

**Mémoire présenté devant le CNAM pour l'obtention du
Master Droit Economie Gestion, mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

le 5 octobre 2022

Par : Ying HU ep. TAVARES RIBEIRO

Titre: Pilotage de l'équilibre du régime de retraite dans le contexte de taux bas et
de la réforme des retraites

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Président du Jury :

M. Olivier DESMETTRE

Entreprise : RSM

Nom :

Signature :

*Membres présents du jury de
l'Institut des Actuaires :*

Mme Edith BOCQUAIRE

M. Rhesus LEBAMBA

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Mme Brigitte ECARY

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :



*Membres présents du jury du
Cnam :*

M. Olivier DESMETTRE

M. David FAURE

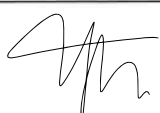
**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Secrétariat :

Bibliothèque :

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat



Pilotage de l'équilibre du régime de retraite
dans le contexte de taux bas et de la réforme des retraites

Ying Tavares Ribeiro

Résumé

Contrairement aux réformes passées des régimes de retraite qui consistaient en des ajustements paramétriques visant à maintenir l'équilibre financier, la réforme proposée en 2020 constitue une refonte complète des régimes de retraite ayant pour objet premier d'installer un régime universel en points.

Dans ce contexte, ce mémoire est dévolu à l'étude du pilotage du régime, en particulier dans les aspects de l'équilibre et de la couverture du régime, et à analyser les indicateurs de pilotage.

Il s'agit dans un premier temps de projeter les flux futurs selon les évolutions des paramètres techniques, et d'intégrer l'évolution démographique dans les projections.

En s'inspirant du calcul d'annuité en assurance-vie, nous proposons une nouvelle méthode pour l'évaluation du taux d'annuité. L'évolution du taux d'annuité est ainsi projetée afin d'établir la relation entre l'évolution des cotisations et des pensions.

Nous créons ensuite trois scénarios économiques via trois faisceaux de courbes de taux forward construits en se basant sur trois modèles différents.

Pour chaque faisceau de courbes de taux forward, et chaque flux futur, auquel est associé un taux d'actualisation, nous calculons les engagements en best estimates du régime de retraite et évaluons les indicateurs permettant de piloter le régime.

Les études de sensibilité par rapport aux paramètres démographiques, techniques et financiers sont aussi menées.

Mots-clés : quotient de vieillesse, valeur de service, valeur d'acquisition, taux d'annuité, taux forward, taux de couverture, taux de rendement.

Table des matières

Introduction.....	3
Chapitre 1 : Evolutions règlementaires historiques, contexte actuel et nouveau régime.....	6
1.1 Evolutions règlementaires historiques.....	6
1.2 Contexte actuel et nouveau régime	9
Chapitre 2 : Projections démographiques et projections des flux futurs du régime	12
2.1 Projections démographiques	12
2.1.1 Modélisation de lois	13
2.1.2 Projections démographiques	16
2.1.3 Hypothèses, données en input, analyses des résultats et conclusions.....	24
2.2 Projection des flux futurs	32
2.2.1 Paramètres techniques.....	32
2.2.2 Projections des flux futurs pour le groupe fermé	34
2.2.3 Projections des flux futurs pour le groupe ouvert	37
2.2.4 Hypothèses, données en input, analyses et conclusions	38
Chapitre 3 : Création de scénarios économiques.....	45
3.1 Théorie de base	45
3.1.1 Différents taux.....	45
3.1.2 Méthode d'interpolation.....	49
3.2 Construction de la courbe de taux	49
3.2.1 Modèle Nelson-Siegel-Svensson (NSS).....	50
3.2.2. Modèle Smith-Wilson (SW)	52
3.2.3 Analyse des résultats de calibrage des paramètres	54
3.2.4. Construction de courbes de taux forward inspirée par la méthode « Bootstrapping of multiple yield curves ».....	55
Chapitre 4 : Evaluation des engagements et pilotage du régime	60
4.1 Méthode du taux d'annuité	60
4.2 Evaluation des engagements pour le groupe fermé	61
4.2.1 Valeur actuelle probable (VAP) des engagements des cotisations et des engagements des droits acquis des actifs	61
4.2.2 Valeur actuelle probable (VAP) des engagements des rentes	62
4.3 Evaluation des engagements pour le groupe ouvert	62
4.3.1 Valeur actuelle probable (VAP) des engagements des cotisations et des engagements des droits acquis des nouveaux actifs.....	63
4.3.2 Valeur actuelle probable (VAP) des engagements des rentes	65
4.3.3 Analyses des résultats pour le groupe ouvert.....	65

4.4 Evaluation des indicateurs	71
4.4.1 Taux de rendement pour la répartition pure	71
4.4.2 Ratio d'équilibre financier	73
4.4.3 Taux de couverture actuariel.....	74
4.4.4 Taux de couverture annuelle avec dette.....	76
Chapitre 5 : Tests de sensibilité et analyses.....	81
5.1 Sensibilité à l'évolution démographique.....	81
5.1.1 Sensibilité à l'âge de départ à la retraite.....	81
5.1.2 Sensibilité au nombre des nouvelles entrées.....	83
5.2 Sensibilité à l'évolution des paramètres techniques.....	85
5.3 Sensibilité à l'évolution des paramètres financiers.....	87
5.3.1 Sensibilité à l'augmentation du taux	87
5.3.2 Sensibilité à la baisse de taux	88
Chapitre 6 : Conclusion.....	90
Annexes	92
Annexe I : Notations	92
Annexe II : Démonstrations des formules	94
Annexe III : Méthodes existantes pour les retraites	96
Annexe IV : Tableau de la probabilité de recrutement pour passer de l'âge x -1 à l'âge x	99
Annexe V : Tableau de la probabilité forward annuelle de réversion.....	100
Annexe VI : Tableau de la répartition des actifs et des retraités au début de la projection.....	101
Annexe VII : Tableau de l'évolution du plafond de la Sécurité sociale	103
Annexe VIII : Tableau des taux de cotisation historiques.....	104
Annexe IX : Tableau des valeurs de service du point et valeurs d'achat du point	105
Annexe X : Tableau de la répartition du salaire annuel moyen en équivalent temps plein par tranche d'âge.....	106
Annexe XI : Tableau de paramètres du Modèle Smith-Wilson	107
Annexe XII : Données pour la construction de la courbe de taux TEC (Source : La Banque de France)	108
Annexe XIII : Données pour la construction de la courbe des facteurs d'actualisation (discount factor)	109
Annexe XIV : Données pour la construction de la courbe de taux forward (partielles).....	110
Annexe XV : Données dans le cas où le taux zéro coupon est constant pour la maturité plus longue (partielles)	111
Bibliographie.....	112

Introduction

Le système de retraites français a été fondé en 1945, sur la base d'un système préexistant. Il repose sur le principe de la répartition et de la solidarité intergénérationnelle. En principe, les cotisations collectées auprès des actifs durant une année servent à payer les pensions versées aux retraités la même année.

Dès les années 50, et jusqu'à aujourd'hui, des réformes ont été mises en place pour ajuster ce système, notamment aux évolutions démographiques. La problématique de ces réformes se situe ainsi toujours autour de l'équilibre financier établi, ou recherché, entre les actifs et les retraités.

Depuis la crise financière de 2008, l'environnement financier et économique s'est détérioré. Les taux d'intérêts s'ancrent de manière durable à un bas niveau et des taux à terme relativement long ont même connu des valeurs négatives. L'évolution financière et économique récente accentue la nécessité d'une nouvelle réforme des retraites afin de maintenir l'équilibre du système de retraite.

De plus, l'hétérogénéité des différents systèmes de retraite rend la gestion de l'équilibre financier encore plus délicate. Le nouveau système de retraite entend ainsi unifier la gestion de cet équilibre.

Ce mémoire aborde les aspects techniques de l'équilibre financier. L'objectif de ce mémoire est de donner un ensemble de méthodologies pour simuler l'évolution du régime de retraite avec des paramètres prédéfinis et de proposer une nouvelle méthode pour l'évaluation du taux d'annuité afin d'évaluer les valeurs actuelles présentes des engagements en best estimates en intégrant l'impact financier via les courbes de taux construites.

Dans le premier chapitre, les évolutions réglementaires historiques, le contexte actuel et le nouveau régime sont présentés. Les lois et les réformes importantes passées sont décrites de manière approfondie.

Les méthodes historiques ou en vigueur pour calculer les pensions de retraites sont décrites en annexe. Les concepts de base, par exemple, le taux de liquidation, le taux d'annuité, le taux de cotisation etc., sont définis. La méthode de calcul pour le régime de base et pour le régime complémentaire en France est expliquée en détail. La relation entre le taux de remplacement, la durée de cotisation et le taux de cotisation montre que le taux de remplacement peut être une cible à atteindre en ajustant la durée de cotisation et/ou le taux de cotisation, ou encore la valeur de service et/ou la valeur d'acquisition.

L'ensemble de la méthodologie des projections démographiques et des projections des flux futurs est présenté dans le deuxième chapitre. Afin d'aborder les projections démographiques, les lois à modéliser et les hypothèses à déterminer sont :

- * Loi de mortalité ;
- * Loi de prise de retraite ;
- * Loi de recrutement ;
- * Loi de réversion.

Une méthodologie de modélisation des lois est ainsi proposée dans ce chapitre. Le début de projection est fixé en fin d'année. La structure démographique est simulée pour chaque année à venir pour le groupe fermé et le groupe ouvert. Rappelons que le groupe fermé est un groupe sans nouvelles entrées jusqu'à l'extinction du groupe. Le groupe fermé est composé de la population au début de la projection.

Cependant le groupe ouvert est un groupe intégrant les nouvelles entrées au fur et à mesure, c'est-à-dire que le groupe ouvert est un groupe fermé plus un groupe des nouvelles entrées.

Nous pouvons voir l'impact des nouvelles entrées sur l'évolution de la structure démographique.

La méthodologie de projection démographique pour le groupe fermé et le groupe ouvert sont décrites également.

Pour le groupe fermé, une méthodologie de la projection démographique pour la population d'ayants droit est aussi proposée.

Afin d'appliquer l'ensemble de la méthodologie de projections démographiques, il s'agit ensuite de déterminer les paramètres. Enfin, les résultats sont analysés.

Dans le cadre des projections des flux, sont étudiés les paramètres techniques ci-après :

- * Evolution des salaires
- * Evolution du taux de cotisation
- * Evolution de la valeur d'acquisition
- * Evolution de la valeur de service

La projection des flux futurs concerne la projection de droits, de rentes et de rentes de réversion comme ce qui est décrit dans le deuxième chapitre. Pour le groupe fermé, la projection de rentes se décompose en deux parties : une partie est la projection de rentes pour les retraités existant au début de la projection, une autre partie est la projection de rentes pour les retraités issus des actifs existant au début de la projection. La méthodologie pour la projection de rentes de réversion du groupe fermé est décrite sur trois ensembles de population : les ayants droit existant au début de la projection, les nouveaux ayants droit suite au décès de retraités, les nouveaux ayants droit suite au décès d'actifs. Pour le groupe ouvert, la méthodologie est décrite pour le groupe des nouvelles entrées.

Comment créer les scénarios économiques ? Précisément, comment construire les courbes de taux forward pour actualiser les flux futurs ? Le troisième chapitre est réservé à répondre à ces questions.

La courbe de taux forward à l'instant t est construite de la façon suivante :

$$C_x^F(t) = \{T \rightarrow F_x(t; T, T + x), T \geq t\}$$

où $F_x(t; T, T + x)$ est le taux forward observé à l'instant t pour l'opération de prêt commençant à T et se terminant à l'année $T + x$; x est le ténor des taux sous-jacents.

Rappelons que dans le cas continu, la relation entre le facteur d'actualisation et le taux zéro coupon pour la maturité T est :

$$DF(0, T) = e^{-R(0, T) * T}$$

où $DF(0, T)$ est le facteur d'actualisation ;

$R(0, T)$ est le taux zéro coupon.

Et la relation entre le facteur d'actualisation $DF(0, T)$ et le taux forward $F_x(t; T, T + x)$ s'exprime :

$$F_x(t; T, T + x) = \ln\left(\frac{DF(t, T)}{DF(t, T + x)}\right) * \frac{1}{x}$$

En principe, nous transformons une courbe de taux zéro coupon en une courbe de facteurs d'actualisation, ensuite une courbe de taux forward avec un tenor fixé préalablement.

Le détail de la méthode de construction se trouve dans le troisième chapitre. Trois modèles sont proposés pour la construction de courbes :

- * Modèle Nelson-Siegel-Svensson
- * Modèle Smith-Wilson
- * Modèle TEC n

Les courbes de taux forward sont impactées par le choix de modèles et les valeurs des paramètres sont calibrés par les données du marché.

Les trois faisceaux de courbes de taux forward représentatifs affichent des tendances différentes à long terme. Les trois scénarios économiques différents sont ainsi représentés par ces trois faisceaux de courbes. Cela signifie qu'il est intéressant d'observer l'impact de ces trois faisceaux sur les engagements de retraite. Ceci fait partie des travaux décrits au quatrième chapitre.

Dans le quatrième chapitre, les deux sujets discutés sont l'évaluation des engagements et le pilotage du régime. La nouvelle méthode pour le calcul du taux d'annuité est introduite. Le fait qu'une courbe de taux forward ou une courbe de taux zéro coupon est intégrée dans le calcul du taux d'annuité joue un rôle important dans la variation du montant de cotisations pour le calcul de la pension future en fonction de l'année projetée.

La valeur actuelle présente des engagements concerne la valeur actuelle présente des engagements des cotisations, des droits acquis et des rentes futures. Dans le cas classique du calcul de la valeur actuelle présente des engagements, l'effet d'actualisation est basé sur un seul taux ou taux forward. Ce travail propose d'utiliser les courbes de taux forward, ce qui permet d'actualiser chaque flux futur à son propre taux forward.

Les résultats sont ainsi comparés et analysés pour les trois scénarios économiques représentés par les trois faisceaux de courbes.

Les indicateurs pour le pilotage du régime et ses méthodes d'évaluation sont aussi proposés. L'évolution des indicateurs dans les trois scénarios économiques est observée et analysée.

La sensibilité à l'évolution démographique, à l'évolution des paramètres techniques et à l'évolution des paramètres financiers est le centre d'intérêt du cinquième chapitre. En conséquence, les résultats des tests de sensibilité sont analysés et comparés.

Le mémoire se termine par une conclusion globale portant des commentaires notamment sur les points forts et les points faibles des méthodologies proposées.

Remerciements

J'adresse mes remerciements à Madame Brigitte ECARY qui a accepté d'être le tuteur de mon mémoire. Les précieuses idées qu'elles m'a offertes ainsi que son expérience dans le domaine m'ont été très profitables et ont contribué à donner une plus grande portée à ce mémoire.

Chapitre 1 : Evolutions règlementaires historiques, contexte actuel et nouveau régime

Ce chapitre se compose de deux sections. Dans la première sont succinctement présentées les évolutions historiques du système de retraite (pour les définitions des termes : Cf. Annexe III). Dans la seconde sont décrits le contexte actuel et le nouveau régime.

1.1 Evolutions règlementaires historiques

Depuis la création de la sécurité sociale en 1945, le système de retraite évolue au fil du temps. Les premières modifications concernent l'organisation de la sécurité sociale. Une série de lois a été adoptée au fur et à mesure pour adapter le système de retraite à l'évolution de la situation démographique, financière et économique.

1. Loi Boulin (1971)

Il s'agit de la « Loi n° 71-1132 du 31 décembre 1971 portant amélioration des pensions de vieillesse du régime général de la sécurité sociale et du régime des travailleurs salariés agricoles »

Les principales améliorations sont apportées au régime général sur les points ci-dessous :

- Taux de liquidation

Le taux de liquidation à 60 ans passe de 20% à 25%, avec majoration de 5% au lieu de 4% par année après 60 ans, pour atteindre 50% à 65 ans.

- Durée d'assurance

La durée d'assurance requise pour la retraite à taux plein est passée de 30 à 37,5 ans (de 120 à 150 trimestres).

- Salaire de référence

La pension est calculée sur la base des dix meilleures années de salaire.

2. Loi Auroux (1982)

Selon la « Loi n° 82-689 du 4 août 1982 relative aux libertés des travailleurs dans l'entreprise » (Loi dite loi Auroux), il est possible de bénéficier de la retraite à taux plein de 50% du salaire annuel moyen à 60 ans au lieu de 65 ans pour les hommes et les femmes ayant 150 trimestres validés, soit 37,5 années, tous régimes confondus.

Elle a créé le système de décote pour chaque trimestre de cotisation manquant pour avoir 150 trimestres ou pour atteindre 65 ans.

Le règle d'application de la décote pour les années manquantes :

- Minorer 2,5% par trimestre
- Plafonner la décote à 50% selon le plus favorable des deux seuils

3. Réforme Balladur (1993)

Les crises monétaires entre les années 1990 et 1993, le ralentissement de la croissance économique ont rendu nécessaire une réforme qui inverse la tendance d'amélioration des pensions.

Les trois mesures prises concernent :

- Durée de cotisation

La durée de cotisation pour la retraite à taux plein est passée de 37,5 ans à 40 ans.

- Salaire de référence

La pension est calculée sur la base des 25 meilleures années de salaire.

- Montant des pensions

Le montant de la pension évolue avec les prix et non plus avec le salaire moyen.

Le montant de la pension est ainsi indexé sur le taux de croissance des prix, c'est-à-dire l'inflation. Par conséquent le montant de la pension ne bénéficie plus de la croissance économique réelle.

Le Fonds de solidarité vieillesse (FSV) est créé pour financer les avantages vieillesse des personnes ayant une faible pension de retraite et n'est pas adossé à l'assiette de cotisations des actifs.

Cette réforme concerne le régime général des salariés du privé et certains régimes alignés d'indépendants.

4. Réforme Fillon (2003)

La réforme Fillon 2003 aligne en partie le secteur public sur le secteur privé tandis que celle de 2008 procède de même pour les régimes spéciaux.

La réforme est matérialisée par la « Loi n° 2003-775 du 21 août 2003 portant réforme des retraites ».

- Durée de cotisation

La durée de cotisation est prolongée à 40 ans pour le secteur public et les régimes spéciaux. La durée de cotisation s'allonge progressivement pour l'ensemble des actifs à 41 ans en 2012.

- Salaire de référence

Le salaire de référence pour le calcul de la pension reste les six derniers mois de revenus.

- Montant des pensions

Le montant de la pension reste indexé sur l'inflation.

- Surcote/décote

Une décote de 5% par année manquante est appliquée à la pension versée à l'horizon 2015 (plafonnée à 25%) et une surcote de 3% par année pour les années supplémentaires au-delà de la durée de cotisation requise pour le taux plein.

D'autres mesures voient le jour dans cette réforme :

Le droit au départ anticipé à la retraite avant 60 ans est ouvert pour ceux ayant une carrière longue.

Le plancher d'au moins 85% du SMIC pour la pension est mis en place.

Le rachat de durée d'assurance (en trimestres) pour les années d'études et les années incomplètes est désormais possible. Son mode de paiement est au choix des intéressés dans la limite de 3 ans et son prix est le coût actuariellement neutre.

Une information régulière comme le « relevé de situation individuelle » et l'« estimation individuelle globale » devient accessible obligatoirement.

La retraite additionnelle de la fonction publique (RAFP) est mise en place et le Plan d'épargne pour la retraite populaire (PERP) et le Plan d'épargne retraite collectif (PERCO) sont créés.

5. Réforme Woerth (2010)

L'âge minimum légal de départ à la retraite est passé progressivement en six ans (quatre mois par an) de 60 à 62 ans.

L'âge du taux plein (l'âge à partir duquel ne s'applique plus le mécanisme de décote) est passé progressivement de 65 à 67 ans.

L'augmentation de taux de cotisations de la retraite des fonctionnaires est étalée sur 10 ans, sans augmentation de salaire. L'âge de départ à la retraite de certaines catégories de fonctionnaires dites « catégories d'active » est repoussé de 2 ans.

Le dispositif pour carrière longue est maintenu, mais il faut avoir cotisé 43 ans et demi pour partir à la retraite à partir de 58 ans.

La durée de cotisation est prolongée de 41 à 41 annuités et demi à l'horizon 2020.

Le départ anticipé est prévu pour un certain pourcentage d'invalidité.

D'autres mesures de financement afin de rééquilibrer le système de retraite sont adoptées :

- Utilisation anticipée du Fonds de réserve pour les retraites ;
- Gel de l'effort financier de l'État pour le financement du régime de retraite des fonctionnaires ;
- Prélèvement additionnel de 1% sur la plus haute tranche d'impôt sur le revenu (celle-ci passant de 40% à 41%) ;
- Augmentation d'un point des prélèvements sur les plus-values mobilières (de 18% à 19%) et immobilières (de 16% à 17%) et du prélèvement forfaitaire libératoire sur les dividendes et les intérêts (de 18% à 19%) ;
- Augmentation des prélèvements sur les stock-options et sur les retraites-chapeaux ;
- Basculement d'une partie des cotisations sociales chômage sur les cotisations sociales retraite à partir de 2015 si le taux de chômage est significativement en baisse.

6. Réforme des retraites en France de 2013-2014

Cette réforme est matérialisée par la « LOI n° 2014-40 du 20 janvier 2014 garantissant l'avenir et la justice du système de retraites ».

Les taux de cotisations salariales et patronales sont augmentés.

La durée de cotisation pour une retraite à taux plein augmente d'un trimestre tous les 3 ans, jusqu'à 43 ans en 2035 (contre 41,5 ans avant la réforme).

L'âge du taux plein reste fixé à 67 ans.

La mise en place d'un "compte personnel de prévention de la pénibilité" destiné à tout salarié du secteur privé exposé à un ou plusieurs facteurs de pénibilité et financé par les entreprises est prévue pour l'année 2015.

D'autres mesures complémentaires ont aussi été adoptées. Par exemple, l'augmentation du minimum contributif, le décalage de la date de revalorisation des pensions en fonction de l'inflation, l'imposition de la majoration de pension de 10% des retraités ayant plus de 3 enfants, etc.

7. Conclusion des réformes des retraites historiques

Les réformes passées sont des réformes paramétriques dont l'objectif était d'atteindre un équilibre financier par des ajustements de différents paramètres (durée de cotisation, âge de départ, etc.). Ces réformes ont été menées dans la même logique de rapprocher l'équilibre de compte de l'assurance retraite et d'abaisser le poids des retraites. Toutefois, aucun système de pilotage des régimes de retraite n'a réellement pu être mis en place qui ait permis d'anticiper les évolutions ou d'y répondre par des mesures adaptées.

La situation démographique et économique se dégrade plus vite que l'intervention des réformes. La confiance des assurés se dégrade ainsi également.

1.2 Contexte actuel et nouveau régime

La réforme proposée en 2020 entend résoudre cette problématique de l'équilibre du système en restructurant en profondeur le système des retraites. Elle a l'intention de fonder un régime « universel » de retraite en points afin de remplacer la quarantaine de systèmes existants et ainsi de simplifier ces systèmes hétérogènes et de ce fait peu flexibles. L'objectif de cette réforme est aussi de maintenir l'équilibre du système pour en assurer la pérennité financière et une bonne articulation avec les autres objectifs économiques.

Pourquoi y a-t-il un déséquilibre financier ?

Rappelons que le système de retraite est fondé sur le principe de la répartition :

- Pensions des retraités financées par les cotisations sociales des actifs ;
- Solidarité intergénérationnelle.

Au fil du temps, la structure démographique évolue. La durée de vie s'allonge, le taux de naissance baisse. Dans le même temps, la situation économique, financière se modifie. La rémunération des actifs augmente. Le taux de chômage a tendance à être de plus en plus élevé. L'environnement économique est également défavorable, la croissance ralentit globalement. Tous ces phénomènes engendrent un déséquilibre financier.

Certains leviers ont été utilisés pour tenter de ramener le système à l'équilibre. Par exemple, l'âge légal de départ à la retraite a été repoussé à 62 ans. La durée de cotisations a été progressivement prolongée jusqu'à 172 trimestres, soit 43 ans pour les générations nées après 1973. Le montant des cotisations est augmenté pour financer le système, les pensions réelles versées sont diminuées pour réduire les dépenses.

Voici un tableau détaillé de la répartition des financements :

Source de financement	Poids dans les ressources totales du système de retraite (chiffres 2016)
Cotisations sociales	77%
Impôts et taxes	12%
Transferts (CNAF, Assurance chômage etc.)	6%
Contributions de l'État	2%
Ressources de gestion (produits financiers des placements...), du recours à la dette ou aux réserves.	3%

Source : <https://www.vie-publique.fr/fiches/37946-comment-le-systeme-de-retraite-est-il-finance>

La réforme proposée en 2020 entend mettre en place un système qui pallie les différentes difficultés auxquelles a été confronté le système actuel. Ce nouveau régime adopte le principe de retraite en points, fixe le taux de rendement à 5,5%. Pour le moment, l'âge minimum légal de départ à la retraite reste à 62 ans. Le principe d'un âge d'équilibre, remplaçant l'âge pivot qui a été préconisé au début de la réforme, est prévu dans la réforme pour ce nouveau régime. Dans le secteur privé, le taux de cotisation plafonné, permettant d'acquérir les points, est de 25,31% sur le revenu plafonné à trois plafonds de la sécurité sociale (PSS) ; le taux de cotisation déplafonné sans générer les points est de 2,81% sur le revenu brut total. La répartition des taux de cotisation entre l'employeur et le salarié est :

	Employeur	Salarié	Total
Taux de cotisation plafonné	15,19%	10,12%	25,31%
Taux de cotisation déplafonné	1,69%	1,12%	2,81%
Total	16,87%	11,25%	28,12%

L'employeur a la charge de 60% des cotisations, le salarié 40% des cotisations.

Pour la part de l'employeur, le taux de cotisation déplafonné diminue de 1,90% à 1,69% (Cf. Annexe VIII) par rapport au régime actuel. Le taux de cotisation actuel de 12,95% entre un PSS et huit PSS pour la retraite complémentaire actuelle a un effet plus pénalisant que le taux de cotisation de 15,19% plafonné à trois PSS.

En revanche, pour la part du salarié, le taux de cotisation plafonné augmente de 6,90% à 10,12% (Cf. Annexe VIII) en plus du changement de l'assiette (d'un PSS à trois PSS). Le taux de cotisation déplafonné augmente de 0,4% à 1,12% pour le revenu brut total.

Ce nouveau régime devrait aussi garantir le montant minimum des pensions de retraite (minimum contributif). Des mesures détaillées concernant la lutte contre la perte d'emploi des seniors et le cumul emploi-retraite sont également prévues en accompagnement du nouveau régime.

D'un point de vue actuariel, la problématique de cette réforme peut se formuler ainsi :

Quel est le destin de la réforme des retraites dans le contexte économique de taux bas voire de taux négatifs ? Comment piloter l'équilibre du régime ? Comment anticiper l'évolution du régime ?

Dans ce contexte, ce mémoire entend permettre de simuler les évolutions du régime en fonction de différents scénarios économiques et d'analyser la sensibilité des indicateurs de pilotage aux évolutions des paramètres démographiques, techniques et financiers.

Chapitre 2 : Projections démographiques et projections des flux futurs du régime

Un régime en répartition ou en capitalisation a toujours deux composantes principales : ressources et dépenses. La différence fondamentale entre un régime en répartition et un régime en capitalisation est la gestion. Ici, nous ne nous concentrons pas sur la distinction entre ces deux types de régimes. Nous étudions le régime de retraite d'un point de vue actuariel.

Ce chapitre se compose de deux parties. La première partie est réservée à décrire la méthode des projections démographiques, la réalisation des projections où est prise en compte l'hypothèse pour les taux de prise de retraite entre les âges de 62 ans et 70 ans, et est défini et intégré le concept de la probabilité de recrutement négative.

La méthode des projections des flux futurs est décrite dans la deuxième partie. Un indice de cotisation est créé pour l'évolution des salaires et du taux de cotisation. Dans la réalisation des projections, le taux annuel pour l'évolution de l'indice de cotisation est dérivé de l'évolution des salaires et de celle du taux de cotisation.

La méthode pour déterminer les hypothèses et les données est décrite dans le cadre de la réalisation des projections démographiques et des projections des flux futurs. Les résultats des projections sont ensuite analysés.

Les projections sont réalisées dans le périmètre du groupe fermé et étendues au périmètre du groupe ouvert où la notion de probabilité de recrutement négative est intégrée afin d'être cohérent avec la réalité des données du périmètre de la France.

2.1 Projections démographiques

Nous commençons par projeter l'évolution démographique en se basant sur la structure démographique constatée à la date d'évaluation.

Pour chiffrer les effectifs, chaque génération est simulée séparément, avec la série d'hypothèses suivantes :

1. Une loi de mortalité ;
2. Une loi de prise de retraite ;
3. Une loi de recrutement ;
4. Une loi de réversion.

L'hypothèse 1 est utilisée pour calculer la probabilité de décès selon l'âge, le sexe et l'année de naissance. C'est-à-dire que nous utilisons les tables de mortalité générationnelles en distinguant le sexe.

La loi de prise de retraite dans l'hypothèse 2 a pour objet l'estimation de la répartition des âges de départ à la retraite.

L'hypothèse 3 décrit une probabilité forward de recrutement en fonction des âges. Elle peut être établie via une méthode statistique en se basant sur les données historiques.

Ces quatre hypothèses sont considérées comme les clauses les plus impactantes sur l'évolution démographique du régime.

Nous pouvons avoir une structure démographique à chaque année de projection. La structure démographique détermine le nombre des actifs et des retraités.

Nous adoptons les notations suivantes pour les projections démographiques :

N : l'année de début de la projection ;

$N + k$: l'année en cours de la projection avec $k \geq 0$;

x : l'âge de l'actif au début de la projection ;

$A(k)$: le nombre des actifs à l'année $N + k$;

$R(k)$: le nombre des retraités à l'année $N + k$;

Ω_A : l'ensemble des âges des actifs ;

$a(x, k)$: le nombre des actifs à l'année $N + k$ pour les actifs d'âge x au début de la projection ;

$a_{new,k}(x)$: le nombre des nouveaux actifs à l'année $N + k$ pour l'âge x ;

$P_{vie}(x, k)$: la probabilité d'être en vie dans k années pour les actifs d'âge x au début de la projection ;

$P_{ret}(x, k)$: la probabilité de prise de retraite dans k années pour les actifs d'âge x au début de la projection ;

$P_{recrut}(x, k)$: la probabilité forward de recrutement à l'année $N + k$ pour l'âge x ;

$R(k)$: le nombre des retraités à l'année $N + k$;

$r(x, k)$: le nombre des retraités à l'année $N + k$ pour les retraités d'âge x au début de la projection ;

$r_{new,k}(x)$: le nombre des nouveaux retraités à l'année $N + k$ pour l'âge x ;

Ω_R : l'ensemble des âges des retraités.

2.1.1 Modélisation de lois

2.1.1.1 Modélisation de loi de mortalité

En utilisant la notation actuarielle internationale,

$$P_{vie}(x, k) = {}_k p_x = {}_1 p_x * {}_1 p_{x+1} * \dots * {}_1 p_{x+k-1} = P_{vie}(x, k-1) * {}_1 p_{x+k-1}$$

où ${}_1 p_{x+i}$ est la probabilité annuelle de survie pour atteindre l'âge $x + i + 1$ sachant que l'actif est en vie à l'âge $x + i$.

La probabilité de survie à l'année $N + k$ sachant que l'actif est en vie à l'année $N + i$ avec $i < k$, estimée à l'année N pour l'âge x à l'année N est notée par $P_{vie}(0, x; i, k)$.

Dans ce mémoire, il est supposé que la loi de mortalité ne change pas dans les projections.

Donc,

$$P_{vie}(0, x; i, k) = {}_{k-i} p_{x+i}.$$

Donc, $P_{vie}(x, k)$ peut être exprimé comme $P_{vie}(0, x; 0, k)$.

2.1.1.2 Modélisation de loi de taux de prise de retraite

La probabilité forward annuelle de rester en actif $p_{act}(0, x; k - 1, k)$ désigne la probabilité de rester en actif à l'année $N + k$ sachant que l'actif reste en actif à l'année $N + k - 1$, estimée à l'année N pour l'âge x à l'année N .

La probabilité forward annuelle de prise de retraite $p_{ret}(0, x; k - 1, k)$ désigne la probabilité de prise de retraite à l'année $N + k$ sachant que l'actif reste actif à l'année $N + k - 1$, observée/estimée à l'année N pour l'âge x à l'année N .

Nous avons que $p_{act}(0, x; k - 1, k) + p_{ret}(0, x; k - 1, k) = 1$. (2.1)

Il en résulte que la probabilité de rester en actif dans k années pour les actifs d'âge x au début de la projection, noté par $P_{act}(x, k)$ peut être exprimée :

$$\begin{aligned} P_{act}(x, k) &= p_{act}(0, x; 0, 1) * p_{act}(0, x; 1, 2) * \dots * p_{act}(0, x; k - 1, k) \\ &= P_{act}(x, k - 1) * p_{act}(0, x; k - 1, k). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Donc, la probabilité de prise de retraite dans k années pour les actifs d'âge x au début de la projection $P_{ret}(x, k) = p_{act}(0, x; 0, 1) * p_{act}(0, x; 1, 2) * \dots * p_{act}(0, x; k - 2, k - 1) * p_{ret}(0, x; k - 1, k)$
 $= P_{act}(x, k - 1) * p_{ret}(0, x; k - 1, k)$. (2.3)

A partir de l'âge maximum de retraite, tous les actifs sont en retraite. C'est-à-dire que $p_{ret}(0, x; k - 1, k) = 1$ si $x + k$ atteint l'âge maximum de retraite. En deçà de l'âge minimum de retraite, tous les actifs restent actifs. Cela signifie que $p_{ret}(0, x; k - 1, k) = 0$ si $x + k$ n'atteint pas l'âge minimum de retraite.

La probabilité de rester en actif à l'année $N + k$ sachant que l'actif reste en actif à l'année $N + i$ avec $i < k$, estimée à l'année N pour l'âge x à l'année N est notée par $P_{act}(0, x; i, k)$.

En particulier, $P_{act}(x, k) = P_{act}(0, x; 0, k)$ et

$$P_{act}(0, x; i, k) = p_{act}(0, x; i, i + 1) * p_{act}(0, x; i + 1, i + 2) * \dots * p_{act}(0, x; i + k - 1, i + k).$$

2.1.1.3 Modélisation sur la loi de recrutement

Le nombre des actifs pour l'âge x à l'année N (le début de la projection) est considéré comme le nombre de base pour l'âge x pour les projections.

La probabilité forward de recrutement $P_{recrut}(x, k)$ à l'année $N + k$ pour l'âge x est construite en fonction du sexe et appliquée au nombre des actifs d'âge x à l'année N .

Si la probabilité de recrutement est nulle, le groupe ouvert devient un groupe fermé. Nous pouvons traiter le cas du groupe fermé comme un cas particulier.

Si la probabilité de recrutement est négative, nous pouvons interpréter la probabilité de recrutement comme la probabilité de passage à l'inactivité ou au chômage. Dans le cadre de ce mémoire, il ne sera pas fait de distinction entre inactivité et recherche d'emploi. Les actifs seront donc considérés en emploi, donc, cotisants. Toutefois, il sera pris soin de comptabiliser comme retraités les anciens actifs passés à l'inactivité.

2.1.1.4 Modélisation de loi de réversion

Evolution des règles de la pension de réversion

Le 1er janvier 2019, les règles de la pension de réversion ont été changées. Selon la réforme des retraites concernant le système universel prévue à l'année 2025, les règles régissant la pension de réversion vont être changées à nouveau.

Pour le régime de retraite général, avant le 1^{er} janvier 2009, l'âge de liquidation de droits était de 51 ans au minimum pour percevoir la pension de réversion du régime général. Après le 1^{er} janvier 2009, 55 ans est l'âge auquel le conjoint ou ex-conjoint peut bénéficier de la pension de réversion. Mais en 2025, l'âge minimal sera de 62 ans.

Pour les régimes complémentaires, avant le 1er janvier 2019, l'âge minimal pour percevoir une pension de réversion était de 60 ans pour le régime Agirc, de 55 ans pour le régime Arrco. Depuis le 1er janvier 2019, les régimes Agirc et Arrco sont réunis, il est donc possible de percevoir la pension de réversion à partir de 55 ans. Mais en 2025, l'âge minimal sera de 62 ans.

Pour le régime de la fonction publique, il n'y a pas vraiment de conditions d'âge. En 2025, la condition pour le conjoint survivant est d'atteindre l'âge de 62 ans pour bénéficier de la pension de réversion.

Le tableau ci-dessous résume l'évolution de l'âge minimal de liquidation de droits des différents régimes pour bénéficier de la pension de réversion.

	Avant le 01/01/2009	Entre le 01/01/2009 et le 01/01/2019	Entre le 01/01/2019 et le 01/01/2025	Après le 01/01/2025
Régime général	51	55	55	62
Régime complémentaire	55/60	55/60	55	62
Régime pour la fonction publique	-	-	-	62

Dans le cadre de la réforme des retraites, le conjoint divorcé survivant n'aura plus le droit d'accéder à la pension de retraite de son ex-conjoint décédé. La pension de réversion sera calculée en appliquant le taux de réversion de 70% sur le revenu du couple en déduisant le revenu du bénéficiaire à partir de l'année 2025.

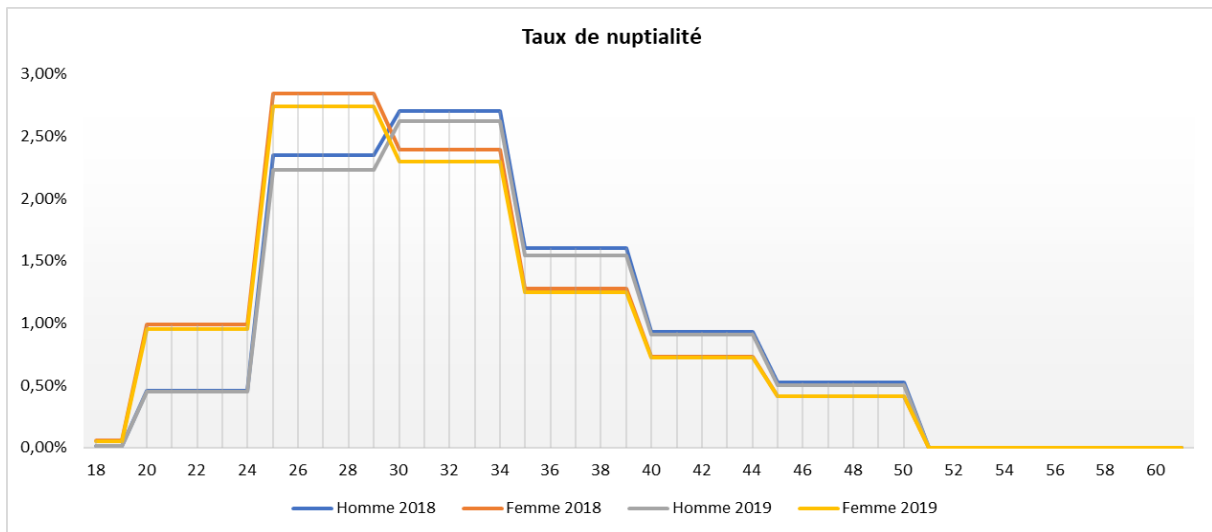
L'évolution de taux de réversion des différents régimes :

	Avant le 01/01/2025 (Revenu direct)	Après le 01/01/2025 (Revenu du couple)
Régime général	54%	70%
Régime complémentaire	60%	70%
Régime pour la fonction publique	50%	70%

Soit l'exemple d'un couple dont le revenu est de 5 000 €, 2 000 € pour la femme et 3 000 € pour son conjoint. Dans le système universel, au décès de l'un des époux, 70% du revenu du couple (soit 3 500 €) est utilisé pour déterminer la pension de réversion. La pension de réversion touchée par la femme suite au décès de son conjoint est ainsi de : $3\,500 - 2\,000 = 1\,500$ €. La pension de réversion touchée par le mari suite au décès de sa conjointe est ainsi de : $3\,500 - 3\,000 = 500$ €.

Probabilité de réversion

Le graphique ci-après montre l'évolution de taux de nuptialité des années 2018 et 2019 en fonction de l'âge et du sexe, construit selon la source INSEE :



<https://www.insee.fr/fr/statistiques/5007696?sommaire=5007726>

Le taux de nuptialité est le rapport du nombre de mariages de l'année à la population totale moyenne de l'année.

Ici, nous introduisons la notion de la probabilité forward annuelle de réversion $p_{revert}(0, x; k - 1, k)$ qui désigne la probabilité de réversion à l'année $N + k$ sachant que l'affilié reste en vie à l'année $N + k - 1$ et décède à l'année $N + k$ et que l'ayant droit reste en vie à l'année $N + k$, observée/estimée à l'année N pour l'affilié d'âge x à l'année N .

La probabilité forward annuelle de réversion peut être évaluée en se basant sur le taux de nuptialité.

La loi de réversion (la probabilité forward annuelle de réversion) est un paramètre clé qui décide l'ampleur des rentes de réversion.

Dans le périmètre de la France entière, selon l'évolution du régime de retraite, la probabilité forward annuelle de réversion ne pourra pas dépasser le taux de nuptialité cumulé. Il peut être supposé que la probabilité forward annuelle de réversion est le taux de nuptialité cumulé.

Le taux de nuptialité actuel, sur lequel la probabilité forward annuelle de réversion est évaluée, reste toujours au-dessous de 3%. Selon la projection démographique des ayants droit et la projection de rentes de réversion dans le futur réalisées dans le cadre de ce mémoire, l'effet de réversion n'aura pas d'impact significatif sur les résultats des projections.

Cependant, dans un régime spécifique, l'effet de réversion pourra éventuellement être significatif sur les résultats des projections et le fonctionnement du régime. En principe, le taux de nuptialité peut être estimé selon la tranche d'âges par une méthode statistique dans un régime spécifique.

2.1.2 Projections démographiques

Les projections démographiques concernent la population des affiliés, et aussi la population des ayants droit. Les méthodes des projections pour le groupe fermé et le groupe ouvert sont décrites dans les deux sous-sections suivantes. En principe, l'algorithme récurrent est adopté pour les projections.

L'âge de retraite mentionné dans ce mémoire représente l'âge maximum de retraite sauf la mention contraire.

2.1.2.1 Projection pour le groupe fermé

Evolution du nombre des actifs

A l'année $N + k$, le nombre des actifs est :

$$A(k) = \sum_{x \in \Omega_A} a(x, k) \quad (2.4)$$

où $a(x, k) = a(x, 0) * P_{vie}(x, k) * P_{act}(x, k)$.

Pour les projections, il est intéressant de construire les formules de façon récurrente afin de connaître la situation à chaque année à partir de celle de l'année précédente.

Des équations (2.1), (2.2) et (2.3), il se déduit que

$$\begin{aligned} a(x, k) &= a(x, k-1) * {}_1p_{x+k-1} * p_{act}(0, x; k-1, k) \\ &= a(x, k-1) * {}_1p_{x+k-1} * (1 - p_{ret}(0, x; k-1, k)). \end{aligned}$$

Evolution du nombre des retraités

A l'année $N + k$, le nombre des retraités est :

$$R(k) = \sum_{x \in \Omega_R} r(x, k) + \sum_{x \in \Omega_A} \sum_{0 < i \leq k} \tilde{f}(a(x, 0), i, k) \quad (2.5)$$

où $r(x, k) = r(x, 0) * P_{vie}(x, k)$

et $\tilde{f}(a(x, 0), i, k) = f(a(x, 0), i) * P_{vie}(0, x; i, k)$.

Dans le texte ci-après, la formule (2.5) est interprétée concrètement pour que l'évolution du nombre des retraités puisse être anticipée à partir des données observées initialement.

La formule (2.5) se décompose en deux parties : la première partie représente l'évolution des retraités existant au début de la projection, la deuxième partie représente le nombre en stock des nouveaux retraités issus du groupe des actifs existant au début de la projection.

La fonction $f(a(x, 0), i)$ représente les nouveaux retraités en flux à l'année $N + i$ issus du groupe des actifs existant d'âge x au début de la projection. C'est-à-dire que le nombre des actifs qui restent en vie et partent à la retraite à l'année $N + i$ est noté par la fonction $f(a(x, 0), i)$.

La fonction f est définie par la formule récurrente qui suit.

Si $x + i$ est supérieure à l'âge de retraite, il n'y a plus de nouveaux retraités à l'année $N + i$ issus du groupe des actifs existant d'âge x au début de la projection

$$f : (a(x, 0), i) \rightarrow 0.$$

Dans le cas où $i = 1$:

Si $x + 1$ est inférieur à l'âge de retraite,

$$f(a(x, 0), 1) = a(x, 0) * {}_1p_x * p_{ret}(0, x; 0, 1).$$

Si $x + 1$ est égal à l'âge de retraite,

$$f(a(x, 0), 1) = a(x, 0) * {}_1p_x.$$

Dans le cas où $i > 1$:

Si $x + i$ est inférieur à l'âge de retraite,

$$f : (a(x, 0), i) \rightarrow a(x, 0) * P_{vie}(x, i) * P_{ret}(x, i).$$

Avec les formules (2.2) et (2.3), il en résulte que la formule récurrente est (Cf. Annexe II Démo 1) :

$$\begin{aligned} f(a(x, 0), i) &= a(x, 0) * P_{vie}(x, i) * P_{ret}(x, i) \\ &= f(a(x, 0), i - 1) * {}_1p_{x+i-1} * \frac{p_{act}(0, x; i - 2, i - 1) * p_{ret}(0, x; i - 1, i)}{p_{ret}(0, x; i - 2, i - 1)}. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $p_{ret}(0, x; i - 2, i - 1) = 0$, alors $p_{act}(0, x; i - 2, i - 1) = 1$ et $f(a(x, 0), i - 1) = 0$.

Il en résulte que (Cf. Annexe II Démo 2) si $p_{ret}(0, x; i - 3, i - 2) > 0$,

$$\begin{aligned} f(a(x, 0), i) &= a(x, 0) * P_{vie}(x, i) * P_{ret}(x, i) \\ &= f(a(x, 0), i - 2) * {}_1p_{x+i-2} * {}_1p_{x+i-1} \\ &\quad * \frac{p_{act}(0, x; i - 3, i - 2) * p_{act}(0, x; i - 2, i - 1) * p_{ret}(0, x; i - 1, i)}{p_{ret}(0, x; i - 3, i - 1)}. \end{aligned}$$

Si $x + i$ est égal à l'âge de retraite, les actifs partent tous en retraite, il est logique de définir la fonction f pour $x + i$ égale à l'âge de retraite comme :

$$f : (a(x, 0), i) \rightarrow a(x, i - 1) {}_1p_{x+i-1}.$$

Il est pertinent de supposer que les actifs ne peuvent prendre leur retraite avant l'âge minimum de départ à la retraite. Si l'âge $x + i$ est inférieur à l'âge minimum de départ à la retraite, il est donc supposé que $P_{ret}(x, i) = 0$ et $f(a(x, 0), i) = 0$.

L'évolution à l'année $N + k$ des nouveaux retraités $f(a(x, 0), i)$ de l'année $N + i$ se concrétise mathématiquement par :

$$\tilde{f}(a(x, 0), i, k) = f(a(x, 0), i) * P_{vie}(0, x; i, k) \text{ où } k \geq i.$$

Pour $k = i$, $\tilde{f}(a(x, 0), i, i) = f(a(x, 0), i)$.

L'algorithme de projections prend la forme récurrente suivante :

$$\tilde{f}(a(x, 0), i, k) = \tilde{f}(a(x, 0), i, k - 1) * {}_1p_{x+k-1}.$$

A l'année $N + k$, le nombre des nouveaux retraités en stock issus du groupe des actifs existant d'âge x au début de la projection est :

$$\sum_{0 < i \leq k} \tilde{f}(a(x, 0), i, k) = \sum_{0 < i \leq k} f(a(x, 0), i) * P_{vie}(0, x; i, k).$$

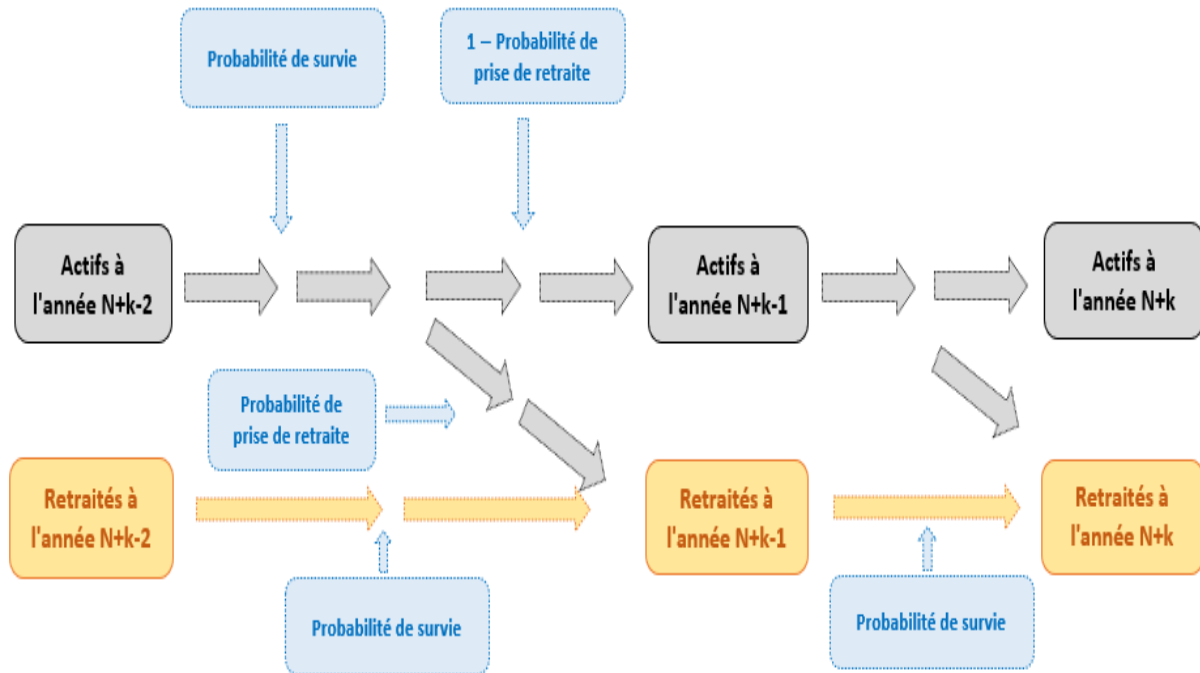
La formule ci-dessus peut être exprimée de façon récurrente (Cf. Annexe II Démo 3) :

$$\sum_{0 < i \leq k} \tilde{f}(a(x, 0), i, k) = \left[\sum_{0 < i \leq k-1} \tilde{f}(a(x, 0), i, k - 1) \right] * {}_1p_{x+k-1} + f(a(x, 0), k).$$

Donc, le nombre des nouveaux retraités en stock issus du groupe des actifs existant au début de la projection (tous âges confondus) est

$$\sum_{x \in \Omega_A} \sum_{0 < i \leq k} f(a(x, 0), i) * P_{vie}(0, x; i, k).$$

Le schéma de projection du nombre des retraités pour le groupe fermé est :



2.1.2.2 Projection pour le groupe ouvert

La projection pour le groupe ouvert se base sur la modélisation des nouvelles entrées en régime qui se concrétise par la modélisation sur l'hypothèse de recrutement portant sur des effectifs et des âges.

Evolution du nombre des actifs

A l'année $N + k$, le nombre des actifs est :

$$A(k) = \sum_{x \in \Omega_A} a(x, k) + \sum_{x \in \Omega_A} a_{new,k}(x) \quad (2.6)$$

où $a(x, k) = a(x, 0) * P_{vie}(x, k) * (1 - P_{ret}(x, k))$ et

$a_{new,k}(x)$ est le nombre en stock des nouveaux actifs d'âge x à l'année $N + k$.

La formule (2.6) est décrite de manière plus concrète dans les paragraphes ci-après.

A l'année $N + k$, $k > 0$, le nombre des nouvelles entrées d'âge x est exprimé comme une fonction $g(x, k)$. La fonction de référence pour calculer le nombre des nouvelles entrées est notée par $C(x, k)$, qui est déterminée par la stratégie de l'injection des nouvelles entrées dans le régime.

Si l'âge x est inférieur à l'âge de retraite, le nombre des nouvelles entrées d'âge x pour l'année $N + k$, $k > 0$, est décrit par

$$g(x, k) = C(x, k) * P_{recrut}(x, k).$$

Si l'âge x est supérieur ou égal à l'âge de retraite, $g(x, k) = 0, k > 0$. Cette hypothèse néglige la possibilité du cumul emploi-retraite.

Les projections des nouvelles entrées d'âge x à l'année $N + i$ se déroulent comme suit :

A l'année $N + k$ où $k > i$, les nouvelles entrées d'âge x à l'année $N + i$ atteignent l'âge $x + k - i$. Le nombre des nouvelles entrées est réduit à $g(x, i) * P_{vie}(i, x; 0, k - i)$.

Il est supposé que les mêmes lois de mortalité soient utilisées dans les projections. C'est-à-dire que

$$P_{vie}(i, x; 0, k - i) = P_{vie}(0, x - i; i, k).$$

L'évaluation du nombre en stock des nouveaux actifs d'âge x à l'année $N + k$ pour $k \geq 1$ notée par $a_{new,k}(x)$, est décrite dans le paragraphe ci-dessous.

Pour n'importe quelle année projetée, si l'âge x est l'âge minimum d'entrée en régime, le nombre des nouveaux actifs est le nombre des nouvelles entrées de l'année. Pour la première année de projection, le nombre des nouveaux actifs est aussi par défaut le nombre des nouvelles entrées de l'année, c'est-à-dire que $a_{new,k}(x) = g(x, k)$.

Si l'âge x est supérieur à l'âge minimum d'entrée en régime et inférieur à l'âge de retraite, le nombre en stock des nouveaux actifs d'âge x pour l'année $N + k, k > 1$ est

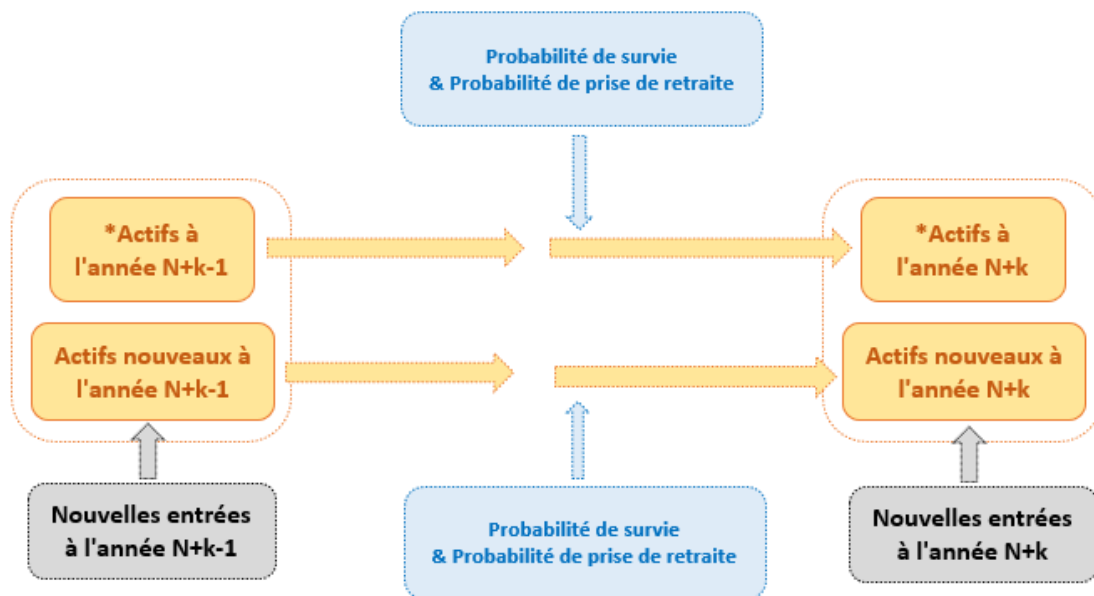
$$a_{new,k}(x) = g(x, k) + \sum_{0 < i \leq k-1} g(x - (k - i), i) * P_{vie}(i, x - (k - i); 0, k - i) * P_{act}(i, x - (k - i); 0, k - i).$$

Si l'âge x est supérieur ou égal à l'âge de retraite, $a_{new,k}(x) = 0$.

La formule de $a_{new,k}(x)$ s'exprime de manière récurrente (Cf. Annexe II Démo 4) :

$$a_{new,k}(x) = a_{new,k-1}(x - 1) * P_{vie}(0, x - k; k - 1, k) * P_{act}(0, x - k; k - 1, k) + g(x, k).$$

Le schéma de projection du nombre des actifs pour le groupe ouvert est :



* Les actifs à l'année $N+k - 1$ sont issus du groupe des actifs existant au début de la projection.

Evolution du nombre des retraités

A l'année $N + k$, le nombre des retraités est :

$$R(k) = \sum_{x \in \Omega_R} r(x, k) + \sum_{x \in \Omega_R} r_{new, k}(x) \quad (2.7)$$

où $r(x, k) = r(x, 0) * P_{vie}(x, k)$

et $\sum_{x \in \Omega_R} r_{new, k}(x) = \sum_{x \in \Omega_A} \sum_{0 < i \leq k} f(a(x, 0), i) * P_{vie}(0, x; i, k) + \sum_{x \in \Omega_A} \tilde{h}(x, k) = I + II$.

Le terme I représente les nouveaux retraités issus du groupe des actifs existant au début de la projection. Le terme II représente les nouveaux retraités issus des groupes des nouvelles entrées depuis l'année N .

La fonction $h(x, k)$ représente le nombre des nouveaux retraités d'âge x à l'année $N + k$ issus du groupe des nouveaux actifs d'âge $x - 1$ à l'année $N + k - 1$.

Par défaut, $h(x, k) = 0$ pour $k = 1$.

Pour $k > 1$, la fonction $h(x, k)$ est décrite ci-après :

$$h(x, k) = a_{new, k-1}(x - 1) * P_{vie}(0, x - k; k - 1, k) * P_{ret}(0, x - k; k - 1, k).$$

Si l'âge x est inférieur à l'âge minimum de départ à la retraite, les actifs sont supposés ne pas pouvoir partir à la retraite, c'est-à-dire que $P_{ret}(0, x - k; k - 1, k) = 0$ et $h(x, k) = 0, k > 1$.

Le nombre des nouveaux retraités d'âge x à l'année $N + k$ issus des groupes des nouvelles entrées depuis l'année N , noté par $\tilde{h}(x, k)$, est évalué en se basant sur l'évaluation de $h(x, k)$.

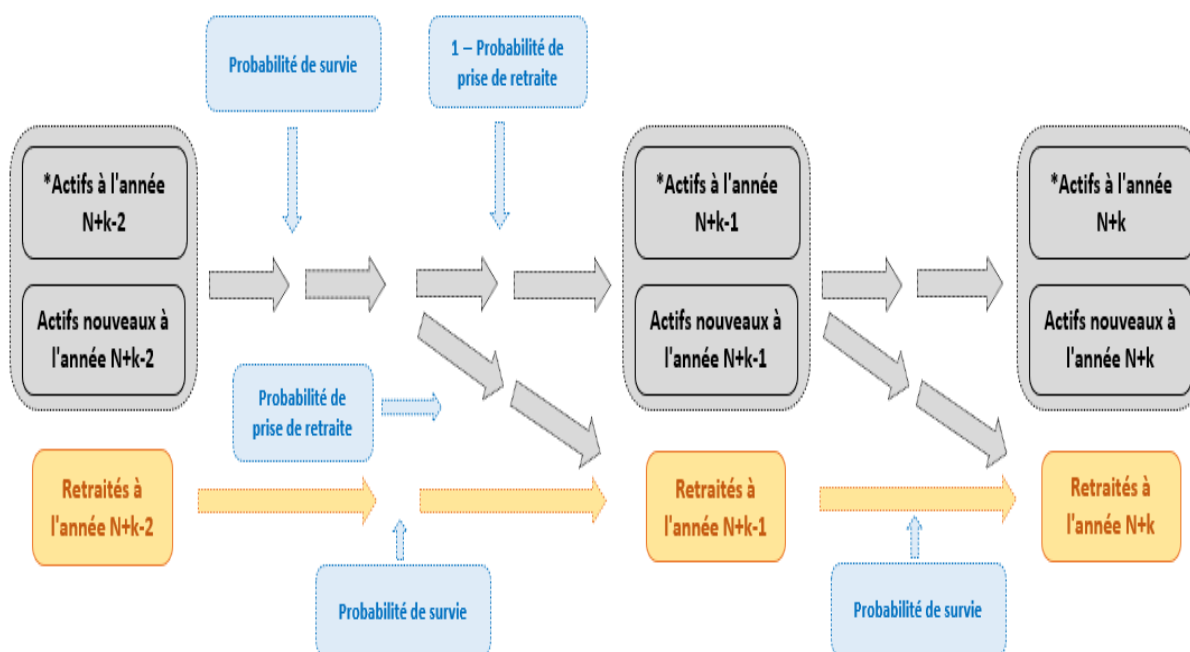
Il en résulte que $\tilde{h}(x, k) = h(x, k) = 0$ pour $k = 1$.

Le nombre des nouveaux retraités d'âge x à l'année $N + 2$ issus des groupes des nouvelles entrées depuis l'année N est ainsi le nombre des nouveaux retraités d'âge x à l'année $N + 2$ issus du groupe des nouveaux actifs d'âge $x - 1$ à l'année $N + 1$, c'est-à-dire que $\tilde{h}(x, k) = h(x, k)$ pour $k = 2$.

Pour $k > 2$, $\tilde{h}(x, k) = \tilde{h}(x - 1, k - 1) * P_{vie}(0, x - k; k - 1, k) + h(x, k)$ et $\tilde{h}(x, k) = 0$ si l'âge x est inférieur à l'âge minimum de départ à la retraite.

$\tilde{h}(x, k)$ est une fonction accumulative, donc l'âge x n'est pas limité.

Le schéma de projection du nombre des retraités pour le groupe ouvert est :



* Les actifs à l'année N+k-2 sont issus du groupe des actifs existant au début de la projection.

2.1.2.3 Projection pour la réversion

La projection sur la réversion peut être élaborée en se basant sur la projection démographique de la population des affiliés (actifs et retraités) et en appliquant la loi de réversion.

Le texte ci-dessous est consacré à la description de la méthode de projection. Nous nous concentrons sur la projection de réversion du groupe fermé.

Il est supposé qu'une réversion a seulement un ayant droit et l'ayant droit reste toujours en régime.

La probabilité de survie de l'ayant droit à l'année $N + k$ sachant que l'ayant droit est en vie à l'année $N + i$ avec $i < k$, estimée à l'année N pour l'ayant droit d'âge y à l'année N est notée par $P_{vie}(0, y; i, k)$.

Evolution du nombre des ayants droit existant au début de la projection

La méthode de la projection pour les ayants droit existant au début de la projection est celle utilisée pour projeter les retraités existant au début de la projection. Le nombre des ayants droit à l'année $N + k$ peut être exprimé comme $\sum_{y \in \Omega_R} r(y, k)$.

Evolution du nombre des ayants droit issus du groupe des actifs

Rappelons qu'à l'année $N + k$, le nombre des actifs atteint $a(x, k)$ pour les actifs d'âge x au début de la projection.

Le nombre des réversions à l'année $N + k$ issues du groupe des actifs d'âge x au début de la projection est décrit par la fonction

$$W(x; y, k) = a(x, k - 1) * (1 - P_{vie}(0, x; k - 1, k)) * P_{vie}(0, y; k - 1, k) * p_{rever}(0, x; k - 1, k).$$

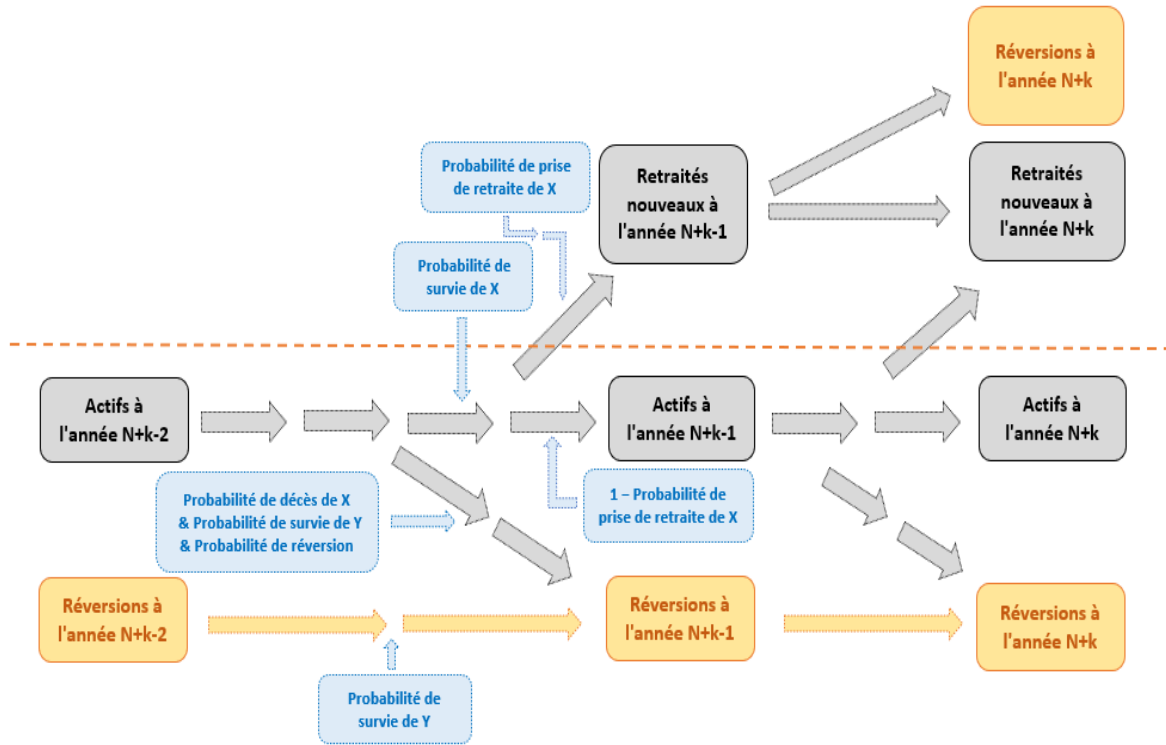
Les ayants droit à l'année $N + k$ issus du groupe des actifs d'âge x au début de la projection sont les ayants droit en vie à l'année $N + k$ dont les réversions ont eu lieu avant l'année $N + k$.

Le nombre des ayants droit à l'année $N + k$ issus du groupe des actifs d'âge x au début de la projection peut être exprimé avec la fonction

$$\tilde{W}(x; y, k) = \tilde{W}(x; y, k - 1) * P_{vie}(0, y; k - 1, k) + W(x; y, k)$$

Et $\tilde{W}(x; y, 1) = W(x; y, 1)$.

Le schéma de projection du nombre des réversions pour le groupe des actifs est :



Evolution du nombre des ayants droit issus du groupe des retraités

Rappelons que à l'année $N + k$, le nombre des retraités est :

$$R(k) = \sum_{x \in \Omega_R} r(x, k) + \sum_{x \in \Omega_A} \sum_{0 < i \leq k} \tilde{f}(a(x, 0), i, k).$$

Le nombre des réversions à l'année $N + k$ issues du groupe des retraités d'âge x au début de la projection est décrit par la fonction

$$V_1(x; y, k) = r(x, k - 1) * (1 - P_{vie}(0, x; k - 1, k)) * P_{vie}(0, y; k - 1, k) * p_{revert}(0, x; k - 1, k).$$

Le nombre des réversions à l'année $N + k$ issues du groupe des nouveaux retraités qui a été construit en se basant sur le groupe des actifs d'âge x au début de la projection est décrit par la fonction

$$V_2(x; y, k) = \sum_{0 < i \leq k-1} \tilde{f}(a(x, 0), i, k - 1) * (1 - P_{vie}(0, x; k - 1, k)) * P_{vie}(0, y; k - 1, k) * p_{revert}(0, x; k - 1, k).$$

Les ayants droit à l'année $N + k$ issus du groupe des retraités ou du groupe des nouveaux retraités d'âge x au début de la projection sont les ayants droit en vie à l'année $N + k$ dont les réversions ont eu lieu avant l'année $N + k$.

Le nombre des ayants droit à l'année $N + k$ issus du groupe des retraités ou du groupe des nouveaux retraités d'âge x au début de la projection peut être exprimé de façon suivante avec la fonction

$$\tilde{V}(x; y, k) = \tilde{V}(x; y, k - 1) * P_{vie}(0, y; k - 1, k) + V(x, y, k)$$

où $V(x; y, k) = V_1(x; y, k) + V_2(x; y, k)$.

Et $\tilde{V}(x; y, 1) = V(x; y, 1)$.

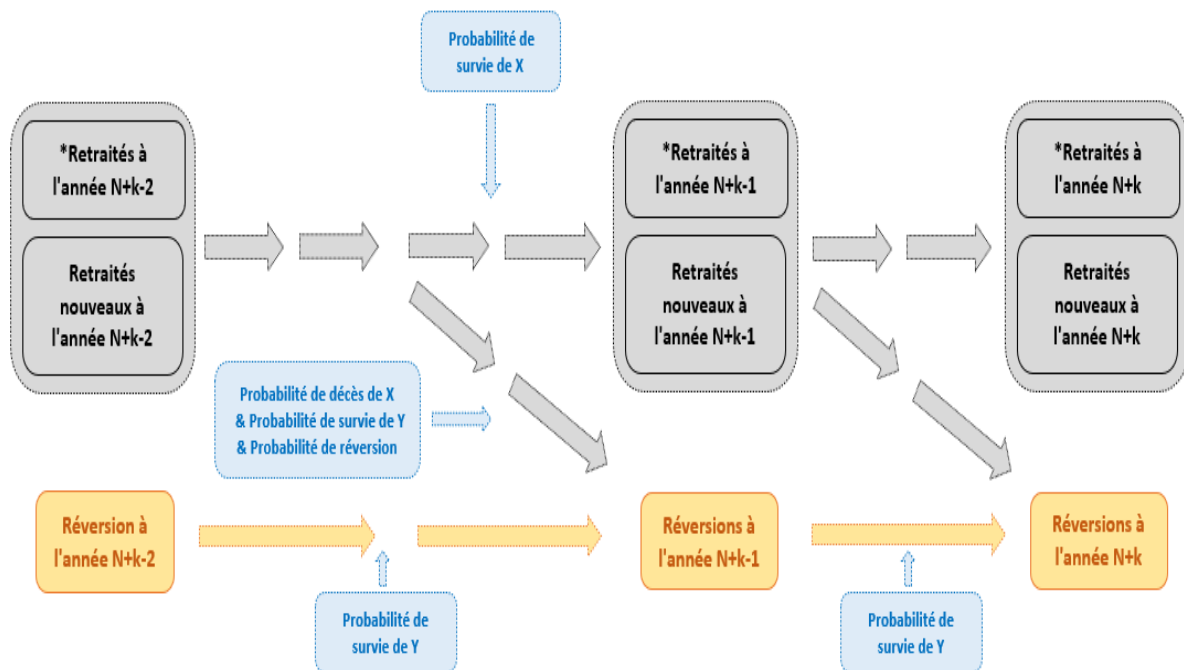
Précisément, le nombre des ayants droit à l'année $N + k$ issus du groupe des retraités est

$$\sum_{0 < i \leq k-1} V_1(x; y, i) * P_{vie}(0, y; i, k) + V_1(x; y, k).$$

Le nombre des ayants droit à l'année $N + k$ issus du groupe des nouveaux retraités est

$$\sum_{0 < i \leq k-1} V_2(x; y, i) * P_{vie}(0, y; i, k) + V_2(x; y, k).$$

Le schéma de projection du nombre des réversions pour le groupe des retraités est :



* Les retraités à l'année $N+k-2$ sont issus du groupe des retraités existant au début de la projection.

2.1.3 Hypothèses, données en input, analyses des résultats et conclusions

Les hypothèses utilisées pour les projections sont décrites dans cette section. Pour les données différentes en input, sont obtenus les différents résultats sur lesquels les analyses sont menées et les conclusions sont tirées.

2.1.3.1 Détermination des hypothèses initiales

Dans le cadre de ce mémoire, l'âge maximum au début de la projection pour le groupe fermé est fixé à 100 ans. Les projections pour le groupe fermé et le groupe ouvert s'arrêtent à l'extinction de la vie. L'âge minimum de la projection est de 18 ans. C'est-à-dire que l'âge minimum d'entrée en régime est de 18 ans.

1. Tables de mortalité

Dans les projections, les tables de mortalité INSEE 2013-2070 H/F¹ (source INSEE) sont par défaut utilisées. La génération la plus récente des tables de mortalité INSEE 2013-2070 H/F est l'année 2013, les tables de mortalité INSEE 2013-2070 H/F sont entendues sur les générations les plus jeunes.

2. Loi de taux de prise de retraite

Dans le cadre de ce mémoire, l'âge minimum de départ en retraite est fixé à 62 ans, qui correspond à l'âge minimum légal de départ en retraite en vigueur. Et l'âge maximum de départ en retraite est fixé à 70 ans. Les actifs partent au fur et à mesure à la retraite à partir de 62 ans et sont tous partis au plus tard à 70 ans, en conséquence, l'hypothèse pour les taux de prise de retraite entre les âges de 62 ans et 70 ans doit être déterminée.

Les tables de taux de prise de retraite en fonction de l'âge au début de la projection et de l'année projetée sont construites pour les projections.

Le tableau² (source INSEE) ci-dessous présente les taux d'emploi entre 62 ans et 69 ans par rapport à la population générale :

Age	Taux d'emploi
62	21,5%
63	16,8%
64	13,3%
65	8,4%
66	6,4%
67	5,2%
68	4,5%
69	3,8%

Le taux d'emploi d'âge x , noté par $\tau_{emploi}(x)$, est appliqué à la population générale (les actifs et les inactifs). En utilisant les notations de la section 2.1.1.2 (Cf. Annexe 1), le taux de prise de retraite d'âge $x + 1$ sachant que cette personne est en emploi à l'âge x est noté par $p_{ret}(0, x; 0, 1)$.

Ce taux de prise de retraite est calculé comme

$$p_{ret}(0, x; 0, 1) = 1 - \frac{\tau_{emploi}(x)}{\tau_{emploi}(x - 1)}.$$

Pour les actifs passant de l'âge de 61 ans à l'âge de 62 ans, $1 - \tau_{emploi}(x)$ est pris comme le taux de prise de retraite d'âge 62 ans sachant que cette personne est en emploi à l'âge de 61 ans pour le groupe fermé. Ce traitement surestime le nombre de départ à la retraite à 62 ans.

¹ https://www.insee.fr/fr/statistiques/fichier/2400057/F1606_version_revue_septembre2018.pdf

² <https://www.insee.fr/fr/statistiques/4227739#tableau-figure2>

Pour le groupe ouvert, il est supposé que les inactifs soient partis à la retraite dès qu'ils atteignent l'âge minimum de départ en retraite.

Quand les actifs atteignent l'âge maximum pour le départ en retraite, le taux de prise de retraite est de 100%.

Le tableau ci-dessous synthétise les taux de prise de retraite retenus dans les projections :

Age	Taux de prise de retraite
62	78,5%
63	21,9%
64	20,8%
65	36,8%
66	23,8%
67	18,8%
68	13,5%
69	15,6%

Commentaire : Dans le scénario économique central, aucune hypothèse de recul de l'âge de retraite est utilisée. Le recul de l'âge de retraite est pris en compte dans le test de sensibilité (Cf. le chapitre 5).

3. Loi de recrutement

La table de probabilité forward de recrutement en fonction de l'âge et de l'année projetée est construite pour les projections. Nous pouvons changer la probabilité de recrutement à n'importe quelle année future pour tester la sensibilité et ajuster l'équilibre du régime.

Dans le cadre de la réalisation de ce mémoire, la probabilité de recrutement est déterminée de manière statique en fonction de l'âge. La probabilité de recrutement ne change pas selon l'année projetée. Nous avons besoin de déterminer la probabilité de recrutement de passer de l'âge x à l'âge $x + 1$. Il est logique de supposer que la probabilité de recrutement en passant de l'âge x à l'âge $x + 1$ est 0 pour $x \geq 61$ ans.

En utilisant comme source la CNAV³ et INSEE⁴, nous pouvons connaître le nombre de cotisants et le nombre de la population par âge. Le nombre de cotisants d'âge x est noté par $N_{cotisant}(x)$ et le nombre de la population générale d'âge x est noté par $N(x)$. La probabilité de recrutement de passer de l'âge x à l'âge $x + 1$ $P_{recrut}(x + 1)$ est déterminée de façon telle que

$$\frac{N_{cotisant}(x + 1)}{N_{cotisant}(x)} = \frac{N(x + 1)}{N(x)} * (1 + P_{recrut}(x + 1)).$$

Si $P_{recrut}(x + 1) < 0$, cela signifie que la probabilité de recrutement devient l'opposée de la probabilité de perte d'emploi en passant de l'âge x à l'âge $x + 1$.

Dans le cadre de ce mémoire, il n'y a pas de distinction entre les cotisants et les actifs.

Le tableau de la probabilité de recrutement construit se trouve dans l'annexe IV.

³ <https://www.statistiques-recherches.cnnav.fr/cotisants-au-regime-general.html>

⁴ <https://www.insee.fr/fr/statistiques/1892086?sommaire=1912926>

Commentaire : Dans le scénario économique central, l'hypothèse de l'évolution démographique n'est pas prise en compte. Cependant, l'évolution de la loi de recrutement est prise en compte dans le test de sensibilité (Cf. le chapitre 5).

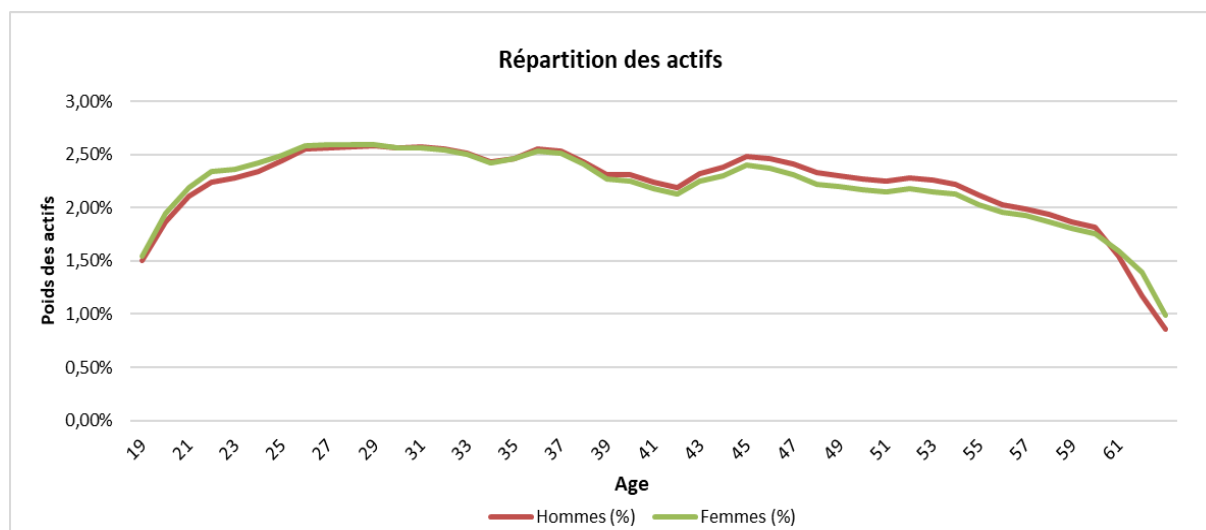
4. Loi de réversion

Il est supposé que la probabilité forward annuelle de réversion est le taux de nuptialité cumulé. Le tableau de la probabilité forward annuelle de réversion en fonction de l'âge et du sexe pour la première année de projection se trouve dans l'annexe V.

2.1.3.2 Données en input

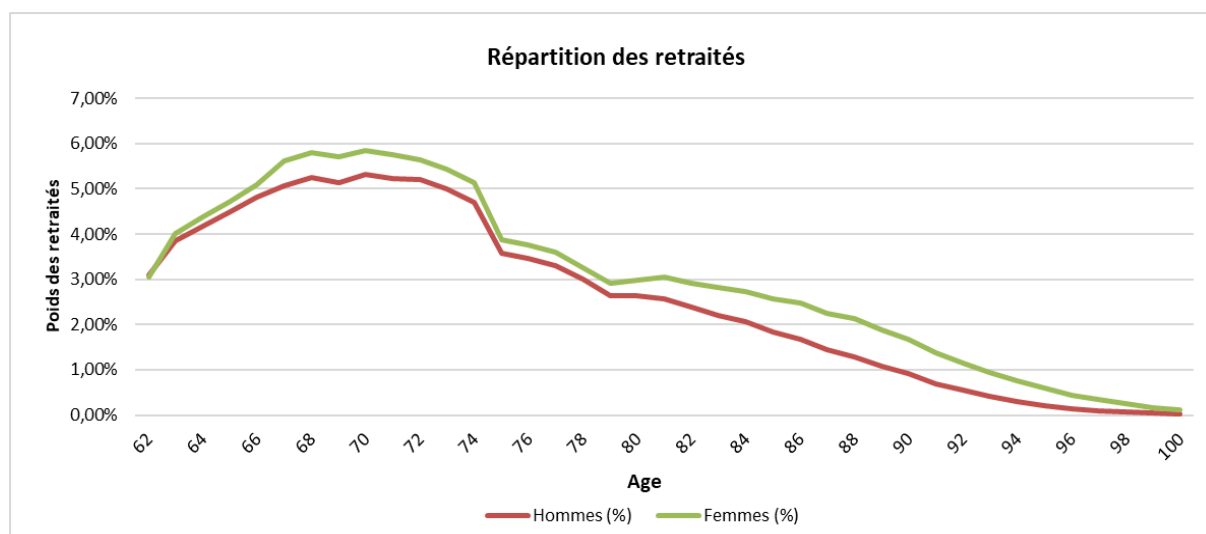
Pour chaque sexe, nous pouvons calculer le poids des actifs d'âge x comme le rapport entre le nombre des actifs d'âge x et le nombre total des actifs. Le poids des retraités d'âge x est calculé comme le rapport entre le nombre des retraités d'âge x et le nombre total des retraités.

Les courbes de poids des actifs par sexe en fonction de l'âge sont affichées ci-dessous ⁵:



⁵ <https://www.statistiques-recherches.cnaf.fr/cotisants-au-regime-general.html>

Les courbes de poids des retraités par sexe en fonction de l'âge sont affichées ci-dessous ⁶:



Les données de la CNAV pour la répartition des actifs et des retraités sont utilisées dans les projections (Cf. Annexe VI). La date de début de la projection est fixée au 31/12/2019.

Dans le cadre de ce mémoire, nous modélisons la stratégie de l'injection des nouvelles entrées dans le régime de la façon ci-dessous en utilisant les notations de la section 2.1.2.2.

Il paraît logique de supposer que le recrutement s'arrête avant l'âge minimum de départ en retraite, c'est-à-dire à 61 ans.

Si l'âge x est l'âge minimum d'entrée en régime, la fonction de référence $C(x, k)$ est le nombre de la population générale simulée⁷ (Source INSEE) pour l'âge x à l'année $N + k$.

Il est à noter que $P_{act}(0, x - 1; 0, 1) = 1$ si x est inférieur à l'âge minimum de retraite.

Si $x - k$ est supérieur ou égal à l'âge minimum d'entrée en régime, les nouvelles entrées de l'âge x à l'année $N + k$ incluent l'ajustement du groupe fermé en appliquant la probabilité de recrutement au groupe fermé du fait qu'il est logique que le groupe ouvert soit construit en se basant sur les mêmes données input que le groupe fermé.

Si $x - k$ est inférieur à l'âge minimum d'entrée en régime, les nouvelles entrées de l'âge x à l'année $N + k$ sont construites en se basant sur les nouvelles entrées de l'âge minimum d'entrée en régime.

Dans le cas où $k = 1$:

Pour l'année $N + 1$, la fonction de référence est

$$C(x, 1) = a(x - 1, 0) * P_{vie}(0, x - 1; 0, 1) = a(x - 1, 1).$$

Il en résulte que le nombre des nouvelles entrées est

$$g(x, 1) = C(x, 1) * P_{recrut}(x, 1) = a(x - 1, 1) * P_{recrut}(x, 1).$$

Cela signifie que le nombre des actifs du groupe ouvert est

$$a(x - 1, 0) * P_{vie}(0, x - 1; 0, 1) * (1 + P_{recrut}(x, 1)) = a(x - 1, 1) * (1 + P_{recrut}(x, 1)).$$

⁶ <https://www.statistiques-recherches.cnav.fr/pyramide-des-ages.html>

⁷ <https://www.insee.fr/fr/statistiques/2496716?sommaire=2496793>

Dans le cas où $k > 1$:

Si $x - k$ est supérieur ou égal à l'âge minimum d'entrée en régime,

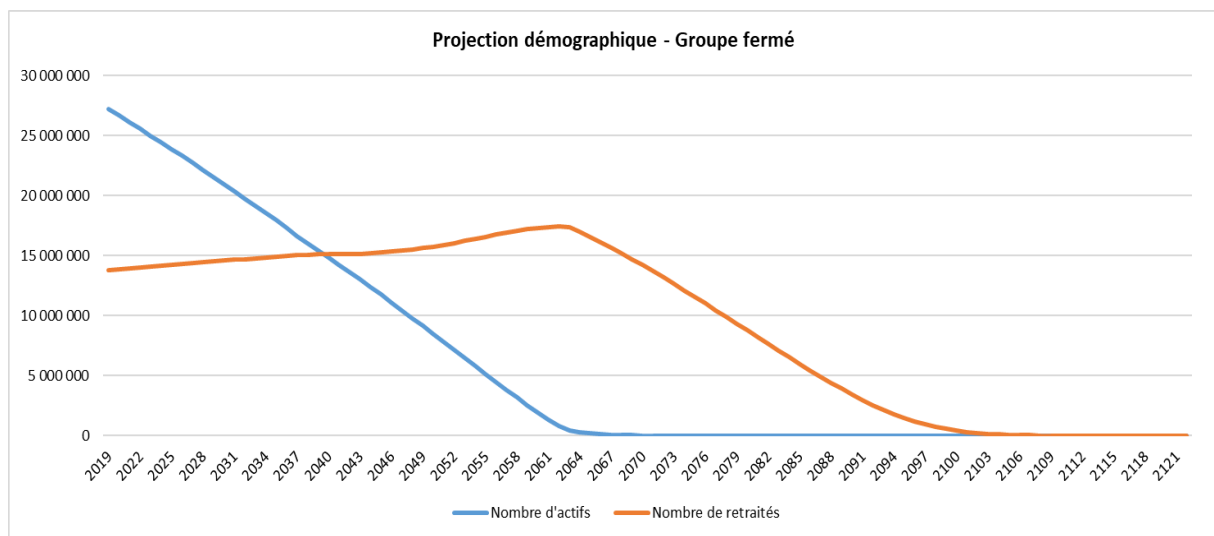
$$g(x, k) = a(x - k, k) * P_{recrut}(x, k) + \sum_{0 < i \leq k-1} g(x - (k - i), i) * P_{vie}(i, x - (k - i); 0, k - i) * P_{recrut}(x, k).$$

Si $x - k$ est inférieur à l'âge minimum d'entrée en régime,

$$g(x, k) = \sum_{0 < i \leq k-1} g(x - (k - i), i) * P_{vie}(i, x - (k - i); 0, k - i) * P_{recrut}(x, k).$$

2.1.3.3 Analyses des résultats et conclusions

Pour le groupe fermé, le graphique des résultats est affiché ci-dessous :



Nous pouvons constater que le nombre des actifs se réduit de manière quasiment linéaire et le nombre des actifs est proche de 0 à partir de l'année 2062. Ceci s'explique par le fait que, par définition, le groupe fermé ne reçoit pas de nouveaux actifs et que les actifs de 18 ans au début de la projection atteignent l'âge minimum de retraite dès 2062 ans.

La réduction du nombre des retraités due à la mortalité est compensée par l'intégration des nouveaux retraités issus du groupe des actifs au début de la projection jusqu'à l'extinction des actifs.

La formule pour calculer l'âge moyen pondéré par le poids de la population de chaque âge est :

$$A_{moy} = \frac{\sum_x N_{cotisant}(x) * x}{\sum_x N_{cotisant}(x)}$$

où A_{moy} est l'âge moyen pondéré par le poids des actifs de chaque âge ;

x est l'âge de l'actif ;

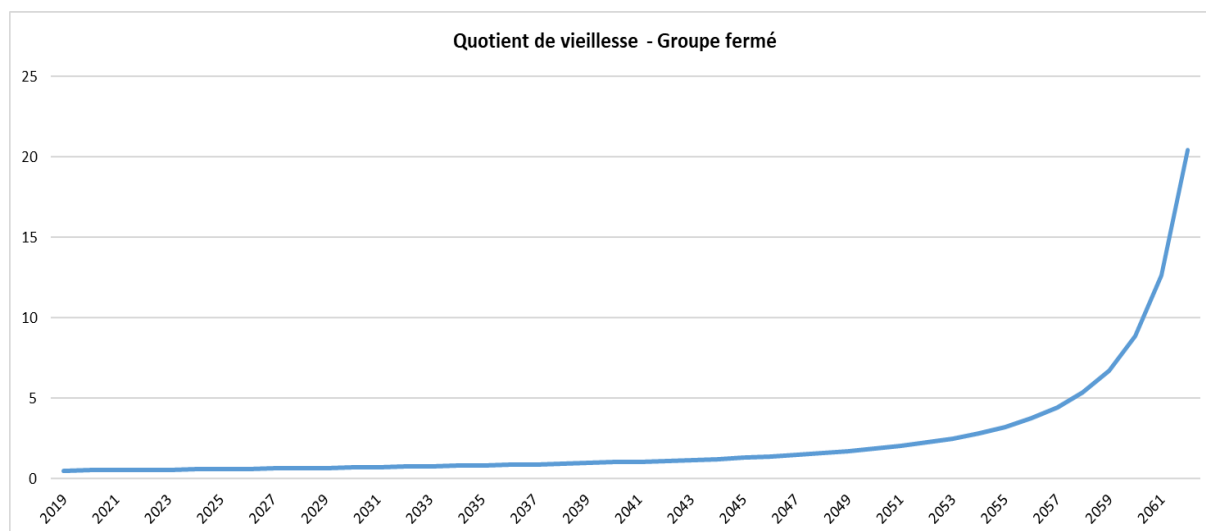
$N_{cotisant}(x)$ est le nombre des actifs d'âge x .

Au début de la projection, l'âge moyen pondéré par le poids des actifs de chaque âge pour les hommes est de 38,95 ans et l'âge moyen pondéré par le poids des actifs de chaque âge pour les femmes est de 38,42 ans. Et l'âge moyen pondéré par le poids de la population de chaque âge (les sexes homme et femme confondus) est de 38,86 ans. Autrement dit, au bout de 23 ans, l'âge moyen de ces actifs

dépasse l'âge de 62 ans (l'âge minimum légal de retraite), cela signifie que le nombre des retraités est plus élevé que le nombre des actifs si toutes les autres conditions démographiques ne changent pas.

Ce résultat d'analyse est confirmé par les courbes de projection affichées ci-dessus.

Ci-dessous, le graphique du quotient de vieillesse (le ratio de dépendance démographique) pour le groupe fermé :



Il est rappelé que $\frac{R(k)}{A(k)}$ désigne le ratio de dépendance démographique ou le quotient de vieillesse.

Le groupe fermé est un groupe en extinction, il n'y a pas de nouvelles entrées ou de nouveaux actifs qui permette que le quotient de vieillesse reste raisonnable. En conséquence, le quotient de vieillesse s'explode à partir d'un certain moment.

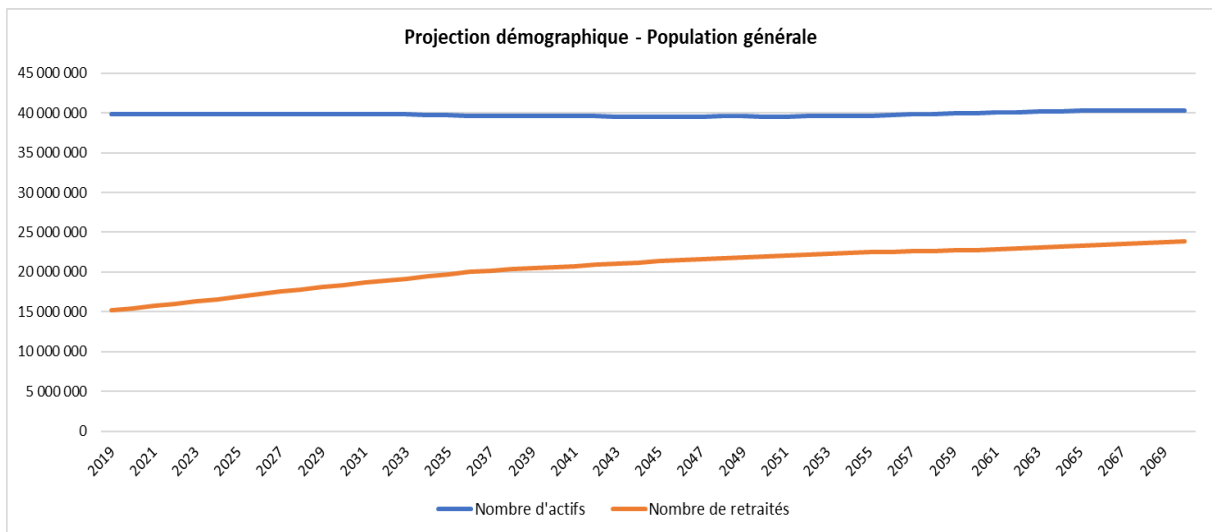
L'équilibre de la structure démographique n'est pas tenable pour le groupe fermé.

Il nous intéresse de projeter les points acquis futurs et les rentes futures de sorte qu'ils soient cohérents avec la réalité au début de la projection. Donc, la probabilité de recrutement intervient pour la construction du groupe ouvert. Quand la probabilité de recrutement est négative, une partie des actifs est passée en inactif qui ne cotisent plus pour le régime. Il est ainsi primordial de construire une courbe correspondant au nombre équivalent d'actifs qui cotisent pour une vie entière, et de construire une courbe correspondant au nombre équivalent de retraités ayant une carrière entière.

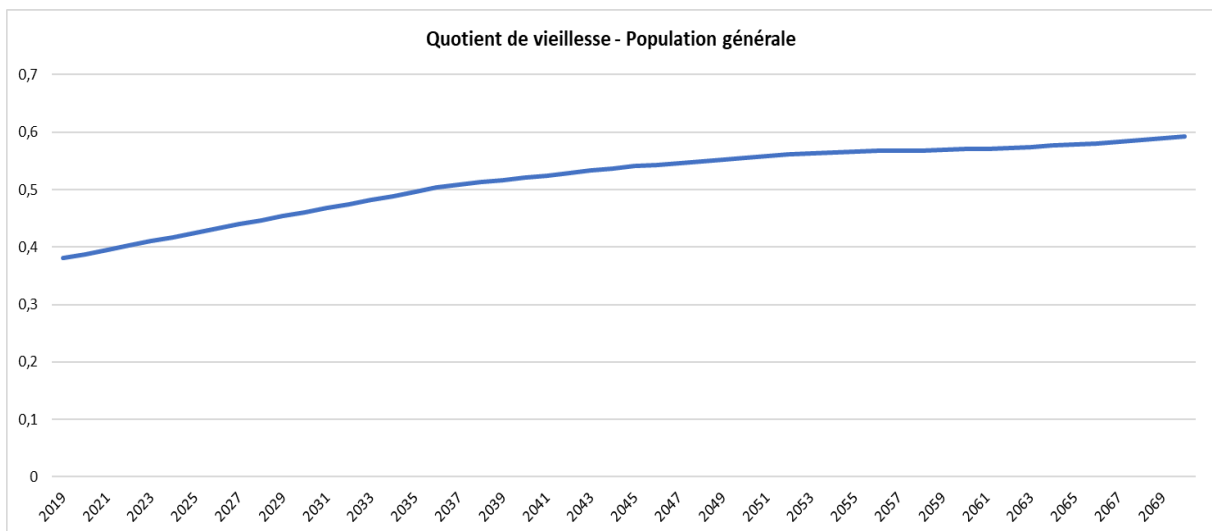
Cependant, afin d'avoir la courbe du nombre de retraités « réel », il suffit d'appliquer la loi de taux de prise de retraite à la population générale simulée⁸ (Source INSEE).

⁸ <https://www.insee.fr/fr/statistiques/2496716?sommaire=2496793>

Le graphique des résultats s'affiche comme :



Ci-dessous, le graphique du quotient de vieillesse (le ratio de dépendance démographique) :

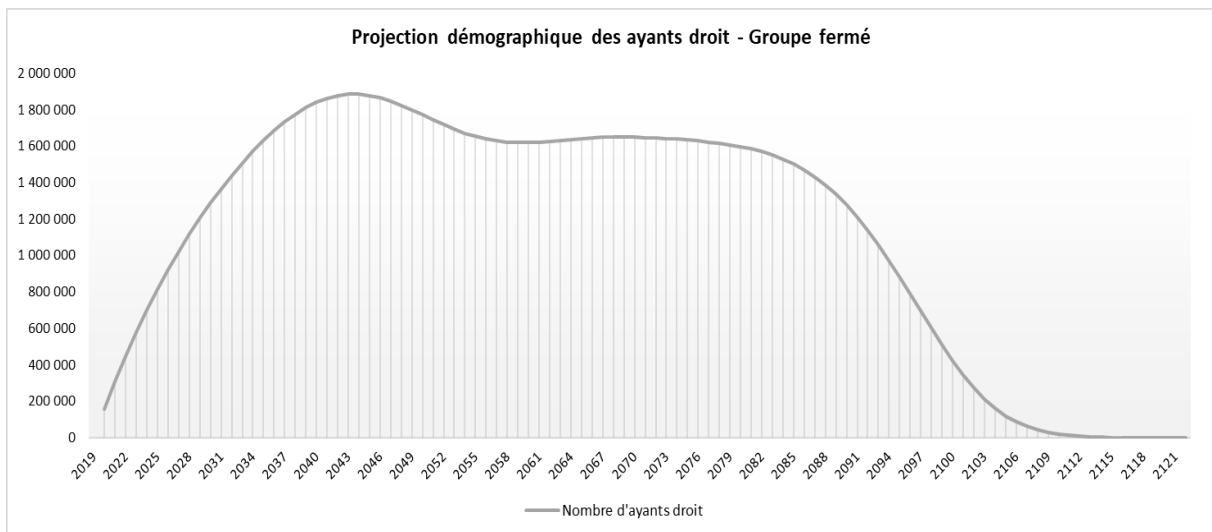


Le quotient de vieillesse représente l'évolution des populations d'actifs et de retraités, mais il ne peut pas indiquer l'évolution des points acquis et des rentes futures.

Concernant les ayants droit, le nombre maximum des ayants droit dans la projection est de moins de 1,8M pour un groupe fermé d'une population de plus de 40M. L'impact des ayants droits est donc limité dans la projection.

La probabilité de divorce et l'effet du plafond de ressource pour bénéficier de la rente de réversion ne sont pas pris en compte dans les hypothèses retenues. Le nombre des ayants droits est ainsi surestimé par rapport à la réalité.

Voici le graphique de l'évolution du nombre des ayants droit en fonction de l'année projetée :



En alternative à la méthode des projections réalisées dans le cadre de ce mémoire, la méthode de la modélisation prédictive en statistiques en se basant sur les données historiques peut aussi être utilisée. Mais la difficulté consiste à déterminer les variables explicatives pertinentes. Les variables explicatives apparaissant logiques sont l'année de naissance, l'année d'entrée en régime, l'année de sortie du régime pour la variable à expliquer - le nombre des actifs. Pour la variable à expliquer – le nombre des retraités, les variables explicatives apparaissant pertinentes sont l'année de naissance, l'âge de retraite.

2.2 Projection des flux futurs

2.2.1 Paramètres techniques

Les paramètres techniques impactant sur les flux futurs du régime sont aussi étudiés dans le périmètre de ce mémoire.

2.2.1.1 Evolution des salaires

Les salaires ont beaucoup évolué depuis la deuxième guerre mondiale, et en conséquence, impactent le régime de manière significative. Se pose alors naturellement la question de savoir comment prendre en compte cette évolution des salaires dans l'évaluation des pensions futures.

Nous pouvons estimer le taux d'augmentation annuel des salaires selon l'historique pour démarrer la projection. Nous pouvons aussi cibler le taux de remplacement, faire évoluer les salaires et les pensions parallèlement.

Le salaire moyen à l'année $N + k$ pour les actifs d'âge x au début de la projection est

$$S(x, k) = S(x, 0) * \prod_{0 < i \leq k} (1 + \tau_{salaire}(x, i))$$

où $\tau_{salaire}(x, i)$ est le taux d'augmentation du salaire moyen à l'année $N + i$ pour les actifs d'âge x au début de la projection.

2.2.1.2 Evolution du taux de cotisation

Ici, nous distinguons deux notions : les taux de cotisation contractuel et effectif. Le taux de cotisation contractuel est le taux que nous appliquons aux salaires pour calculer les cotisations destinées à acquérir les points. Le taux de cotisation effectif est le taux réellement payé par les actifs.

Le taux d'appel des cotisations à l'année $N + k$ pour les actifs d'âge x au début de la projection est le ratio du taux de cotisation effectif par rapport au taux de cotisation contractuel (pour les notations : Cf. Annexe I)

$$\tau_{cotis}^a(x, k) = \tau_{cotis}^e(x, k) / \tau_{cotis}^c(x, k).$$

Si $\tau_{cotis}^a(x, k) > 1$, une partie des cotisations payées ne donne pas lieu à l'acquisition de points. Si $\tau_{cotis}^a(x, k) < 1$, il existe une distribution de points gratuits. Ce coefficient peut être utilisé comme un coefficient correcteur permettant d'ajuster les recettes du régime.

L'estimation du taux de cotisation a pour objectif d'estimer l'évolution des cotisations – la ressource la plus importante du régime. Dans le cas où nous ne maîtrisons pas l'évolution des salaires, nous pouvons introduire l'évolution de l'indice de cotisation. Ici, nous sommes inspirés par le mode de cotation d'une obligation du marché, nous supposons que l'indice de cotisation est à 100 € à la création, ensuite nous évaluons l'évolution de l'indice de cotisation pour estimer l'évolution des cotisations réelles. C'est une alternative à l'évaluation séparée du salaire et du taux de cotisation.

Donc, l'indice de cotisation à l'année $N + k$ avec l'indice de cotisation de base $Ind(0) = 100$ est

$$Ind(k) = Ind(0) * \prod_{0 < i \leq k} (1 + \tau_{Ind}(i))$$

où $\tau_{Ind}(k)$ est le taux annuel qui représente l'évolution annuelle de l'indice de cotisation à l'année $N + k$.

La cotisation effectuée au cours de l'année $N + k$ par les actifs d'âge x au début de la projection est ainsi :

$$Cotis(x, k) = \frac{Ind(k)}{Ind(0)} * Cotis(x, 0).$$

Nous pouvons aligner le taux annuel d'évolution de l'indice de cotisation sur le taux de cotisation contractuel pour les projections.

2.2.1.3 Evolution de la valeur d'acquisition du point

La valeur d'acquisition du point est le prix d'achat d'un point. Le nombre de points acquis au cours de l'année $N + k$ par les actifs d'âge x au début de la projection s'exprime comme le quotient entre la cotisation effectuée au cours de l'année $N + k$ et la valeur d'acquisition du point à l'année $N + k$.

C'est-à-dire que $n(x, k) = \frac{Cotis(x, k)}{VA(k)}$ avec la valeur d'acquisition du point à l'année $N + k$:

$$VA(k) = VA(0) * \prod_{0 < i \leq k} (1 + \tau_{VA}(i))$$

où $\tau_{VA}(k)$ est le taux annuel qui représente l'évolution de la valeur d'acquisition du point à l'année $N + k$.

2.2.1.4 Evolution de la valeur de service du point

La valeur de service du point est le montant de pension correspondant à un point acquis. L'évolution de la valeur de service du point peut être estimée avec différentes méthodes. Par exemple,

Méthode 1 : indexer sur l'évolution des salaires ;

Méthode 2 : indexer sur l'évolution de IPC hors tabac (l'évolution du taux d'inflation) ;

Méthode 3 : indexer sur l'évolution d'un nouvel indice INSEE appelé « Le salaire moyen par tête » (SMPT).

De manière générale, la valeur de service du point à l'année $N + k$ peut être exprimée comme

$$VS(k) = VS(0) * \prod_{0 < i \leq k} (1 + \tau_{VS}(i))$$

où $\tau_{VS}(k)$ est le taux annuel représentant l'évolution de la valeur de service du point à l'année $N + k$.

La valeur de service du point est utilisée uniquement au moment de la liquidation pour déterminer le niveau de pension. Cette pension, une fois liquidée, sera revalorisée en fonction de l'inflation.

2.2.2 Projections des flux futurs pour le groupe fermé

Cette sous-section est réservée à décrire les projections des flux futurs, notamment les projections de prestations.

Les mêmes notations citées dans le texte précédent sont utilisées sauf mention contraire. La cotisation annuelle par personne en fonction de l'âge x au début de la projection est utilisée dans la réalisation des projections.

2.2.2.1 Projection de droits

La projection de droits concerne l'évolution des droits acquis des actifs du groupe fermé pendant la période active professionnellement en intégrant l'évolution démographique associée.

La projection des droits acquis pour les actifs d'âge x au début de la projection est décrite ci-dessous. Pour l'année $N + k$ avant l'année de retraite, les nouveaux points acquis en cours d'année $N + k$ sont

$$n(x, k) = a(x, k) * \frac{Cotis_ind(x, k)}{VA(k)} = a(x, k) * \frac{Cotis_ind(x, 0)}{VA(k)} * \frac{Ind(k)}{Ind(0)}$$

où $Cotis_ind(x, k)$ est la cotisation moyenne effectuée au cours de l'année $N + k$ par un actif d'âge x au début de la projection.

Donc, le nombre total des points acquis (en stock) à la fin de l'année $N + k$ par les actifs d'âge x au début de la projection est

$$n_{tot}(x, k) = n_{tot}(x, k - 1) * \frac{a(x, k)}{a(x, k - 1)} + n(x, k).$$

2.2.2.2 Projection de rentes

Cette sous-section est dévolue à décrire la projection de rentes pour les retraités existant au début de la projection et aussi pour les retraités issus du groupe des actifs existant au début de la projection.

Le taux d'inflation est supposé à 0% pour la revalorisation de rentes qui sont présentées en euro constant dans les projections.

Projection de rentes

La projection de rentes concerne l'évolution des rentes déjà acquises des retraités en intégrant l'évolution démographique associée.

Le montant des rentes totalement versées est exprimé par :

$$Rente_{tot}(x, k) = Rente_{tot}(x, k - 1) * \frac{r(x, k)}{r(x, k - 1)}.$$

Le montant des rentes est réduit du fait des décès.

Projection de nouvelles rentes

En intégrant l'évolution démographique associée, la projection de nouvelles rentes concerne l'évolution des rentes futures des retraités futurs issus du groupe des actifs existant au début de la projection. Les mêmes notations citées dans le texte précédent sont utilisées sauf mention contraire.

A l'année $N + 1$, le nombre total des points à convertir, acquis par les retraités issus du groupe des actifs d'âge x au début de la projection est

$$n_{tot}(x, 1) = n_{tot}(x, 0) * \frac{f(a(x, 0), 1)}{a(x, 0)} + f(a(x, 0), 1) * \frac{Cotis_ind(x, 1)}{VA(1)} = I + II.$$

Le terme I représente le nombre total des points en stock au début de la projection proratisé par rapport au nombre des nouveaux retraités. Le terme II représente le nombre des nouveaux points acquis durant l'année $N + 1$.

Il en résulte que les nouvelles rentes générées sont $Rente_{tot}(x, 1) = n_{tot}(x, 1) * VS(1)$.

A l'année $N + k$ où $k > 1$, le nombre total des points acquis par les nouveaux retraités $f(a(x, 0), k)$ de l'année $N + k$ est décrit par $f(a(x, 0), k) * \sum_{0 < n \leq k} \frac{Cotis_ind(x, n)}{VA(n)}$.

Le montant des nouvelles rentes versées aux retraités, issus du groupe des actifs d'âge x au début de la projection depuis l'année N est

$$Rente_{tot}(x, k) = Rente_{tot}(x, k - 1) * \frac{\sum_{0 < i \leq k} \tilde{f}(a(x, 0), i, k) - f(a(x, 0), k)}{\sum_{0 < i \leq k-1} \tilde{f}(a(x, 0), i, k - 1)} + f(a(x, 0), k) * \sum_{0 < n \leq k} \frac{Cotis_ind(x, n)}{VA(n)} * VS(k).$$

Le premier terme est le prorata du montant des nouvelles rentes versées à l'année $N + k - 1$ par rapport au nombre estimé à l'année $N + k$ des retraités de l'année $N + k - 1$ car le nombre des retraités de l'année $N + k - 1$ est réduit par les décès. Le deuxième terme est le montant des nouvelles rentes versées aux nouveaux retraités à l'année $N + k$ issus du groupe des actifs d'âge x au début de la projection avec la valeur de service à l'année $N + k$ (au moment de la retraite).

2.2.2.3 Projection de rentes de réversion

La réversion peut arriver à la période active professionnellement et aussi à la période de retraité. Le taux de réversion est noté par τ_{rev} . Cette sous-section est consacrée à décrire la méthode de projection de rentes de réversion pour le groupe fermé. Le taux d'inflation est supposé à 0% pour la revalorisation des rentes de réversion dans les projections.

A l'année $N + 1$, la réversion est issue du groupe soit des actifs, soit des retraités existant au début de la projection.

Si la réversion est issue du groupe des actifs d'âge x au début de la projection, la rente de réversion est

$$n_{tot}(x, 0) * \frac{W(x; y, 1)}{a(x, 0)} * VS(1) * \tau_{rev} .$$

Si la réversion est issue du groupe des retraités d'âge x au début de la projection, la rente de réversion est

$$Rente_{tot}(x, 0) * \frac{W(x; y, 1)}{r(x, 0)} * \tau_{rev} .$$

A l'année $N + k$ où $k > 1$, la réversion est issue du groupe soit des actifs, soit des retraités existant au début de la projection, soit des nouveaux retraités.

Si la réversion est issue du groupe des actifs d'âge x au début de la projection, le montant des rentes acquises par les nouveaux ayants droit $W(x; y, k)$ de l'année $N + k$ est décrit par

$$W(x; y, k) * \sum_{0 < n \leq k} \frac{Cotis_{ind}(x, n)}{VA(n)} * VS(k) .$$

Le montant des rentes de réversion versées aux ayants droit, issus du groupe des actifs d'âge x au début de la projection depuis l'année N est

$$Rente_{tot}(x; y, k) = Rente_{tot}(x; y, k - 1) * \frac{\sum_{0 < i \leq k} \tilde{W}(x; y, k) - W(x; y, k)}{\sum_{0 < i \leq k-1} \tilde{W}(x; y, k - 1)} \\ + W(x; y, k) * \sum_{0 < n \leq k} \frac{Cotis_{ind}(x, n)}{VA(n)} * VS(k) * \tau_{rev} .$$

Le premier terme est le montant des rentes de réversion déjà versées à l'année $N + k - 1$, réduit par les décès, le deuxième terme est le montant des nouvelles rentes de réversion qui sont converties de la totalité des points acquis à l'année $N + k$ en appliquant la valeur de service à l'année $N + k$ et le taux de réversion en supposant que le décès intervienne en fin d'année.

Si la réversion est issue du groupe des retraités d'âge x existant au début de la projection, le montant des rentes de réversion des nouveaux ayants droit $V_1(x; y, k)$ est

$$Rente_{tot}(x, 0) * \frac{V_1(x; y, k)}{r(x, 0)} * \tau_{rev} .$$

Le montant des rentes de réversion versées aux ayants droit, issus du groupe des retraités d'âge x au début de la projection depuis l'année N est

$$\begin{aligned}
& Rente_{tot}(x; y, k) \\
&= Rente_{tot}(x; y, k - 1) * \frac{\sum_{0 < i \leq k-1} V_1(x; y, i) * P_{vie}(0, y; i, k)}{\sum_{0 < i \leq k-2} V_1(x; y, i) * P_{vie}(0, y; i, k - 1) + V_1(x; y, k - 1)} \\
&\quad + Rente_{tot}(x, 0) * \frac{V_1(x; y, k)}{r(x, 0)} * \tau_{rev}.
\end{aligned}$$

Le premier terme est le montant des rentes de réversion déjà versées à l'année $N + k - 1$, réduit par les décès, le deuxième terme est le montant des nouvelles rentes de réversion à l'année $N + k$ qui sont reversées du montant total des rentes existant au début de la projection.

Si la réversion est issue du groupe des nouveaux retraités qui a été construit en se basant sur le groupe des actifs d'âge x au début de la projection, le montant des rentes de réversion des nouveaux ayants droit $V_2(x; y, k)$ est

$$Rente_{tot}(x, k - 1) * \frac{V_2(x; y, k)}{\sum_{0 < i \leq k-1} \tilde{f}(a(x, 0), i, k - 1)} * \tau_{rev}.$$

Le montant des rentes de réversion versées aux ayants droit, issus du groupe des retraités d'âge x au début de la projection depuis l'année N est

$$\begin{aligned}
& Rente_{tot}(x; y, k) \\
&= Rente_{tot}(x; y, k - 1) * \frac{\sum_{0 < i \leq k-1} V_2(x; y, i) * P_{vie}(0, y; i, k)}{\sum_{0 < i \leq k-2} V_2(x; y, i) * P_{vie}(0, y; i, k - 1) + V_2(x; y, k - 1)} \\
&\quad + Rente_{tot}(x, k - 1) * \frac{V_2(x; y, k)}{\sum_{0 < i \leq k-1} \tilde{f}(a(x, 0), i, k - 1)} * \tau_{rev}.
\end{aligned}$$

Le premier terme est le montant des rentes de réversion déjà versées à l'année $N + k - 1$, réduit par les décès, le deuxième terme est le montant des nouvelles rentes de réversion à l'année $N + k$ qui sont reversées du montant total des rentes de l'année $N + k - 1$.

2.2.3 Projections des flux futurs pour le groupe ouvert

Les projections pour le groupe ouvert consistent en les projections du groupe fermé et les projections des nouvelles entrées en régime. Le texte ci-dessous se concentre sur les projections des nouvelles entrées : la projection de droits et la projection de rentes.

2.2.3.1 Projection de droits pour les nouvelles entrées

La projection de droits concerne l'évolution de droits acquis des nouvelles entrées pendant la période active professionnellement en intégrant l'évolution démographique associée.

Rappelons que $a_{new,k}(x)$ désigne le nombre des nouveaux actifs d'âge x à l'année $N + k$ pour $k \geq 1$.

Les nouveaux actifs d'âge x se composent des nouvelles entrées d'âge x en cours d'année et des nouvelles entrées qui sont entrées en régime auparavant, restent actif en atteignant l'âge x en cours d'année.

Le nombre des nouveaux points acquis au cours de l'année $N + k$ par les nouvelles entrées d'âge x en cours d'année est

$$n'(x, k) = g(x, k) * \frac{Cotis_ind'(x, k)}{VA(k)} = g(x, k) * \frac{Cotis_ind'(x, 0)}{VA(k)} * \frac{Ind(k)}{Ind(0)}$$

en supposant que la cotisation moyenne effectuée par un actif d'âge x à l'année $N + k$ par rapport à la cotisation moyenne effectuée par un actif d'âge x à l'année N évolue selon l'évolution de l'indice de cotisation.

Donc, le nombre total des points acquis en stock à la fin de l'année $N + k$ par les nouveaux actifs d'âge x est

$$n'_{tot}(x, k) = n'_{tot}(x - 1, k - 1) * \frac{a_{new, k}(x) - g(x, k)}{a_{new, k-1}(x - 1)} + n(x, k).$$

2.2.3.2 Projection de rentes pour les nouvelles entrées

La projection de rentes pour les nouvelles entrées est décrite dans cette sous-section. Les retraités d'âge x se décomposent des nouveaux retraités d'âge x qui sont arrivés en cours d'année et des retraités qui sont arrivés avant, restent en vie en atteignant l'âge x en cours d'année. Le taux d'inflation est supposé à 0% pour la revalorisation des rentes des nouvelles entrées dans les projections.

A l'année $N + k$, les nouveaux retraités d'âge x ont déjà cotisé depuis l'année d'entrée en régime jusqu'à l'année $N + k$.

Rappelons que $h(x, k)$ désigne le nombre des nouveaux retraités d'âge x à l'année $N + k$ pour $k \geq 1$.

En utilisant les résultats de la projection de droits pour les nouvelles entrées, il en résulte que le montant des nouvelles rentes versées en cours d'année $N + k$ aux nouveaux retraités d'âge x est

$$Rente'(x, k) = n'_{tot}(x - 1, k - 1) * \frac{h(x, k)}{a_{new, k-1}(x - 1)} * VS(k).$$

Le montant des rentes totalement versées en cours d'année $N + k$ aux retraités d'âge x est

$$Rente'_{tot}(x, k) = Rente'_{tot}(x - 1, k - 1) * \frac{\tilde{h}(x, k) - h(x, k)}{\tilde{h}(x - 1, k - 1)} + n'_{tot}(x - 1, k - 1) * \frac{h(x, k)}{a_{new, k-1}(x - 1)} * VS(k).$$

Le premier terme est le montant des rentes déjà versées à l'année $N + k - 1$, réduit par les décès, le deuxième terme est le montant des nouvelles rentes à l'année $N + k$ qui sont converties de la totalité des points acquis par le nombre des nouveaux retraités $h(x, k)$ avec la valeur de service à l'année $N + k$ (au moment de la retraite).

2.2.4 Hypothèses, données en input, analyses et conclusions

Les hypothèses utilisées pour déterminer les projections de droits et de rentes sont décrites dans cette section. Les données en input sont ensuite présentées. En conséquence, les analyses sont amenées sur les résultats et les conclusions en sont retirées.

2.2.4.1 Détermination des hypothèses initiales

1. Evolution des salaires

Le futur taux de cotisation permettant de générer les points est appliqué à l'assiette du salaire brut plafonnée à trois plafonds de la Sécurité sociale (PSS) pour la réforme des retraites. Le salaire brut pris en compte pour la cotisation dépasse rarement trois PSS. Il est donc pertinent de supposer que l'évolution des salaires suit l'évolution de PSS.

Le tableau de l'évolution des PSS historiques est construit selon la source CNAV⁹(Cf. Annexe VII).

L'évolution moyenne des PSS depuis 2001 (l'année de changement de monnaie) est de 1,97%, ceci est retenu pour les projections du mémoire.

2. Evolution du taux de cotisation

Le taux annuel d'évolution de l'indice de cotisation mentionné dans la section 2.2.1.2 comprend l'évolution des salaires et l'évolution du taux de cotisation.

Les notations de la section 2.2.1.2 (Cf. Annexe 1) sont conservées ci-après.

A l'année N , $Cotis(x, 0) = S(x, 0) * \tau_{cotis}^c(x, 0)$.

A l'année $N + k$, $S(x, k) = S(x, 0) * \prod_{0 < i \leq k} (1 + \tau_{salaire}(x, i))$ et

$$\tau_{cotis}^c(x, k) = \tau_{cotis}^c(x, 0) * \prod_{0 < i \leq k} (1 + \tau_{evol_cotis}(x, i))$$

où $\tau_{evol_cotis}(x, i)$ est l'évolution annuelle moyenne du taux de cotisation.

Il en résulte que

$$\begin{aligned} Cotis(x, k) &= S(x, k) * \tau_{cotis}^c(x, k) \\ &= S(x, 0) * \prod_{0 < i \leq k} (1 + \tau_{salaire}(x, i)) * \tau_{cotis}^c(x, 0) * \prod_{0 < i \leq k} (1 + \tau_{evol_cotis}(x, i)) \\ &= Cotis(x, 0) * \prod_{0 < i \leq k} (1 + \tau_{salaire}(x, i)) * (1 + \tau_{evol_cotis}(x, i)). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$Cotis(x, k) = Cotis(x, 0) * \frac{Ind(k)}{Ind(0)} = Cotis(x, 0) * \prod_{0 < i \leq k} (1 + \tau_{Ind}(i)).$$

Nous pouvons avoir $\prod_{0 < i \leq k} (1 + \tau_{Ind}(i)) = \prod_{0 < i \leq k} (1 + \tau_{salaire}(x, i)) * (1 + \tau_{evol_cotis}(x, i))$.

Donc, $\tau_{Ind}(i) = (1 + \tau_{salaire}(x, i)) * (1 + \tau_{evol_cotis}(x, i)) - 1, \forall i$.

Dans le cadre de la réforme des retraites, le taux de cotisation à l'assurance vieillesse plafonnée sera à 25,31% sur le salaire brut à hauteur de trois plafonds de la Sécurité sociale pour le régime général et le taux de cotisation à l'assurance vieillesse déplafonnée reste à 2,81 % sur la totalité du salaire brut.

Les cotisations plafonnées sont utilisées pour générer les points et les cotisations déplafonnées sont utilisées pour financier le régime sans génération de points. Les cotisations plafonnées sont donc dans

⁹ https://www.legislation.cnaf.fr/Pages/bareme.aspx?Nom=salaire_plafond_soumis_cotisation_bar

le périmètre des projections. Ce taux n'aura pas d'évolution dans le temps car il atteint le maximum selon la réglementation de l'Union Européen.

A la place du taux de cotisation historique (Cf. Annexe VIII), le taux de cotisation future dans le cadre de la réforme des retraites est retenu pour les projections réalisées dans le cadre de ce mémoire.

Selon les paramètres retenus dans le texte ci-dessus, le taux annuel d'évolution de l'indice de cotisation est $(1 + 1,97\%) * (1 + 0\%) - 1 = 1,97\%$, qui est ainsi utilisé dans les projections.

3. Evolution de la valeur d'acquisition du point et de la valeur de service du point

La valeur d'acquisition du point d'AGIRC-ARRCO est de 17,4 € et la valeur de service du point d'AGIRC-ARRCO de 1,27 € pour l'année d'effet 2020 (Cf. Annexe IX). L'évolution annuelle historique de la valeur de service du point d'AGIRC-ARRCO est très proche de l'inflation. Le taux de rendement historique se trouve à 5,76% en tenant compte du taux d'appel (7,31% sans taux d'appel).

Dans le cadre de la réforme des retraites, le taux de rendement est fixé à 5,5%¹⁰. Il en résulte que la valeur d'acquisition du point est ajustée à 23,12 € (sans taux d'appel) qui est ainsi retenue dans les projections pour que le taux de rendement reste figé à 5,5%. L'évolution annuelle historique de la valeur de service du point d'AGIRC-ARRCO proche de l'inflation est utilisée pour l'évolution de la valeur d'acquisition du point et de la valeur de service du point des projections.

2.2.4.2 Données en input et analyses de données

- **Cotisation annuelle moyenne**

La répartition du salaire annuel net moyen en équivalent temps plein par tranche d'âge (Cf. Annexe X) est celle en 2018 à laquelle le taux de 1,2%¹¹ est appliqué. Donc, la répartition du salaire annuel net moyen en équivalent temps plein par tranche d'âge en 2019 est :

Moins de 25 ans	18 226,12 €
De 25 à 39 ans	25 735,16 €
De 40 à 49 ans	31 098,76 €
De 50 à 54 ans	32 141,12 €
55 ans ou plus	34 225,84 €

Le salaire annuel net moyen en 2019 s'élève ainsi à 28 285€. Le salaire mensuel brut moyen en 2019 est de 3 183 € selon la source INSEE¹². C'est-à-dire que le salaire annuel brut moyen en 2019 est de 38 196 €. En appliquant le taux de conversion (135,04%), nous pouvons créer une assiette du salaire annuel brut par tranche d'âge à laquelle les taux de cotisation (plafonnée et déplafonnée) sont appliqués.

¹⁰ https://travail-emploi.gouv.fr/IMG/pdf/retraite_01-09_leger.pdf

¹¹ <https://www.insee.fr/fr/statistiques/5396066>

¹² <https://www.insee.fr/fr/statistiques/5396066>

Répartition du salaire annuel brut moyen par tranche d'âge

Moins de 25 ans	24 612,16 €
De 25 à 39 ans	34 752,21 €
De 40 à 49 ans	41 995,10 €
De 50 à 54 ans	43 402,68 €
55 ans ou plus	46 217,84 €

La répartition de cotisation annuelle moyenne retenue est :

Cotisation par tranche d'âge

Moins de 25 ans	6 229,34 €
De 25 à 39 ans	8 795,78 €
De 40 à 49 ans	10 628,96 €
De 50 à 54 ans	10 985,22 €
55 ans ou plus	11 697,74 €

- **Points ou pensions en stock au début de la projection**

La pension mensuelle moyenne en 2019 est autour de 1 500 € brut¹³. Donc, la pension annuelle moyenne de 18 000€ est utilisée en input. Comme la valeur de service du point est de 1,2714€, donc l'acquisition moyenne des points totaux par un retraité est de 18 000/1,2714 = 14 157,62 points.

L'âge minimum légal de départ à la retraite est de 62 ans, l'âge maximum de départ à la retraite est fixé à 70 ans et l'âge minimum d'entrée en régime à 18 ans. Les actifs peuvent partir en retraite à partir de 62 ans, il convient donc d'appliquer la probabilité de retraite au nombre moyen des points acquis annuellement pour l'âge x entre 62 ans et 70 ans.

D'une part, le montant des cotisations est le produit entre le nombre moyen des points acquis annuellement et la valeur d'acquisition du point ajustée de 23,12 €, d'autre part, le montant des cotisations peut être approché par le produit entre le salaire annuel brut moyen de 38 196€ et le taux de cotisation de 25,31%. Il s'ensuit que le nombre moyen des points acquis annuellement est

$$38\,196 * 25,31\% / 23,12 = 418,14.$$

La durée réelle moyenne de cotisations à temps plein est ainsi de 33,859 ans pour avoir les points totaux de 14 157,62 points.

Entre 18 ans et 61 ans, la durée complète de cotisation à temps plein est de 43 ans. Nous supposons que les actifs entre 62 ans et 69 ans restant en emplois cotisent à temps plein. En utilisant les notations de la section 2.1.1.2 (Cf. Annexe 1), la durée complète de cotisations est estimée comme ci-dessous :

$$p_{act}(0,61; 0,1) + p_{act}(0,61; 0,1) * p_{act}(0,62; 0,1) + \dots + \prod_{i=0}^7 p_{act}(0,61 + i; 0,1)$$

En appliquant la probabilité de prise de retraite déterminée dans la section 2.1.3.1, nous pouvons avoir

¹³ https://drees.solidarites-sante.gouv.fr/sites/default/files/2021-06/Retrait%C3%A9%202021_Web_%20fiche%205.pdf

$p_{act}(0,61; 0,1)$	$1 - 78,5\% = 21,5\%$
$p_{act}(0,62; 0,1)$	$1 - 21,9\% = 78,1\%$
$p_{act}(0,63; 0,1)$	$1 - 20,8\% = 79,2\%$
$p_{act}(0,64; 0,1)$	$1 - 36,8\% = 63,2\%$
$p_{act}(0,65; 0,1)$	$1 - 23,8\% = 76,2\%$
$p_{act}(0,66; 0,1)$	$1 - 18,8\% = 81,2\%$
$p_{act}(0,67; 0,1)$	$1 - 13,5\% = 86,5\%$
$p_{act}(0,68; 0,1)$	$1 - 15,6\% = 84,4\%$

Il s'ensuit que

$$21,5\% + 16,8\% + 13,3\% + 8,4\% + 6,4\% + 5,2\% + 4,5\% + 3,8\% = 0,799 .$$

La durée complète de cotisations à temps plein entre 18 ans et 69 ans est ainsi : $43 + 0,799 = 43,799$. Le fait que la durée réelle moyenne de cotisations à temps plein est de 33,859 ans signifie qu'il y a $33,859/43,799 = 77,3\%$ de probabilité pour un actif de cotiser à temps plein pour récupérer annuellement le nombre moyen des points de 418,14. Donc, un actif peut récupérer probablement annuellement le nombre moyen des points de 323,24 (soit $418,14 * 77,3\%$).

Il s'agit donc de résoudre l'équation ci-après :

$$43 * n + \left\{ p_{act}(0,61; 0,1) + p_{act}(0,61; 0,1) * p_{act}(0,62; 0,1) + \dots + \prod_{i=0}^7 p_{act}(0,61 + i; 0,1) \right\} * n = 14\,157,62 .$$

où n est le nombre moyen des points acquis annuellement probablement.

Il en résulte que $n = 323,24$.

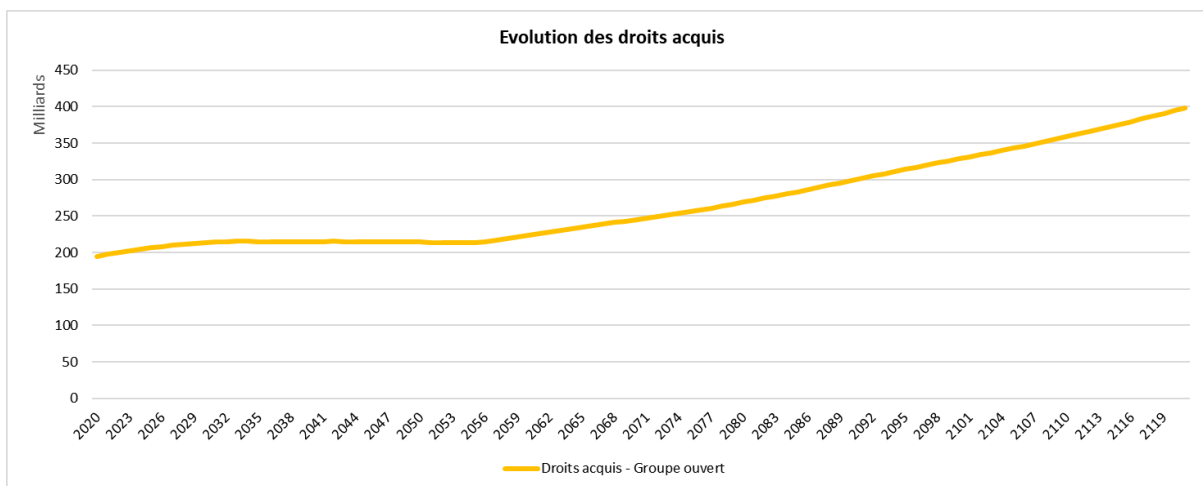
2.2.4.3 Analyses des résultats et conclusions

Nous nous concentrons sur les résultats du groupe ouvert.

Les droits acquis sont convertis en rentes à partir du moment du départ en retraite. Les actifs existant au début de la projection partent très majoritairement en retraite avant l'année 2063. A partir de l'année 2063, les droits acquis sont ceux acquis majoritairement par les nouvelles entrées.

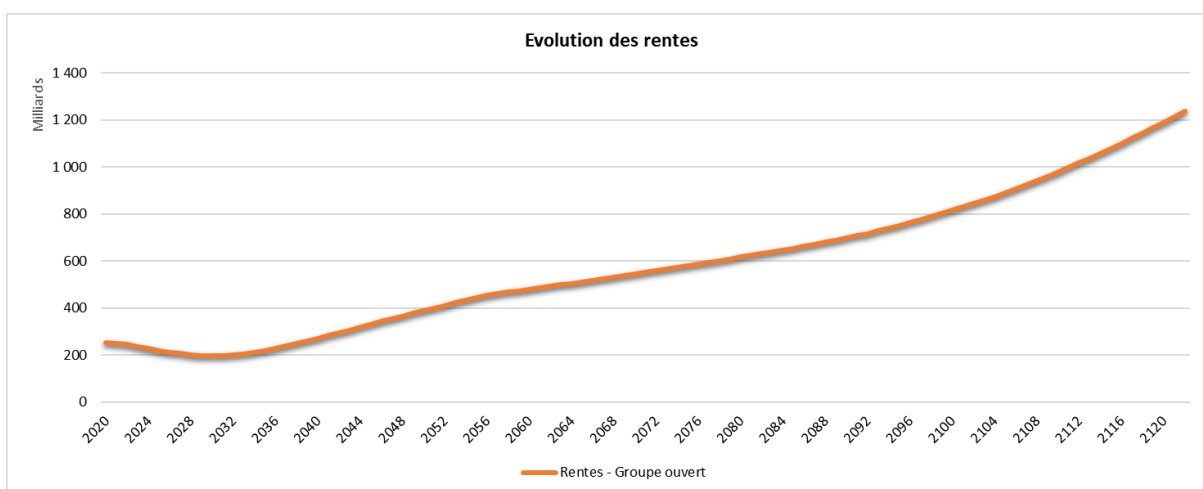
La diminution des droits acquis du groupe fermé est compensée par les droits acquis par les nouvelles entrées. Les droits acquis sont représentés par le nombre des points acquis. Le graphe ci-dessous montre que le nombre des points acquis du groupe ouvert se stabilise pendant les 40 premières années de la projection. En l'absence de départs en retraite, le nombre des points acquis s'accumulerait d'une année à l'autre, et la courbe de l'évolution des droits acquis aurait une tendance à la hausse. La stabilité de la courbe signifie donc que l'augmentation des points acquis d'une année à l'autre est compensée par la diminution du nombre des points acquis d'une année à l'autre du fait des départs à la retraite.

Ceci traduit la cohérence entre les données en input, les hypothèses alignées avec le nouveau régime et la stratégie de l'injection de nouvelles entrées.

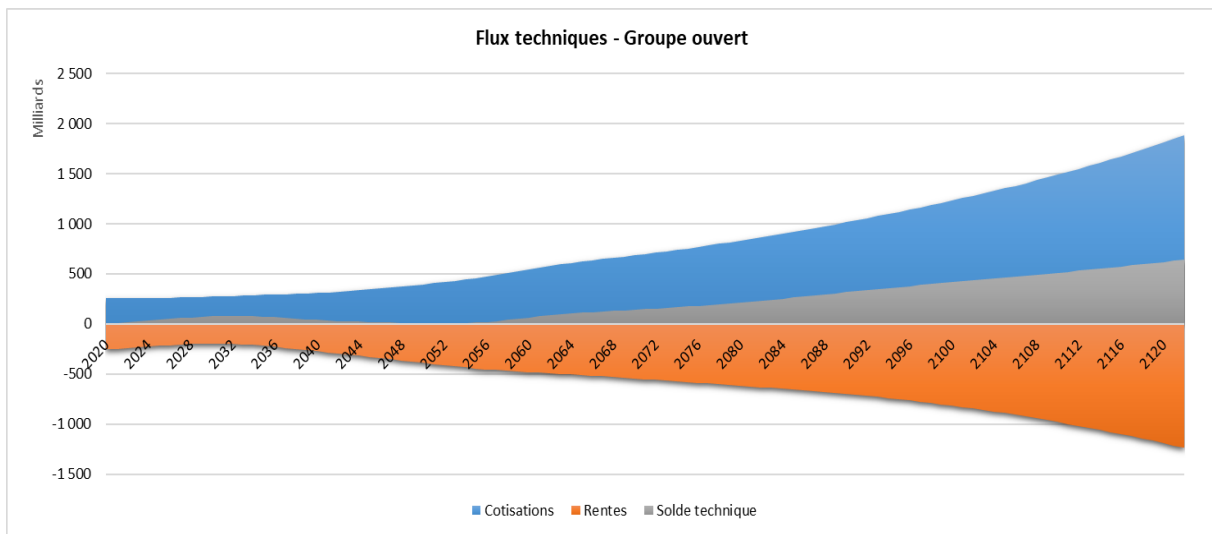


Les nouvelles entrées se composent d'actifs et d'inactifs. Les inactifs existent à partir de 25 ans. Les rentes négatives sont les rentes manquantes pour les inactifs. Les rentes deviennent positives grâce aux recrutements des actifs d'une année à l'autre. Plus la probabilité de recrutement est élevée, plus l'effet des rentes des nouvelles entrées sera significatif. La fluctuation entre les années 2020 et 2063 est expliquée par l'augmentation continue de la valeur de service du point, par la nouvelle conversion en rentes et par le décès des retraités. La tendance à la hausse montre qu'il y a plus de nouvelles rentes générées que les rentes de retraités décédés.

Le graphique ci-dessous représente les rentes du groupe ouvert.



Les flux techniques probables sont simulés ci-après :



Le solde technique est proche de 0 au début de la projection. Le régime est en équilibre au point de départ. La tendance du solde technique s'améliore au fur et à mesure.

Le solde technique est impacté sensiblement par les nouvelles entrées à long terme.

Chapitre 3 : Création de scénarios économiques

Dans ce chapitre sont présentés les scénarios économiques qui seront utilisés dans le chapitre 4.

Les concepts et définitions sont rappelés dans un premier temps. Les relations entre différents taux ainsi que les raisonnements sous-jacents aux formules définissant ces taux sont notamment mis en évidence. La méthode d'interpolation log-linéaire est aussi mentionnée dans le contexte de la création de scénarios économiques. Ensuite, nous abordons la construction des courbes de taux forward.

Les différentes méthodes ou modèles sont décrits, qui constituent la théorie de base pour la construction des courbes de taux forward. Trois groupes des courbes de taux forward sont ainsi construits. Chaque groupe de courbes de taux forward représente un scénario économique remarquable.

3.1 Théorie de base

Cette section est réservée à décrire la théorie de base dans le périmètre de la finance de marché.

3.1.1 Différents taux

1. Taux zéro coupon

Le taux zéro coupon est le taux de coupon d'une obligation zéro coupon. Il est rappelé que l'obligation zéro coupon est une obligation qui distribue un seul coupon à sa maturité avec le remboursement de son principal.

Le taux zéro coupon annuel de maturité T est noté par $R(0, T)$.

Le prix actuel d'une obligation zéro coupon de 1€ de maturité T est $P_{ZC}(0, T) = e^{-R(0, T)*T}$.

2. Facteur d'actualisation (discount factor)

Le facteur d'actualisation noté par $DF(0, T)$ calcule la valeur actuelle d'un flux futur.

Nous avons les relations ci-dessous entre le taux zéro coupon et le facteur d'actualisation.

Le facteur d'actualisation proportionnelle/linéaire est :

$$DF(0, T) = \frac{1}{1 + R(0, T) * T} ,$$

le facteur d'actualisation composé :

$$DF(0, T) = \frac{1}{(1 + R(0, T))^T} ,$$

et le facteur d'actualisation continu : $DF(0, T) = e^{-R(0, T)*T}$.

Nous savons que le prix actuel d'une obligation zéro coupon de 1€ de maturité T peut être utilisé comme un facteur d'actualisation continu (discount pricing function).

3. Taux forward

Le taux forward noté par $\tau(t, T_1, T_2)$ est un taux, observé à une date donnée t , débutant à une date début future T_1 et terminant à une date fin future T_2 .

Les taux forward sont implicites dans les taux zéro coupon d'aujourd'hui. Autrement dit, les taux forward peuvent être déduits d'une courbe de taux zéro coupon ou d'une courbe de facteurs d'actualisation.

Taux forward linéaire

Le taux d'intérêt pour un prêt de 1€ de maturité T_1 est supposé de $R(0, T_1)$. A la date T_1 , le prêt est remboursé d'un montant de $1 + R(0, T_1) * T_1$, le montant de $1 + R(0, T_1) * T_1$ sera réinvesti avec le taux forward $\tau(0, T_1, T_2)$ pour une maturité $T_2 - T_1$, le remboursement à la date T_2 sera $(1 + R(0, T_1) * T_1) * (1 + \tau(0, T_1, T_2) * (T_2 - T_1))$. Les opérations financières ci-avant amèneront le même montant de remboursement qu'un prêt de 1€ de maturité T_2 ayant un taux d'intérêt de $R(0, T_2)$.

C'est-à-dire que $(1 + R(0, T_1) * T_1) * (1 + \tau(0, T_1, T_2) * (T_2 - T_1)) = 1 + R(0, T_2) * T_2$.

A partir de cette équation, il résulte que

$$\tau(0, T_1, T_2) = \left(\frac{1 + R(0, T_2) * T_2}{1 + R(0, T_1) * T_1} - 1 \right) * \frac{1}{T_2 - T_1} = \left(\frac{DF(0, T_1)}{DF(0, T_2)} - 1 \right) * \frac{1}{T_2 - T_1}.$$

Taux forward composé

Par le même principe que celui du calcul de taux forward linéaire,

$$(1 + \tau(0, T_1, T_2))^{T_2 - T_1} = \frac{(1 + R(0, T_2))^{T_2}}{(1 + R(0, T_1))^{T_1}} = \frac{DF(0, T_1)}{DF(0, T_2)}.$$

C'est-à-dire que

$$\tau(0, T_1, T_2) = \left(\frac{DF(0, T_1)}{DF(0, T_2)} \right)^{\frac{1}{T_2 - T_1}} - 1.$$

Taux forward continu

De même façon, nous pouvons avoir

$$e^{R(0, T_1) * T_1} * e^{\tau(0, T_1, T_2) * (T_2 - T_1)} = e^{R(0, T_2) * T_2}.$$

$$\text{Donc, } \tau(0, T_1, T_2) = \ln\left(\frac{DF(0, T_1)}{DF(0, T_2)}\right) * \frac{1}{T_2 - T_1}.$$

4. Taux forward instantané

Le taux forward instantané est un spot rate à l'instant futur. Cette section explique comment le taux forward instantané peut être interprété par le taux zéro coupon et le prix de zéro coupon.

Nous supposons qu'un montant d'un euro est investi aujourd'hui dans le marché.

Les opérations financières (A) sont

1) Prêter ce montant d'un euro pendant une durée de T_1

2) A la maturité de T_1 , réinvestir le prêt d'un euro et les intérêts générés de l'opération 1) pour une durée de $T_2 - T_1$

L'opération financière (B) est :

- Prêter ce montant d'un euro pendant une durée de T_2 .

L'hypothèse est que les opérations financières (A) apportent autant d'intérêts que l'opération financière (B).

En utilisant les mêmes notations que dans le texte ci-avant et les taux linéaires, nous pouvons avoir

$$(1 + R(0, T_1) * T_1) * (1 + \tau(0, T_1, T_2) * (T_2 - T_1)) = 1 + R(0, T_2) * T_2$$

$$\Leftrightarrow R(0, T_1) * T_1 + (1 + R(0, T_1) * T_1) * \tau(0, T_1, T_2) * (T_2 - T_1) = R(0, T_2) * T_2.$$

Il en résulte que

$$\tau(0, T_1, T_2) = \frac{R(0, T_2) * T_2 - R(0, T_1) * T_1}{(1 + R(0, T_1) * T_1) * (T_2 - T_1)}$$

$$= \frac{R(0, T_2) * (T_2 - T_1)}{(1 + R(0, T_1) * T_1) * (T_2 - T_1)} + \frac{(R(0, T_2) - R(0, T_1)) * T_1}{(1 + R(0, T_1) * T_1) * (T_2 - T_1)}$$

$$= \frac{R(0, T_2)}{1 + R(0, T_1) * T_1} + \frac{R(0, T_2) - R(0, T_1)}{(T_2 - T_1)} * \frac{T_1}{1 + R(0, T_1) * T_1}.$$

Si T_2 tends vers T_1 et $T_1 = T$, le taux forward instantané linéaire à la maturité T est

$\tau(0, T, T + dT)$

$$= \lim_{T_2 \rightarrow T_1; T_1 = T} \tau(0, T_1, T_2)$$

$$= \frac{R(0, T)}{1 + R(0, T) * T} + \frac{dR(0, T)}{dT} * \frac{T}{1 + R(0, T) * T}. \quad (3.1)$$

En utilisant les taux continus,

$$e^{R(0, T_1) * T_1} * e^{\tau(0, T_1, T_2) * (T_2 - T_1)} = e^{R(0, T_2) * T_2}$$

$$\Leftrightarrow R(0, T_1) * T_1 + \tau(0, T_1, T_2) * (T_2 - T_1) = R(0, T_2) * T_2.$$

Donc, le taux forward instantané continu est

$$\tau(0, T, T + dT) = R(0, T) + \frac{dR(0, T)}{dT} * T. \quad (3.2)$$

Si les intérêts générés pendant la durée T_1 ne sont pas capitalisés pendant la durée ultérieure de $T_2 - T_1$, l'opération 2) consiste à réinvestir le prêt d'un euro pour une durée de $T_2 - T_1$.

En supposant que les opérations financières 1) et 2) apportent autant d'intérêts que l'opération financière (B), nous pouvons avoir

$$R(0, T_1) * T_1 + \tau(0, T_1, T_2) * (T_2 - T_1) = R(0, T_2) * T_2$$

$$\Rightarrow \tau(0, T_1, T_2) = R(0, T_2) + \frac{R(0, T_2) - R(0, T_1)}{(T_2 - T_1)} * T_1.$$

Avec cette hypothèse, le taux forward instantané linéaire est donc :

$$\tau(0, T, T + dT) = R(0, T) + \frac{dR(0, T)}{dT} * T. \quad (3.3)$$

qui a la même expression mathématique que celle de la formule (3.2).

$$\text{Dans le cas continu, le prix de zéro coupon } P_{ZC}(0, T) = e^{-R(0, T)*T}, R(0, T) = -\frac{\ln P_{ZC}(0, T)}{T}. \quad (3.4)$$

En utilisant la formule (3.4) pour remplacer $R(0, T)$ de la formule (3.2), il en résulte que

$$\tau(0, T, T + dT) = -\frac{d \ln P_{ZC}(0, T)}{dT}. \quad (3.5)$$

5. Yield rate

Le yield rate est un taux de rendement qui peut être le taux de coupon annuel d'une obligation classique (distribuant un coupon chaque année).

Le yield rate pour la maturité T est noté par $Y(T)$. Les taux zéro coupon sont inhérents aux yield rates, ainsi qu'aux facteurs d'actualisation.

Il est supposé que le prix actuel de l'obligation soit de 1€ et que l'échéancier de coupons soit $\{T_0, T_1, \dots, T_n\}$ avec $T_0 = 0$ et $T_n = T$.

$$Y(T) * \tau_1 * DF(0, T_1) + Y(T) * \tau_2 * DF(0, T_2) + \dots + Y(T) * \tau_{n-1} * DF(0, T_{n-1}) + (1 + Y(T) * \tau_n) * DF(0, T) = 1. \quad (3.6)$$

Avec $\tau_i = T_i - T_{i-1}$.

$$\text{Il en résulte que } Y(T) = \frac{1 - DF(0, T)}{\sum_{i=1}^n \tau_i * DF(0, T_i)}. \quad (3.7)$$

Nous pouvons aussi avoir le facteur d'actualisation de manière récurrente :

$$DF(0, T) = \frac{1 - \sum_{i=1}^{n-1} Y(T) * \tau_i * DF(0, T_i)}{1 + Y(T) * \tau_n}. \quad (3.8)$$

6. Ultimate forward rate (UFR)

Dans le contexte de Solvabilité 2, l'ultimate forward rate avant la limitation de la variation annuelle est la somme d'un taux réel attendu et d'un taux d'inflation attendu.

Le tableau suivant présente l'évolution de l'ultimate forward rate depuis son existence.

Initial	2018	2019	2020	2021
4,20%	4,05%	3,90%	3,75%	3,60%

Le taux réel attendu est la moyenne arithmétique simple des taux réels annuels de 1961 à l'année précédant le recalcul des ultimate forward rates.

L'ultimate forward rate est estimé en se basant sur le taux réel attendu et est indexé sur l'évolution du taux d'inflation. L'évolution de l'ultimate forward rate est ainsi anticipée grâce aux données historiques.

L'ultimate forward rate est utilisé comme le taux vers lequel l'évolution de taux converge.

3.1.2 Méthode d'interpolation

La courbe de taux est construite par interpolation.

Le taux peut être négatif dans la situation actuelle. Aussi, afin d'éviter les problèmes opérationnels dans le logiciel informatique, la méthode d'interpolation peut être appliquée à la construction de la courbe de facteurs d'actualisation.

Interpolation log-linéaire

Nous supposons que nous connaissons $DF(0, T_0)$ et $DF(0, T_n)$, en appliquant la méthode d'interpolation log-linéaire,

$$\ln DF(0, T_1) = \frac{n-1}{n} * \ln DF(0, T_0) + \frac{1}{n} * \ln DF(0, T_n),$$

$$\ln DF(0, T_2) = \frac{n-2}{n} * \ln DF(0, T_0) + \frac{2}{n} * \ln DF(0, T_n).$$

Donc, $DF(0, T_1) = \exp\left(\frac{n-1}{n} * \ln DF(0, T_0) + \frac{1}{n} * \ln DF(0, T_n)\right)$.

C'est-à-dire $DF(0, T_1) = DF(0, T_0)^{\frac{n-1}{n}} * DF(0, T_n)^{\frac{1}{n}}$.

Par le même raisonnement, $DF(0, T_2) = DF(0, T_0)^{\frac{n-2}{n}} * DF(0, T_n)^{\frac{2}{n}}$.

Selon la formule pour le calcul de taux forward linéaire à partir du facteur d'actualisation,

$$\tau(0, T_0, T_1) = \left(\frac{DF(0, T_0)}{DF(0, T_1)} - 1 \right) * \frac{1}{T_1 - T_0} = \left[\left(\frac{DF(0, T_0)}{DF(0, T_n)} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] * \frac{1}{T_1 - T_0}$$

$$\text{et } \tau(0, T_1, T_2) = \left[\left(\frac{DF(0, T_0)}{DF(0, T_n)} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] * \frac{1}{T_2 - T_1}.$$

Si $T_2 - T_1 = T_1 - T_0$, alors $\tau(0, T_0, T_1) = \tau(0, T_1, T_2)$.

La technique de l'interpolation log linéaire permet d'obtenir un taux forward constant par morceaux. Cette méthode permet de construire une courbe de taux forward de manière continue si chaque intervalle d'interpolation est infiniment petit.

3.2 Construction de la courbe de taux

Il existe deux classes d'algorithmes de construction de la courbe de taux : Best fit et Exact fit.

L'algorithme Best Fit consiste à construire la courbe de taux à partir d'un modèle présumé et à calibrer ses paramètres à l'aide d'une sélection d'instruments de calibrage cotés sur le marché, de manière à minimiser l'erreur de réévaluation.

L'algorithme Best Fit est appliqué au modèle Nelson-Siegel-Svensson et au modèle Smith-Wilson.

3.2.1 Modèle Nelson-Siegel-Svensson (NSS)

Dans cette section, le modèle Nelson-Siegel-Svensson est présenté et commenté. Le calibrage des paramètres de ce modèle est également décrit. Les résultats de calibrage sont analysés à la fin de cette section.

3.2.1.1 Description du modèle Nelson-Siegel-Svensson (NSS)

La formule du modèle Nelson-Siegel-Svensson est :

$$R(0, T) = \beta_1 + \beta_2 * \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\lambda_1}\right)}{\frac{T}{\lambda_1}} + \beta_3 * \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\lambda_1}\right)}{\frac{T}{\lambda_1}} - \exp\left(-\frac{T}{\lambda_1}\right) \right) + \beta_4 * \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\lambda_2}\right)}{\frac{T}{\lambda_2}} - \exp\left(-\frac{T}{\lambda_2}\right) \right)$$

où T est la maturité du taux ZC calculé ;

β_1 est indépendant du temps et est donc souvent interprété comme le niveau de rendement à long terme ;

β_2 est pondéré par une fonction de maturité T notée par $f_{\beta_2}(\lambda_1, T)$, et $f_{\beta_2}(\lambda_1, T) = \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\lambda_1}\right)}{\frac{T}{\lambda_1}}$,

$$\lim_{T \rightarrow 0} f_{\beta_2}(\lambda_1, T) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\lambda_1}\right)}{\frac{T}{\lambda_1}} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{d\left(1 - \exp\left(-\frac{T}{\lambda_1}\right)\right)}{\frac{d\left(\frac{T}{\lambda_1}\right)}{dT}} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\lambda_1} * \exp\left(-\frac{T}{\lambda_1}\right)}{\frac{1}{\lambda_1}} = 1.$$

Par continuité, cette fonction $f_{\beta_2}(\lambda_1, T)$ est prolongée naturellement à 1 pour $T = 0$ et décroît en $\frac{1}{\lambda_1}$

(de façon hyperbolique) vers zéro lorsque T croît car $1 - \exp\left(-\frac{T}{\lambda_1}\right)$ est borné par 1. Les propriétés de cette fonction limitent l'impact de β_2 sur une durée courte.

β_3 est également pondéré par une fonction de maturité T notée par $f_{\beta_3}(\lambda_1, T)$,

$$\lim_{T \rightarrow 0} f_{\beta_3}(\lambda_1, T) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\lambda_1}\right)}{\frac{T}{\lambda_1}} - \exp\left(-\frac{T}{\lambda_1}\right) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\lambda_1} * \exp\left(-\frac{T}{\lambda_1}\right)}{\frac{1}{\lambda_1}} - 1 = 0.$$

Par continuité, cette fonction est prolongée naturellement à 0 pour $T = 0$.

$$\frac{df_{\beta_3}(\lambda_1, T)}{dT} = \frac{\exp(-x) * (x^2 + x + 1) - 1}{x^2} * \frac{1}{\lambda_1}$$

avec $x = \frac{T}{\lambda_1}$.

Quand x est suffisamment petit tel que $x^2 + x + 1 > \exp(x)$, $f_{\beta_3}(\lambda_1, T)$ augmente.

Quand x est suffisamment grand tel que $x^2 + x + 1 < \exp(x)$, $f_{\beta_3}(\lambda_1, T)$ diminue.

Cette fonction ajoute donc une bosse à la courbe.

Le paramètre λ_1 détermine la durée impactée par β_2 et aussi la position de la bosse sur la courbe via le paramètre β_3 .

Afin d'ajuster la forme de la courbure de la courbe, les paramètres λ_2 et β_4 sont ajoutés.

3.2.1.2 Calibrage des paramètres du modèle Nelson-Siegel-Svensson (NSS)

En initialisant les paramètres du modèle Nelson-Siegel-Svensson (NSS), à chaque maturité T , nous pouvons calculer un taux zéro coupon $R(0, T)$ via ce modèle.

Pour chaque T , nous pouvons récupérer un prix d'obligation de maturité T au marché.

Pour éviter les problèmes de volatilité, les prix des obligations du marché ayant une notation supérieure ou égale à AA sont pris pour le calibrage des paramètres. Le taux zéro coupon implicite dans le prix des obligations du marché, noté par $R^m(0, T)$, peut être déduit selon la section 3.1.

A une série de maturités $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, correspond une série de taux zéro coupon calculés $\mathbb{R} = \{R(0, T_1), R(0, T_2), \dots, R(0, T_n)\}$ et une série de taux zéro coupon du marché $\mathbb{R}^m = \{R^m(0, T_1), R^m(0, T_2), \dots, R^m(0, T_n)\}$.

Les paramètres sont calibrés en minimisant la variation entre les vecteurs \mathbb{R} et \mathbb{R}^m , autrement dit en minimisant la norme-2 de $\mathbb{R} - \mathbb{R}^m$.

Donc, $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \lambda_1, \lambda_2\} = \text{Arg min} \|\mathbb{R} - \mathbb{R}^m\|_2 = \text{Arg min} (\sum_{i=1}^n |R(0, T_i) - R^m(0, T_i)|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Une méthode alternative du calibrage des paramètres est de minimiser la variation entre le prix d'obligation théorique et le prix d'obligation du marché.

Le taux de coupon d'obligation de maturité T observé au marché est noté par $Y(T)$. L'échéancier de coupons est $\{T_0, T_1, \dots, T_n\}$ avec $T_0 = 0$ et $T_n = T$.

De même, le prix d'obligation théorique, noté par $P(0, T)$, peut être calculé en se basant sur le taux zéro coupon calculé via le modèle NSS et en appliquant la relation entre le taux zéro coupon et le facteur d'actualisation. Rappelons que

$$P(0, T) = 100 * \{Y(T) * \tau_1 * DF(0, T_1) + Y(T) * \tau_2 * DF(0, T_2) + \dots + Y(T) * \tau_{n-1} * DF(0, T_{n-1}) + (1 + Y(T) * \tau_n) * DF(0, T)\}$$

avec $\tau_i = T_i - T_{i-1}$.

3.2.2. Modèle Smith-Wilson (SW)

3.2.2.1 Description du modèle Smith-Wilson (SW)

Le modèle Smith-Wilson est adopté par l'EIOPA pour la construction de la courbe des taux sans risque. L'intérêt de ce modèle est d'intégrer l'évolution réglementaire sur le calcul de l'UFR. Mais le point faible est qu'il existe une certaine quantité de paramètres à estimer.

La fonction d'actualisation des prix (discount pricing function) notée par $p(v)$ selon le modèle Smith-Wilson s'exprime :

$$p(v) = \exp(-\omega * v) + \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^m W(v, u_i) c_{ij} \quad (3.9)$$

avec

$$\begin{aligned} W(v, u_i) &= \exp(-\omega * (v + u_i)) \\ &\quad * \{ \alpha * \min(v, u_i) - 0,5 \exp(-\alpha * \max(v, u_i)) \\ &\quad * [\exp(\alpha * \min(v, u_i)) - \exp(-\alpha * \min(v, u_i))] \} \\ &= \exp(-\omega * (v + u_i)) * \{ \alpha * \min(v, u_i) - \exp(-\alpha * \max(v, u_i)) * \sinh(\alpha * \min(v, u_i)) \} \end{aligned}$$

où ω est l'ultimate forward intensity et $\omega = \ln(1 + UFR)$;

v est la durée jusqu'à l'échéance de la fonction d'actualisation des prix ;

n est le nombre des instruments financiers ;

m est le nombre des durées observées jusqu'à l'échéance des instruments financiers ;

u_i est la i -ème durée observée ;

α est une mesure de la vitesse de convergence vers l'UFR ;

c_{ij} est le cash flow de l'instrument financier j après la durée u_i .

Le modèle Smith-Wilson se présente sous la forme matricielle ci-dessous afin de faciliter/éclaircir la description.

Nous adoptons les notations suivantes pour la description du modèle Smith-Wilson (SW) :

$\mathbb{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}^T$ est le vecteur de m durées observées jusqu'à l'échéance des instruments financiers ;

$\mathbb{C} = (c_{ij})_{mn}$ est la matrice des cash flow de n instruments financiers avec $c_{ij} \geq 0$;

$\mathbb{d} = \exp(-\omega \mathbb{u}) = \{\exp(-\omega u_1), \exp(-\omega u_2), \dots, \exp(-\omega u_m)\}^T$ est la matrice des actualisations de \mathbb{u} avec l'ultimate forward intensity ω .

Si $v = \mathbb{u}$, $p(\mathbb{u}) = \{p(u_1), p(u_2), \dots, p(u_m)\}^T$ et $W(\mathbb{u}, \mathbb{u}) = (W(u_i, u_j))_{mm}$.

Donc, la formule (3.9) s'exprime comme

$$p(\mathbb{u}) = \exp(-\omega \mathbb{u}) + W(\mathbb{u}, \mathbb{u}) \mathbb{C} \mathbb{b} = \mathbb{d} + W(\mathbb{u}, \mathbb{u}) \mathbb{C} \mathbb{b}$$

où $\mathbb{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}^T$.

Il en résulte que les n équations linéaires de \mathbb{b} sont

$$\mathbb{C}^T p(\mathbb{u}) = \mathbb{C}^T \mathbb{d} + \mathbb{C}^T W(\mathbb{u}, \mathbb{u}) \mathbb{C} \mathbb{b}.$$

En supposant que \mathbb{p} représente les prix de marché observés de n instruments financiers (soit $\mathbb{p} = \mathbb{C}^T p(\mathbb{u})$), alors,

$$\mathbb{b} = (\mathbb{C}^T W(\mathbb{u}, \mathbb{u}) \mathbb{C})^{-1} (\mathbb{p} - \mathbb{C}^T \mathbb{d})$$

où \mathbb{b} est déterminé par ω et α .

Si $m = n$, et la matrice des cash flow $\mathbb{C} = (c_{ij})_{mn}$ est la matrice identité, le modèle Smith-Wilson devient un cas particulier pour le zéro coupon. La formule (3.9) est simplifiée comme :

$$p(v) = \exp(-\omega * v) + \sum_{j=1}^n b_j W(v, u_j)$$

où u_j est la maturité de zéro coupon j .

Sous forme matricielle, le vecteur des paramètres \mathbb{b} est déterminé par

$$\mathbb{b} = (W(\mathbb{u}, \mathbb{u}))^{-1} (\mathbb{p} - \mathbb{d}).$$

3.2.2.2 Calibrage des paramètres du modèle Smith-Wilson (SW) (Cf. [20])

Le calibrage des paramètres du modèle Smith-Wilson dépend du last liquid point, du point de convergence, de la période de convergence, de la tolérance de convergence et du gap de convergence.

Le last liquid point (LLP) est la maturité la plus longue pour laquelle les taux d'intérêt sans risque peuvent être dérivés des marchés profonds, liquides et transparents (DLT).

Le point de convergence est le maximum de (LLP+40) et 60 ans. Par conséquent, la période de convergence est le maximum de (60-LLP) et 40 ans. La tolérance de convergence est fixée à 1 point de base. Le gap de convergence au point de convergence est défini comme l'écart absolu entre le forward intensity et l'ultimate forward intensity.

Il est rappelé que le forward intensity est $f(v) = \frac{-d \ln p(v)}{dv}$. Dans le cas où la fonction d'actualisation des prix (discount pricing function) est le prix de zéro coupon de 1€, le forward intensity est le taux forward instantané continu (voir la section 3.1.1).

En principe, le paramètre α contrôle la vitesse de convergence et est égal à la valeur la plus petite permettant de produire une courbe de taux qui tend vers l'UFR au point de convergence dans la tolérance de convergence de l'UFR. Une limite inférieure pour le paramètre α est fixée à 0,05.

Plus précisément, le gap de convergence est interprété comme une fonction de α .

Le gap de convergence au point de convergence T s'exprime :

$$g(\alpha) = |f(v) - \omega| = \frac{\alpha}{1 - \kappa e^{\alpha T}}$$

où $\kappa = \frac{1 + \alpha \mathbb{u}^T \mathbb{Q} \mathbb{b}}{\sinh(\alpha \mathbb{u}^T \mathbb{Q} \mathbb{b})}$ avec $\mathbb{Q} = (\exp(-\omega u_i) * c_{ij})_{mn}$ et $\kappa \neq 0$.

Si $\alpha = 0,05$, alors $g(\alpha)$ n'est pas plus grand que la tolérance de convergence, $\alpha = 0,05$ est la valeur trouvée pour le calibrage. Sinon, le calibrage consiste à trouver la valeur la plus petite du paramètre α tel que le gap de convergence est plus petit que la tolérance de convergence i.e.1 point de base.

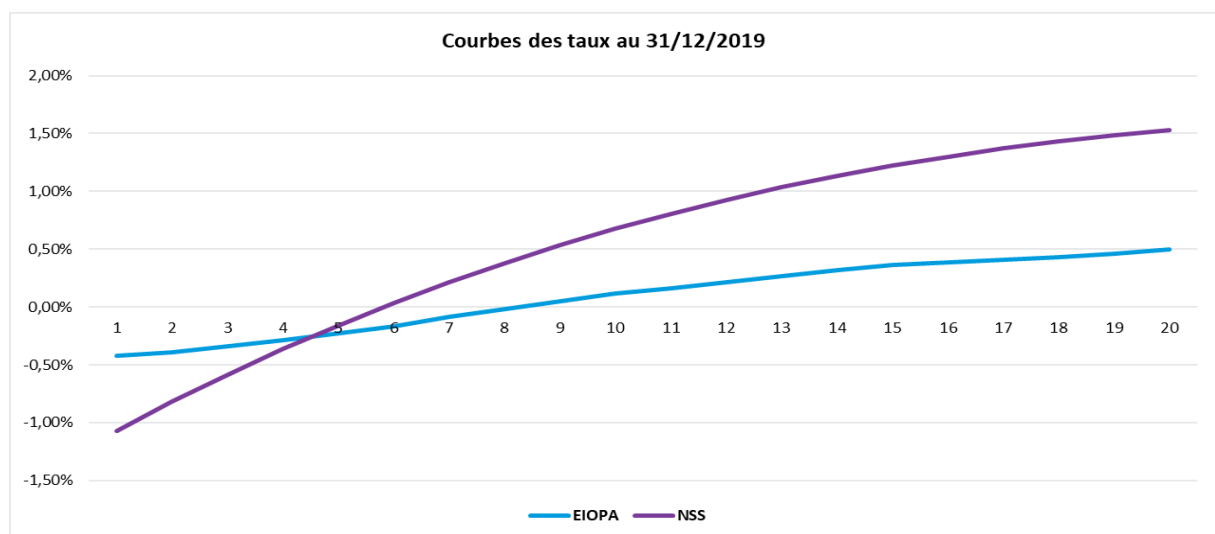
3.2.3 Analyse des résultats de calibrage des paramètres

Avec les données du marché au 31/12/2019, les paramètres calibrés du modèle Nelson-Siegel-Svensson (NSS) sont :

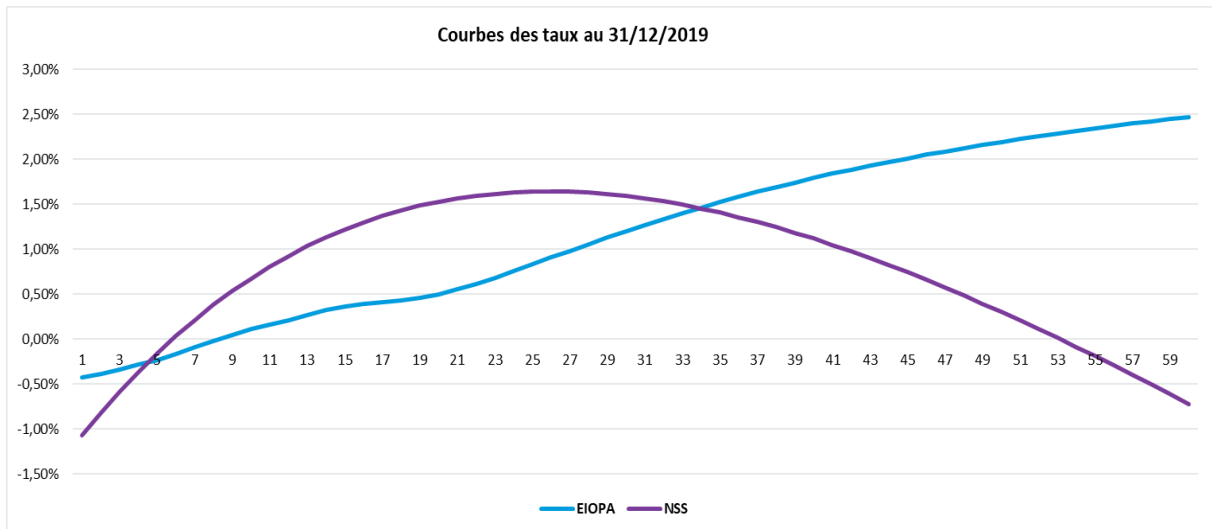
$$\lambda_1 = 36,04 ; \lambda_2 = 228,44 ; \beta_1 = -0,23 ; \beta_2 = 0,22 ; \beta_3 = 0,43 ; \text{ et } \beta_4 = -0,08.$$

Dans le cadre de la construction de la courbe des taux sans risque EIOPA, l'ultimate forward rate est estimé à 3,9% au 31 décembre 2019. L'ajustement du risque de crédit de 10 points de base est pris en compte pour le calibrage. Le paramètre α calibré par l'EIOPA est de 0,13281. Les paramètres \mathbb{D} sont ainsi déterminés (Cf. Annexe XI : Tableau de paramètres du Modèle Smith-Wilson).

Sachant que le last liquid point (LLP) pour la devise euro est le taux zéro coupon de maturité de 20 ans dans le cadre de la construction de la courbe des taux sans risque EIOPA, nous nous concentrons d'abord sur la construction de la courbe de taux zéro coupon via le modèle NSS pour la maturité $T = 1, 2, \dots, 20$. Les deux courbes de taux zéro coupon pour la maturité moins de 20 ans sont affichées ci-dessous :



La période de convergence est de 40 ans pour la devise euro dans le cadre de la construction de la courbe des taux sans risque EIOPA. Ci-dessous la comparaison de la courbe de taux zéro coupon construite via le modèle NSS avec celle d'EIOPA.



La courbe des taux du modèle NSS est pessimiste avec une tendance négative. Mais la courbe des taux du modèle NSS reflète mieux les données du marché actuel. La courbe d'EIOPA aussi calibrée par les données du marché est influencée ou contrôlée par l'UFR, qui est construit à partir d'informations historiques qui peuvent paraître moins pertinentes au vu de l'évolution du marché.

3.2.4. Construction de courbes de taux forward inspirée par la méthode « Bootstrapping of multiple yield curves »

L'algorithme Exact Fit est appliqué dans la méthode de « Bootstrapping of multiple yield curves ».

Après la crise financière de 2008, l'approche multi-curve remplace l'approche mono-curve. Le point fort de cette méthode est d'être market-consistent. Mais son point faible est qu'elle demande une certaine quantité de données du marché et une sélection d'instruments financiers cotés (Cf. [14]).

La courbe de taux forward est construite de la façon suivante :

$$C_x^F(t) = \{T \rightarrow F_x(t; T, T + x), T \geq t\}$$

où $F_x(t; T, T + x)$ est le taux forward observé à l'instant t pour l'opération de prêt commençant à T et se terminant à l'année $T + x$; x est le ténor des taux sous-jacents.

Sachant que le pas des projections dans le cadre de ce mémoire est annuel, le ténor x des taux sous-jacents ne peut pas être inférieur à 1 an. Le taux forward est $\tau_{act}(0, k, \delta) = F_\delta(0; k, k + \delta)$.

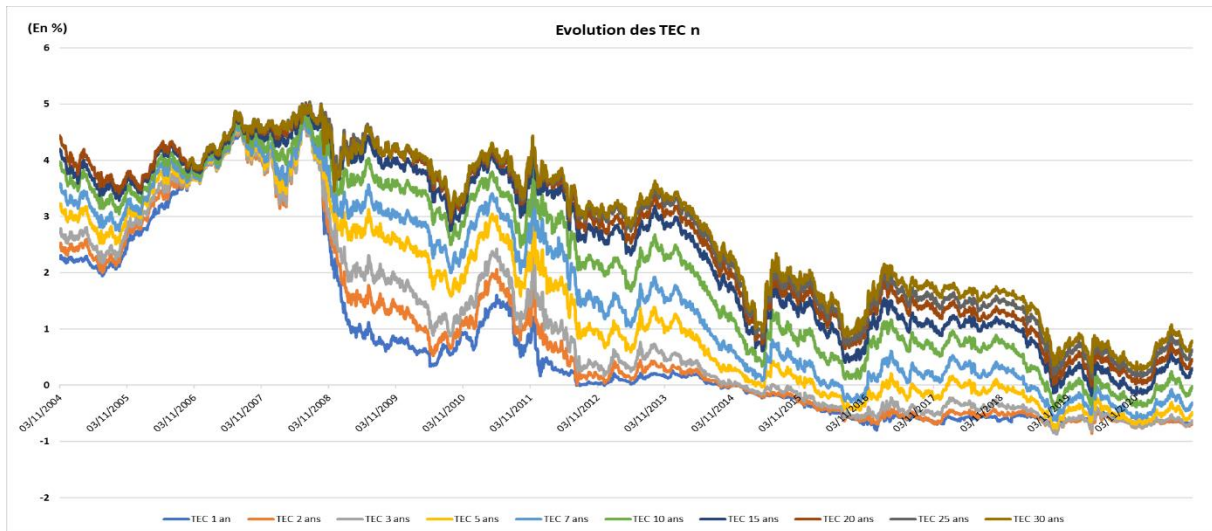
Pour la même durée δ , le taux forward $\tau_{act}(0, k, \delta)$ évolue en fonction de k , l'année projetée. Donc une série de courbes de taux est exigée pour tous les δ entre 0 et la durée résiduelle pour atteindre l'espérance de vie.

En s'inspirant de l'approche multi-curve, les taux à moyen ou long terme sont utilisés à la place de taux à court terme (au maximum 12 mois), par exemple les taux TEC n remplacent les taux de dépôt ou Libor x mois ou Euribor x mois.

3.2.4.1 Etude sur les taux TEC n

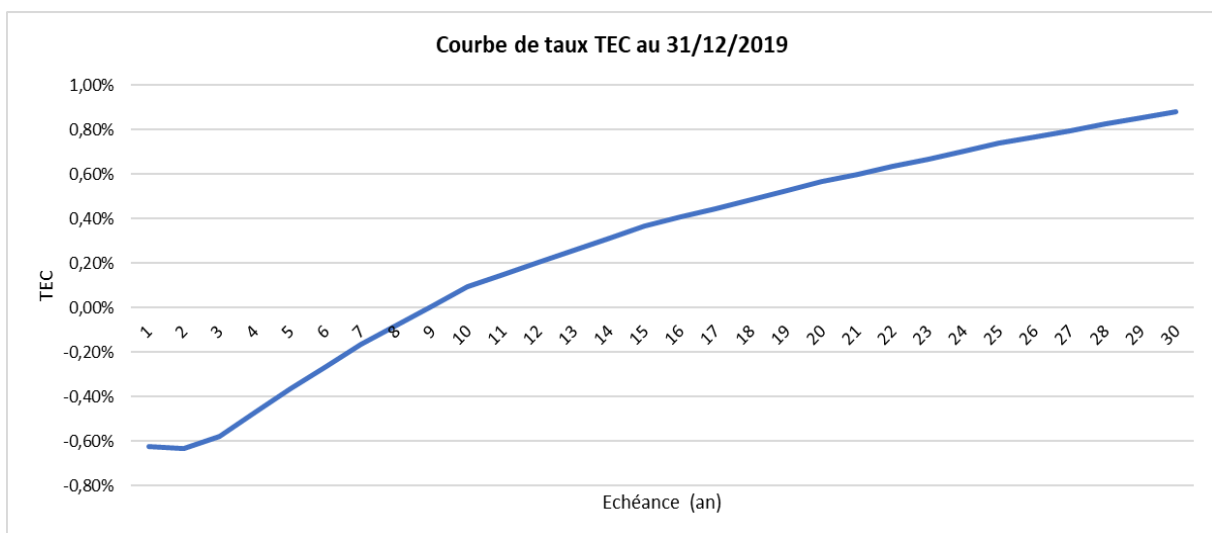
Le taux de l'échéance constante n ans (TEC n), est le taux de rendement actuariel du trésor dont la durée de vie serait à chaque instant T égale à n années.

Donc les taux sous-jacents pour la construction de courbes de taux sont TEC n qui ont le tenor égal à n . Ce graphique ci-dessous représente l'évolution des taux TEC n depuis l'année 2004 selon la source de la Banque de France :

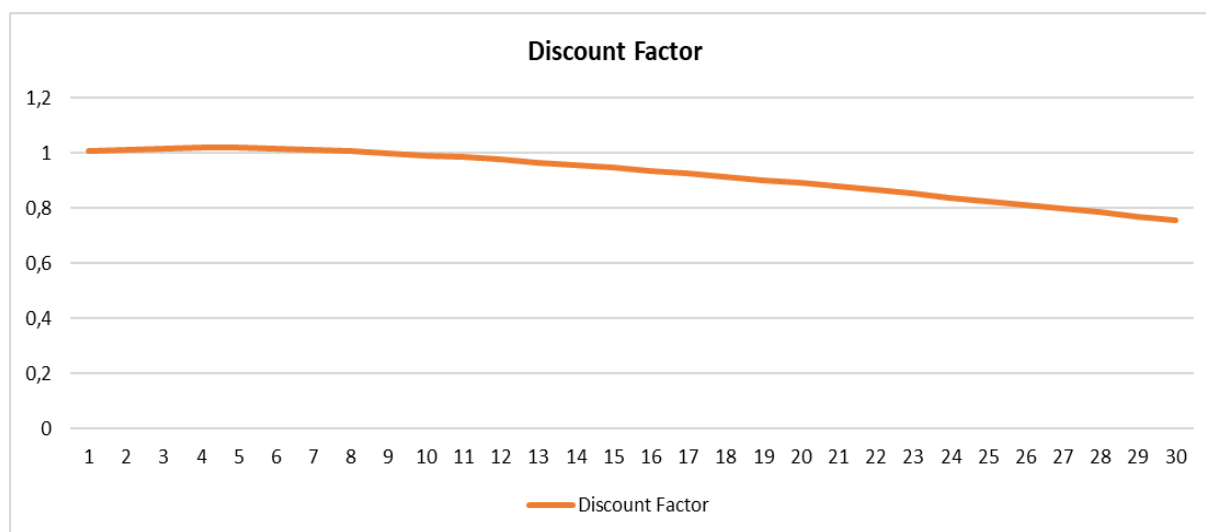


Nous pouvons constater que les taux TEC n ont beaucoup diminué depuis l'année 2004 et il existe ainsi un intérêt réel à l'intégration de courbes de taux dans les projections.

En appliquant la méthode d'interpolation linéaire pour les échéances manquantes, la courbe de taux TEC n au 31/12/2019 fonction de l'échéance n est construite (Cf. Annexe XII). Son graphique est le suivant :



En utilisant la formule (3.8), la courbe des facteurs d'actualisation (discount factor) (Cf. Annexe XIII) est :

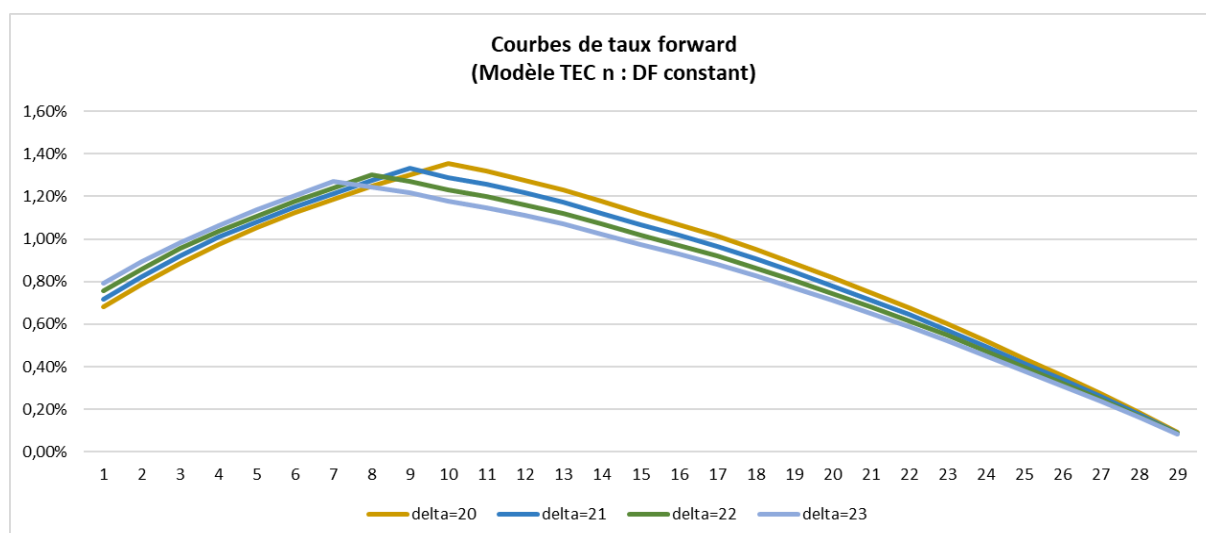


La courbe de taux forward continue implicite dans la courbe de taux TEC n au 31/12/2019 est construite via la courbe des facteurs d'actualisation (voir la section 3.1.1).

Pour chaque durée δ fixée, la courbe de taux forward $C_\delta(t) = \{n \rightarrow \tau(t; n, \delta), n > 0\}$ peut être construite pour t égal au 31/12/2019.

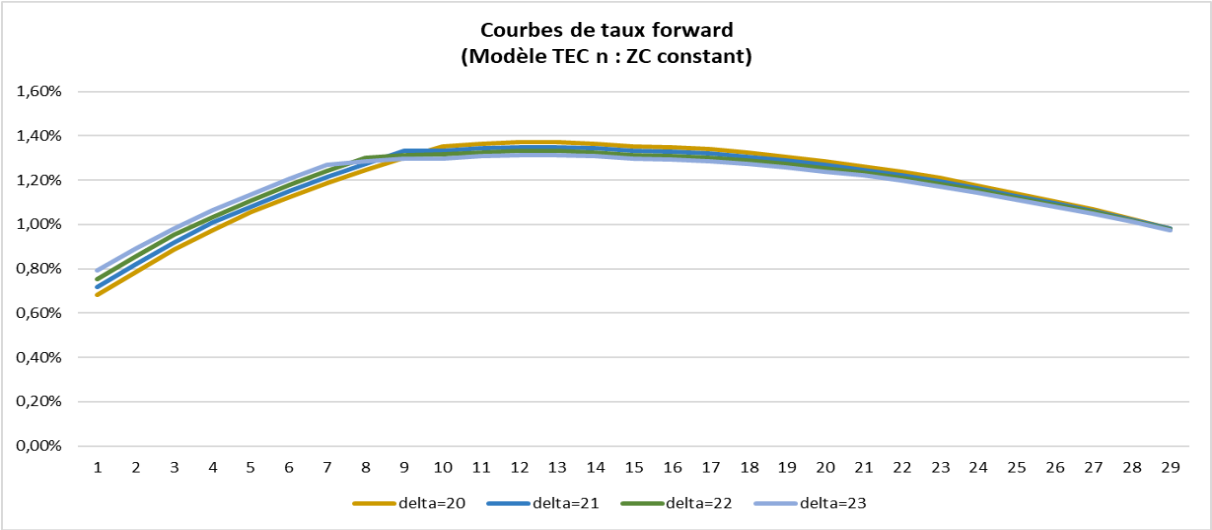
Si $n + \delta$ est supérieur à la maturité la plus longue des facteurs d'actualisation calculés/déduits, le taux forward ne peut pas être déduit. Donc, il est nécessaire de prolonger la courbe des facteurs d'actualisation, voire la courbe de taux TEC n.

Si nous supposons que le facteur d'actualisation est constant pour la maturité plus longue, le taux forward va être 0 (Cf. Annexe XIV).



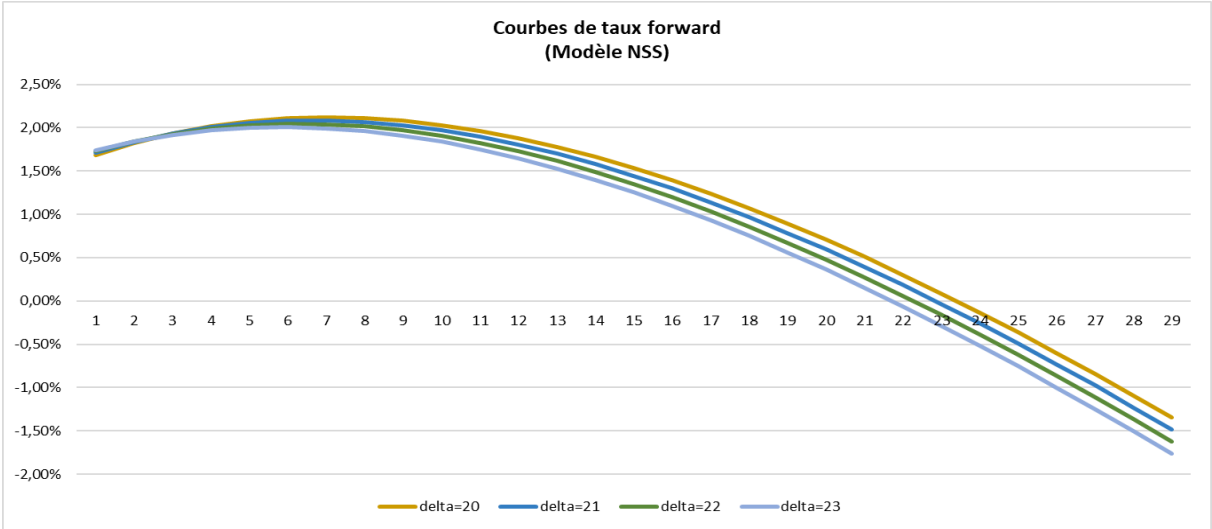
Si nous supposons que le taux zéro coupon est constant pour la maturité plus longue, le taux forward continu n'est plus 0, mais constant (Cf. Annexe XV). Cette hypothèse a le même effet que celui de l'interpolation log-linéaire des facteurs d'actualisation.

Les courbes de taux forward sont plus lisses et plus plates par rapport aux courbes de taux forward ci-dessus.



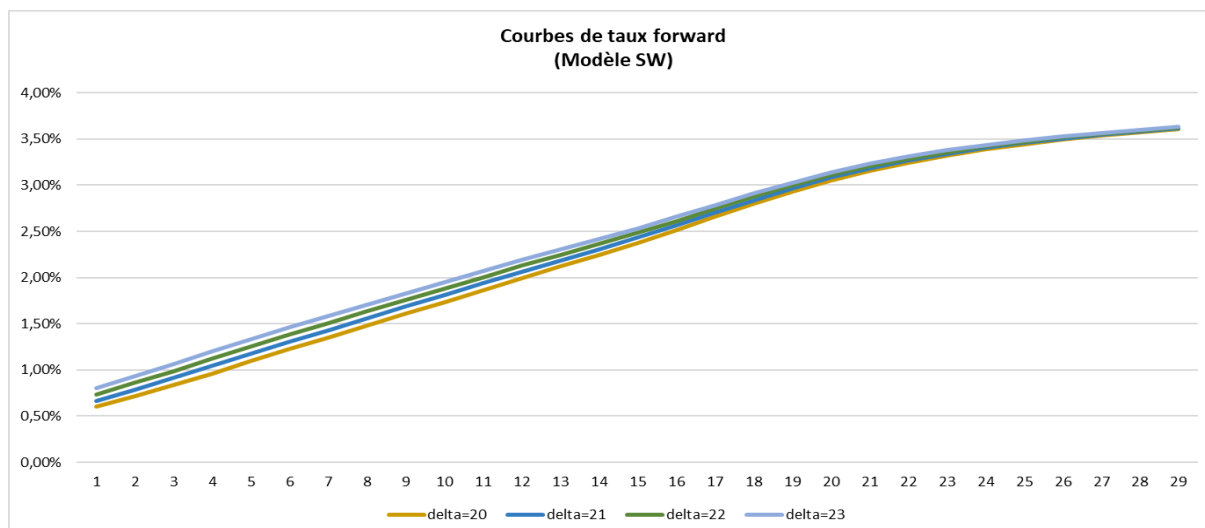
3.2.4.2 Etude sur les courbes du modèle NSS et du modèle SW

En se basant sur la courbe de taux zéro coupon construite via le modèle NSS au 31/12/2019 et en partant du même principe, pour chaque durée/tenor δ , les courbes de taux forward fonction du temps n sont construites. Le graphique ci-dessous représente les courbes de taux forward pour $\delta = 20, 21, 22, 23$:



Les courbes de taux forward ont une tendance négative significative qui ont intégré pleinement les informations du marché au 31/12/2019 pour les obligations de notation supérieure ou égale à AA.

De même, les courbes de taux forward sont construites en se basant sur la courbe de taux zéro coupon construite via le modèle Smith-Wilson (EIOPA).



Du fait de l'effet de la convergence vers l'UFR et de l'ajustement de risque crédit de 10 points de base, la tendance des courbes de taux forward est à la hausse à long terme par rapport à la situation 2019/2020.

3.2.4.3 Conclusion

Nous avons trois faisceaux de courbes de taux forward : les courbes de taux forward du modèle NSS, les courbes de taux forward du modèle Smith-Wilson, les courbes de taux forward de TEC n.

Nous pouvons constater que la tendance, l'évolution, voire le point de départ des courbes de taux varient significativement d'un faisceau à l'autre.

Cependant, il nous paraît normal qu'elles soient suffisamment différentes. Les courbes de taux forward de TEC n et les courbes de taux forward du modèle NSS ont une tendance à la baisse. Mais le fait que la vitesse des courbes de taux forward de TEC n à la baisse est plus douce est dû partiellement à l'impact de l'extrapolation. Les courbes de taux forward du modèle NSS ont en effet la tendance la plus négative. L'application du modèle NSS dépend de la source des données utilisées. Cependant, les taux TEC n sont les taux de rendements actuariels des deux OAT de référence qui encadrent au plus près la maturité "n années".

Le fait que les courbes de taux forward du modèle Smith-Wilson ont une tendance à la hausse est dû à l'impact de la construction du modèle et au taux bas au 31/12/2019.

Chaque modèle représente un point de vue en finance, qui a un impact significatif sur les résultats de l'évaluation des engagements et le pilotage du régime comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

Chapitre 4 : Evaluation des engagements et pilotage du régime

Nous nous concentrons sur la description de l'évaluation des engagements et du pilotage du régime pour le groupe ouvert dans ce chapitre qui se décompose en quatre parties.

Dans la première partie est introduite une nouvelle méthode de taux d'annuité. Elle consiste à prendre en compte (pour chacun des scénarios) les courbes de taux forward en tant que courbes de taux d'actualisation, à la place d'un seul taux d'actualisation. Ceci permet de refléter l'impact financier de chaque scénario sur le taux d'annuité.

La deuxième partie et la troisième partie sont réservées respectivement aux différents engagements du groupe fermé et du groupe ouvert. Dans chaque scénario économique, les engagements sont évalués avec deux méthodes différentes : une première méthode se basant sur l'évolution de la valeur d'acquisition et de la valeur de service d'un point en fonction de l'année simulée ; une seconde méthode se basant sur l'application de la nouvelle méthode du taux d'annuité présentée dans la première partie. Les résultats des différents engagements sont analysés et comparés entre les deux méthodes pour chaque scénario économique. Les analyses croisées des résultats entre les trois scénarios économiques sont également décrites, ce qui permet de mettre en évidence la pertinence de la nouvelle méthode du taux d'annuité.

Dans la quatrième partie est discutée l'évaluation des indicateurs. Ces indicateurs sont le taux de rendement, le ratio d'équilibre financier, le taux de couverture actuariel et le taux de couverture annuelle avec ou sans dette. Ce dernier taux, ainsi que son calcul, est inspiré de la méthode Wetzel. Les indicateurs sont calculés avec les deux méthodes différentes mentionnées ci-dessus pour chaque scénario économique dans le cadre du groupe ouvert, et leurs résultats sont analysés afin de comparer la qualité et la pertinence des deux méthodes.

4.1 Méthode du taux d'annuité

La notion de taux d'annuité apparaît dans le calcul du régime en annuités (Cf. Annexe III). Dans ce cadre, le taux d'annuité est défini comme le taux de liquidation divisé par la durée de référence requise pour une pension au taux plein. Rappelons que le taux de liquidation est le taux plein majoré ou minoré (surcote ou décote). Donc, le taux d'annuité représente le montant de pension acquis chaque année et exprimé en pourcentage de cotisation.

Une nouvelle méthode de calcul inspirée du calcul d'annuité en assurance-vie est proposée. Ici, le taux d'actualisation n'est plus formé d'un seul taux constant comme il est d'usage en assurance-vie, il est calculé à partir d'une courbe de taux forward.

Pour un actif d'âge x à l'année $N + k$, le montant $C_k(x)$ qu'il cotise à l'année $N + k$ pour avoir une rente de 1 € à partir de sa retraite peut être interprété comme la valeur actuelle probable à l'année $N + k$ d'une rente viagère 1€, différée de $\mu_k(x) - x$ années (les années restant à cotiser ou à partir à la retraite). Le ratio $\frac{1}{C_k(x)}$ est défini comme le taux d'annuité.

L'application du taux d'annuité signifie que le régime n'accorde pas plus de droits que les cotisations reçues par le régime et ainsi pourrait garantir l'équité intergénérationnelle, contrairement à l'application du principe actuel déterminant la valeur d'acquisition et la valeur de service.

Le montant $C_k(x)$ s'exprime comme :

$$C_k(x) = \sum_{i=0}^{E_k(x)} \frac{l_{\mu_k(x)+i}}{l_x} * \frac{1}{(1 + \tau_{act}(0, k, \delta + i))^{\delta+i}}$$

où $E_k(x) = \omega_k(x) - \mu_k(x)$ est la durée de versements de pensions à partir de la retraite ;

$\mu_k(x)$ est l'âge de retraite pour les actifs d'âge x à l'année $N + k$;

$\tau_{act}(0, k, \delta)$ est le taux forward observé à l'année N pour un prêt/une dette commençant à l'année $N + k$ et se terminant à l'année $N + k + \delta$ et $\delta = \mu_k(x) - x$.

Le taux d'annuité dépend du choix des courbes de taux. L'impact financier sur le taux d'annuité est évalué via la construction des courbes de taux, qui est décrite en détail dans le chapitre 3.

4.2 Evaluation des engagements pour le groupe fermé

D'abord, nous nous concentrons sur l'évaluation des engagements pour un groupe fermé.

4.2.1 Valeur actuelle probable (VAP) des engagements des cotisations et des engagements des droits acquis des actifs

Sauf mention contraire, les notations précédentes sont conservées.

A la fin de l'année $N + k$, la valeur actuelle probable des cotisations futures pour un actif d'âge x au début de la projection peut être exprimée comme :

$$VAP_{cotis}(x, k) = \sum_{n=1}^{\mu(x,k)-(x+k)} \frac{Cotis_ind(x, k+n)}{(1 + \tau_{act}(0, k, n))^n} * P_{vie}(0, x; k, k+n)$$

où $Cotis_ind(x, k+n) = \frac{Ind(k+n)}{Ind(0)} * Cotis_ind(x, 0)$;

$P_{vie}(0, x; k, k+n)$ est la probabilité de survie à l'année $N + k + n$ sachant que l'actif est en vie à l'année $N + k$, estimée à l'année N pour l'âge x à l'année N (voir le détail dans la section 2.1.1).

La valeur actuelle probable à la fin de l'année $N + k$ des cotisations futures pour le groupe fermé peut être exprimée par :

$$VAP_{cotis}(k) = \sum_{x \in \Omega_A} a(x, k) * VAP_{cotis}(x, k).$$

Les cotisations futures à l'âge de retraite sont incluses dans le calcul de la valeur actuelle probable des cotisations futures.

Le texte ci-après décrit les méthodes d'évaluation de la valeur actuelle probable des engagements des droits acquis des actifs.

Méthode 1 (VA & VS) : valeur d'acquisition et valeur de service d'un point en fonction de l'année simulée

Les pensions pour les retraites promises aux actifs à la fin de l'année $N + k$ sont :

$$Pens_{actif}(k) = \sum_{x \in \Omega_A} n_{tot}(x, k) * VS_k(\mu(x, k) - (x + k))$$

où $VS_k(m)$ est la valeur de service du point dans m années, observée à la fin de l'année $N + k$;

$n_{tot}(x, k)$ est le nombre total des points acquis en stock à la fin de l'année $N + k$ par les actifs d'âge x au début de la projection (voir la définition dans la section 2.2.2).

La valeur actuelle probable des engagements des droits acquis à la fin de l'année $N + k$ est :

$$\begin{aligned} VAP_{eng}(k) &= VAP(Pens_{actif}(k)) \\ &= \sum_{n=\mu(x,k)-(x+k)}^{\omega(x,k)-(x+k)} \frac{Pens_{actif}(k) * coef_{revalo}(k)}{(1 + \tau_{act}(0, k, n))^n} * P_{vie}(0, x; k, k + n). \end{aligned}$$

où $coef_{revalo}(k)$ est le coefficient de revalorisation des pensions futures.

La valeur actuelle probable des engagements des droits acquis est estimée avec $coef_{revalo}(k) = 1$ dans le cadre de ce mémoire.

Méthode 2 (Taux d'annuité) : application du taux d'annuité (introduit dans la section 4.1)

En utilisant le taux d'annuité $\frac{1}{C(x,k)}$, les pensions promises aux actifs à la fin de l'année $N + k$ sont :

$$Pens_{actif}(k) = \sum_{x \in \Omega_A} a(x, k) * \sum_{i=0}^k \frac{Cotis_ind(x, i)}{C(x, i)}$$

où $Cotis_ind(x, i) = \frac{Ind(i)}{Ind(0)} * Cotis_ind(x, 0)$.

La formule pour calculer la valeur actuelle probable des engagements des droits acquis à la fin de l'année $N + k$ est identique à celle de la méthode 1 (VA & VS).

4.2.2 Valeur actuelle probable (VAP) des engagements des rentes

A la fin de l'année $N + k$, la valeur actuelle probable des pensions futures pour les retraités existant au début de la projection ou les retraités issus du groupe des actifs existant au début de la projection peut être exprimée comme (Cf. la section 2.2.2) :

$$VAP_{pens}(k) = \sum_x \sum_{n=1}^{\omega(x,k)-(x+k)} \frac{Rente_{tot}(x, k) * coef_{revalo}(k)}{(1 + \tau_{act}(0, k, n))^n} * P_{vie}(0, x; k, k + n).$$

où $coef_{revalo}(k)$ est le coefficient de revalorisation des pensions futures.

La valeur actuelle probable des engagements des rentes est estimée avec $coef_{revalo}(k) = 1$ dans le cadre de ce mémoire.

4.3 Evaluation des engagements pour le groupe ouvert

Dans cette section est discutée l'évaluation des engagements pour le groupe ouvert comme celle pour le groupe fermé.

4.3.1 Valeur actuelle probable (VAP) des engagements des cotisations et des engagements des droits acquis des nouveaux actifs

Si les nouvelles entrées dans le régime sont prises en compte comme les nouveaux actifs, les valeurs actuelles probables de leurs cotisations futures doivent être calculées. Il est supposé que l'évolution des salaires et des taux de cotisation contractuelle soit projetée de la même façon pour chaque groupe d'actifs.

Rappelons qu'à l'année $N + k$ avec $k > 0$, le nombre des nouveaux actifs est $\sum_{x \in \Omega_A} a_{new,k}(x)$ (Cf. la section 2.1).

A la fin de l'année $N + k$, la valeur actuelle probable des cotisations futures pour un actif d'âge x à l'année $N + k$ peut être exprimée comme :

$$\begin{aligned} VAP'_{cotis}(x, k) &= \sum_{n=1}^{\mu_k(x)-x} \frac{Cotis_ind'(x, k)}{(1 + \tau_{act}(0, k, n))^n} * \frac{Ind(k + n)}{Ind(k)} * P_{vie}(0, x; 0, n) \\ &= \sum_{n=1}^{\mu_k(x)-x} \frac{Cotis_ind'(x, 0)}{(1 + \tau_{act}(0, k, n))^n} * \frac{Ind(k + n)}{Ind(0)} * P_{vie}(0, x; 0, n). \end{aligned}$$

La valeur actuelle probable des cotisations futures pour le groupe des nouveaux actifs à l'année $N + k$ peut être exprimée comme :

$$VAP'_{cotis}(x) = \sum_{x \in \Omega_A} a_{new,k}(x) * VAP'_{cotis}(x, k).$$

Le texte ci-après décrit les méthodes d'évaluation de la valeur actuelle probable des engagements des droits acquis des nouveaux actifs.

Méthode 1 (VA & VS) : valeur d'acquisition et valeur de service d'un point en fonction de l'année simulée

Les pensions pour les retraites promises à la fin de l'année $N + k$ au groupe des nouveaux actifs sont :

$$Pens'_{actif}(k) = \sum_{x \in \Omega_A} n'_{tot}(x, k) * VS_k(\mu_k(x) - x)$$

où $VS_k(m)$ est la valeur de service du point dans m années, observée à la fin de l'année $N + k$;

$n'_{tot}(x, k)$ est le nombre total des points acquis en stock à la fin de l'année $N + k$ par les actifs d'âge x (Cf. la section 2.2.3).

La valeur actuelle probable des engagements des droits acquis à la fin de l'année $N + k$ des nouveaux actifs est calculée comme :

$$\begin{aligned} VAP'_{eng}(k) &= VAP(Pens'_{actif}(k)) \\ &= \sum_{n=\mu_k(x)-x}^{\omega_k(x)-x} \frac{Pens'_{actif}(k) * coef_{revalo}(k)}{(1 + \tau_{act}(0, k, n))^n} * P_{vie}(0, x; 0, n). \end{aligned}$$

où $coef_{revalo}(k)$ est le coefficient de revalorisation des pensions futures.

Comme ci-dessus, la valeur actuelle probable des engagements des droits acquis est estimée avec $coef_{revalo}(k) = 1$ dans le cadre de ce mémoire.

Méthode 2 (Taux d'annuité) : application du taux d'annuité (introduit dans la section 4.1)

Pour un actif d'âge x à l'année $N + k$, le montant $C_k(x)$ qu'il cotise à l'année $N + k$ pour avoir une rente de 1 € à partir de sa retraite est utilisé.

Le taux d'annuité $\frac{1}{C_k(x)}$ est utilisé pour calculer les pensions promises à la fin de l'année $N + k$.

Les nouveaux actifs en stock à la fin de l'année $N + k$ ne sont pas entrés en régime en même temps.

A l'année $N + k$, la pension acquise par le montant cotisé pendant l'année est

$$a_{new,k}(x) * \frac{Cotis_ind'(x, 0)}{C_k(x)} * \frac{Ind(k)}{Ind(0)}.$$

Le nombre des nouvelles entrées d'âge x est exprimé comme une fonction $g(x, k)$.

Le nombre des actifs issus de l'année $N + k - 1$, noté par $\tilde{a}_{new,k-1}(x - 1)$ est :

$$\tilde{a}_{new,k-1}(x - 1) = a_{new,k}(x) - g(x, k).$$

A l'année $N + k - 1$, la pension acquise par le montant cotisé pendant l'année est

$$\tilde{a}_{new,k-1}(x - 1) * \frac{Cotis_ind'(x - 1, 0)}{C_{k-1}(x - 1)} * \frac{Ind(k - 1)}{Ind(0)}.$$

A l'année $N + k - 1$, le nombre des nouveaux actifs en stock est $a_{new,k-1}(x - 1)$ dont le nombre des nouvelles entrées d'âge $x - 1$ est $g(x - 1, k - 1)$.

Donc, pour le nombre des actifs $a_{new,k}(x) - g(x, k)$ issus de l'année $N + k - 1$, le nombre des nouvelles entrées d'âge $x - 1$ à l'année $N + k - 1$ noté par $\tilde{g}(x - 1, k - 1)$ est

$$\tilde{g}(x - 1, k - 1) = \frac{\tilde{a}_{new,k-1}(x - 1)}{a_{new,k-1}(x - 1)} * g(x - 1, k - 1).$$

Alors, le nombre des actifs issus de l'année $N + k - 2$ est

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{new,k-2}(x - 2) &= a_{new,k}(x) - g(x, k) - (a_{new,k}(x) - g(x, k)) * \frac{g(x - 1, k - 1)}{a_{new,k-1}(x - 1)} \\ &= a_{new,k}(x) - g(x, k) - \tilde{g}(x - 1, k - 1). \end{aligned}$$

A l'année $N + k - 2$, la pension acquise par le montant cotisé pendant l'année est

$$\tilde{a}_{new,k-2}(x - 2) * \frac{Cotis_ind'(x - 2, 0)}{C_{k-2}(x - 2)} * \frac{Ind(k - 2)}{Ind(0)}.$$

Le nombre des actifs issus de l'année $N + k - i$, $i > 1$ s'obtient récursivement comme :

$$\tilde{a}_{new,k-i}(x - i) = a_{new,k}(x) - g(x, k) - \sum_{1 \leq j < i} \tilde{g}(x - j, k - j).$$

A l'année $N + k - i$, la pension acquise par le montant cotisé pendant l'année est

$$\tilde{a}_{new,k-i}(x - i) * \frac{Cotis_ind'(x - i, 0)}{C_{k-i}(x - i)} * \frac{Ind(k - i)}{Ind(0)}.$$

Les pensions pour les retraites promises aux nouveaux actifs en stock à la fin de l'année $N + k$ sont alors :

$$Pens'_{actif}(k) = \sum_{x \in \Omega_A} \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{a}_{new,k-i}(x-i) * \frac{Cotis_ind'(x-i, 0)}{C_{k-i}(x-i)} * \frac{Ind(k-i)}{Ind(0)}.$$

La valeur actuelle probable des engagements des droits acquis à la fin de l'année $N + k$ des nouveaux actifs est calculée comme celle de la méthode 1 (VA & VS).

4.3.2 Valeur actuelle probable (VAP) des engagements des rentes

A la fin de l'année $N + k$, la valeur actuelle probable des pensions futures pour les nouveaux retraités peut être exprimée comme :

$$VAP'_{pens}(k) = \sum_x \sum_{n=1}^{\omega_k(x)-x} \frac{Rente'_{tot}(x,k) * coef_{revalo}(k)}{(1 + \tau_{act}(0,k,n))^n} * P_{vie}(0,x;0,n)$$

où $Rente'_{tot}(x,k)$ représente les rentes totalement versées au cours de l'année $N + k$ aux retraités d'âge x (voir la définition dans la section 2.2.3) ;

$coef_{revalo}(k)$ est le coefficient de revalorisation de pensions futures.

Il est rappelé que la valeur actuelle probable des engagements des rentes est estimée avec $coef_{revalo}(k) = 1$ dans le cadre de ce mémoire.

4.3.3 Analyses des résultats pour le groupe ouvert

La valeur de service du point dans $m + k$ année, observée à la fin de l'année N est utilisée comme la valeur de service du point dans m années, observée à la fin de l'année $N + k$ dans le cadre des projections.

Comme pour le groupe fermé, nous utilisons l'âge de 100 ans comme limite de la projection et intégrerons les courbes de taux forward du modèle NSS, les courbes de taux forward du modèle Smith-Wilson (EIOPA) et les courbes de taux forward de TEC n dans l'évaluation des VAP des engagements acquis.

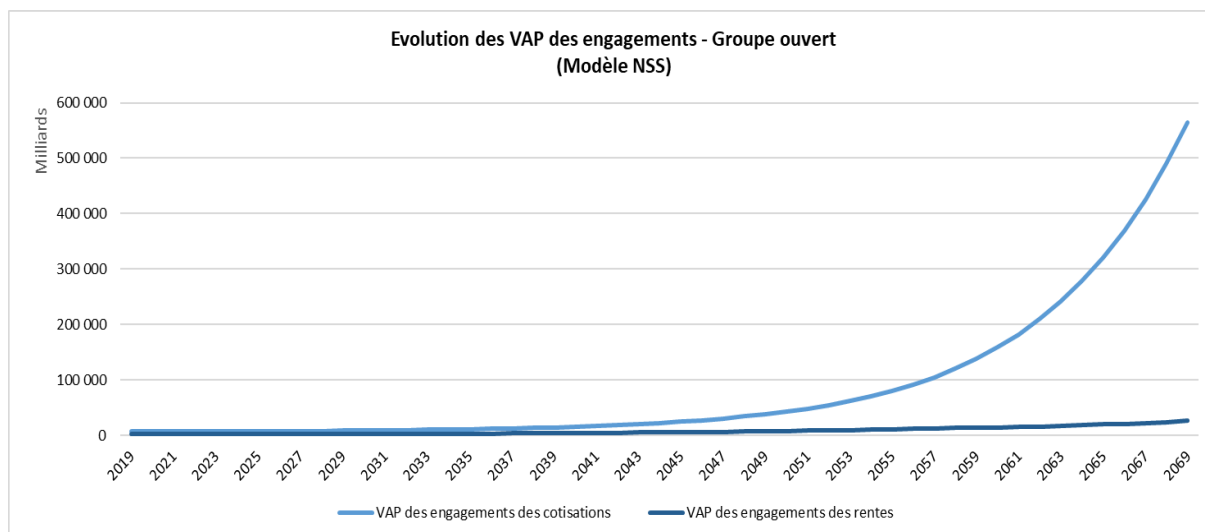
Application des courbes de taux forward du modèle NSS

D'abord, l'évolution des VAP des engagements des cotisations et des rentes est étudiée.

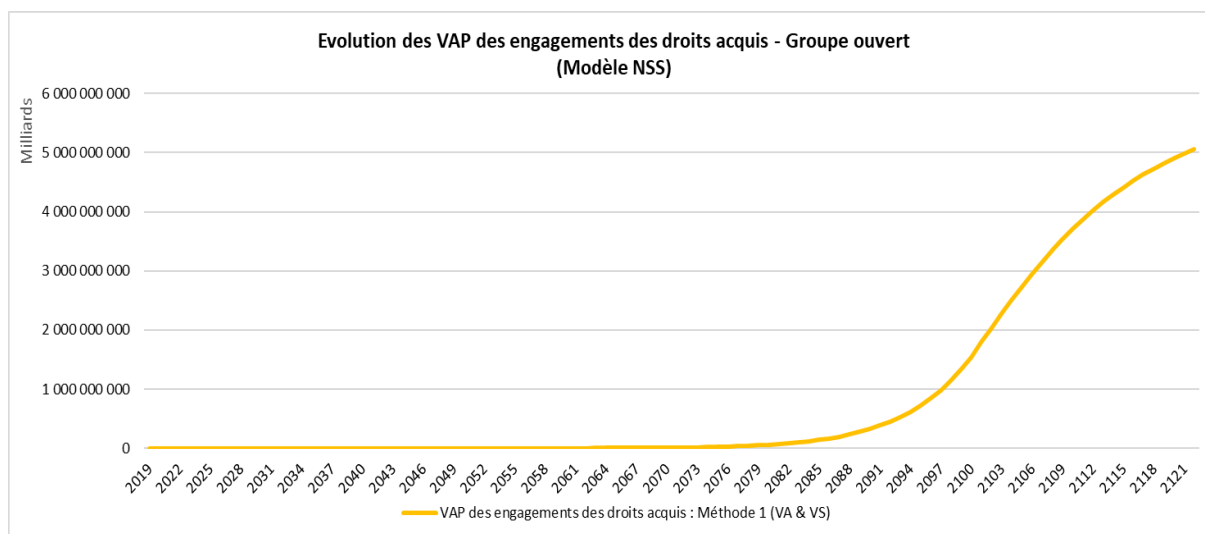
Les VAP des engagements des cotisations dominent celles des engagements de rentes grâce aux contributions des nouvelles entrées. La VAP à une année donnée des engagements des cotisations est calculée en se basant sur les actifs constatés à l'année donnée. Au fur et à mesure, les nouvelles entrées deviennent plus impactantes dans la structure démographique du système de retraite.

Pour les VAP des engagements des rentes, les rentes servies sont réduites selon la probabilité de survie des retraités. Cette estimation est aussi sensiblement accentuée par la tendance des courbes de taux forward du modèle NSS. La VAP des engagements des rentes augmente moins vite que la VAP des engagements des cotisations en fonction de l'année de projection du fait que les nouvelles entrées ne sont pas encore majoritairement à la retraite.

Les VAP des engagements sont projetées jusqu'à l'année 2122 et le graphique ci-dessous affiche l'évolution des VAP des engagements pendant les 50 ans à venir.



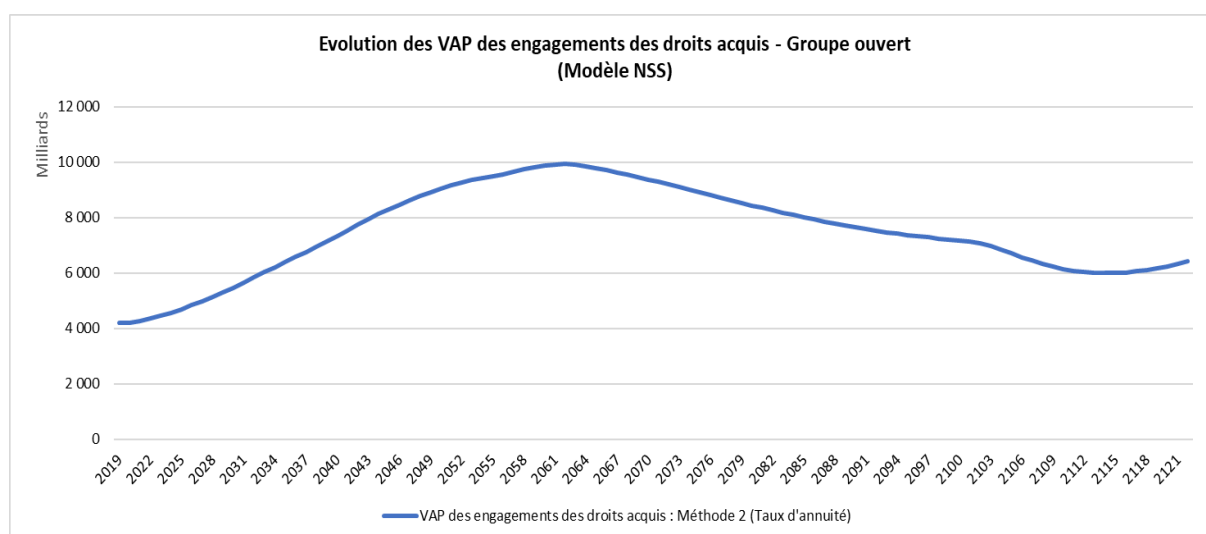
La VAP des engagements des droits acquis avec la méthode 1 (VA & VS) explose à la fin de la projection car le taux d'actualisation pour les engagements futurs est négatif. Cela signifie que les rentes futures en dehors de l'horizon de la projection deviennent considérables.



Les tables de mortalité utilisées dans le calcul de taux d'annuité sont par défaut intégrées dans l'évaluation des VAP des engagements des droits acquis avec la méthode 2. Les rentes pour les retraites promises aux nouveaux actifs en stock à la fin de l'année $N + k$ sont aussi probabilisées par la mortalité future et actualisées par la courbe des taux forward pour le calcul des VAP.

Les VAP des engagements des droits acquis avec la méthode 2 augmentent avec l'importance prise par les nouvelles entrées dans la structure démographique. Par ailleurs, les VAP des engagements des droits acquis diminuent à partir de l'année 2063 du fait que les nouvelles entrées plus anciennes commencent à partir à la retraite et les droits acquis par les nouvelles entrées plus récentes ne peuvent pas compenser les droits acquis par les nouvelles entrées plus anciennes qui sont convertis en rentes.

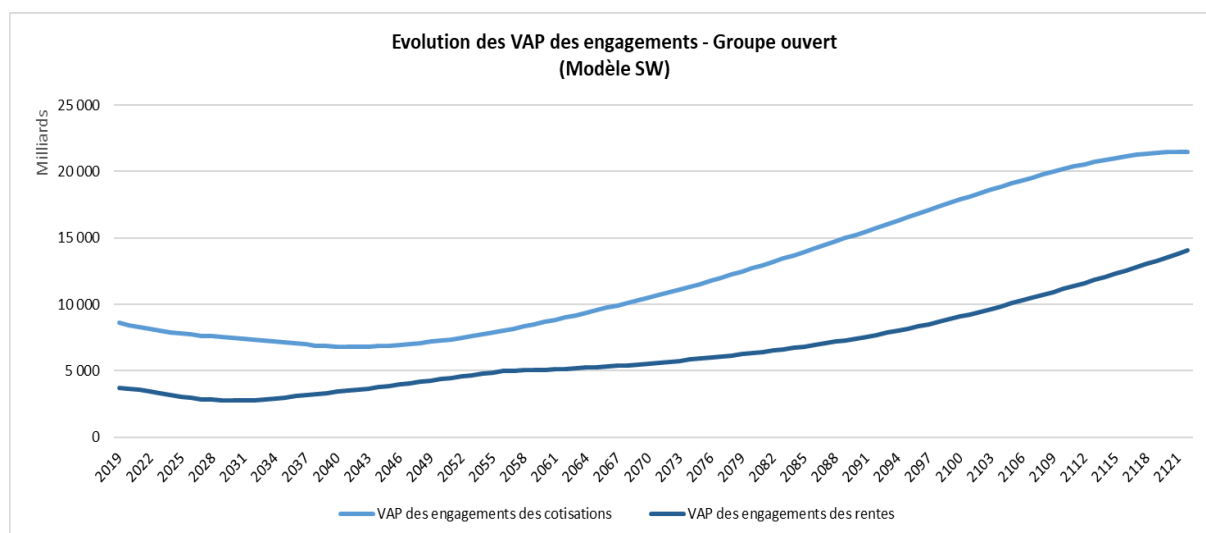
Ci-dessous le graphique pour les VAP des engagements de droits acquis du groupe ouvert :



Les VAP augmentent jusqu'à 2062 du fait qu'il existe déjà des droits acquis en stock pour les actifs au début de la projection, ensuite les VAP diminuent et ont une tendance à la hausse à la fin de la projection, ce qui correspond à l'évolution des VAP pour les nouvelles entrées.

Application des courbes de taux forward du modèle SW

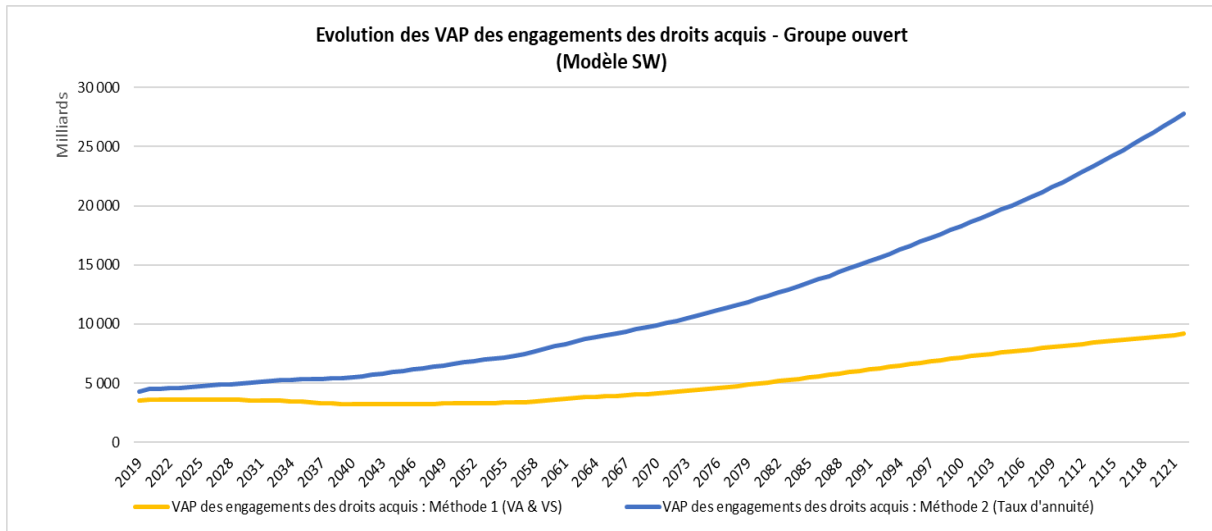
Comparée avec les courbes de l'évolution des VAP des engagements pour le groupe fermé, la tendance de l'évolution des VAP des engagements des cotisations et des VAP des engagements des rentes s'inverse avec l'intégration des nouvelles entrées.



Il est rappelé que les VAP des engagements des droits acquis avec la méthode 2 (Taux d'annuité) sont impactées doublement par les courbes de taux forward construites. Elles sont impactées une première fois via le taux d'annuité, et une seconde fois via l'effet d'actualisation. La tendance est complètement inversée par rapport à celle évaluée par le modèle NSS.

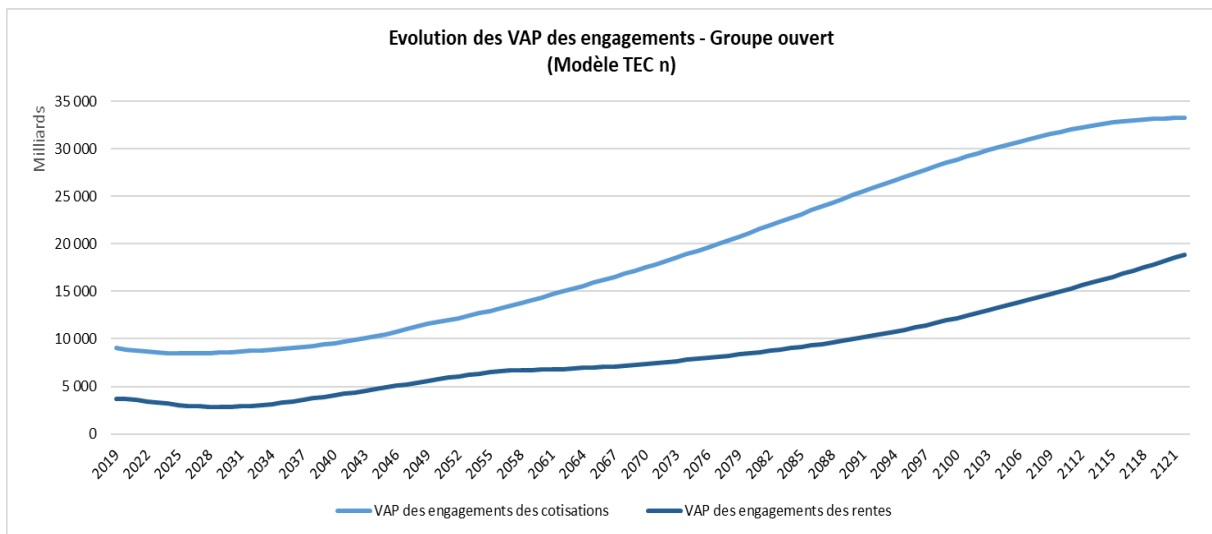
La VAP des engagements des droits acquis avec la méthode 1 (VA & VS) s'aplatit à la fin de la projection du fait que le taux d'actualisation pour l'engagement futur est à la hausse dans le modèle SW, contrairement au modèle NSS. Cela confirme que les engagements futurs dépendent sensiblement des courbes de taux forward construites, qui sont référencés comme les taux d'actualisation.

Par ailleurs, l'augmentation des VAP signifie que l'accumulation des droits acquis des nouveaux actifs est plus impactante que le départ en retraite des nouveaux actifs.

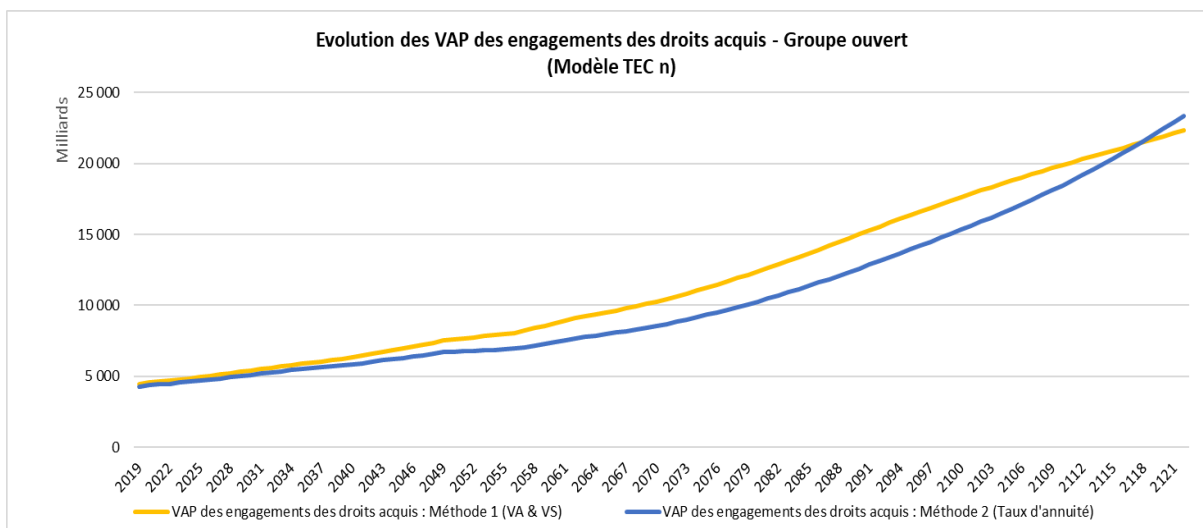


Application des courbes de taux forward TEC n

La tendance de l'évolution des VAP des engagements du modèle TEC n pour le groupe ouvert est similaire à celle du modèle SW. Les courbes des taux forward TEC n impactent la VAP des engagements des cotisations et celle des engagements des rentes de telle sorte que leur écart est plus grand par rapport à la situation du modèle SW.



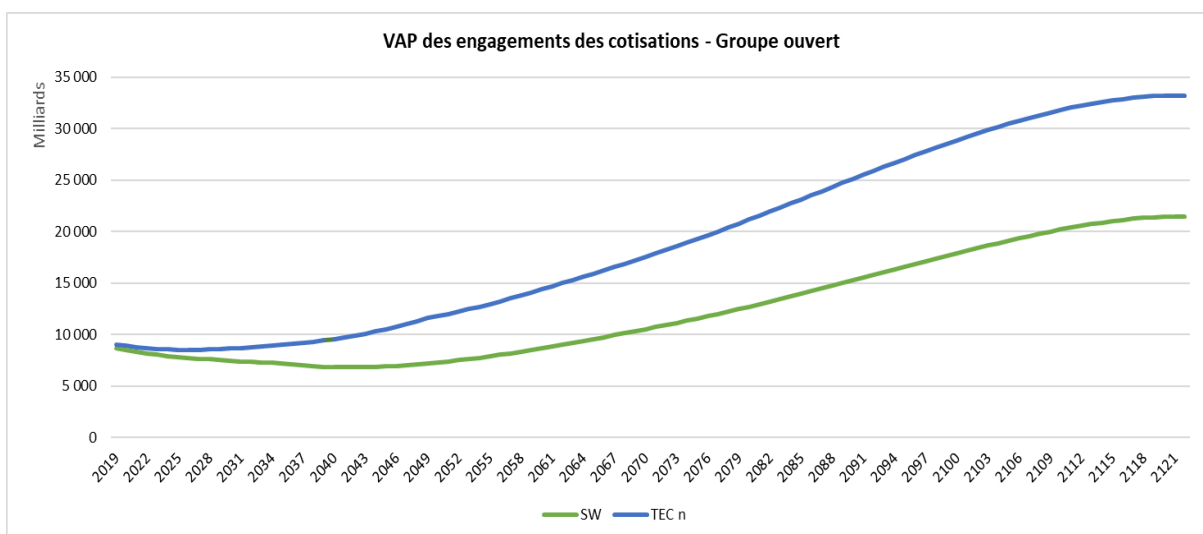
La VAP des engagements des droits acquis par la méthode 1 (VA & VS) est proche de celle estimée par la méthode 2 (Taux d'annuité). Mais la VAP des engagements des droits acquis par la méthode 1 (VA & VS) reste plus élevée que celle estimée par la méthode 2 (Taux d'annuité) sauf à la fin de la projection, contrairement à la situation du modèle SW.

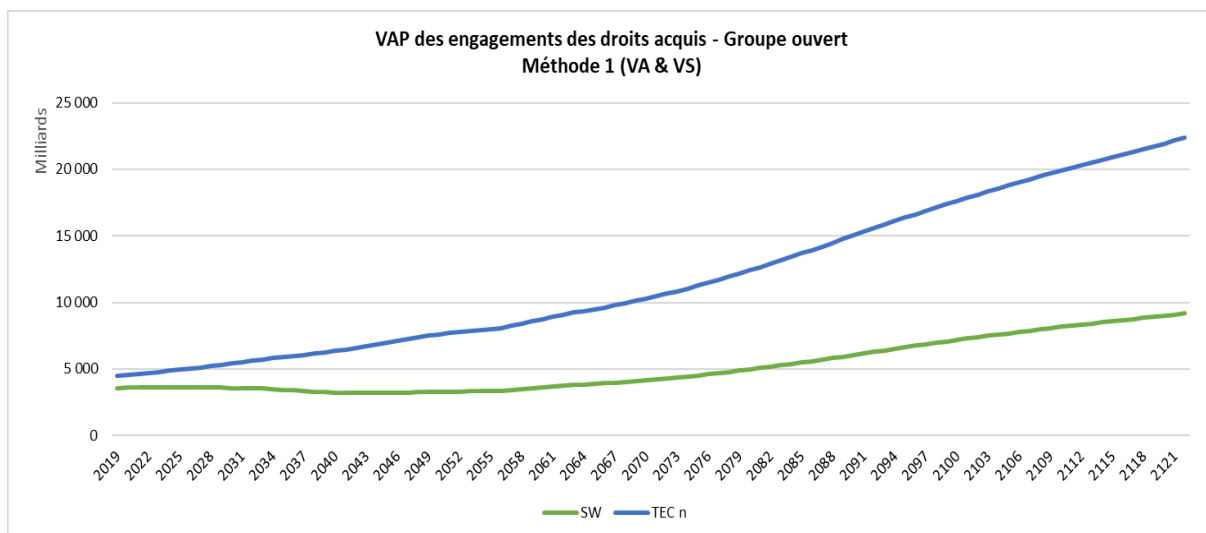
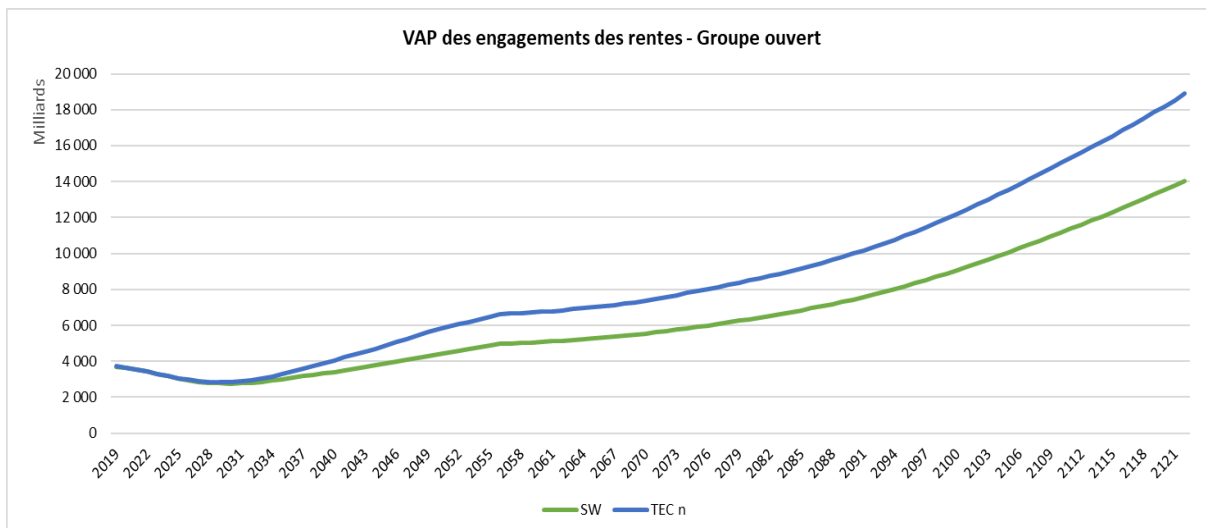


Comparaisons des résultats

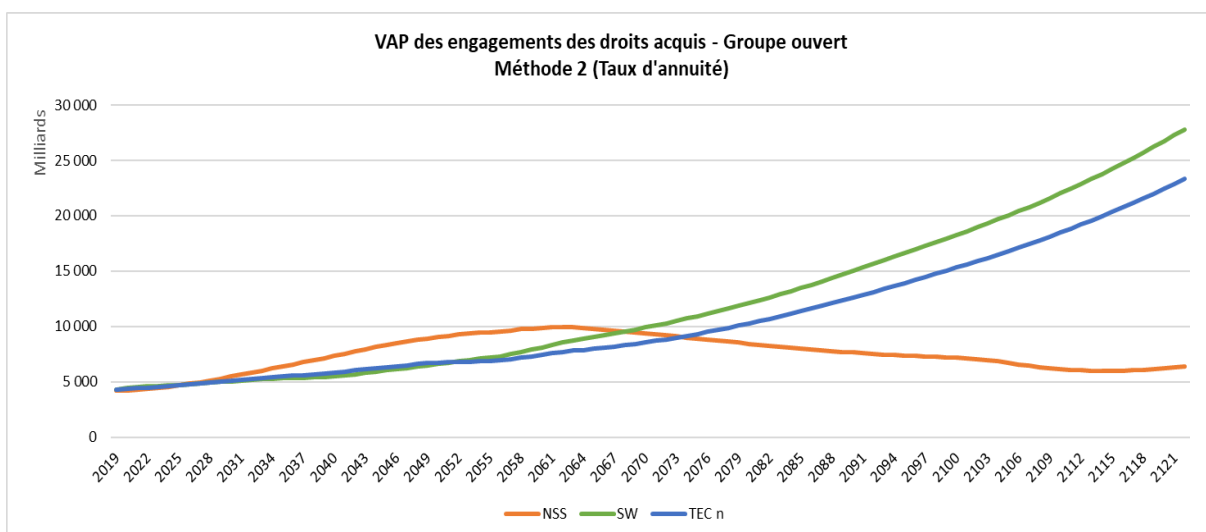
Les VAP des engagements du modèle NSS sont largement plus élevées par rapport à celles du modèle SW et du modèle TEC n.

Les graphiques ci-dessous présentent seulement la courbe de l'évolution des VAP du modèle SW et celle du modèle TEC n. L'évolution entre ces deux modèles est similaire.





Le graphique ci-dessous comprend les courbes de l'évolution des VAP des engagements des droits acquis évaluées par la méthode 2 (Taux d'annuité) :



Dans le scénario simulé par le modèle NSS, la tendance de la courbe est inverse par rapport aux autres. Ceci est confirmé par la tendance des courbes des taux forward.

4.4 Evaluation des indicateurs

Cette section est consacrée à décrire les indicateurs d'évaluation afin de piloter l'équilibre du régime et à l'analyse des résultats du groupe ouvert.

4.4.1 Taux de rendement pour la répartition pure

Rendement d'équilibre

A partir de l'idée que le montant des recettes de l'année doit couvrir le montant des dépenses de l'année, l'équation suivante a été établie pour le régime par pure répartition : Recettes = Dépenses.

Cette équation s'exprime mathématiquement comme :

$$\begin{aligned} & VS(k) * \text{Total moyen des points payés à un retraité à l'année } N + k * R(k) \\ &= VA(k) * \text{Nombre moyen de points acquis par un actif dans l'année } N + k * A(k) \end{aligned}$$

Rappelons que $A(k)$ est le nombre des actifs à l'année $N + k$ et $R(k)$ est le nombre des retraités à l'année $N + k$.

Le rendement d'équilibre à l'année $N + k$ est ainsi le rendement réel qui égalise les dépenses et les ressources du régime. C'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \text{Taux de rendement d'équilibre}(k) &= \frac{VS(k)}{VA(k)} \\ &= \frac{\text{Nombre moyen de points acquis par un actif dans l'année } N + k}{\text{Total moyen des points payés à un retraité à l'année } N + k} * \frac{A(k)}{R(k)} \\ &= \frac{\text{Nombre des points acquis par les actifs dans l'année } N + k}{\text{Total des points payés aux retraités à l'année } N + k} \end{aligned}$$

Dans la pratique, le rendement d'équilibre peut être estimé de manière approximative via l'estimation de la durée moyenne de cotisations comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} & \text{Taux de rendement d'équilibre}(k) \\ &= \frac{1}{\text{Durée moyenne de cotisations constatée à l'année } N + k} * \frac{A(k)}{R(k)} \end{aligned}$$

Durée résiduelle (pondérée) de cotisation

La formule pour calculer la durée résiduelle (pondérée) de cotisation d'un régime est :

$$D_{res} = \sum_x \frac{N(x) * (\mu - x)}{\sum_x N(x)}$$

où x est l'âge de l'actif ;

$N(x)$ est le nombre des actifs d'âge x ;

μ est l'âge de départ en retraite.

Si x est l'âge d'entrée en régime, la durée résiduelle (pondérée) de cotisation devient la durée moyenne (pondérée) de cotisation du régime.

Rendement réel (effectif)

Le rendement réel (effectif) à l'année $N + k$ est estimé comme :

$$\text{Taux de rendement réel}(k) = \frac{VS(k)}{\tau_{cotis}^a(k) * VA(k)}$$

où $\tau_{cotis}^a(k)$ est le taux d'appel moyen des cotisations à l'année $N + k$.

Théoriquement, le rendement réel est le rendement sans taux d'appel.

Analyses des résultats

En utilisant les notations de la section 2.1.3.1 (Cf. Annexe 1) et en se basant sur les taux d'emploi pour les âges entre 62 ans et 69 ans, la probabilité de retraite à l'âge $x + 1$ est estimée comme

$$\left(1 - \tau_{emploi}(x + 1)\right) - \left(1 - \tau_{emploi}(x)\right) = \tau_{emploi}(x) - \tau_{emploi}(x + 1).$$

L'âge moyen de retraite peut ainsi être calculé :

$$\sum_{x \in \{62, \dots, 69\}} \left(\tau_{emploi}(x) - \tau_{emploi}(x + 1)\right) * (x + 1) + \left(1 - \tau_{emploi}(62)\right) * 62.$$

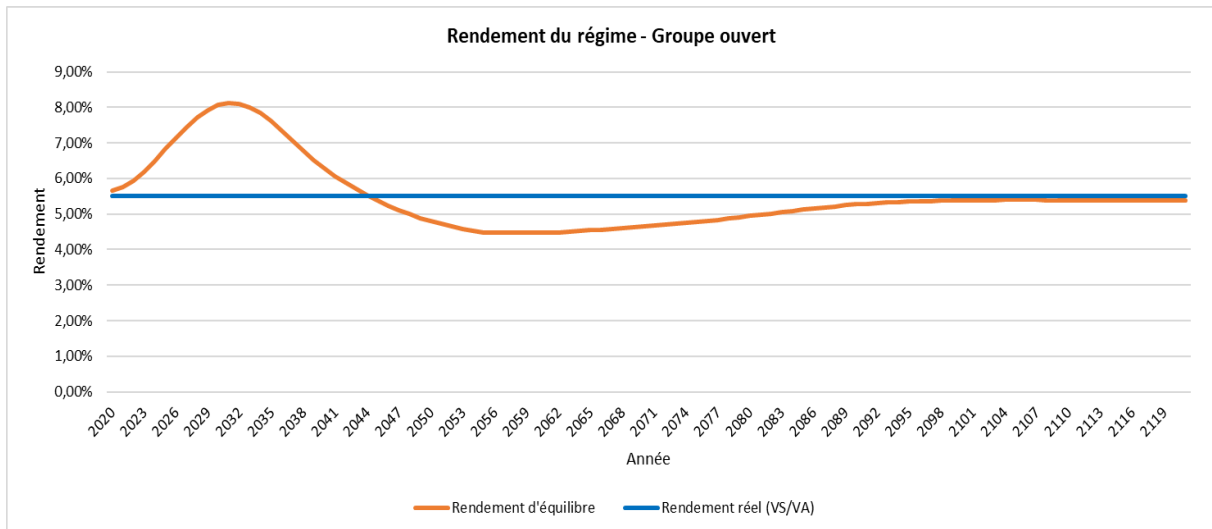
L'âge moyen de retraite est estimé à 62,8 ans dans le cadre de ce mémoire. La durée résiduelle de cotisation peut être déduite avec l'âge de départ en retraite $\mu = 62,8$ ans.

La durée résiduelle de cotisations est autour de 23,45 ans selon les données en input de la répartition des effectifs. Pour les femmes, la durée résiduelle de cotisations est d'environ 23,54 ans, pour les hommes, la durée est d'environ 23,36 ans.

Si le rendement réel n'est pas égal au rendement d'équilibre, le régime est déséquilibré. Si le rendement réel est supérieur au rendement d'équilibre, le régime est en déficit technique. À l'inverse, si le rendement réel est inférieur au rendement d'équilibre, le régime est en excédent technique.

L'effet des nouvelles entrées sur le rendement d'équilibre peut être constaté dans le graphique ci-dessous sachant que le rendement réel est le même entre le groupe fermé et le groupe ouvert.

Il y a une chute pour le rendement d'équilibre au départ de la projection du fait que le nombre des nouvelles entrées n'est pas suffisant pour qu'ils aient un impact significatif sur le groupe fermé. Les nouvelles entrées remplacent au fur et à mesure l'ancienne population du groupe fermé, donc, d'abord, le rendement d'équilibre du régime devient stable et ensuite, la tendance du rendement d'équilibre du régime est inversée comme il est souhaité à partir de l'année 2063.



4.4.2 Ratio d'équilibre financier

Dans le cadre de ce mémoire, le ratio d'équilibre financier est défini pour la population constituée des actifs (cotisants) et retraités connus à la date de l'évaluation, comme le rapport entre la somme de la réserve de financement et de la valeur probable actuelle des cotisations et la valeur actuelle probable des rentes futures.

La valeur actuelle probable au début de la projection (fin année N) des cotisations futures, notée par VAP_{cotis} , est calculée comme

$$VAP_{cotis} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Cotis(k)}{(1 + \tau_{act}(0, k))^k}$$

où $Cotis(k)$ est le montant total des cotisations à l'année $N + k$;

$\tau_{act}(0, k)$ est le taux d'actualisation de la maturité k .

La valeur actuelle probable au début de la projection (fin année N) des rentes futures, notée par VAP_{pens} , est calculée comme

$$VAP_{pens} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Pens(k)}{(1 + \tau_{act}(0, k))^k}$$

où $Pens(k)$ est le montant total des rentes à l'année $N + k$;

$\tau_{act}(0, k)$ est le taux d'actualisation de la maturité k .

Donc, le ratio d'équilibre financier

$$Ratio = \frac{VAP_{cotis} + Reserves}{VAP_{pens}}$$

avec les réserves au début de la projection.

Dans le cadre de ce mémoire, nous pouvons avoir le ratio d'équilibre financier pour le groupe fermé et le groupe ouvert. 158 Milliards de réserves (Cf. [7]) fin 2019 sont aussi intégrés pour améliorer le

ratio d'équilibre financier en supposant que ce montant des réserves reste constant pour les projections et non partagé par les autres régimes spéciaux.

Au début de la projection, la courbe de taux de zéro coupon est utilisée dans le calcul d'actualisation.

Dans le cadre de l'application de la courbe de taux zéro coupon du modèle NSS, le ratio d'équilibre financier est établi à 151,84% pour le groupe ouvert.

Le ratio d'équilibre financier est détérioré dans le cadre de l'application de la courbe de taux zéro coupon du modèle SW. Ce ratio est impacté purement par la courbe de taux zéro coupon pour la même projection. Ceci est confirmé par le fait que le ratio d'équilibre financier dans le cadre du modèle TEC n se trouve entre celui du modèle NSS et celui du modèle SW.

Le tableau de synthèse du ratio d'équilibre pour le groupe ouvert est :

	Modèle NSS	Modèle SW	Modèle TEC n
Ratio d'équilibre financier (sans réserve)	151,839%	123,64%	133,53%
Ratio d'équilibre financier (avec réserves)	151,844%	124,58%	134,00%

4.4.3 Taux de couverture actuariel

Sauf ambiguïté, les notations pour le groupe fermé et le groupe ouvert sont confondues. Le taux de couverture actuariel est défini comme le ratio entre la valeur actuelle probable des ressources et la valeur actuelle probable des dépenses estimées à l'instant donné avec le nombre des actifs et des retraités constatés.

A l'année $N + k$, les cotisations produisent la ressource $VAP_{cotis}(k)$. S'y ajoutent $Res(k)$: les autres ressources estimées à l'année $N + k$. Ces autres ressources peuvent être les réserves ou les excédents précédents du régime ou encore un autre type de financement que les cotisations. Comme la dépense estimée à l'année $N + k$ est $VAP_{eng}(k) + VAP_{pens}(k)$, le taux de couverture actuariel à l'année $N + k$ est

$$\frac{VAP_{cotis}(k) + Res(k)}{VAP_{eng}(k) + VAP_{pens}(k)}$$

La différence entre le taux de couverture actuariel et le ratio d'équilibre financier pour le début de la projection se trouve dans le fait que les engagements des droits acquis sont intégrés dans la projection de rentes pour le calcul du ratio d'équilibre financier.

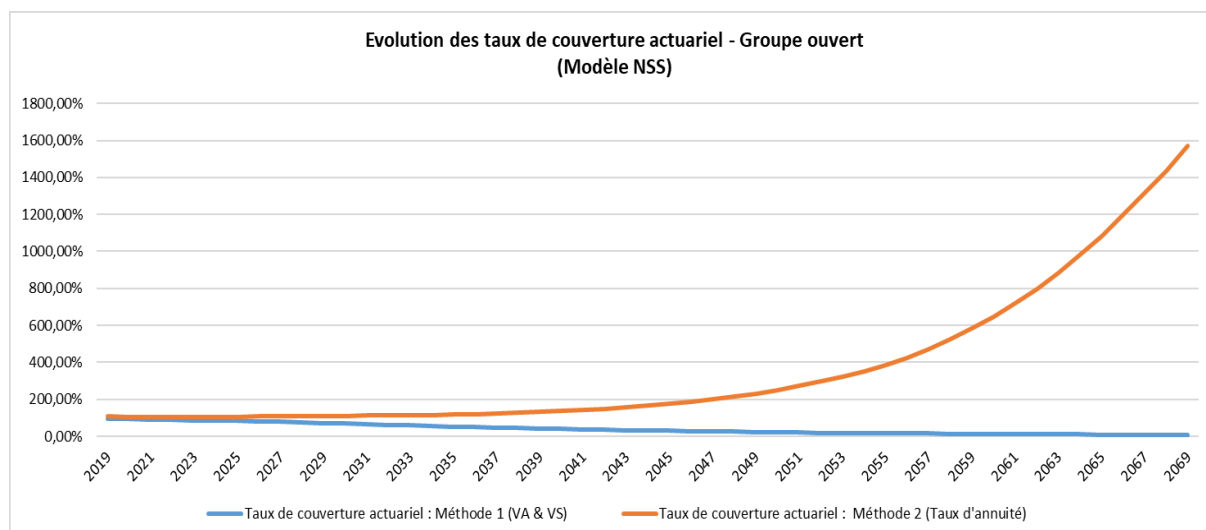
Application des courbes de taux forward du modèle NSS

Les courbes de taux forward du modèle NSS ont un impact sur les VAP des engagements des cotisations, des pensions et des droits acquis via l'effet d'actualisation pour le groupe fermé et pour le groupe ouvert.

Mais les courbes ont aussi un impact sur les taux d'annuité, les VAP des engagements des droits acquis estimées par la méthode 2 (Taux d'annuité) peuvent être bien différentes de celles estimées par la méthode 1 (VA & VS). Comme indiqué dans la section 4.3.3, la VAP des engagements des droits acquis avec la méthode 1 (VA & VS) explose à la fin de la projection car le taux d'actualisation pour les engagements futurs est négatif, le taux de couverture actuariel estimé par la méthode 1 (VA & VS) est ainsi bien faible. En conséquence, le taux de couverture actuariel estimé par la méthode 2 (Taux

d'annuité) explose par rapport à celui estimé par la méthode 1 (VA & VS) dans la présentation du graphique.

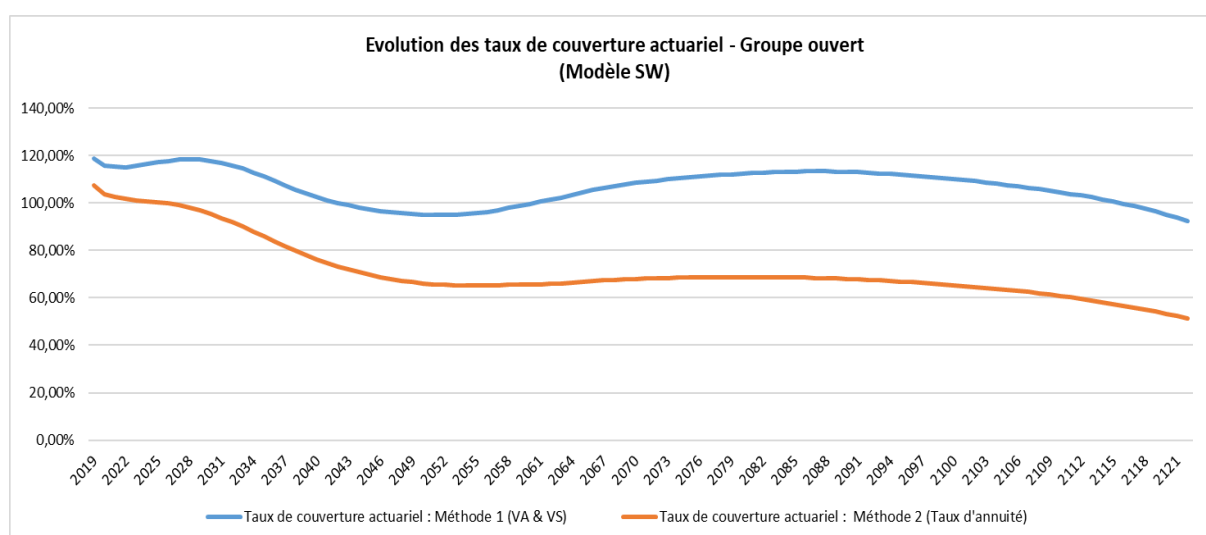
Le taux de couverture actuariel est projeté jusqu'à l'année 2122. Le graphique ci-dessous affiche l'évolution des taux de couverture actuariels pour les 50 ans à venir.



Application des courbes de taux forward du modèle SW

L'effet des courbes de taux forward est plus remarquable pour le groupe ouvert. Nous pouvons constater que l'évolution dans l'application du modèle SW est différente de celle du modèle NSS. Mais, dans l'application du modèle SW, l'évolution des taux de couverture actuariels évaluée par la méthode 1 (VA & VS) et celle évaluée par la méthode 2 (Taux d'annuité) sont plus proches.

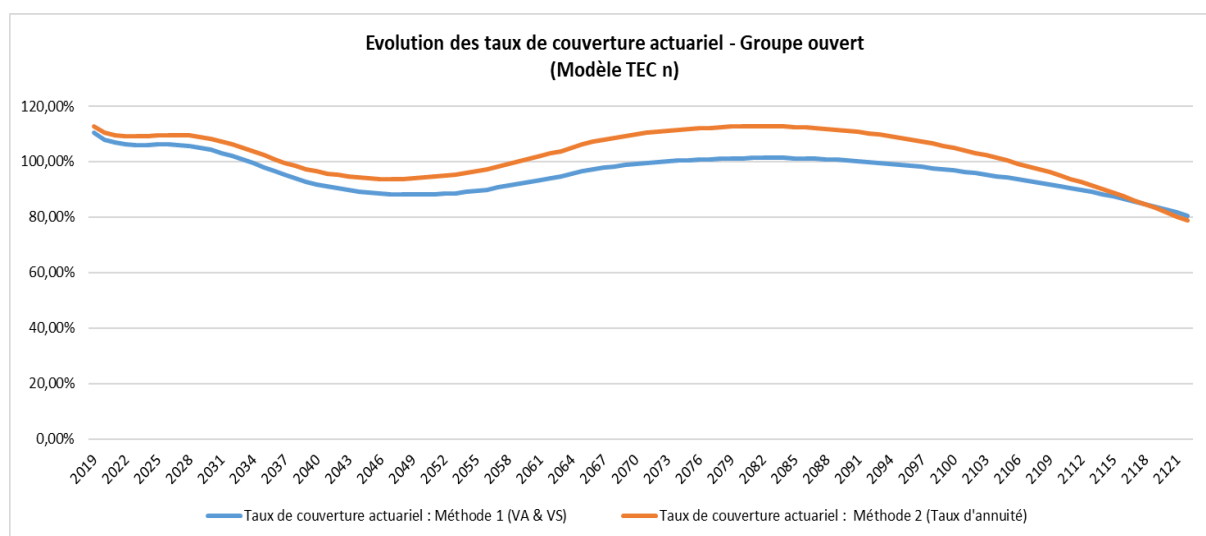
Autrement dit, l'évolution de la valeur de service et de la valeur d'acquisition est plus cohérente avec l'évolution des courbes de taux forward du modèle SW.



Application des courbes de taux forward de TEC n

Pour le groupe ouvert, nous pouvons constater que l'évolution dans l'application des courbes de taux forward de TEC n est différente de celle du modèle NSS et celle du modèle SW. Mais, dans l'application des courbes de taux forward de TEC n, l'évolution des taux de couverture actuariels évaluée par la

méthode 1 (VA & VS) et celle évaluée par la méthode 2 (Taux d'annuité) sont proches. La croissance pour l'évolution estimée par la méthode 2 (Taux d'annuité) commence à ralentir du fait que la méthode d'estimation ne comprend pas de paramètres arbitraires, ce qui évite une situation anormale où les rentes générées sont proches de 0 malgré des cotisations élevées.



4.4.4 Taux de couverture annuelle avec dette

Il s'agit d'une nouvelle méthode inspirée par la méthode Wetzel. L'idée est que le total des cotisations dans l'année doit couvrir la valeur actuelle probable des engagements acquis dans l'année et une partie de la dette.

La dette $D(k - 1)$ à la fin de l'année $N + k - 1$ est la différence entre les réserves $W(k - 1)$ à la fin de l'année $N + k - 1$ et la somme de la valeur actuelle probable des engagements acquis à la fin de l'année $N + k - 1$ et celle des pensions futures :

$$D(k - 1) = W(k - 1) - (VAP_{eng}(k - 1) + VAP_{pens}(k - 1)).$$

La dette est supposée perpétuelle. A chaque année après l'année $N + k - 1$, il faudrait payer $\tau(k - 1) * D(k - 1)$ car la valeur actuelle de ces paiements est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \tau(k - 1))^n} * \tau(k - 1) * D(k - 1) = D(k - 1)$$

où $\tau(k - 1)$ est le taux d'actualisation pour la dette à la fin de l'année $N + k - 1$.

Le total des cotisations dans l'année $N + k$, noté par $Cotis_{an}(k)$, doit couvrir la valeur actuelle probable des engagements acquis dans l'année $N + k$: $VAP_{eng. \text{ annuel}}(k)$ et une partie de la dette $\tau(k - 1) * D(k - 1)$.

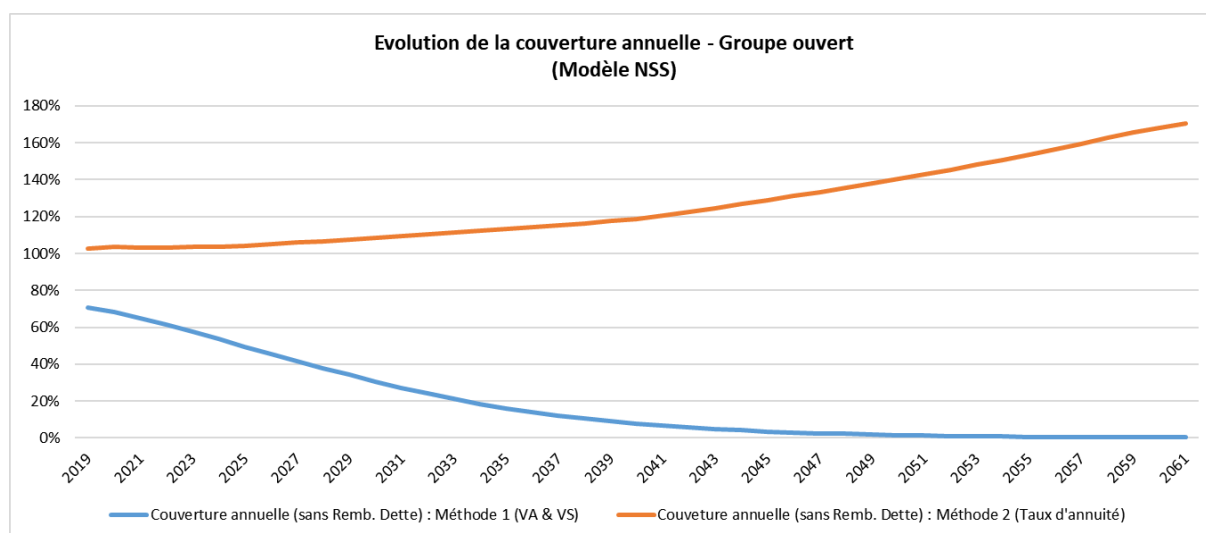
Le taux de couverture annuelle à l'année $N + k$ est défini comme

$$\frac{Cotis_{an}(k)}{\tau(k - 1) * D(k - 1) + VAP_{eng. \text{ annuel}}(k)}$$

Application des courbes de taux forward du modèle NSS

Le régime est mieux couvert en appliquant la méthode 2 (Taux d'annuité) au fil du temps, comme prévu. Les rentes acquises annuelles évaluées par le taux d'annuité sont plus modérées que celles évaluées par la méthode appliquant la valeur d'acquisition et la valeur de service. Quelle que soit la méthode, les courbes de taux forward du modèle NSS ont le même impact sur l'effet d'actualisation des engagements acquis dans l'année. Il en résulte que les VAP des engagements des droits acquis dans l'année évaluées par la méthode 2 (Taux d'annuité) sont plus faibles que celles évaluées par la méthode 1 (VA & VS).

Pour le groupe ouvert, la couverture annuelle est améliorée si elle est évaluée par la méthode 2 (Taux d'annuité), en revanche la couverture annuelle est détériorée si évaluée par la méthode 1 (VA & VS) du fait que les VAP des engagements des droits acquis dans l'année des nouvelles entrées ont un poids plus grand que le total des cotisations annuelles. L'évolution estimée par la méthode 1 (VA & VS) décroît rapidement du fait que la méthode d'estimation des droits acquis ne comprend pas le facteur économique et financier.

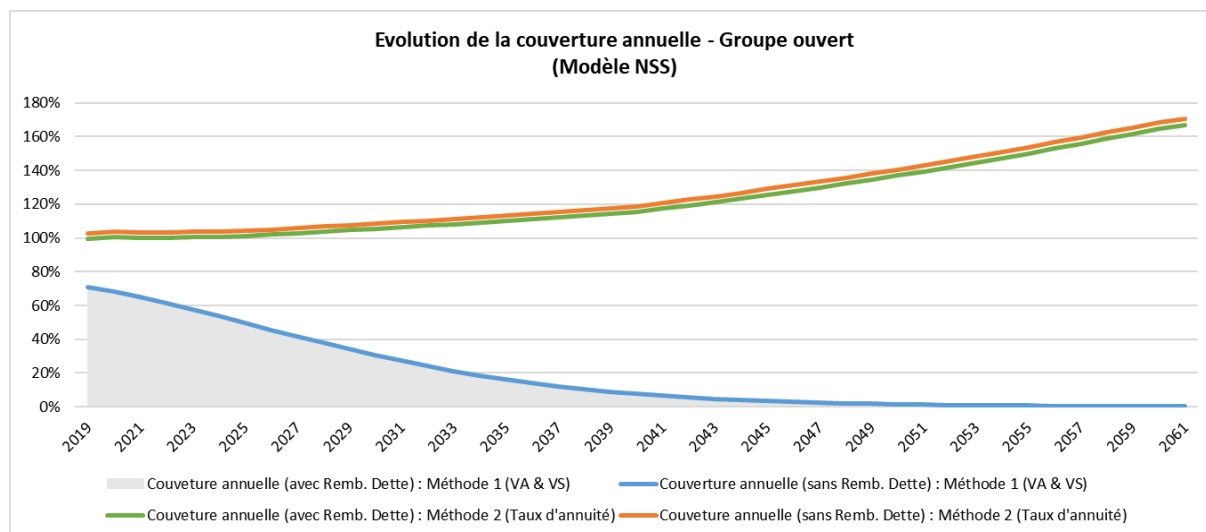


Le cas où il y a une réserve est pris en compte afin d'évaluer l'impact de la réserve sur la couverture annuelle. Les réserves de 158 Milliards (Cf. [7]) fin 2019 sont aussi intégrées pour le début des projections (l'année *N*), et la dette est supposée rester constante pour les projections et non partagée par les autres régimes spéciaux. La dette à rembourser est différente selon la méthode d'évaluation pour les VAP des engagements acquis. Le taux d'intérêt de 0,10% pour la dette est retenu. Pour la méthode 1 (VA & VS), la dette est de 8 440 milliards €, en revanche, la dette est de 7 502 milliards € pour la méthode 2 (Taux d'annuité), voir le tableau récapitulatif ci-dessous :

Réserves	158 000 000 000		
VAP engt droits acquis : Méthode 1 (VA & VS)	5 132 893 839 523	VAP engt droits acquis : Méthode 2 (Taux d'annuité)	4 195 231 802 983
VAP engt rentes	3 465 227 460 683		
Dette : Méthode 1 (VA & VS)	8 440 121 300 206	Dette : Méthode 2 (Taux d'annuité)	7 502 459 263 667
Remb. Dette : Méthode 1 (VA & VS)	8 440 121 300	Remb. Dette : Méthode 2 (Taux d'annuité)	7 502 459 264

L'hypothèse que le taux d'intérêt pour le remboursement de la dette reste constant de 0,1% est retenue pour les projections.

Avec effet de dette, les taux de couverture annuelle sont légèrement détériorés par rapport à ceux sans effet de dette pour les deux méthodes.

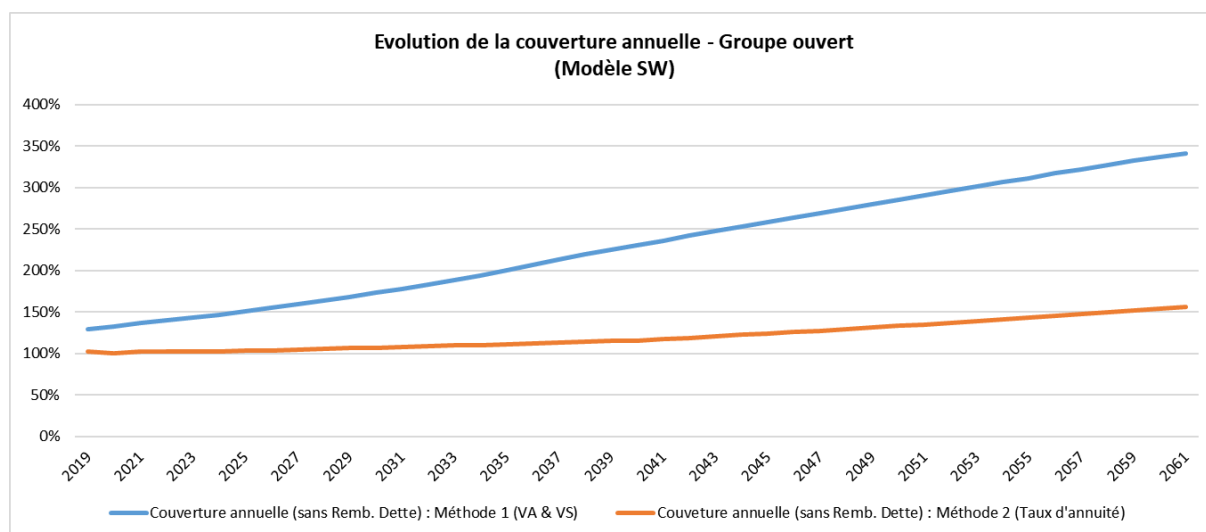


Application des courbes de taux forward du modèle SW

Nous commençons les analyses des résultats par le cas où il n'y a pas de dette. Les courbes de taux forward du modèle SW sont moins incurvées et ont une tendance à la hausse si bien que l'évolution des VAP des engagements des droits acquis dans l'année estimées par la méthode 2 (Taux d'annuité) suit celle des cotisations annuelles pour le moyen terme. Ceci explique que la courbe de couverture annuelle pour le groupe ouvert a une tendance à la hausse suite à l'impact des nouvelles entrées. Globalement, les couvertures annuelles pour le groupe ouvert estimées par la méthode 2 (Taux d'annuité) restent plutôt stables au fil du temps.

Les courbes de taux forward sont utilisées pour actualiser les engagements des droits acquis dans l'année estimés par la méthode 1 (VA & VS) de façon telle que les couvertures annuelles estimées par la méthode 1 (VA & VS) sont améliorées.

La situation de couverture annuelle estimée par la méthode 1 (VA & VS) est plus favorable que celle estimée par la méthode 2 dans l'environnement économique simulé par le modèle SW.



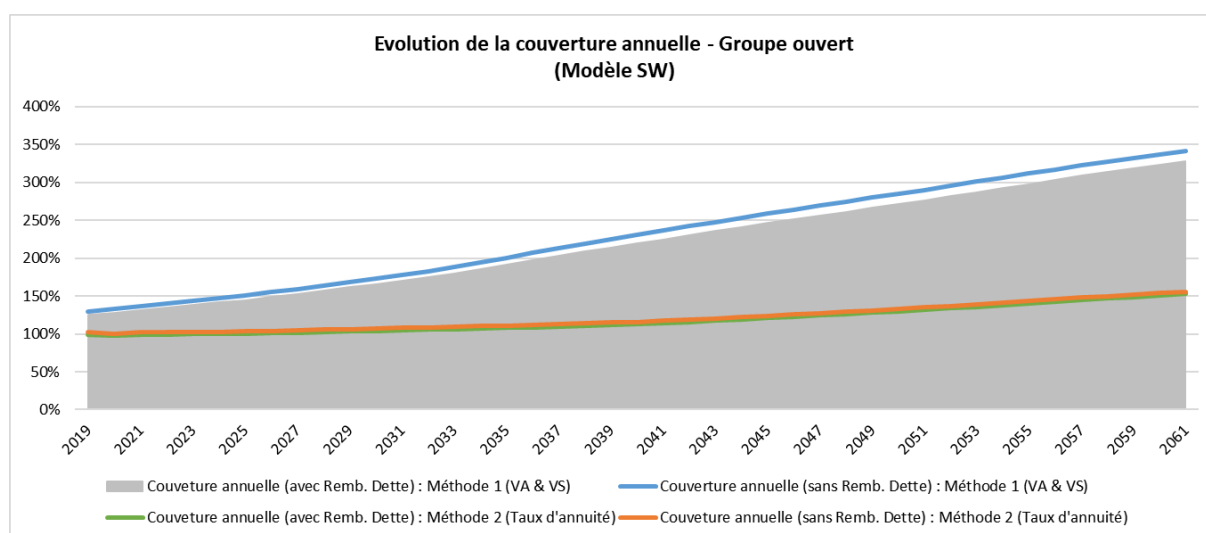
Avec les mêmes hypothèses sur la dette que celles dans le cas du modèle NSS. Le tableau récapitulatif est affiché ci-dessous :

Réserves	158 000 000 000		
VAP engt droits acquis : Méthode 1 (VA & VS)	3 564 296 991 827	VAP engt droits acquis : Méthode 2 (Taux d'annuité)	4 319 371 264 511
VAP engt rentes	3 704 855 471 259		
Dette : Méthode 1 (VA & VS)	7 111 152 463 086	Dette : Méthode 2 (Taux d'annuité)	7 866 226 735 770
Remb. Dette : Méthode 1 (VA & VS)	7 111 152 463	Remb. Dette : Méthode 2 (Taux d'annuité)	7 866 226 736

Les VAP des engagements des droits acquis évaluées par la méthode 1 (VA & VS) sont impactées significativement par l'effet d'actualisation. La couverture annuelle estimée par la méthode 1 (VA & VS) est sensible à l'environnement économique du fait que les paramètres de cette méthode restent arbitraires.

La couverture annuelle avec la méthode 2 (Taux d'annuité) reste moins favorable que celle évaluée par la méthode 1 (VA & VS) pour le groupe ouvert.

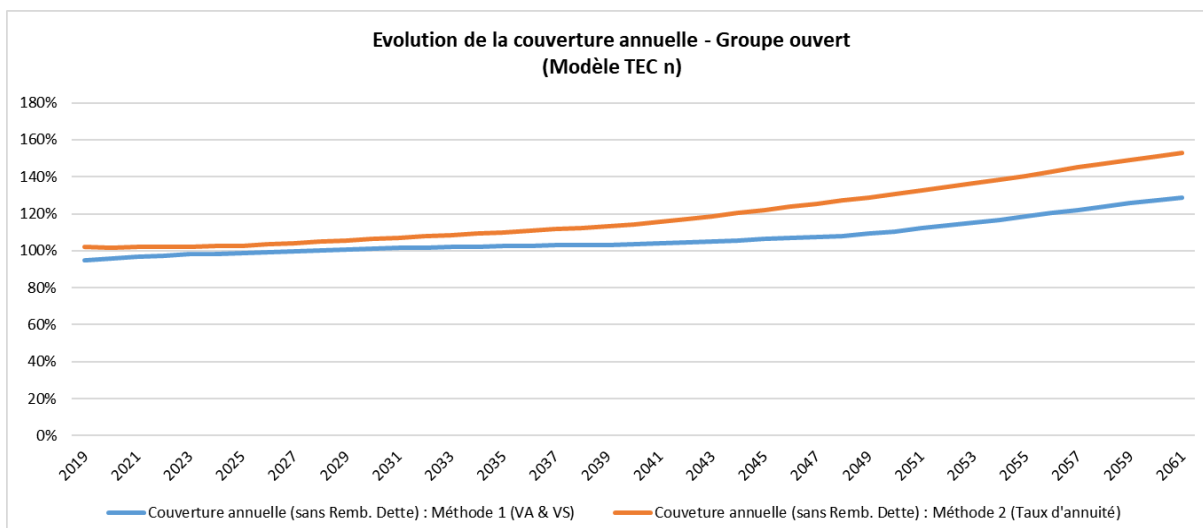
L'effet de dette se traduit par la diminution du taux de couverture annuelle.



Application des courbes de taux forward de TEC n

L'évolution de la couverture annuelle avec l'application des courbes de taux forward du TEC n est différente de celle avec les courbes de taux forward du modèle NSS et du modèle SW.

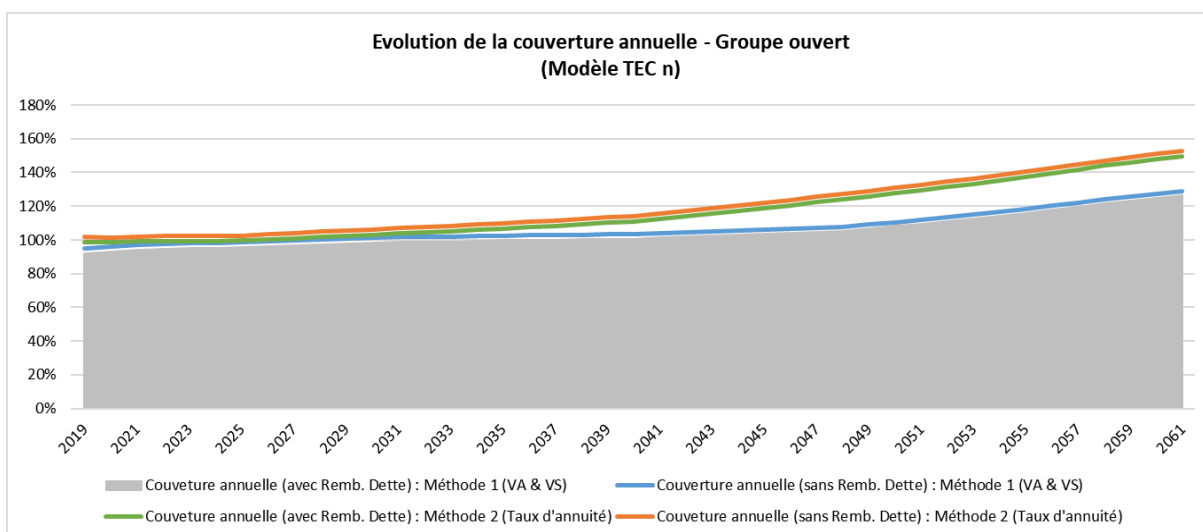
Du fait que les taux forward de TEC n sont moins à la hausse que ceux du modèle SW, les courbes d'évolution de la couverture annuelle pour le groupe ouvert estimées par la méthode 1 (VA & VS) ne dépassent pas celles estimées par la méthode 2 (Taux d'annuité) même si elles sont très proches à court terme. La couverture annuelle pour le groupe ouvert estimée par la méthode 2 (Taux d'annuité) résiste à la dégradation du taux forward. Il est rappelé que les taux forward de TEC n sont dégradés par rapport à ceux du modèle SW.



Avec les mêmes hypothèses sur la dette que celles dans le cas du modèle NSS, le tableau récapitulatif est affiché ci-dessous :

Réserves	158 000 000 000		
VAP engt droits acquis : Méthode 1 (VA & VS)	4 473 202 741 247	VAP engt droits acquis : Méthode 2 (Taux d'annuité)	4 296 157 966 007
VAP engt rentes	3 720 952 272 343		
Dette : Méthode 1 (VA & VS)	8 036 155 013 591	Dette : Méthode 2 (Taux d'annuité)	7 859 110 238 350
Remb. Dette : Méthode 1 (VA & VS)	8 036 155 014	Remb. Dette : Méthode 2 (Taux d'annuité)	7 859 110 238

En lecture des résultats dans le tableau récapitulatif, la situation du modèle TEC n se situe entre celle du modèle NSS et celle du modèle SW, de même que les scénarios simulés par ces trois modèles. Pour le groupe ouvert, l'effet de dette est aussi absorbé par les nouvelles entrées de sorte que la couverture annuelle conserve une tendance à la hausse.



La couverture annuelle estimée par la méthode 2 (Taux d'annuité) reste résistante pour ces trois scénarios économiques.

Chapitre 5 : Tests de sensibilité et analyses

Ce chapitre est dévolu à décrire les tests de sensibilité des indicateurs par rapport aux trois catégories d'évolutions. La sensibilité à l'évolution démographique est présentée à la section 5.1. Les paramètres techniques et financiers sont pris en compte dans les tests de sensibilité qui sont interprétés dans la section 5.2 et la section 5.3.

Comme le modèle SW est un modèle adopté par l'ACPR pour leurs courbes de taux, nous nous concentrons sur les tests de sensibilité pour le groupe ouvert dans le cadre d'application du modèle SW. Autrement dit, le scénario central est celui d'application du modèle SW.

Dans ce chapitre sont analysés les résultats des tests de sensibilité, nous découvrons que le changement de l'hypothèse de la probabilité de recrutement produit une meilleure amélioration de la couverture annuelle que celui de l'âge de la retraite.

5.1 Sensibilité à l'évolution démographique

La sensibilité est abordée d'abord par rapport à l'évolution démographique. L'âge de départ à la retraite est une des clés à discuter à chaque réforme des retraites. Il est ainsi important de le tester pour en expliciter les conséquences.

5.1.1 Sensibilité à l'âge de départ à la retraite

Hypothèse : l'âge minimum de départ à la retraite est de 64 ans à la place de 62 ans pour les projections.

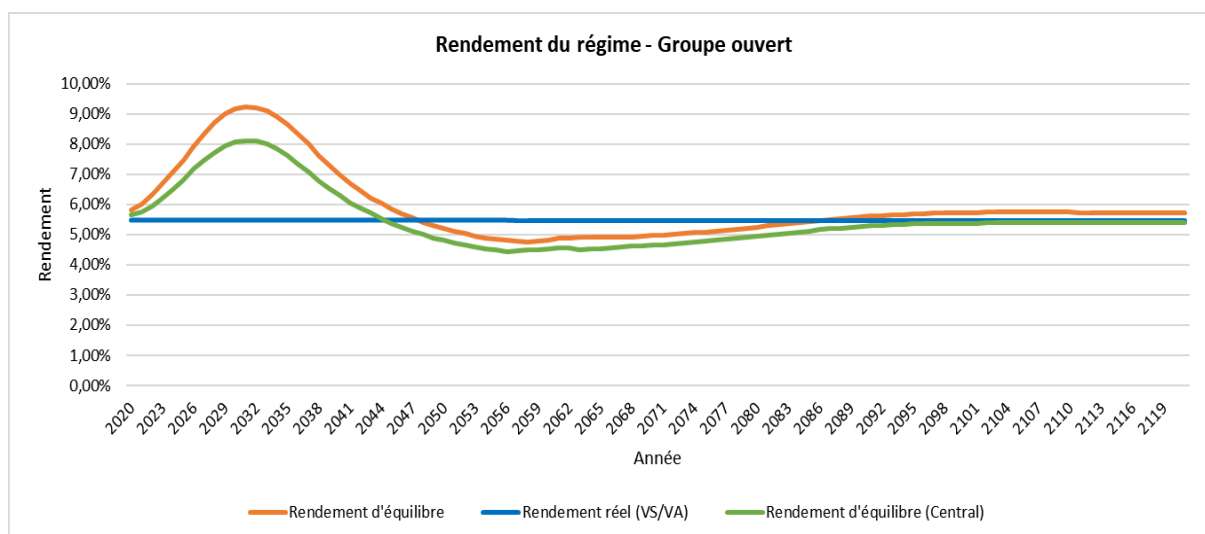
Le tableau ci-dessous synthétise les taux de prise de retraite retenus dans les projections pour le test de sensibilité :

Age	Prob de prise de retraite
64	86,7%
65	36,8%
66	23,8%
67	18,8%
68	13,5%
69	15,6%

En conséquence, l'âge de liquidation de droits est de 64 ans à la place de 62 ans et l'application de la probabilité de recrutement est également prolongée jusqu'à 63 ans avec les données actuelles pour l'âge de départ à la retraite actuel.

L'âge de départ à la retraite est augmenté de 2 ans, le nombre de retraités est ainsi diminué, donc le rendement d'équilibre augmente.

Voici le graphique concerné :



Le tableau de sensibilité du rendement d'équilibre à la variation d'âge pour les cinq premières années de projections est :

Rendement d'équilibre

Scénario \ Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	5,67%	5,75%	5,93%	6,20%	6,50%	6,83%
Âge de retraite : 64 ans	5,82%	6,02%	6,31%	6,67%	7,06%	7,47%
Sensibilité	1,38%	2,33%	3,23%	3,85%	4,28%	4,71%

La sensibilité possède une tendance à la hausse à long terme. Cela signifie que le changement d'âge de retraite aurait un effet plus sensible sur le rendement d'équilibre à long terme.

Quand l'âge de retraite est reporté, la VAP des cotisations augmente du fait que la durée de cotisation est prolongée, et la VAP des pensions déjà liquidées ne change pas.

Le taux de couverture actuariel estimé par la méthode 2 (Taux d'annuité) est moins sensible au changement de l'âge de retraite du fait que l'impact du changement d'âge est absorbé par la détermination du taux d'annuité. La différence entre la VAP des engagements des droits acquis estimée par la méthode 2 et celle estimée par la méthode 1 provient du calcul des pensions générées par la même cotisation.

Les pensions générées par les engagements acquis estimées par la méthode 1 dépendent du nombre de points acquis et de la valeur de service de retraite, cependant, les pensions générées par les engagements acquis estimées par la méthode 2 dépendent des cotisations historiques, de la durée de service de pensions à partir de la retraite et du taux d'actualisation. Quand l'âge de retraite est reporté, la durée de cotisation s'allonge, et la durée de service de pensions est réduite en maintenant la même durée maximum de vie humaine, il en résulte que les pensions générées estimées par la méthode 2 sont augmentées sachant que l'hypothèse pour le taux d'actualisation ne change pas dans ce cadre. Pour la méthode 1, les pensions générées sont aussi augmentées grâce à l'évolution de la valeur du point de service de pensions et à l'augmentation d'acquisition de points si l'âge de retraite est reporté.

La variation estimée par la méthode 1 des pensions générées par rapport à celles avant le changement de l'âge de retraite est plus faible que celle estimée par la méthode 2 de sorte que le taux de couverture actuariel estimé par la méthode 1 augmente plus. Il est à noter que les pensions générées par les

engagements acquis à une année donnée estimées par la méthode 2 sont plus sensibles à l'âge de retraite.

Taux de couverture actuariel : Méthode 1 (VA & VS)

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	115,87%	115,15%	115,12%	115,58%	116,31%	117,06%
Âge de retraite : 64 ans	116,35%	116,03%	116,29%	116,91%	117,73%	118,54%
Sensibilité	0,21%	0,38%	0,51%	0,57%	0,61%	0,63%

Taux de couverture actuariel : Méthode 2 (Taux d'annuité)

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	103,78%	102,39%	101,59%	101,07%	100,69%	100,25%
Âge de retraite : 64 ans	104,17%	103,05%	102,43%	101,97%	101,60%	101,14%
Sensibilité	0,19%	0,32%	0,41%	0,44%	0,45%	0,44%

Comme les paramètres tels que la valeur d'acquisition du point et la valeur de service du point comprennent un élément arbitraire, nous nous concentrons sur la sensibilité de la méthode 2 (Taux d'annuité). Comme analysé dans les paragraphes précédents, la VAP des engagements des droits acquis durant l'année augmente, donc, le taux de couverture annuelle diminue. L'effet négatif de l'augmentation de la VAP des droits acquis sur le taux de couverture annuelle est atténué par la dette.

Taux de couverture annuelle : Méthode 2 (Taux d'annuité) sans dette

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	102,20%	100,50%	102,41%	102,52%	102,65%	102,80%
Âge de retraite : 64 ans	101,29%	99,22%	100,84%	100,79%	100,83%	100,86%
Sensibilité	-0,45%	-0,64%	-0,77%	-0,84%	-0,89%	-0,94%

Taux de couverture annuelle : Méthode 2 (Taux d'annuité) avec dette

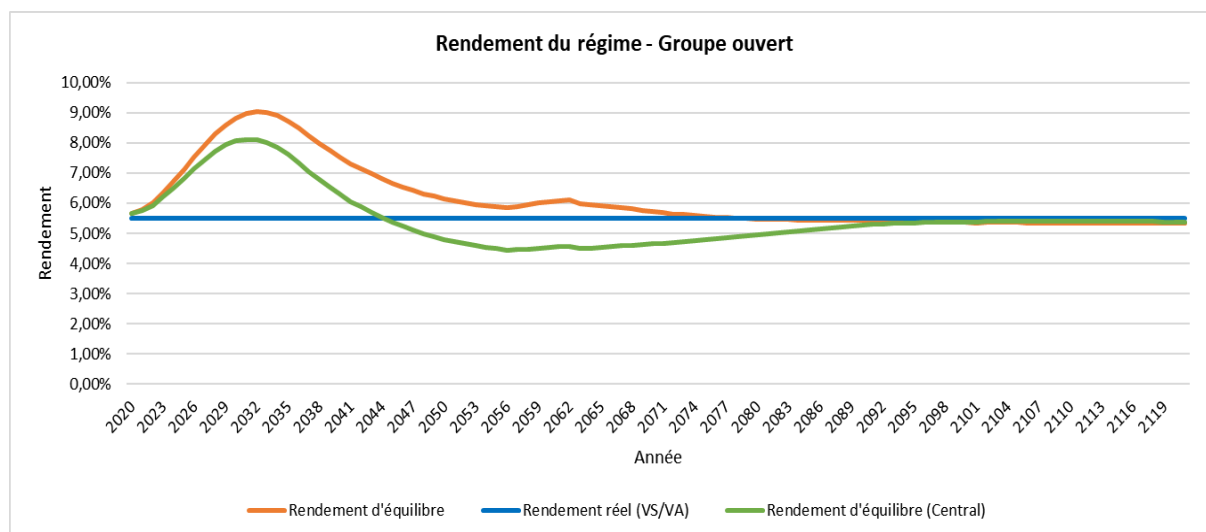
Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	99,11%	97,50%	99,30%	99,41%	99,54%	99,69%
Âge de retraite : 64 ans	98,25%	96,31%	97,84%	97,80%	97,85%	97,89%
Sensibilité	-0,43%	-0,61%	-0,74%	-0,81%	-0,85%	-0,90%

5.1.2 Sensibilité au nombre des nouvelles entrées

Hypothèse : Si la probabilité de recrutement est positive, la probabilité de recrutement est majorée par un coefficient multiplicatif de 1,2 ; si la probabilité de recrutement est négative, la probabilité de recrutement est minorée par un coefficient multiplicatif de 0,8.

Le nombre des nouvelles entrées est augmenté de 20% par rapport à celui du scénario central à chaque année pour la probabilité de recrutement positive, sinon, le nombre des nouvelles entrées est diminué de 20% par rapport à celui du scénario central à chaque année pour la probabilité de recrutement négative. Autrement dit, le nombre des nouveaux actifs est augmenté de 20%, en revanche, le nombre des nouveaux inactifs est diminué de 20%.

Le nombre total des nouvelles entrées augmente au fur et à mesure, donc le rendement d'équilibre du régime augmente comme l'indique le graphique ci-après. Avec cette hypothèse, le régime est en excédent technique pendant toutes les années projetées.



La sensibilité à la probabilité de recrutement dans le cadre de ce mémoire est la variation en pourcentage des résultats.

Le tableau de sensibilité du rendement d'équilibre à la variation de la probabilité de recrutement pour les cinq premières années de projections est :

Rendement d'équilibre

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	5,67%	5,75%	5,93%	6,20%	6,50%	6,83%
Probabilité de recrutement	5,67%	5,79%	6,02%	6,35%	6,71%	7,12%
Sensibilité	0,00%	0,73%	1,52%	2,40%	3,32%	4,27%

Le taux de couverture actuariel s'améliore après le changement de l'hypothèse de la probabilité de recrutement. L'effet est cumulatif au fil du temps car le changement du nombre des nouvelles entrées à une année aurait un impact pour toutes les années à venir. Ceci explique la croissance de sensibilité pour les cinq premières années. Le taux de couverture actuariel estimé par la méthode 1 est plus impacté par les nouvelles entrées. Le changement de l'hypothèse de la probabilité de recrutement produit une meilleure amélioration de la couverture actuarielle que celle de l'âge de la retraite.

Taux de couverture actuariel : Méthode 1 (VA & VS)

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	115,87%	115,15%	115,12%	115,58%	116,31%	117,06%
Probabilité de recrutement	117,01%	117,54%	118,86%	120,72%	122,91%	125,17%
Sensibilité	0,98%	2,08%	3,24%	4,45%	5,68%	6,93%

Taux de couverture actuariel : Méthode 2 (Taux d'annuité)

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	103,78%	102,39%	101,59%	101,07%	100,69%	100,25%
Probabilité de recrutement	104,80%	104,50%	104,89%	105,55%	106,37%	107,15%
Sensibilité	0,98%	2,06%	3,24%	4,44%	5,65%	6,88%

La sensibilité augmente avec la dette. Le changement de l'hypothèse de la probabilité de recrutement produit une meilleure amélioration de la couverture annuelle que celle de l'âge de la retraite.

Taux de couverture annuelle : Méthode 2 (Taux d'annuité) sans dette

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	102,20%	100,50%	102,41%	102,52%	102,65%	102,80%
Probabilité de recrutement	103,02%	101,09%	103,45%	103,66%	103,91%	104,21%
Sensibilité	0,80%	0,59%	1,01%	1,11%	1,22%	1,37%

Taux de couverture annuelle : Méthode 2 (Taux d'annuité) avec dette

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	99,11%	97,50%	99,30%	99,41%	99,54%	99,69%
Probabilité de recrutement	99,90%	98,11%	100,36%	100,59%	100,86%	101,19%
Sensibilité	0,80%	0,62%	1,06%	1,19%	1,32%	1,50%

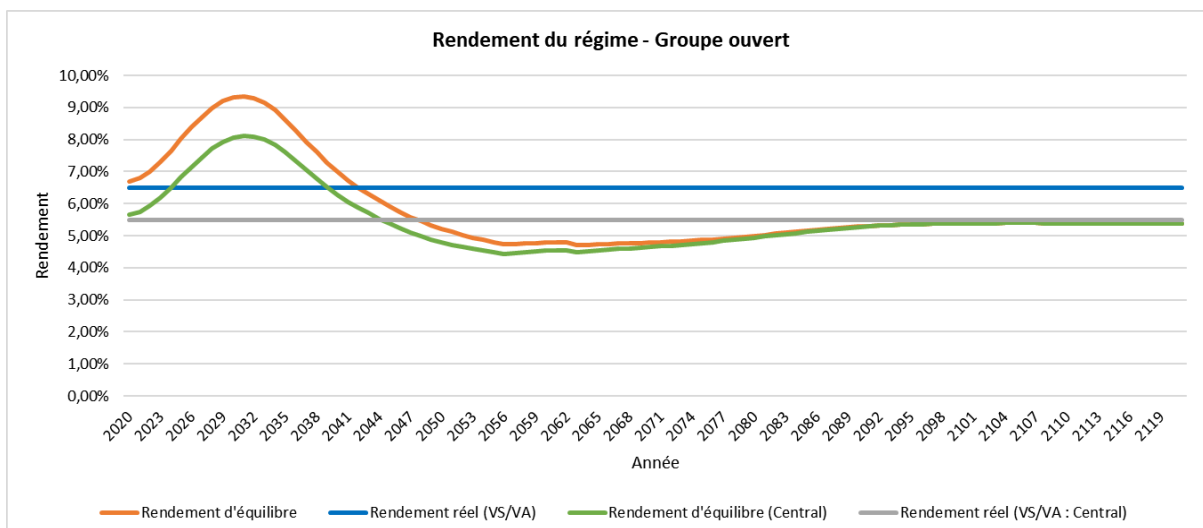
5.2 Sensibilité à l'évolution des paramètres techniques

Dans cette section, l'étude sur la sensibilité à l'évolution du taux de rendement est menée.

Hypothèse : le taux de rendement historique moyen est retenu.

La moyenne du taux de rendement historique de CNAV et du taux de rendement du régime général se trouve autour de 6,5%. Dans le teste de sensibilité, le taux de rendement historique moyen de 6,5% est ainsi retenu.

Le paramètre du taux de rendement n'impacte pas les projections démographiques, mais impacte le nombre des points acquis. La valeur d'acquisition est abaissée pour que le taux de rendement augmente. Au départ de la projection, l'augmentation du nombre des points acquis pendant l'année ne suit pas celui du nombre total des points acquis des retraités préexistants, ensuite le rapport entre les deux se stabilise au fil de temps comme l'indique le graphique ci-après.



Le tableau de sensibilité du rendement d'équilibre à la variation du taux de rendement pour les cinq premières années de projections est :

Rendement d'équilibre

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	5,67%	5,75%	5,93%	6,20%	6,50%	6,83%
Taux de rendement : 6,5%	6,70%	6,79%	7,00%	7,31%	7,65%	8,02%
Sensibilité	18,16%	18,11%	18,02%	17,90%	17,73%	17,51%

Ce test concerne principalement l'application de la méthode 1 (VA & VS).

La sensibilité s'accroît selon l'année car l'effet d'augmentation du nombre de points est accumulatif sachant que l'évolution de cotisation ne change pas.

Taux de couverture actuariel : Méthode 1 (VA & VS)

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	115,87%	115,15%	115,12%	115,58%	116,31%	117,06%
Taux de rendement : 6,5%	113,04%	109,34%	106,18%	103,38%	100,68%	97,92%
Sensibilité	-2,45%	-5,05%	-7,77%	-10,55%	-13,44%	-16,35%

Sans dette, la sensibilité reste constante car l'augmentation de la VAP des engagements des droits acquis pendant l'année est linéaire avec l'évolution du salaire. Cependant, la sensibilité est atténuée par l'effet de la dette.

Taux de couverture annuelle : Méthode 1 (VA & VS) sans dette

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	129,50%	132,99%	136,49%	139,97%	143,51%	147,00%
Taux de rendement : 6,5%	109,58%	112,53%	115,49%	118,44%	121,43%	124,38%
Sensibilité	-15,38%	-15,38%	-15,38%	-15,38%	-15,38%	-15,38%

Taux de couverture annuelle : Méthode 1 (VA & VS) avec dette

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	125,03%	128,27%	131,53%	134,77%	138,07%	141,31%
Taux de rendement : 6,5%	106,36%	109,13%	111,92%	114,69%	117,51%	120,28%
Sensibilité	-14,93%	-14,92%	-14,91%	-14,90%	-14,89%	-14,88%

5.3 Sensibilité à l'évolution des paramètres financiers

L'impact financier sur le régime se traduit principalement via l'application des courbes de taux forward à la fois pour l'actualisation et pour le calcul de taux d'annuité.

5.3.1 Sensibilité à l'augmentation du taux

Hypothèse : Le taux zéro coupon est à la hausse de 2%.

Les courbes de taux forward sont construites sur cette hypothèse de taux zéro coupon à la hausse de 2%.

Les taux forward utilisés comme taux d'actualisation augmentent, les VAP des engagements diminuent. Les engagements des cotisations ont une maturité moins lointaine que les engagements des rentes et des droits acquis estimés par la méthode 1, il en résulte que l'effet d'actualisation impacte moins les engagements des cotisations et le taux de couverture actuariel est ainsi augmenté. La sensibilité du taux de couverture actuariel estimé par la méthode 1 est positive à la variation de taux zéro coupon.

Le taux d'annuité augmente quand le taux zéro coupon augmente, donc les rentes futures générées par les mêmes cotisations augmentent. Les VAP des engagements des droits acquis estimés par la méthode 2 augmentent ainsi légèrement en prenant en compte l'effet d'actualisation, en revanche, les VAP des engagements des cotisations et les VAP des engagements des rentes diminuent de même façon suite à l'effet d'actualisation accentué par l'augmentation de taux zéro coupon. En conséquence, le taux de couverture actuariel estimé par la méthode 2 diminue. C'est-à-dire que la sensibilité du taux de couverture actuariel estimé par la méthode 2 est négative à la variation de taux zéro coupon.

Taux de couverture actuariel : Méthode 1 (VA & VS)

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	115,87%	115,15%	115,12%	115,58%	116,31%	117,06%
Taux à la hausse de 2%	121,12%	120,76%	121,22%	122,27%	123,63%	124,98%
Sensibilité	2,26%	2,43%	2,65%	2,90%	3,14%	3,38%

Taux de couverture actuariel : Méthode 2 (Taux d'annuité)

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	103,78%	102,39%	101,59%	101,07%	100,69%	100,25%
Taux à la hausse de 2%	78,93%	77,45%	76,62%	75,80%	75,06%	74,25%
Sensibilité	-11,98%	-12,18%	-12,29%	-12,50%	-12,73%	-12,97%

Le montant total des cotisations annuelles n'est pas impacté par la hausse de taux et la dette reste constante pendant toute la durée de la projection, les VAP des droits acquis dans l'année sont diminués car l'augmentation des rentes générées par les droits acquis est rabattue par l'effet d'actualisation. Il s'ensuit que le taux de couverture annuel augmente. Le sens de la sensibilité ne change pas vraiment sans ou avec dette car l'effet de dette est moins significatif que l'effet d'actualisation.

Taux de couverture annuelle : Méthode 2 (Taux d'annuité) sans dette

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	102,20%	100,50%	102,41%	102,52%	102,65%	102,80%
Taux à la hausse de 2%	103,58%	97,40%	103,83%	103,94%	104,08%	104,22%
Sensibilité	0,68%	-1,54%	0,69%	0,69%	0,69%	0,69%

Taux de couverture annuelle : Méthode 2 (Taux d'annuité) avec dette

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	99,11%	97,50%	99,30%	99,41%	99,54%	99,69%
Taux à la hausse de 2%	100,67%	94,81%	100,89%	101,01%	101,15%	101,29%
Sensibilité	0,79%	-1,38%	0,80%	0,80%	0,80%	0,80%

5.3.2 Sensibilité à la baisse de taux

Hypothèse : Le taux zéro coupon est à la baisse de 2%.

Les courbes de taux forward sont construites sur cette hypothèse de taux zéro coupon à la baisse de 2%.

La sensibilité du taux de couverture actuariel estimé par la méthode 1 est positive à la variation de taux zéro coupon. Il résulte que le taux de couverture actuariel est aussi à la baisse.

La sensibilité du taux de couverture actuariel estimé par la méthode 2 est négative à la variation de taux zéro coupon. Donc, le taux de couverture actuariel est aussi à la hausse.

Taux de couverture actuariel : Méthode 1 (VA & VS)

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	115,87%	115,15%	115,12%	115,58%	116,31%	117,06%
Taux à la baisse de 2%	107,42%	106,41%	105,96%	105,90%	106,11%	106,36%
Sensibilité	-3,65%	-3,80%	-3,98%	-4,19%	-4,39%	-4,57%

Taux de couverture actuariel : Méthode 2 (Taux d'annuité)

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	103,78%	102,39%	101,59%	101,07%	100,69%	100,25%
Taux à la baisse de 2%	138,21%	137,34%	137,10%	137,36%	137,80%	138,15%
Sensibilité	16,59%	17,07%	17,48%	17,95%	18,43%	18,90%

La situation à la baisse du taux est symétrique à celle à la hausse. Donc, la couverture annuelle est à la baisse. L'effet de dette contribue également à la baisse de la couverture annuelle, ceci explique que la couverture annuelle avec dette est moins élevée que celle sans dette.

Taux de couverture annuelle : Méthode 2 (Taux d'annuité) sans dette

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	102,20%	100,50%	102,41%	102,52%	102,65%	102,80%
Taux à la baisse de 2%	101,56%	101,40%	101,74%	101,83%	101,95%	102,09%
Sensibilité	-0,31%	0,45%	-0,33%	-0,33%	-0,34%	-0,35%

Taux de couverture annuelle : Méthode 2 (Taux d'annuité) avec dette

Scénario\Année de projection	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Central	99,11%	97,50%	99,30%	99,41%	99,54%	99,69%
Taux à la baisse de 2%	98,16%	98,01%	98,32%	98,42%	98,54%	98,68%
Sensibilité	-0,48%	0,26%	-0,49%	-0,50%	-0,50%	-0,51%

Chapitre 6 : Conclusion

Le mémoire décrit des travaux portant sur le nouveau régime de retraite proposé en 2020. Ces travaux permettent de simuler, suivant différents scénarios, l'évolution de ce régime et ainsi d'anticiper l'impact probable des fluctuations du contexte économique et financier, avec pour objectif de produire les outils permettant le pilotage de l'équilibre du régime.

Dans ce mémoire sont développées les méthodologies des projections démographiques, projections des flux (droits, rentes), projections des valeurs actuelles présentes à chaque fin d'année des engagements en stock (cotisations futures, droits acquis accumulés, rentes acquises accumulées) et projections des valeurs actuelles présentes des engagements des droits acquis annuellement ainsi que de la construction des courbes de taux forward.

Une nouveauté méthodologique est proposée, qui consiste à utiliser une trajectoire de taux forward pour les projections d'évaluations plutôt qu'un ensemble de taux utilisés à une maturité donnée. Les modèles utilisés pour la construction des courbes de taux forward jouent un rôle significatif pour les projections, notamment pour l'évaluation des valeurs actuelles présentes des engagements et des indicateurs du régime.

La méthode de calcul du taux d'annuité existe déjà dans les méthodes de calcul pour le régime général. Une autre nouveauté de ce texte consiste à développer cette méthode du taux d'annuité par des techniques actuarielles relevant de l'assurance-vie.

La méthode du taux d'annuité est proposée comme une méthode alternative en lieu et place de la méthode appliquant la valeur d'acquisition /service utilisée par le régime complémentaire en France pour déterminer les rentes futures générées par les engagements acquis à présent. L'inverse du taux d'annuité peut être interprété comme la valeur d'acquisition en fixant la valeur de service à 1€.

Le point fort de la méthode du taux d'annuité est d'intégrer l'impact des courbes de taux forward dans la détermination des rentes futures générées. Ces dernières sont également actualisées par les mêmes courbes de taux forward pour l'évaluation de leurs valeurs actuelles présentes. Cette méthode reflète l'impact financier immédiatement via la construction des courbes de taux forward.

Un autre point fort de la méthode du taux d'annuité est d'intégrer également l'impact des tables de mortalité dans les évaluations.

Cependant, la valeur d'acquisition et la valeur de service sont déterminées dans ce mémoire en se basant sur le principe du nouveau régime proposé depuis 2020. Les évolutions de ces deux valeurs, en garantissant un taux de rendement réel de 5,5%, peuvent être décorrélées afin de maintenir l'équilibre du régime. Ceci n'est pas forcément équitable entre les générations.

Dans un régime spécifique déficitaire, un coefficient de majoration peut être intégré dans l'évaluation du taux d'annuité pour couvrir la dette déjà créée. La détermination de ce coefficient relève de l'arbitrage. Il suffit de recalibrer les paramètres en input selon la cible pour lancer les mêmes projections.

Pour l'effet de réversion, il peut être impactant dans un régime fermé spécifique dont le taux de nuptialité est plus élevé que celui moyen en France. Les ayants droit au début de la projection peuvent être intégrés dans les retraites existantes pour les projections avec les mêmes méthodologies.

En prenant en compte le contexte de 2020 où le taux est durablement bas, il semble plus pertinent d'avoir une méthode d'évaluation de rentes qui suit la situation financière avec une approche actuarielle comme la méthode du taux d'annuité proposée dans ce mémoire. Par ailleurs, les résultats

de tests de sensibilité à la variation de taux montrent la robustesse du modèle de ce mémoire en face de la baisse ou l'augmentation soudaine des taux, comme celle qui s'est produite après la réalisation de ces travaux.

La principale faiblesse de cette modélisation concerne les données à passer en input. En effet la crise sanitaire a produit d'importantes modifications de la pyramide des âges, en particulier dans sa partie haute, et donc dans la population des retraités qui peut avoir d'importantes répercussions sur les analyses menées. Elle a aussi des répercussions économiques qui peuvent altérer l'évolution de la population des actifs, en particulier à travers une modification des taux de recrutement.

Une solution à ces problèmes pourrait être apportée lorsque l'INSEE sera en mesure de proposer une nouvelle pyramide des âges (et une nouvelle projection sur plusieurs dizaines d'années de cette pyramide). Dans le cadre de l'utilisation de notre modèle, une mise à jour régulière des taux de recrutement suivant la situation économique actuelle peut aussi être envisagée.

Du fait des biais cités ci-dessus, il nous a paru qu'utiliser les données disponibles pour l'initialisation, même si elles différaient d'une ou deux années, conduisaient à des erreurs négligeables au vu de celles liées à la crise sanitaire.

Au lieu d'utiliser des taux de recrutement fixes tels que calculés dans le chapitre 2, il est possible d'utiliser des projections de taux d'activité¹⁴ réalisés par l'INSEE pour construire des taux de recrutement évolutifs. Toutefois, les projections de taux d'activité disponibles ont été construits avant la crise sanitaire et il est préférable d'attendre une mise à jour de cette projection.

Par ailleurs, la mise en place en pratique de la méthode du taux d'annuité pourrait être peu claire du fait qu'elle demande des efforts au regard du niveau technique et de la transformation d'anciens régimes. La méthode appliquant la valeur d'acquisition et la valeur de service est plus ou moins connue, mais cette méthode n'intègre pas l'effet économique, financier directement comme décrit dans le mémoire.

¹⁴ <https://www.insee.fr/fr/statistiques/2844302#tableau-Figure4>

Annexes

Annexe I : Notations

Notations du chapitre 2 : Projections démographiques et projections des flux futurs du régime :

$S(x, k)$: le salaire moyen à l'année $N + k$ pour les actifs d'âge x au début de la projection ;

$\tau_{\text{salaire}}(x, k)$: le taux d'augmentation du salaire moyen à l'année $N + k$ pour les actifs d'âge x au début de la projection ;

$\tau_{\text{cotis}}^c(x, k)$: le taux de cotisation contractuel à l'année $N + k$ pour les actifs d'âge x au début de la projection ;

$\tau_{\text{cotis}}^e(x, k)$: le taux de cotisation effectif à l'année $N + k$ pour les actifs d'âge x au début de la projection ;

$\tau_{\text{cotis}}^a(x, k)$: le taux d'appel des cotisations à l'année $N + k$ pour les actifs d'âge x au début de la projection ;

$Ind(k)$: l'indice de cotisation à l'année $N + k$ avec l'indice de cotisation de base $Ind(0) = 100$;

$\tau_{Ind}(k)$: le taux annuel d'évolution de l'indice de cotisation à l'année $N + k$;

$Cotis(x, k)$: la cotisation effectuée au cours de l'année $N + k$ par les actifs d'âge x au début de la projection ;

$VA(k)$: la valeur d'acquisition du point à l'année $N + k$;

$\tau_{VA}(k)$: le taux annuel d'évolution de la valeur d'acquisition du point à l'année $N + k$;

$n(x, k)$: le nombre de points acquis au cours de l'année $N + k$ par les actifs d'âge x au début de la projection ;

$VS(k)$: la valeur de service du point à l'année $N + k$;

$\tau_{VS}(k)$: le taux annuel d'évolution de la valeur de service du point à l'année $N + k$;

$n(x, k)$: le nombre de points acquis au cours de l'année $N + k$ par les actifs d'âge x au début de la projection ;

$n_{tot}(x, k)$: le nombre total des points acquis en stock à la fin de l'année $N + k$ par les actifs d'âge x au début de la projection ;

$Cotis_ind(x, k)$: la cotisation moyenne effectuée au cours de l'année $N + k$ par un actif d'âge x au début de la projection ;

$Rente_{tot}(x, k)$: les rentes totalement versées au cours de l'année $N + k$ aux actifs/retraités d'âge x au début de la projection ;

$Rente_{tot}(x; y, k)$: les rentes totalement versées au cours de l'année $N + k$ aux ayants droit d'âge y au début de la projection qui sont les bénéficiaires des actifs/retraités d'âge x au début de la projection ;

$n'(x, k)$: le nombre de points acquis au cours de l'année $N + k$ par les actifs d'âge x ;

$n'_{tot}(x, k)$: le nombre total des points acquis en stock à la fin de l'année $N + k$ par les actifs d'âge x ;

$Cotis_ind'(x, k)$: la cotisation moyenne effectuée au cours de l'année $N + k$ par un actif d'âge x ;

$Rente'(x, k)$: les nouvelles rentes versées au cours de l'année $N + k$ aux nouveaux retraités d'âge x ;

$Rente'_{tot}(x, k)$: les rentes totalement versées au cours de l'année $N + k$ aux retraités d'âge x ;

Notations du chapitre 4 : Evaluation des engagements et pilotage du régime :

$\mu(x, k)$: l'âge de retraite vu à l'année $N + k$ pour les actifs d'âge x au début de la projection ;

$\omega(x, k)$: l'âge limite de survie estimé à l'année $N + k$ pour les actifs d'âge x au début de la projection ;

$\tau_{act}(0, k, \delta)$: le taux forward observé à l'année N pour un prêt/une dette commençant à l'année $N + k$ et se terminant à l'année $N + k + \delta$;

$\mu_k(x)$: l'âge de retraite pour les actifs d'âge x à l'année $N + k$;

$\omega_k(x)$: l'âge limite de survie estimé pour les actifs d'âge x à l'année $N + k$;

$\tau_{act}(0, k, \delta)$: le taux forward observé à l'année N pour un prêt/une dette commençant à l'année $N + k$ et se terminant à l'année $N + k + \delta$;

$W(k)$: les réserves à la fin de l'année $N + k$;

$D(k)$: la dette à la fin de l'année $N + k$;

$\tau(k)$: le taux d'actualisation pour la dette à la fin de l'année $N + k$.

Annexe II : Démonstrations des formules

Démo 1 :

$$\begin{aligned}
 f(a(x, 0), i) &= a(x, 0) * P_{vie}(x, i) * P_{ret}(x, i) \\
 &= a(x, 0) * P_{vie}(x, i - 1) * {}_1p_{x+i-1} * P_{ret}(x, i - 1) * \frac{P_{ret}(x, i)}{P_{ret}(x, i - 1)} \\
 &= a(x, 0) * P_{vie}(x, i - 1) * P_{ret}(x, i - 1) * {}_1p_{x+i-1} * \frac{P_{ret}(x, i)}{P_{ret}(x, i - 1)} \\
 &= f(a(x, 0), i - 1) * {}_1p_{x+i-1} * \frac{P_{ret}(x, i)}{P_{ret}(x, i - 1)} \\
 &= f(a(x, 0), i - 1) * {}_1p_{x+i-1} * \frac{P_{act}(x, i - 1) * p_{ret}(0, x; i - 1, i)}{P_{act}(x, i - 2) * p_{ret}(0, x; i - 2, i - 1)} \\
 &= f(a(x, 0), i - 1) * {}_1p_{x+i-1} * \frac{p_{act}(0, x; i - 2, i - 1) * p_{ret}(0, x; i - 1, i)}{p_{ret}(0, x; i - 2, i - 1)}.
 \end{aligned}$$

Démo 2 :

Dans le cas particulier où $p_{ret}(0, x; i - 2, i - 1) = 0$, alors $p_{act}(0, x; i - 2, i - 1) = 1$ et $f(a(x, 0), i - 1) = 0$. Si $p_{ret}(0, x; i - 3, i - 2) > 0$,

$$\begin{aligned}
 f(a(x, 0), i) &= a(x, 0) * P_{vie}(x, i) * P_{ret}(x, i) \\
 &= a(x, 0) * P_{vie}(x, i - 2) * {}_1p_{x+i-2} * {}_1p_{x+i-1} * P_{ret}(x, i - 2) * \frac{P_{ret}(x, i)}{P_{ret}(x, i - 2)} \\
 &= f(a(x, 0), i - 2) * {}_1p_{x+i-2} * {}_1p_{x+i-1} * \frac{P_{ret}(x, i)}{P_{ret}(x, i - 2)} \\
 &= f(a(x, 0), i - 2) * {}_1p_{x+i-2} * {}_1p_{x+i-1} * \frac{P_{act}(x, i - 1) * p_{ret}(0, x; i - 1, i)}{P_{act}(x, i - 3) * p_{ret}(0, x; i - 3, i - 2)} \\
 &= f(a(x, 0), i - 2) * {}_1p_{x+i-2} * {}_1p_{x+i-1} \\
 &\quad * \frac{p_{act}(0, x; i - 3, i - 2) * p_{act}(0, x; i - 2, i - 1) * p_{ret}(0, x; i - 1, i)}{p_{ret}(0, x; i - 3, i - 1)}.
 \end{aligned}$$

Démo 3 :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{0 < i \leq k} \tilde{f}(a(x, 0), i, k) \\
 &= \sum_{0 < i \leq k} f(a(x, 0), i) * P_{vie}(0, x; i, k) \\
 &= \sum_{0 < i \leq k-1} f(a(x, 0), i) * P_{vie}(0, x; i, k) + f(a(x, 0), k) \\
 &= \sum_{0 < i \leq k-1} f(a(x, 0), i) * P_{vie}(0, x; i, k - 1) * {}_1p_{x+k-1} + f(a(x, 0), k)
 \end{aligned}$$

$$= \left[\sum_{0 < i \leq k-1} \tilde{f}(a(x, 0), i, k-1) \right] * {}_1p_{x+k-1} + f(a(x, 0), k).$$

Démo 4 :

D'une part,

$$\begin{aligned} a_{new,k}(x) &= \sum_{0 < i \leq k-1} g(x - (k - i), i) * P_{vie}(i, x - (k - i); 0, k - i) \\ &\quad * P_{act}(i, x - (k - i); 0, k - i) + g(x, k) \\ &= \sum_{0 < i \leq k-2} g(x - (k - i), i) * P_{vie}(i, x - (k - i); 0, k - i) * P_{act}(i, x - (k - i); 0, k - i) \\ &\quad + g(x - 1, k - 1) * P_{vie}(k - 1, x - 1; 0, 1) * P_{act}(k - 1, x - 1; 0, 1) + g(x, k) \\ &= \sum_{0 < i \leq k-2} g(x - (k - i), i) * P_{vie}(i, x - (k - i); 0, k - 1 - i) * P_{vie}(i, x - (k - i); k - 1 - i, k \\ &\quad - i) * P_{act}(i, x - (k - i); 0, k - 1 - i) * P_{act}(i, x - (k - i); k - 1 - i, k - i) \\ &\quad + g(x - 1, k - 1) * P_{vie}(k - 1, x - 1; 0, 1) * P_{act}(k - 1, x - 1; 0, 1) + g(x, k). \end{aligned}$$

D'autre part, le nombre total des actifs d'âge $x - 1$ à l'année $N + k - 1$

$$\begin{aligned} a_{new,k-1}(x - 1) &= \sum_{0 < i \leq k-2} g(x - 1 - (k - 1 - i), i) * P_{vie}(i, x - 1 - (k - 1 - i); 0, k - 1 - i) \\ &\quad * P_{act}(i, x - 1 - (k - 1 - i); 0, k - 1 - i) + g(x - 1, k - 1) \\ &= \sum_{0 < i \leq k-2} g(x - (k - i), i) * P_{vie}(i, x - (k - i); 0, k - 1 - i) \\ &\quad * P_{act}(i, x - (k - i); 0, k - 1 - i) + g(x - 1, k - 1). \end{aligned}$$

Il est supposé que les mêmes lois de mortalité et de prise de retraites soient utilisées dans les projections. C'est-à-dire que,

$$\begin{aligned} P_{vie}(i, x - (k - i); k - 1 - i, k - i) &= P_{vie}(k - 1, x - 1; 0, 1) = P_{vie}(0, x - k; k - 1, k), \\ P_{act}(i, x - (k - i); k - 1 - i, k - i) &= P_{act}(k - 1, x - 1; 0, 1) = P_{act}(0, x - k; k - 1, k). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$a_{new,k}(x) = a_{new,k-1}(x - 1) * P_{vie}(0, x - k; k - 1, k) * P_{act}(0, x - k; k - 1, k) + g(x, k).$$

Annexe III : Méthodes existantes pour les retraites

Les concepts et les méthodes de calculs pour le régime général et le régime complémentaire sont présentés dans cette annexe.

Régime général (Cf. [2]) :

Durée de carrière (durée d'assurance)

La durée de carrière ou durée d'assurance est la durée validée dans le régime s'exprimant sous la forme d'un nombre d'années ou de trimestres validés.

Durée de carrière = Durées cotisées au titre de l'activité + Durées validées à d'autres titres + Majorations de durée de carrière.

Les trimestres validés sont plafonnés à 4 trimestres par année civile.

Taux de liquidation

Le taux de liquidation est défini comme le rapport entre la pension au taux plein et le salaire de référence. Ce taux permet donc de connaître le montant de pension qu'un retraité futur touchera.

Toutefois, le taux de liquidation peut être aussi défini comme le rapport entre la pension au taux plein et le salaire de référence, ajusté selon le système de décote/surcote.

Taux de remplacement

Le taux de remplacement peut être défini comme le rapport entre la pension versée réellement et le salaire de référence.

Taux d'annuité

Le taux d'annuité représente le montant de pension annuelle validée, exprimé en pourcentage du salaire de référence.

Le taux d'annuité A s'exprime comme

$$A = \frac{T}{D_{max}}$$

où T est le taux de liquidation de la pension et D_{max} la durée de carrière requise exprimée en nombre d'années pour une pension au taux plein.

Ratio de dépendance démographique

Le ratio de dépendance démographique est le rapport entre le nombre de retraités et le nombre d'actifs.

Méthode de calculs

La pension à la date de liquidation, notée par P , est calculée comme le produit de la durée de carrière, du taux d'annuité et du salaire de référence.

$$P = D * A * S$$

où D est la durée de carrière exprimée en nombre d'années et S est le salaire de référence.

En utilisant le concept du taux de liquidation, il en résulte que

$$P = \frac{D}{D_{max}} * T * S.$$

Dans la formule ci-dessus, le fait que D_{max} et D soient exprimés en même temps en nombre de trimestres ou en nombre d'années n'a pas d'impact sur le montant de la pension P . Dans le texte ci-dessous, D_{max} et D sont désormais exprimés en nombre de trimestres car le système de surcote/décote est généralement appliqué sur le nombre de trimestres.

En intégrant le système de surcote/décote, le taux de liquidation au moment du départ à la retraite est

$$T = T_{max} * \{1 - \delta * \max[0, \min(4 * (x_{max} - x), D_{max} - D)]\} * (1 + s * D_{supp})$$

où T_{max} est le taux de liquidation pour la pension au taux plein sans majoration/minoration ;

δ est le taux de décote ;

x est l'âge de départ à la retraite ;

x_{max} est l'âge du taux plein ou l'âge de pivot (l'âge à partir duquel ne s'applique plus le mécanisme de décote) ;

s est le taux de surcote ;

D_{supp} est le nombre de trimestres au-delà de la durée de carrière requise ou l'âge de pivot pour le taux plein.

Donc, le taux de remplacement s'exprime comme

$$\begin{aligned} \frac{P}{S} &= \frac{D}{D_{max}} * T \\ &= \frac{D}{D_{max}} * T_{max} * \{1 - \delta * \max[0, \min(4 * (x_{max} - x), D_{max} - D)]\} * (1 + s * D_{supp}). \end{aligned}$$

Le manque du nombre de trimestres pénalise le taux de remplacement en réduisant le taux de liquidation et pénalise une fois de plus le taux de remplacement via le calcul de proratisation.

Autrement dit, le manque du nombre de trimestres a un double effet de pénalisation sur le taux de remplacement.

Sans application du système de décote/surcote, le taux de remplacement serait simplement

$$\frac{P}{S} = \frac{D}{D_{max}} * T_{max}.$$

Si la modalité de prestation est définie, le taux de cotisation est un paramètre d'ajustement qui permet d'atteindre l'équilibre instantané du régime.

Selon le principe de répartition pure, la cotisation durant l'année est égale à la prestation durant l'année. De ce principe, il suit que à l'instant t ,

$$\tau_{cotis}(t) = \frac{P(t)}{S(t)} * \tau_{demo}(t)$$

où $\tau_{cotis}(t)$ est le taux de cotisation à l'instant t ;

$P(t)$ est la pension moyenne versée à l'instant t ;

$S(t)$ est le salaire de référence moyen à l'instant t ;

$\tau_{demo}(t)$ est le ratio de dépendance démographique ou le quotient de vieillesse à l'instant t ;

Régime complémentaire (Cf. [4]) :

Valeur d'acquisition (Valeur d'achat)

La valeur d'acquisition ou la valeur d'achat est le prix à payer pour acquérir/acheter un point. La valeur d'achat est revalorisée en fonction de l'évolution du salaire annuel moyen brut de l'ensemble des salariés.

Valeur de service

La valeur de service est le montant de pension à servir pour un point. La valeur de service est revalorisée en fonction de l'évolution de l'indice des prix à la consommation hors tabac.

Méthode de calculs

En utilisant les notations précédentes, la pension est calculée comme

$$P = N * VS$$

où N est le nombre de points total acquis au moment du départ à la retraite ;

VS est la valeur de service du point à la date de liquidation des droits.

Le nombre de points acquis à l'instant t est estimé comme $n(t) = \tau_{cotis}(t) * \frac{S(t)}{VA(t)}$

où $n(t)$ est le nombre de points moyen acquis à l'instant t ;

$S(t)$ est le salaire moyen à l'instant t ;

$VA(t)$ est la valeur d'achat à l'instant t .

Comme la valeur d'achat est revalorisée en fonction de l'évolution du salaire annuel moyen brut, si le taux de cotisation est constant, le nombre de points acquis reste constant.

Donc, le nombre de points total acquis au moment du départ à la retraite est $N = \sum_t n(t)$.

La valeur de service peut être déterminée en utilisant l'équation de trésorerie entre cotisations et pensions. C'est-à-dire que

$$\tau_{cotis}(t) * S(t) * \text{nombre de cotisants} = VS(t) * m(t) * \text{nombre de retraités}$$

où $m(t)$ est le nombre de points moyen servi à chaque retraité à l'instant t ;

Il en résulte que $VS(t) = \tau_{cotis}(t) * \frac{S(t)}{m(t)} * \frac{1}{\tau_{demo}(t)}$.

Le taux de remplacement peut être un paramètre de pivot pour le régime complémentaire en points.

En supposant que le nombre de points acquis est constant dans le temps, il s'ensuit que

$$\text{Taux de remplacement} = \text{durée de cotisation} * \text{taux de cotisation} * \frac{VS}{VA}$$

Annexe IV : Tableau de la probabilité de recrutement pour passer de l'âge x -1 à l'âge x

Age	Probabilité de recrutement (Homme)	Probabilité de recrutement (Femme)
18	47,86%	51,99%
19	27,01%	26,98%
20	16,76%	16,49%
21	7,35%	6,70%
22	4,29%	2,85%
23	7,65%	5,57%
24	5,65%	3,87%
25	-0,24%	-1,02%
26	0,18%	-1,85%
27	-1,31%	-2,59%
28	0,32%	-1,45%
29	-1,87%	-2,68%
30	-0,24%	-0,73%
31	-1,92%	-3,00%
32	-2,11%	-1,14%
33	-2,37%	-3,07%
34	2,33%	2,72%
35	-2,80%	-2,75%
36	-1,80%	-1,45%
37	-5,28%	-5,39%
38	0,11%	-0,81%
39	1,60%	1,71%
40	-4,34%	-3,20%
41	0,48%	-0,57%
42	3,20%	3,53%
43	-3,18%	-2,79%
44	-0,90%	-1,21%
45	-3,14%	-3,37%
46	-1,33%	-1,78%
47	-1,78%	-2,01%
48	0,54%	-0,19%
49	0,06%	-0,88%
50	-0,45%	-0,11%
51	-0,58%	-0,94%
52	-1,40%	-1,24%
53	-2,17%	-2,54%
54	-3,56%	-3,52%
55	-0,15%	-0,14%
56	-1,99%	-2,01%
57	-1,48%	-2,85%
58	-2,08%	-2,78%
59	-0,57%	-0,93%
60	-14,20%	-8,88%
61	-22,64%	-12,02%

Annexe V : Tableau de la probabilité forward annuelle de réversion

Age	Probabilité forward annuelle de réversion (Homme)	Probabilité forward annuelle de réversion (Femme)
19	0,02%	0,10%
20	0,47%	1,05%
21	0,92%	2,00%
22	1,37%	2,95%
23	1,82%	3,90%
24	2,27%	4,85%
25	4,50%	7,59%
26	6,73%	10,33%
27	8,96%	13,07%
28	11,19%	15,81%
29	13,42%	18,55%
30	16,04%	20,85%
31	18,66%	23,15%
32	21,28%	25,45%
33	23,90%	27,75%
34	26,52%	30,05%
35	28,06%	31,30%
36	29,60%	32,55%
37	31,14%	33,80%
38	32,68%	35,05%
39	34,22%	36,30%
40	35,13%	37,02%
41	36,04%	37,74%
42	36,95%	38,46%
43	37,86%	39,18%
44	38,77%	39,90%
45	39,27%	40,31%
46	39,77%	40,72%
47	40,27%	41,13%
48	40,77%	41,54%
49	41,27%	41,95%
50	41,77%	42,36%
51	41,77%	42,36%
52	41,77%	42,36%
53	41,77%	42,36%
54	41,77%	42,36%
55	41,77%	42,36%
56	41,77%	42,36%
57	41,77%	42,36%
58	41,77%	42,36%
59	41,77%	42,36%
60	41,77%	42,36%
61	41,77%	42,36%
62	41,77%	42,36%

Annexe VI : Tableau de la répartition des actifs et des retraités au début de la projection

Tableau de la répartition des actifs (cotisants) :

Age	Hommes	Femmes
18	201 180	207 244
19	250 306	260 225
20	282 332	292 574
21	300 420	313 244
22	305 185	315 898
23	313 031	323 710
24	326 665	333 412
25	341 582	346 288
26	343 526	346 853
27	344 937	347 320
28	345 299	346 577
29	343 112	342 803
30	343 719	342 461
31	341 616	339 905
32	336 791	335 374
33	325 621	324 291
34	329 954	329 306
35	341 092	338 805
36	338 308	336 433
37	325 787	322 532
38	308 989	303 183
39	308 615	301 397
40	300 412	292 128
41	292 859	284 342
42	310 754	301 176
43	318 075	307 370
44	332 570	321 745
45	329 548	316 903
46	323 039	309 167
47	311 718	297 567
48	307 882	293 726
49	303 999	290 730
50	301 630	288 154
51	305 846	291 488
52	302 235	287 808
53	296 931	284 292
54	283 125	271 754
55	271 752	262 352
56	265 716	257 550
57	259 477	249 938
58	250 227	241 827
59	242 619	234 306
60	206 071	212 901
61	157 292	185 910
62	114 576	132 407

Tableau de la répartition des retraités :

Age	Hommes	Femmes
62	196 711	194 176
63	243 777	254 775
64	264 613	277 450
65	284 629	299 392
66	305 735	323 177
67	321 455	355 941
68	333 134	368 148
69	325 993	361 373
70	337 747	371 462
71	330 998	365 600
72	329 422	357 160
73	317 720	344 984
74	298 296	326 423
75	227 018	245 859
76	219 867	237 842
77	209 449	227 798
78	190 182	207 080
79	167 437	184 789
80	167 602	188 811
81	162 585	193 600
82	151 719	185 166
83	140 183	178 954
84	130 953	172 433
85	116 182	162 233
86	106 470	156 581
87	91 927	142 519
88	81 976	135 238
89	68 803	119 861
90	58 516	106 321
91	44 015	87 021
92	34 590	73 001
93	25 842	59 082
94	19 189	48 042
95	13 877	37 436
96	9 528	28 405
97	6 468	21 264
98	4 369	15 507
99	2 860	10 941
100	1 788	7 402

Annexe VII : Tableau de l'évolution du plafond de la Sécurité sociale

Année	PSS annuel (€)	Evolution
2022	41 136	0,00%
2021	41 136	0,00%
2020	41 136	1,51%
2019	40 524	1,99%
2018	39 732	1,28%
2017	39 228	1,58%
2016	38 616	1,51%
2015	38 040	1,31%
2014	37 548	1,39%
2013	37 032	1,81%
2012	36 372	2,89%
2011	35 352	2,11%
2010	34 620	0,91%
2009	34 308	3,10%
2008	33 276	3,39%
2007	32 184	3,59%
2006	31 068	2,90%
2005	30 192	1,62%
2004	29 712	1,81%
2003	29 184	3,40%
2002	28 224	3,20%

Annexe VIII : Tableau des taux de cotisation historiques

Tableau des taux de cotisation historiques

Année	Part Salariale		Part Patronale	
	Taux de cotisation plafonnée	Taux de cotisation déplafonnée	Taux de cotisation plafonnée	Taux de cotisation déplafonnée
1998	6,55%	-	8,20%	1,60%
1999	6,55%	-	8,20%	1,60%
2000	6,55%	-	8,20%	1,60%
2001	6,55%	-	8,20%	1,60%
2002	6,55%	-	8,20%	1,60%
2003	6,55%	-	8,20%	1,60%
juin-04	6,55%	-	8,20%	1,60%
juil-04	6,55%	0,10%	8,20%	1,60%
2005	6,55%	0,10%	8,20%	1,60%
2006	6,65%	0,10%	8,30%	1,60%
2007	6,65%	0,10%	8,30%	1,60%
2008	6,65%	0,10%	8,30%	1,60%
2009	6,65%	0,10%	8,30%	1,60%
2010	6,65%	0,10%	8,30%	1,60%
2011	6,65%	0,10%	8,30%	1,60%
oct-12	6,65%	0,10%	8,30%	1,60%
nov-12	6,75%	0,10%	8,40%	1,60%
2013	6,75%	0,10%	8,40%	1,60%
2014	6,80%	0,25%	8,45%	1,75%
2015	6,85%	0,30%	8,50%	1,80%
2016	6,90%	0,35%	8,55%	1,85%
2017	6,90%	0,40%	8,55%	1,90%
2018	6,90%	0,40%	8,55%	1,90%
2019	6,90%	0,40%	8,55%	1,90%

Annexe IX : Tableau des valeurs de service du point et valeurs d'achat du point

Période	Valeur de service du point	Evolution par rapport à la valeur précédente
A compter du 1er novembre 2019	1,2714 €	1,00%
du 1er janvier au 31 octobre 2019	1,2588 €	-

Année	Valeur d'achat du point	Evolution par rapport à la valeur précédente
2021	Fixation reportée en raison de l'incertitude liée à l'évolution du salaire moyen sur l'année 2020	
2020	17,3982 €	2,00%
2019	17,0571 €	-

Annexe X : Tableau de la répartition du salaire annuel moyen en équivalent temps plein par tranche d'âge

Figure 1 - Revenu salarial annuel moyen en 2018

	Revenu salarial	Salaire annuel moyen en EQTP	Volume de travail annuel moyen en EQTP
	(en euros courants)		
Femmes	18 560	25 830	0,72
Hommes	24 060	30 960	0,78
Moins de 25 ans	7 830	18 010	0,43
De 25 à 39 ans	19 830	25 430	0,78
De 40 à 49 ans	25 740	30 730	0,84
De 50 à 54 ans	26 860	31 760	0,85
55 ans ou plus	25 360	33 820	0,75
Diplôme supérieur à bac+2	36 640	42 160	0,87
Bac+2	25 780	30 250	0,85
Bac	20 370	25 270	0,81
CAP, BEP ou moins	17 830	23 380	0,76
Sans diplôme	14 990	21 350	0,70
Cadres	42 170	48 620	0,87
Professions intermédiaires	23 160	28 310	0,82
Employés	14 030	20 980	0,67
Ouvriers	15 510	21 630	0,72
Temps complet	24 960	29 580	0,84
Temps partiel	11 670	23 760	0,49
Secteur privé	21 020	28 780	0,73
Fonction publique	22 590	27 780	0,81
Ensemble	21 360	28 540	0,75

Champ : France hors Mayotte, tous salariés hors apprentis, stagiaires, salariés de l'agriculture et des particuliers-employeurs.

Source : Insee, panel Tous salariés.

INSEE RÉFÉRENCES Paru le : 29/06/2021

Annexe XI : Tableau de paramètres du Modèle Smith-Wilson

u	Q_b
1	-1,5857
2	1,1621
3	-0,6170
4	0,0849
5	-0,8927
6	3,0123
7	-3,0910
8	0,8642
9	1,9840
10	-2,8150
11	0,0053
12	2,0842
13	0,0007
14	0,0007
15	-2,0089
16	0,0075
17	0,0072
18	0,0069
19	0,0067
20	1,3244

Annexe XII : Données pour la construction de la courbe de taux TEC (Source : La Banque de France)

Année/Echéance n	TEC
1	-0,63%
2	-0,63%
3	-0,58%
4	-0,47%
5	-0,36%
6	-0,26%
7	-0,17%
8	-0,08%
9	0,01%
10	0,09%
11	0,15%
12	0,20%
13	0,26%
14	0,31%
15	0,37%
16	0,41%
17	0,45%
18	0,49%
19	0,53%
20	0,57%
21	0,60%
22	0,63%
23	0,67%
24	0,70%
25	0,74%
26	0,77%
27	0,80%
28	0,83%
29	0,85%
30	0,88%

Annexe XIII : Données pour la construction de la courbe des facteurs d'actualisation (discount factor)

n	DF(0, n)
1	1,006289308
2	1,012760394
3	1,017551555
4	1,019102364
5	1,018469992
6	1,016108797
7	1,011718301
8	1,006378592
9	0,999301744
10	0,990507703
11	0,983532562
12	0,975499727
13	0,96642504
14	0,956326565
15	0,945224526
16	0,935510363
17	0,925101719
18	0,914014257
19	0,902264629
20	0,889870434
21	0,877862553
22	0,865326693
23	0,852279288
24	0,838737359
25	0,824718484
26	0,811605712
27	0,79812948
28	0,784304389
29	0,770145321
30	0,755667408

Annexe XIV : Données pour la construction de la courbe de taux forward (partielles)

n\delta	delta=1	delta=2	delta=3	delta=4	delta=5	delta=6
1	-0,64%	-0,56%	-0,42%	-0,30%	-0,19%	-0,09%
2	-0,47%	-0,31%	-0,19%	-0,08%	0,02%	0,11%
3	-0,15%	-0,05%	0,05%	0,14%	0,22%	0,30%
4	0,06%	0,15%	0,24%	0,31%	0,39%	0,47%
5	0,23%	0,33%	0,40%	0,47%	0,56%	0,58%
6	0,43%	0,48%	0,56%	0,64%	0,65%	0,68%
7	0,53%	0,62%	0,71%	0,71%	0,73%	0,76%
8	0,71%	0,79%	0,77%	0,78%	0,81%	0,85%
9	0,88%	0,80%	0,80%	0,84%	0,88%	0,93%
10	0,71%	0,76%	0,82%	0,88%	0,94%	0,95%
11	0,82%	0,88%	0,94%	0,99%	1,00%	1,02%
12	0,93%	0,99%	1,05%	1,05%	1,06%	1,09%
13	1,05%	1,11%	1,08%	1,09%	1,12%	1,14%
14	1,17%	1,10%	1,11%	1,13%	1,16%	1,20%
15	1,03%	1,08%	1,12%	1,16%	1,21%	1,23%
16	1,12%	1,16%	1,21%	1,25%	1,27%	1,30%
17	1,21%	1,25%	1,29%	1,31%	1,34%	1,37%
18	1,29%	1,34%	1,35%	1,37%	1,40%	1,43%
19	1,38%	1,37%	1,39%	1,42%	1,46%	1,50%
20	1,36%	1,40%	1,44%	1,48%	1,52%	1,53%
21	1,44%	1,48%	1,52%	1,56%	1,57%	1,59%
22	1,52%	1,56%	1,60%	1,60%	1,62%	1,64%
23	1,60%	1,64%	1,63%	1,64%	1,66%	1,69%
24	1,69%	1,64%	1,65%	1,68%	1,71%	1,74%
25	1,60%	1,64%	1,67%	1,71%	1,75%	1,46%
26	1,67%	1,71%	1,75%	1,79%	1,43%	1,19%
27	1,75%	1,78%	1,82%	1,37%	1,09%	0,91%
28	1,82%	1,86%	1,24%	0,93%	0,74%	0,62%
29	1,90%	0,95%	0,63%	0,47%	0,38%	0,32%
30	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

Annexe XV : Données dans le cas où le taux zéro coupon est constant pour la maturité plus longue (partielles)

n\delta	ZC(n)	DF(0,n)	delta=1	delta=2	delta=3	delta=4	delta=5	delta=6
1	-0,62%	1,006289308	-0,64%	-0,56%	-0,42%	-0,30%	-0,19%	-0,09%
2	-0,63%	1,012760394	-0,47%	-0,31%	-0,19%	-0,08%	0,02%	0,11%
3	-0,58%	1,017551555	-0,15%	-0,05%	0,05%	0,14%	0,22%	0,30%
4	-0,47%	1,019102364	0,06%	0,15%	0,24%	0,31%	0,39%	0,47%
5	-0,37%	1,018469992	0,23%	0,33%	0,40%	0,47%	0,56%	0,58%
6	-0,27%	1,016108797	0,43%	0,48%	0,56%	0,64%	0,65%	0,68%
7	-0,17%	1,011718301	0,53%	0,62%	0,71%	0,71%	0,73%	0,76%
8	-0,08%	1,006378592	0,71%	0,79%	0,77%	0,78%	0,81%	0,85%
9	0,01%	0,999301744	0,88%	0,80%	0,80%	0,84%	0,88%	0,93%
10	0,10%	0,990507703	0,71%	0,76%	0,82%	0,88%	0,94%	0,95%
11	0,15%	0,983532562	0,82%	0,88%	0,94%	0,99%	1,00%	1,02%
12	0,21%	0,975499727	0,93%	0,99%	1,05%	1,05%	1,06%	1,09%
13	0,26%	0,96642504	1,05%	1,11%	1,08%	1,09%	1,12%	1,14%
14	0,32%	0,956326565	1,17%	1,10%	1,11%	1,13%	1,16%	1,20%
15	0,38%	0,945224526	1,03%	1,08%	1,12%	1,16%	1,21%	1,23%
16	0,42%	0,935510363	1,12%	1,16%	1,21%	1,25%	1,27%	1,30%
17	0,46%	0,925101719	1,21%	1,25%	1,29%	1,31%	1,34%	1,37%
18	0,50%	0,914014257	1,29%	1,34%	1,35%	1,37%	1,40%	1,43%
19	0,54%	0,902264629	1,38%	1,37%	1,39%	1,42%	1,46%	1,50%
20	0,59%	0,889870434	1,36%	1,40%	1,44%	1,48%	1,52%	1,53%
21	0,62%	0,877862553	1,44%	1,48%	1,52%	1,56%	1,57%	1,59%
22	0,66%	0,865326693	1,52%	1,56%	1,60%	1,60%	1,62%	1,64%
23	0,70%	0,852279288	1,60%	1,64%	1,63%	1,64%	1,66%	1,69%
24	0,74%	0,838737359	1,69%	1,64%	1,65%	1,68%	1,71%	1,74%
25	0,77%	0,824718484	1,60%	1,64%	1,67%	1,71%	1,75%	1,61%
26	0,81%	0,811605712	1,67%	1,71%	1,75%	1,79%	1,62%	1,50%
27	0,84%	0,79812948	1,75%	1,78%	1,82%	1,60%	1,47%	1,38%
28	0,87%	0,784304389	1,82%	1,86%	1,55%	1,40%	1,30%	1,24%
29	0,90%	0,770145321	1,90%	1,42%	1,26%	1,17%	1,13%	1,09%
30	0,94%	0,755667408	0,93%	0,93%	0,93%	0,93%	0,93%	0,93%
31	0,94%	0,748643482	0,933846%	0,93%	0,93%	0,93%	0,93%	0,93%
32	0,94%	0,741684843	0,933846%	0,93%	0,93%	0,93%	0,93%	0,93%
33	0,94%	0,734790885	0,933846%	0,93%	0,93%	0,93%	0,93%	0,93%
34	0,94%	0,727961006	0,933846%	0,93%	0,93%	0,93%	0,93%	0,93%
35	0,94%	0,721194611	0,933846%	0,93%	0,93%	0,93%	0,93%	0,93%

Bibliographie

- [1] Conseil d'Orientation des Retraites (2009), Quels objectifs retenir pour le système de retraite, Document de travail numéro 2.
- [2] Conseil d'Orientation des Retraites (2009), Le mode de fonctionnement des régimes en annuités, Document de travail numéro 3.
- [3] Conseil d'Orientation des Retraites (2009), Les indicateurs de pilotage d'un système de retraite, Document de travail numéro 3.
- [4] Conseil d'Orientation des Retraites (2009), Le mode de fonctionnement des régimes en points, Document de travail numéro 4.
- [5] Conseil d'Orientation des Retraites (2009), Le mode de fonctionnement des régimes en comptes notionnels, Document de travail numéro 6.
- [6] Conseil d'Orientation des Retraites (2010), Les régimes de retraite de la branche 26, Document de travail numéro 3.
- [7] Conseil d'Orientation des Retraites (2020), Rapport annuel du COR - Novembre 2020 : Evolutions et perspectives des retraites en France, Rapport annuel.
- [8] Conseil d'Orientation des Retraites (2018), La transition vers un nouveau régime de retraite, Document de travail numéro 8.
- [9] Conseil d'Orientation des Retraites (2019), Le rôle de l'âge dans un système universel à rendement défini, Document de travail numéro 14.
- [10] Jacques Wetzel (2004), Comment déterminer le rendement d'un régime de retraite par répartition qui accepte de constituer des réserves, Bulletin français d'actuariat, volume 6 (12), p. 209-214.
- [11] Jean-Louis Guérin & Florence Legros (2002), Neutralité actuarielle : un concept élégant mais délicat à mettre en œuvre, Revue D'Économie Financière no 68 (4), p.79-90.
- [12] Béatrice De Severac (1997), Étude empirique du modèle de Vasicek sur le marché des obligations françaises, Journal de la société statistique de Paris, tome 138, no 1 (1997), p. 81-103.
- [13] Marco Di Francesco (2012), A General Gaussian Interest Rate Model Consistent with the Current Term Structure, International Scholarly Research Network ISRN Probability and Statistics Volume 2012, Article ID 673607, 16 pages.
- [14] Ferdinando M. Ametrano and Marco Bianchetti (2013), Everything you always wanted to know about multiple interest rate curve bootstrapping but were afraid to ask, Economics, Econometric Modeling : Capital Markets - Asset Pricing eJournal.
- [15] Richard White & Yukinori Iwashita (2014), Eight ways to strip your caplets: An introduction to caplet stripping, Technical Report 24, Open Gamma, October 2014.
- [16] Patrick S Hagan, Deep Kumar, Andrew Lesniewski & Diana E. Woodward (2002), Managing Smile Risk, Wilmott, p. 84-108.
- [17] Hagan, P.W.G. (2006), Methods for Constructing a Yield Curve, Wilmott Magazine, 70-81.
- [18] Fabrício Tourrucôo, P. Hagan, G. Schleiniger (2007), Approximate Formulas for Zero-coupon Bonds, Applied Mathematical Finance 14(3):207-226.

[19] John Hull (2009), *Options, Futures, and Other Derivatives* (7th Edition), Prentice Hall, 2009.

[20] EIOPA (2019), *Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures*.

[21] Damiano Brigo Fabio Mercurio (2006), *Interest Rate Models - Theory and Practice*, Springer Finance, 2006.

[22] Martin S. Feldstein (2005), *Rethinking Social Insurance*, *American Economic Review* 95(1):1-24.

[23] Pierre Petauton (2004), *Théorie et pratique de l'assurance vie* (3e édition), Dunod, 2004.

[24] M. Gilli, Stefan Große and Enrico Schumann (2010), *Calibrating the Nelson-Siegel-Svensson Model*, *Economics, ERN: Other Econometrics: Econometric & Statistical Methods - Special Topics* (Topic).