2 V_2}{\partial v\partial S}vS\rho\sigma] \quad (4.2)$$

D'un autre côté, en remplaçant α et β par leur expression, on obtient :

$$rV_1 - \alpha rS - \beta rV_2 = rV_1 - [\frac{\partial V_1}{\partial S} + \frac{\frac{\partial V_1}{\partial v}}{\frac{\partial V_2}{\partial v}} * \frac{\partial V_2}{\partial S}]rS - \frac{\frac{\partial V_1}{\partial v}}{\frac{\partial V_2}{\partial v}}rV_2$$

Après simplification et regroupement des termes, on obtient :

$$\frac{1}{\frac{\partial V_1}{\partial v}}[\frac{V_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial v^2}\sigma^2 v+\frac{1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial S^2}vS^2+\frac{\partial^2 V_1}{\partial S\partial v}v\sigma\rho S-rV_1+rS\frac{\partial V_1}{\partial S}]$$
$$=\frac{1}{\frac{\partial V_2}{\partial v}}[\frac{V_2}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial V_2}{\partial v^2}\sigma^2 v+\frac{1}{2}\frac{\partial V_2}{\delta S^2}vS^2+\frac{\partial^2 V_2}{\partial S\partial v}v\sigma\rho S-rV_2+rS\frac{\partial V_2}{\partial S}] \quad (4.3)$$

On remarque que le membre de droite et de gauche sont deux expressions identiques, respectivement dépendantes de V_1 et V_2. D'après Heston, cette fonction se note $f(S,v,t)=-\kappa(\theta-v)+\lambda v$.

On obtient donc une équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{V_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial v^2}\sigma^2 v+\frac{1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial S^2}vS^2+\frac{\partial^2 V_1}{\partial S\partial v}v\sigma\rho S-rV_1+rS\frac{\partial V_1}{\partial S}+\frac{\partial V_1}{\partial v}*(\kappa(\theta-v)+\lambda v)=0$$

Or, l'expression d'un call à la date t est la suivante :

$$C_t=S_t*P_1-K*e^{-r\tau}P_2$$

où $\tau=T-t$.

En notant x = log(S), on calcule toutes les dérivées partielles de C :

$$\frac{\partial C}{\partial t}=e^x\frac{\partial P_1}{\partial t}-rKe^{-r\tau}P_2-Ke^{-r\tau}\frac{\partial P_2}{\partial t}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}=e^x\frac{\partial P_1}{\partial v}-Ke^{-r\tau}\frac{\partial P_2}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial v^2}=e^x\frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2}-Ke^{-r\tau}\frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}=e^x*P_1+e^x\frac{\partial P_1}{\partial x}-Ke^{-r\tau}\frac{\partial P_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}=e^x*P_1+2e^x\frac{\partial P_1}{\partial x}+e^x\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}-Ke^{-r\tau}\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial v\partial x}=e^x\frac{\partial P_1}{\partial v}+e^x\frac{\partial^2 P_1}{\partial v\partial}-Ke^{-r\tau}\frac{\partial^2 P_2}{\partial x\partial v}$$

On trouvera les détails des calculs en [8] et [2]

$$P_1 = Re(e^{-i} * log(K\phi) * \frac{Heston(\phi - i, S, \tau, r, v_0, v_T, \rho, \kappa, \sigma, \lambda)}{i * \phi * K * exp(r\tau)})$$

$$P_2 = Re(e^{-i} * log(K\phi) * \frac{Heston(\phi, S, \tau, r, v_0, v_T, \rho, \kappa, \sigma, \lambda)}{i * \phi})$$

$$Heston = exp(cf_1 + cf_2 + cf_3)$$

où,

$$\begin{cases} cf_1 & = & i\phi(log(K) + r\tau) \\ cf_2 & = & v_T * \frac{\kappa}{\sigma^2}((\kappa + \lambda - \rho * \sigma * i * \ \phi - d)\tau - 2log(\frac{1-g*exp(-d*tau)}{1-g})) \\ cf_3 & = & \frac{v_0}{\sigma^2} * (\kappa + \lambda - \rho * \sigma * i * \phi - d) * \frac{1-exp(-d\tau)}{1-g*exp(-d\tau)} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} d & = & i\phi(log(K) + r\tau) \\ g & = & v_T * \frac{\kappa}{\sigma^2}((\kappa + \lambda - \rho * \sigma * i * \ \phi - d)\tau - 2log(\frac{1-g*exp(-d*tau)}{1-g})) \end{cases}$$

Or, l'expression d'un call à la date t est la suivante :

$$C_t = S_t * P_1 - K * e^{-r\tau} P_2$$

où $\tau = T - t$.

On peut écrire l'expression d'un call européen ainsi :

$$C = S * (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} * \int_0^\infty P_1 \, \mathrm{d}\phi) - K \exp(-r\tau)(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty P_2 \, \mathrm{d}\phi)$$

où P_1 et P_2 sont des fonctions précédemment définies qui dépendent de ϕ, S, K, τ, r, v_0, $v_T, \rho, \kappa, \sigma$ et λ.

Annexe 9 : Calcul avec le modèle d'Heston : par les formules

```r
callheston <- function (Prix_sousjac, Strike, tau, r, v0, vT, Rho, Kappa, Sigma, Lambda)
{
  if (Sigma < 0.01) {
    Sigma <- 0.01 }
  result <- rep(0,length(Strike))
  for (i in 1:length(Strike)){
    P1 <- function(om, Prix_sousjac, Strike, tau, r, v0, vT, Rho, Kappa, Sigma, Lambda) {
      p <- Re(exp(-(0+1i) * log(Strike[i]) * om) * cfHeston(om - (0+1i), Prix_sousjac, tau, r, v0, vT, Rho, Kappa, Sigma, Lambda)/((0+1i) * om *
                                                                                                                                Prix_sousjac * exp(r * tau)))
      p
    }
    P2 <- function(om, Prix_sousjac, Strike, tau, r, v0, vT, Rho, Kappa, Sigma, Lambda) {
      p <- Re(exp(-(0+1i) * log(Strike[i]) * om) * cfHeston(om, Prix_sousjac, tau, r, v0, vT, Rho, Kappa, Sigma, Lambda)/((0+1i) * om))
      p
    }
    cfHeston <- function(om, Prix_sousjac, tau, r, v0, vT, Rho, Kappa, Sigma, Lambda) {
      d <- sqrt((Rho * Sigma * (0+1i) * om - Kappa - Lambda)^2 + Sigma^2 * ((0+1i) * om + om^2))
      g <- (Kappa + Lambda - Rho * Sigma * (0+1i) * om - d)/(Kappa + Lambda - Rho * Sigma * (0+1i) * om + d)
      cf1 <- (0+1i) * om * (log(Prix_sousjac) + r * tau)
      cf2 <- vT * Kappa/(Sigma^2) * ((Kappa + Lambda - Rho * Sigma * (0+1i) * om - d) * tau - 2 * log((1 - g * exp(-d * tau))/(1 - g)))
      cf3 <- v0/Sigma^2 * (Kappa + Lambda - Rho * Sigma * (0+1i) * om - d) * (1 - exp(-d * tau))/(1 - g * exp(-d * tau))
      cf <- exp(cf1 + cf2 + cf3)
      cf
    }
    vP1 <- 0.5 + 1/pi * integrate(P1, lower = 0, upper = Inf, Prix_sousjac, Strike, tau, r, v0, vT, Rho, Kappa, Sigma, Lambda)$value
    vP2 <- 0.5 + 1/pi * integrate(P2, lower = 0, upper = Inf, Prix_sousjac, Strike, tau, r, v0, vT, Rho, Kappa, Sigma, Lambda)$value
    result[i] <- Prix_sousjac * vP1 - exp(-r * tau) * Strike[i] * vP2
  }
  result
}
```

Annexe 10 : Calibration : Descente de gradient - 1

```r
#### 5. Calcul gradient de Levenberg-Marquardt ####

##Prix_heston(Strike, Prix_sousjac, Vect_param, r)

Gradient_LM <- function(Vect_parametres,Vect_compl){
  dx <- 0.1
  Vect_val_sup <- rep(0,length(Vect_parametres))
  Vect_val_inf <- rep(0,length(Vect_parametres))
  gradient <- rep(0,length(Vect_parametres))
  copie_vect_parametres1 <- Vect_parametres
  copie_vect_parametres2 <- Vect_parametres
  for (j in 1:length(Vect_parametres)){
    copie_vect_parametres1[j] <- Vect_parametres[j]+dx*0.5
    copie_vect_parametres2[j] <- Vect_parametres[j]-dx*0.5
  }
  for (i in 1:length(Vect_parametres)){
  Vect_val_sup[i] <- Prix_heston(Vect_compl[1],Vect_compl[2],c(Vect_compl[3],copie_vect_parametres1[1],copie_vect_parametres1[2],
                                 copie_vect_parametres1[3],copie_vect_parametres1[4],copie_vect_parametres1[5]),Vect_compl[4])
  Vect_val_inf[i] <- Prix_heston(Vect_compl[1],Vect_compl[2],c(Vect_compl[3],copie_vect_parametres2[1],copie_vect_parametres2[2],
                                 copie_vect_parametres2[3],copie_vect_parametres2[4],copie_vect_parametres2[5]),Vect_compl[4])
  }
  for (i in 1:length(Vect_parametres)){
  gradient[i] <- (Vect_val_sup[i]-Vect_val_inf[i])/dx}
  return(gradient)
}

Gradient_LM(c(3,0.4, 0.1, 0.7, 0.1),c(317.5,323.57,28.28/100,0.01))
```

Annexe11 : Calibration : Descente de gradient - 2

```r
V0 <- c(V_ini, kappa_star, theta_star, Rho, sigma)
V <- V0
N <- 5000
alpha <- 0.0001

# itérations sur V #
for (n in 1:N){
  Y <- rep(0,71)
  for (i in 1:71){
    Y[i] <- callHestoncf(Prix_sousjac, Strike[i], tau[i],r_vect[i], q_vect[i],V_ini^2,theta_star^2,Rho, kappa_star,sigma)
  }
  V0 <- V0 - alpha * (Y-Prix_call_marche_y) %*% Gradient_derivee(V_ini, kappa_star, theta_star, Rho, sigma,Strike,
                                                                 Prix_sousjac,r_vect, q_vect,tau)
  V_ini <- V0[1]
  kappa_star <- V0[2]
  theta_star <- V0[3]
  Rho <- V0[4]
  sigma <- V0[5]
  V <- rbind(V,V0)
}

V[1,]
V[N,]

plot(x=c(0:N+1),V[,1], xlab= "itérations", ylab = "Volatilité initiale")
plot(x=c(0:N+1),V[,2], xlab= "itérations", ylab = "Kappa star")
plot(x=c(0:N+1),V[,3], xlab= "itérations", ylab = "Theta star")
plot(x=c(0:N+1),V[,4], xlab= "itérations", ylab = "Rho")
plot(x=c(0:N+1),V[,5], xlab= "itérations", ylab = "Sigma")
```

Annexe12 : Calcul de l'erreur

```
# calcul de l'erreur #
Erreur <- rep(NA,dim(V)[1])
K <- NULL
for (k in 1:dim(V)[1]){
  Y <- rep(0,71)
  for (i in 1:71){
    Y[i] <- callHestoncf(Prix_sousjac, Strike[i], tau[i],r_vect[i], q_vect[i],V[k,1]^2,V[k,3]^2,V[k,4], V[k,2],V[k,5])
  }
  Vect_err <- abs(Y-Prix_call_marche_y)**2
  K <- cbind(K,Vect_err)
  Erreur[k] <- sum(Vect_err)
}
Erreur[N]
```