Mémoire présenté devant l'Université de Paris-Dauphine pour l'obtention du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine et l'admission à l'Institut des Actuaires

le

Par : Clara KIBLER
Titre : Optimisation de la réassurance sous contraintes pour une compagnie d'assurance non-vie

Confidentialité : ☐ Non ☒ Oui (Durée : ☐ 1 an ☒ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires :

Entreprise :
Nom : Optimind
Signature :

Directeurs de Mémoire en entreprise :
Nom : Adeline STEPHAN
Signature :

Membres présents du Jury du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine :

Nom : André GRONDIN
Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise

Bibliothèque :

Signature du candidat

RÉSUMÉ

Mots clés : Réassurance, appétence aux risques, assurance automobile

Depuis l'entrée en vigueur de Solvabilité II, la réassurance joue un rôle essentiel pour l'assureur puisqu'elle va lui permettre de transférer ses risques en échange d'une contrepartie financière. La réassurance devient ainsi un levier majeur de réduction du besoin en capital réglementaire.
L'optimisation de la réassurance relève d'un arbitrage entre le coût de la réassurance et le gain en capital. Ce mémoire a pour objectif de construire un outil d'optimisation de la réassurance pour une compagnie d'assurance non-vie selon cet arbitrage en respectant les contraintes d'appétence aux risques de la compagnie en question.
La méthodologie retenue dans ce mémoire est une approche par scénarii où un scénario fait référence à un programme de réassurance spécifique. Elle s'appuie sur la méthode de Monte Carlo en simulant un grand nombre de portefeuilles et consiste à comparer différentes couvertures de réassurance selon le ratio de solvabilité et le ratio combiné définis comme critères d'optimisation. Par soucis de simplification, dans le calcul du SCR ne seront pris en compte que le SCR de marché, le SCR de contrepartie et le SCR de souscription non-vie. Les principales étapes de construction de cet outil sont :

- Modélisation et simulation de la sinistralité future
- Calcul des indicateurs suivants : RoE, ratio de solvabilité, RORAC et le COR
- Détermination des contraintes d'appétence aux risques
- Application de la réassurance
- Analyse des résultats et construction d'une frontière efficiente

La frontière efficiente permet de mettre en évidence les stratégies de réassurance les plus efficaces. Celle sélectionnée par la cédante lui offrira le meilleur profit pour un niveau de risque donné.
Ce processus sera appliqué sur des données issues d'un portefeuille automobile fictif. L'influence des différents paramètres de réassurance seront ainsi observés sur les indicateurs d'appétence aux risques.

ABSTRACT

Keywords : Reinsurance, risk appetite, motor insurance

Since Solvency II came into force, reinsurance has played an essential role for the insurer since it will enable it to transfer its risks in exchange for a financial counterparty. Reinsurance thus becomes a major lever for reducing the need for regulatory capital.
Optimizing reinsurance is a trade-off between the cost of reinsurance and the capital gain. The objective of this thesis is to build a reinsurance optimisation tool for a non-life insurance company according to this trade-off while respecting the risk appetite constraints of the company in question.
The methodology used in this paper is a scenario approach where a scenario refers to a specific reinsurance programme. It is based on the MonteCarlo method by simulating a large number of portfolios and consists in comparing different reinsurance coverages according to the solvency ratio and RoE. For the sake of simplification, only the market SCR, the counterparty SCR and the non-life underwriting SCR will be taken into account in the calculation of the SCR. The main steps in the construction of this tool are :

- •Modelling and simulation of future claims experience
- •Calculation of the following indicators : solvency ratio, RoE, RORAC and COR
- •Determination of risk appetite constraints
- •Application of reinsurance
- •Analysis of the results and construction of an efficient border

The efficient frontier helps to highlight the most effective reinsurance strategies. The one selected by the ceding company will offer the best profit for a given level of risk. This process will be applied to data from an automobile portfolio. The influence of the different reinsurance parameters will thus be observed on the risk appetite indicators.

NOTE DE SYNTHÈSE

Contexte :

Depuis l'entrée en vigueur de Solvabilité II le 1er janvier 2016, les contraintes prudentielles définies par cette directive imposent aux entreprises d'assurances de porter une attention particulière à la gestion de leurs Fonds Propres et fait appel à une restructuration du calcul des exigences de capital. En effet, en tant que norme prospective et basée sur une approche par les risques, Solvabilité II tient compte de la réassurance de façon plus importante que Solvabilité I.

De plus, le pilier II de Solvabilité II impose aux assureurs via la démarche ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) de satisfaire à des contraintes d'appétence aux risques. L'ORSA définit cette appétence comme le niveau de risque agrégé qu'une entreprise accepte de prendre en vue de la poursuite de son activité et de son développement.

Problématique :

La réassurance joue alors un rôle essentiel pour l'assureur puisqu'elle va lui permettre de transférer ses risques moyennant une contrepartie financière au réassureur. L'étude de son impact sur les indicateurs de solvabilité va permettre à un assureur non-vie d'évaluer la performance résultant de la mise en place d'un tel dispositif.
Ainsi, l'optimisation de la réassurance relève d'un arbitrage entre le coût de la réassurance et le gain en capital.
L'objectif de ce mémoire est de construire un outil d'optimisation de la réassurance pour une compagnie d'assurance non-vie selon cet arbitrage en tenant compte des contraintes d'appétence aux risques de l'assureur.

Démarche :

La sinistralité est le paramètre qui va impacter la réassurance. L'optimisation de celle-ci est alors réalisée selon une approche par scénarii. La méthode consiste à simuler un grand nombre de portefeuilles sur lesquels plusieurs couvertures de réassurance seront appliquées afin de les comparer. Le nombre de simulations est établi à 50 000.

Chaque scénario est mené individuellement toutes choses étant égales par ailleurs. Un scénario correspond à un programme de réassurance avec des paramètres donnés appliqué à une sinistralité simulée. C'est-à-dire que l'étude se réduit à l'optimisation d'un seul traité, les autres traités demeurant inchangés afin de permettre une meilleure lisibilité de l'impact de chacun d'eux.

L'outil consiste alors à mettre en évidence les stratégies de réassurance offrant le meilleur profit pour un niveau de risque donné. Ces couvertures vont définir une frontière efficiente sur laquelle la cédante pourra choisir la couverture optimale selon les critères d'optimisation.
Les principales étapes de construction de l'outil sont les suivantes :

•Modélisation et simulation de la sinistralité future

L'étude se focalise sur la *Line of Business* de la RC auto. La modélisation de la sinistralité s'opère en plusieurs étapes :

— 1. Détermination du seuil des graves

La théorie des valeurs extrêmes permet de mettre en place la méthode des excès moyens. Elle met en avant deux seuils se situant autour de 80 000€ et 450 000€. L'utilisation d'estimateurs de queue vont ensuite préciser ces valeurs.
Finalement, les seuils théoriques retenus sont de 120 000€ et 430 000€. Cependant, la théorie seule permet uniquement de donner un ordre de grandeur de seuil. Afin de rester au plus proche des données du marché, le second seuil considéré sera de 500 000€.Ils seront ensuite fixés selon les lois étudiées.

— 2. Loi de la sévérité des sinistres

Les lois qui peuvent représenter les sinistres extrêmes doivent être des lois à queue épaisse. Ainsi, les lois de Cauchy, Student, Pareto, Pareto généralisée et Log-gamma ont subi le test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov.
Finalement, la loi de Pareto représentera la sinistralité des graves et la pareto généralisée celle des intermédiaires.

— 3. Loi de la fréquence des sinistres

Afin de déterminer la loi de fréquence des sinistres intermédiaires (de charge comprise entre 120 000€ et 900 000€) et graves (de charge supérieure à 900 000€), le test du khi deux a été appliqué sur les lois de Poisson et Binomiale négative.
In fine, les lois de fréquence des sinistres extrêmes seront représentées par une loi de Poisson.

•Détermination des contraintes

L'arbitrage du coût de la réassurance et le gain en capital a pour but de comparer les programmes de réassurance en mettant en relation une mesure de risque et une mesure de gain. Dans le cadre de ce mémoire, le ratio de solvabilité et le ratio combiné sont choisis

pour mesurer respectivement le risque et la rentabilité.

Ici, l'assureur va chercher à se protéger d'une eventuelle insuffisance tarifaire dû à l'augmentation de la sinistralité en RC auto tout en cherchant à stabiliser sa situation. Un arbitrage optimal serait alors un ratio de solvabilité lui permettant de rester solvable tout en minimisant les pertes financières.
Au regard des données historiques et celles simulées, un ratio de solvabilité de 190% sera considéré comme un seuil pour cet indicateur.
Ainsi, les contraintes d'optimisation se résument à un ratio de solvabilité de 190% et un ratio combiné à minimiser.

•Application de la réassurance

Des programmes de réassurance vont être appliqués à la sinistralité. Les traités retenus pour l'étude sont l'excédent de sinistre par risque, l'excédent de perte et le quote-part.

La tarification en réassurance proportionnelle est définie dans le traité alors qu'en réassurance non-proportionnelle, la prime de réassurance s'obtient en trois étapes :

— 1. **Prime pure**

Plusieurs approches existent pour calculer la prime pure selon la quantité et la qualité des données à disposition. Dans le cadre de ce mémoire, c'est une méthode paramétrique qui est retenue. Elle est obtenue en prenant l'espérance des sinistres cédés : Prime pure $= \mathbb{E}(S_{cedes})$.

2. **Prime technique**

Un chargement de sécurité vient s'ajouter à la prime pure pour former la prime technique :
Prime technique = Prime pure + chargement de sécurité
Ce chargement tient compte du résultat du réassureur exprimé du point de vu de l'assureur : $R_{reas} = S_{cedes} - P_{cedees} + Commissions$.
La mesure de risque retenue est le semi écart-type telle que : $\sqrt{\mathbb{E}(R_{reas} - \mathbb{E}(R_{reas}))^2}$. Elle permet de mesurer la volatilité du résultat de réassurance uniquement dans le cas où il est supérieur à celui espéré.
Finalement le chargement de sécurité est défini par :
Chargement sécurité = α x $\sqrt{\mathbb{E}(R_{reas} - \mathbb{E}(R_{reas}))^2}$, avec α un coefficient réel positif.

3. **Prime commerciale**

Afin de tenir compte des coûts de souscription de chaque traité, le réassureur doit assumer des chargements, noté β. Ils s'expriment sous forme de taux inclus dans la prime commerciale telle que : Prime commerciale $= \frac{Primetechnique}{1-\beta}$.

Résultats obtenus :

— Traité en excédent de sinistre par risque

Le choix des montants de priorité est établi selon un quantile lié à la distribution de la sinistralité. Des priorités à 2M€, 3M€ et 5M€ ont été retenues.
Les portées doivent représenter un plafond d'indemnisation illimité, comme c'est le cas pour la RC auto. Elles s'établiront donc de 10 000 000 à 40 000 000 avec un pas de 10 000 000 afin d'étudier suffisamment de traités.
Les critères d'optimisation choisis ont été simulés et tracés dans les figures ci-dessous :

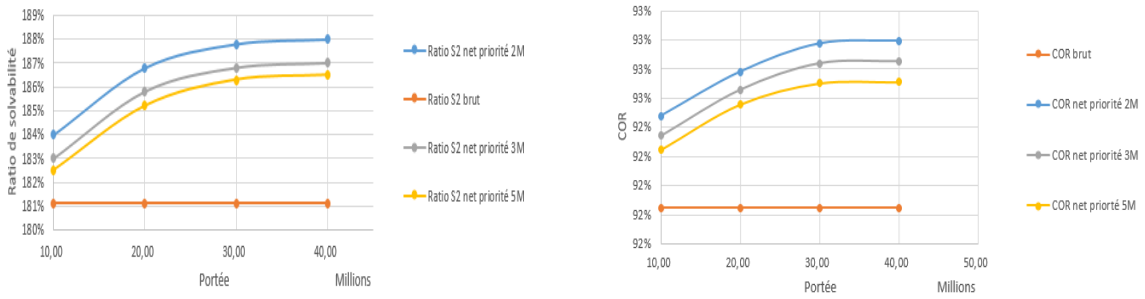

FIGURE 1 – Critères d'optimisation pour un traité en excédent de sinistre

La solvabilité de l'assureur a été améliorée avec l'application d'un traité XS. En effet, quelles que soient la portée et la priorité, le ratio de solvabilité est supérieur au ratio brut. En revanche, les courbes pour une portée de trois et cinq millions d'euros sont quasiment confondues. Cela s'explique par le fait que peu de sinistres vont être pris en charge par la réassurance : seulement deux sinistres sont supérieurs à trois millions d'euros et un au-delà de cinq millions d'euros en moyenne sur les 50 000 simulations. La réassurance n'interviendra donc que rarement voire pas du tout.

Le ratio combiné évolue dans le même sens que la portée. En effet, la prime cédée sera d'autant plus cher que la portée augmente. Or, le montant de prime cédée étant supérieur à celui des sinistres cédés, l'assureur paye plus cher que la réassurance n'a d'impact. De plus, l'allure de la courbe à tendance à stagner au delà d'une portée de 30M €. Cela s'explique par une intervention de moins en moins forte de la réassurance puisque peu de sinistres seront concernés par ces tranches pour des primes cédées grandissantes.

Il en résulte que ce traité permet d'améliorer la solvabilité de l'assureur mais au prix d'une réassurance qui dégrade sa rentabilité.

— Traité en excédent de perte

L'idée est de limiter les pertes éventuelles de l'assureur de l'année suivante avec la priorité. Pour se faire, la priorité sera exprimée en matière de Loss ratio. Elle variera de 80% à 70% avec un pas de 2%, choisi de telle sorte à traiter suffisamment de programmes de réassurance.

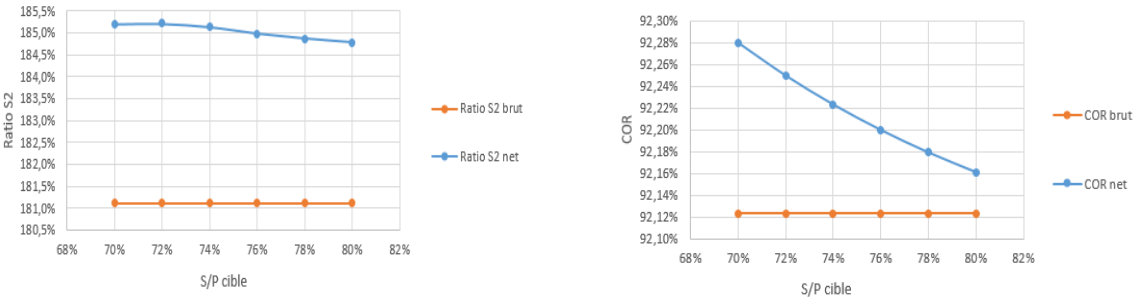

FIGURE 2 – Critères d'optimisation pour un traité en excédent de perte

Le ratio de solvabilité est maximisé par rapport au ratio brut. Toutefois, il diminue lorsque le loss ratio augmente. En effet, plus le loss ratio souhaité est faible, plus la queue de distribution sera ecrêtée. L'assureur va donc céder plus de risques, la prime cédée n'en sera que plus élevée.

L'objectif d'un tel traité est de limiter les pertes avec une priorité plafonnée en matière de loss ratio à 78%, soit un ratio combiné maximal de 110%. Le graphe correspondant à cet indicateur montre que c'est bien le cas. En effet, le CoR maximum s'établit à 92,28%. En revanche, ce ratio reste supérieur au brut quel que soient les loss ratio cibles choisis.

En conclusion, pour un produit rentable, le traité en stop loss va permettre d'écrêter la queue de distribution. Dans ce cas là, le programme de réassurance sera souscrit dans un objectif de transfert de risques et non de rentabilité.

— Traité en quote-part

Pour la réassurance proportionnelle, plusieurs taux de cession ont été appliqués, de 10% à 90% avec un pas de 10% choisi de sorte à étudier suffisamment de traités.

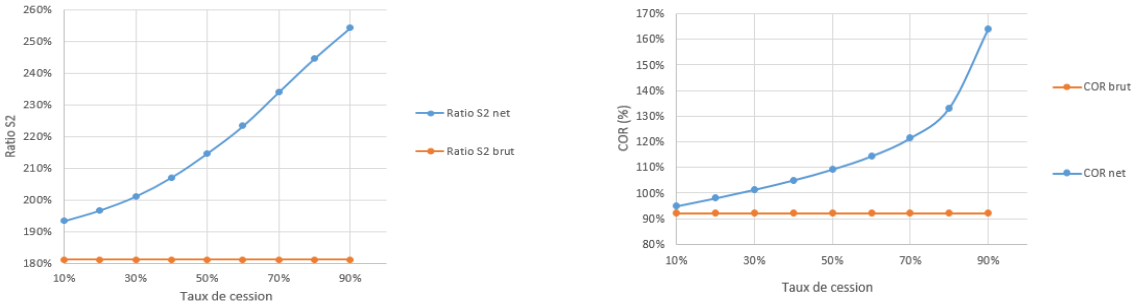

FIGURE 3 – Critères d'optimisation pour un traité en quote-part

Plus le taux de cession augmente, plus le ratio de solvabilité explose jusqu'à atteindre 255% pour un taux de cession de 90%. Plus le taux de cession est élevé, plus l'assureur cède de risque au réassureur. En effet, les SCR de souscription et de marché vont nettement diminuer, laissant uniquement le SCR de contrepartie. Ainsi le montant de capital est nettement inférieur au montant brut.

En réassurance proportionnelle, la commission de réassurance est calculée afin de compenser les dépenses de l'assureur concernant des frais de gestion de sinistres et des frais d'acquisition. Les frais d'administration resteront entièrement à sa charge. Ainsi, il apparait que le COR augmente de façon exponentielle avec le taux de cession. En effet, la cédante se retrouve à payer des frais d'administration (de l'ordre de 25 millions d'euros) avec un montant de prime qui diminue tandis que les frais sont fixes. L'assureur va donc puiser dans ses ressources afin de financer les frais d'acquisition ce qui dégradera son résultat.

Ainsi, le traité en quote-part est très efficace pour libérer du capital et protéger l'assureur contre certains risques. En revanche, il est très coûteux pour la cédante.

— Tracé d'une frontière efficiente

Les couverture de réassurance vont définir une frontière efficiente qui a été tracée à l'aide d'interpolation cubique.

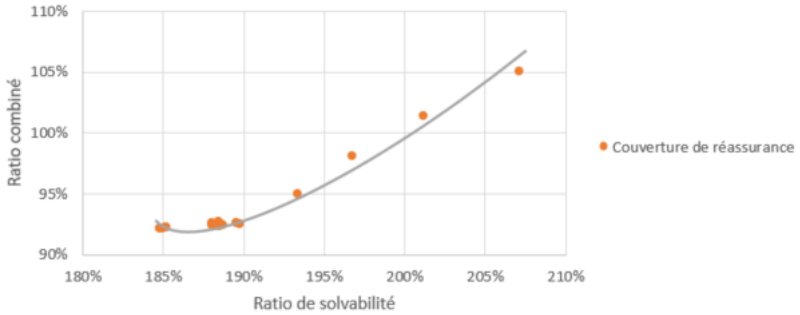

FIGURE 4 – Frontière efficiente

Les axes correspondent aux critères d'optimisation. Les contraintes d'appétence aux risques exigent un ratio de solvabilité de 190%. Ainsi, les traités optimaux permettant de satisfaire à ces critères seraient un excédent de sinistre ou un quote-part de taux de cession à 10%. Par interpolation, le COR obtenu pour un ratio S2 de 190% est de 92,44%. Le traité optimal serait alors un traité en XS de priorité 5M et de portée 40M qui offre un ratio de solvabilité de 189% et un ratio combiné de 92, 56%.

SYNTHESIS NOTE

Context :

Since the entry into force of Solvency II on 1 January 2016, prudential constraints defined by this directive require insurance undertakings to pay particular attention to the management of their own funds and calls for a restructuring of the calculation of capital requirements. Indeed, as a forward-looking standard based on a risk-based approach, Solvency II takes reinsurance into account to a greater extent than Solvency I.

In addition, Pillar II of Solvency II requires insurers, via the ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) approach, to meet risk appetite constraints. ORSA defines risk appetite as the level of aggregate risk that a company agrees to take in order to continue its business and development.

Problematic :

Reinsurance then plays an essential role for insurers since it will enable them to transfer there risks in return for a financial consideration to the reinsurer. The study of its impact on solvency indicators will enable a non-life insurer to assess the performance resulting from the implementation of such a system.
Thus, the optimisation of reinsurance is a trade-off between the cost of reinsurance and the capital gain.
The objective of this thesis is to build a reinsurance optimisation tool for a non-life insurance company according to this arbitrage, taking into account the insurer's risk appetite constraints.

Approach :

The loss ratio is the parameter that will impact the reinsurance. Reinsurance is then optimised using a scenario-based approach. The method consists in simulating a large number of portfolios on which several reinsurance covers will be applied in order to compare them. The number of simulations is set at 50,000.

Each scenario is conducted individually, all other things being equal. A scenario corres-

ponds to a reinsurance programme with given parameters applied to a simulated loss experience. In other words, the study is reduced to the optimisation of a single treaty, with the other treaties remaining unchanged in order to make the impact of each of them easier to understand.

The tool then consists of highlighting the reinsurance strategies offering the best profit for a given level of risk. These covers will define an efficient frontier on which the ceding company will be able to choose the optimal cover according to the optimisation criteria. The main steps in the construction of the tool are as follows :

•Modelling and simulation of future claims experience

The study focuses on the line of business of car liability. The modelling of the claims experience is carried out in several stages :

— 1. Determination of the threshold for serious claims

Extreme value theory makes it possible to implement the method of average excesses. It puts forward two thresholds around 80,000€ and 450,000€. The use of tail estimators will then specify these values. Finally, theoretical thresholds retained are 120,000€ and 430,000€. However, theory alone can only give an order of magnitude for the threshold. In order to remain as close as possible to market data, the second threshold considered will be 500,000€.

— 2. Claims Severity Law

The laws that can represent extreme claims must be thicktailed laws. Thus, the laws of Cauchy, Student, Pareto, Generalized Pareto and Log-gamma underwent the Kolmogorov-Smirnov test of adequacy. Finally, Pareto's law will represent the median and severe sinistrality of parameters respectively $\alpha = 1.87, x_0 = 120,000$ et $\alpha = 0.87, x_0 = 500,000$.

— 3. Frequency of claims law

In order to determine the frequency law for median (load between 120,000 and 900,000 €) and severe (load over 900,000 €) claims, the chi-square test was applied to the Poisson and negative binomial laws. In fine, the frequency law of median and serious claims will be represented by a Poisson's law.

•Determination of constraints

The purpose of the reinsurance cost and capital gain trade-off is to compare reinsurance programs by relating a measure of risk to a measure of gain. For the purpose of this paper, the solvency ratio and the combined ratio are chosen to measure risk and profitability respectively.

Here, the insurer will seek to protect itself from a possible tariff shortfall due to the increase in auto third party claims while seeking to stabilize its situation. An optimal arbitrage would then be a solvency ratio allowing it to remain solvent while minimising financial losses. Based on historical and simulated data, a solvency ratio of 150% will be

considered as a threshold for this indicator. Thus, the optimisation constraints can be summarised as a solvency ratio of 190% and a combined ratio to be minimised.

•Application of reinsurance

Reinsurance programmes will be applied to the simulated portfolios. The treaties retained for the study are excess of loss by risk, excess of loss and quota share.

The pricing in proportional reinsurance is defined in the treaty, whereas in non-proportional reinsurance, the reinsurance premium is obtained in three steps :

— 1. **Pure premium**

Several approaches exist to calculate the pure premium depending on the quantity and quality of data available. For the purposes of this paper, a parametric method is used. It is obtained by taking the expected claims ceded : Pure premium = $\mathbb{E}(S_{ceded})$.

2. **Technical premium**

A safety load is added to the pure premium to form the technical premium :Technical premium = Pure premium + safety load. This charge takes into account the reinsurer's result expressed from the insurer's point of view : $R_{reas} = S_{ceded} - P_{ceded} + Commissions$. The risk measure used is the semi-standard deviation such as $\sqrt{\mathbb{E}(R_{reas} - \mathbb{E}(R_{reas}))^2}$. It enables the volatility of the reinsurance result to be measured only if it is higher than expected. Finally, the safety loading is defined by :Safety loading =α x $\sqrt{\mathbb{E}(R_{reas} - \mathbb{E}(R_{reas}))^2}$, avec α un positive real coefficient.

3. **Commercial premium**

In order to take into account the underwriting costs of each treaty, the reinsurer must assume loads, written β. They are expressed in the form of rates included in the commercial premium such as : Commercial premium = $\frac{Technicalpremium}{1-\beta}$.

Achievements :

— Excess of loss per risk treaty

The choice of priority amounts is established according to a quantile linked to the distribution of claims. Priorities of 2M€, 3M€ and 5M€ have been selected. The ranges must represent an unlimited compensation ceiling, as it is the case for motor vehicle liability. They will therefore range from 10,000,000 to 40,000,000 with a step of 10,000,000 in order to study enough treaties. The optimisation criteria chosen have been simulated and plotted in the figures below :

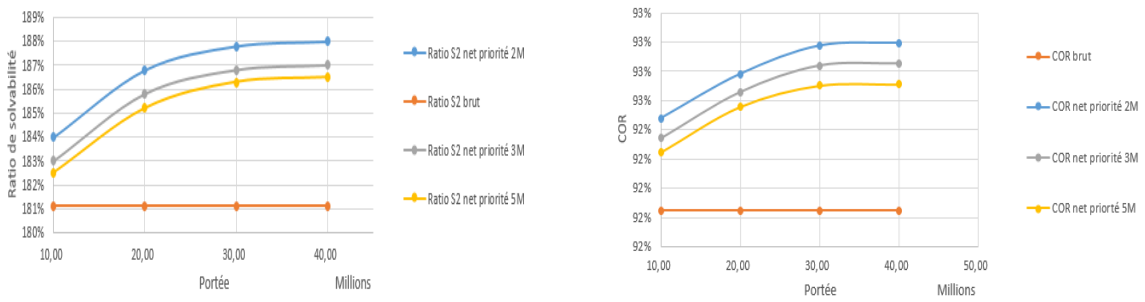

FIGURE 5 – Optimisation criteria for an excess of loss per risk treaty

The insurer's solvency has been improved with the application of an XS treaty. Indeed, whatever the scope and priority, the solvency ratio is higher than the gross ratio. On the other hand, curves for a scope of four and six million euros are almost identical. This can be explained by the fact that few claims will be covered by reinsurance : only two claims are above three million euros and one above four million euros on average over the 50,000 simulations. Reinsurance will therefore rarely or not at all be used.

The combined ratio evolves in the same direction as the reach. Indeed, the premium ceded will be all the more expensive as the litter increases. However, since the amount of premium ceded is higher than the amount of claims ceded, the insurer pays more than the reinsurance has an impact. Moreover, the curve tends to stagnate beyond a scope of 30M €. This can be explained by fewer strong intervention of reinsurance since few claims will be concerned by these tranches for increasing ceded premiums.

As a result, this treaty makes it possible to improve the insurer's solvency, but at the cost of reinsurance that degrades its profitability.

— Excess of loss treaty

The idea is to limit the insurer's possible losses for the following year with priority. In order to do so, priority will be expressed in terms of the Loss Ratio. It will vary from 80% to 70% with a step of 2%, chosen in such a way that sufficient reinsurance programmes are handled. As the insurer's costs are estimated at 32%, this amounts to maximising the combined ratio to around 110%.

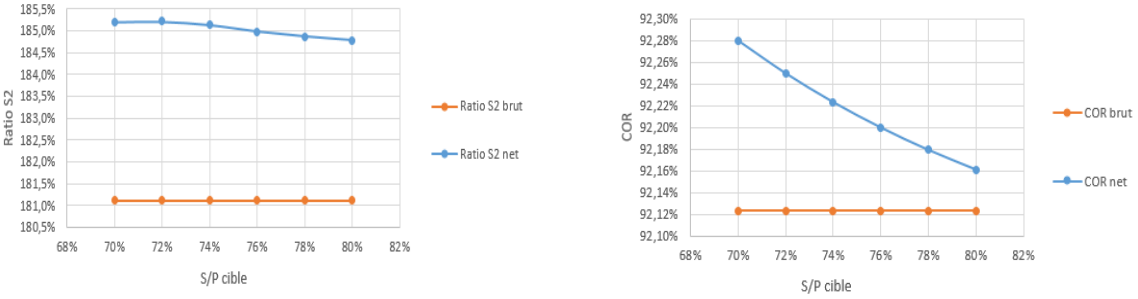

FIGURE 6 – Optimisation criteria for an excess of loss treaty

The solvency ratio is maximised in relation to the gross ratio. However, it decreases when the loss ratio increases. Indeed, the lower the desired loss ratio, the more the distribution

tail will be capped. The insurer will therefore cede more risks, which will only result in a higher ceded premium.

The objective of such a treaty is to limit losses with a loss ratio priority capped at 78%, i.e. a maximum combined ratio of 110%. The graph corresponding to this indicator shows that this is indeed the case. Indeed, the maximum CoR is 107%. On the other hand, this ratio remains higher than gross whatever the loss ratio targets chosen.

In conclusion, for a profitable product, the stop loss treaty will make it possible to trim the distribution tail. In this case, the reinsurance programme will be underwritten with the objective of transferring risks and not of profitability.

— Proportionate treaty

For proportional reinsurance, several cession rates have been applied, from 10% to 90% with a 10% step chosen so as to study enough treaties.

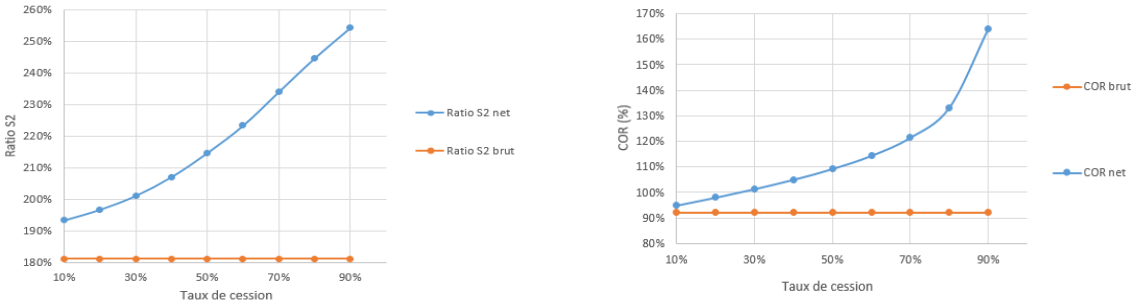

FIGURE 7 – Optimisation criteria for a proportionate treaty

As the disposal rate increases, the solvency ratio explodes until it reaches 255% for a disposal rate of 90%. The higher the cession rate, the more risk the insurer cedes to the reinsurer. Indeed, the underwriting and market SCR will decrease significantly, leaving only the counterparty SCR. Thus the amount of capital is significantly lower than the gross amount.

In proportional reinsurance, the reinsurance commission is calculated in order to compensate the insurer's expenses for claims handling and acquisition costs. The administration costs will remain entirely at the insurer's expense. Thus, it appears that the ROC increases exponentially with the cession rate. Indeed, the ceding company finds itself paying administrative expenses (of the order of 25 millions of euros) with a premium amount that decreases while the expenses are fixed. The insurer will therefore draw on its resources in order to finance the acquisition costs, which will deteriorate its result.

Thus, the quota share treaty is very effective in freeing up capital and protecting the insurer against certain risks. On the other hand, it is very costly for the ceding company.

— Drawing an efficient border

Reinsurance coverage will define an efficient boundary that has been drawn using cubic interpolation.

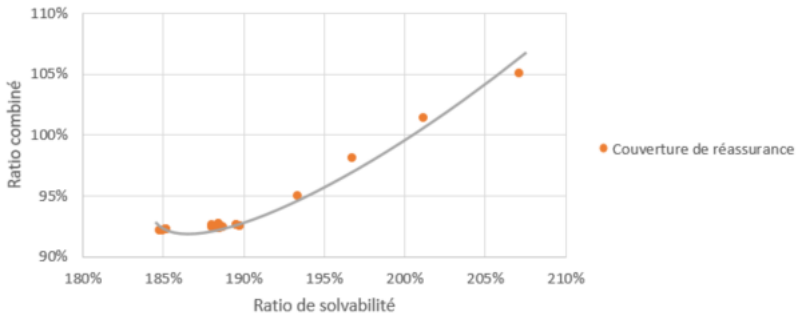

FIGURE 8 – Efficient border

The axes correspond to the optimisation criteria. The risk appetite constraints require a solvency ratio of 190%. Thus, the optimal treaties making it possible to meet these criteria would be an excess of loss or a share of the cession rate of 10%. By interpolation, the COR obtained for a solvency ratio of 190% is 92.44%. The optimal treaty would then be an XS treaty with priority 5M and scope 40M which offers a solvency ratio of 189 % and a combined ratio of 92.56 %.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire mais également à mon enrichissement tant bien professionel que personnel pendant ces cinq mois au sein d'Optimind, à Paris.

Tout d'abord, j'adresse mes remerciements à mes tuteurs entreprise Monsieur André GRONDIN et Madame Adeline STEPHAN pour leur bienveillance, leurs encouragements et leurs conseils.

Je porte une attention particulière à remercier Monsieur Albin TRANCHARD pour m'avoir permis de me dépasser. Grâce à son expérience professionnelle, sa disponibilité et ses conseils avisés, j'ai pu mener à bien ce mémoire.

Je tiens également à remercier toute l'équipe d'Optimind, au sein de laquelle j'ai pu évoluer pendant ce stage. Notamment mes collègues Bisous RAZAFINDRABARY, Florian MONTMEAT et Benjamin MATTENET pour leur confiance, leur patience et leur soutien inébranlable.

Je remercie également mon tuteur académique Monsieur Jean-François DECROOCQ pour sa disponibilité, sa pédagogie et son aide précieuse. Ainsi que l'ensemble de l'équipe pédagogique de Paris-Dauphine qui ont veillé au bon déroulement de ce stage.

Enfin, j'aimerais remercier mes parents et mes amis qui m'ont soutenu durant toutes ces années.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé **3**

Abstract **4**

Note de Synthèse **5**

Synthesis note **11**

Remerciements **17**

Introduction **21**

1 Mise en contexte **23**
1.1 Généralités autour de la réassurance non-vie 23
1.2 Solvabilité II et l'utilisation de la réassurance 35

2 Définition des contraintes d'optimisation **43**
2.1 Présentation du portefeuille 43
2.2 Appétence aux risques 60
2.3 Calcul du résultat net 62
2.4 Calcul du SCR 68
2.5 Définition des contraintes 74

3 Mise en place du modèle d'optimisation **77**
3.1 Théorie de la réassurance optimale 77
3.2 Définition du modèle 78
3.3 Méthode d'interpolation 80
3.4 Application du modèle aux traités séléctionnés 82
3.5 Arbitrage des exigences de solvabilité et de rentabilité 95

Conclusion **97**

Bibliographie **99**

Annexes **101**

INTRODUCTION

L'engagement d'un assureur consiste à dédommager ses assurés en cas de dommage sous des conditions établies contractuellement. La réassurance joue alors un rôle essentiel pour l'assureur puisqu'elle va lui permettre de transférer une partie de ses risques moyennant une contrepartie financière.

Depuis l'entrée en vigueur de Solvabilité II le 1er janvier 2016, les contraintes prudentielles définies par cette directive européenne imposent aux entreprises d'assurance de porter une attention particulière à la gestion de leurs Fonds Propres et fait appel à une restructuration du calcul des exigences de capital. En effet, en tant que norme prospective et basée sur une approche par les risques, Solvabilité II tient compte de la réassurance de façon plus importante que Solvabilité I qui était rétrospective et forfaitaire, particulièrement en matière de réassurance. La réassurance devient ainsi un levier majeur de réduction du besoin en capital réglementaire. De plus, le pilier II de Solvabilité II impose aux assureurs via la démarche ORSA [1] de satisfaire à des contraintes d'appétence aux risques. L'ORSA défini cette appétence comme le niveau de risque agrégé qu'une entreprise accepte de prendre en vue de la poursuite de son activité et de son développement. Elle est déterminée par les instances de gouvernance de l'entreprise, et elle s'exprime sous la forme de mesures de risque et de limites.

L'optimisation de la réassurance devient alors un enjeu essentiel pour la cédante et relève d'un arbitrage entre le coût de la réassurance et le gain en capital. Ce mémoire a pour ambition de construire un outil d'optimisation de la réassurance pour une compagnie d'assurance non-vie selon cet arbitrage. Trois parties se détachent afin de répondre à cette problématique.

La première partie est une introduction aux notions théoriques autour de la réassurance

1. L'ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) est un ensemble de processus permettant d'évaluer, de manière continue et prospective, le besoin global de solvabilité lié au profil de risque spécifique de chaque organisme assureur.

pour une compagnie d'assurance non-vie et définit le contexte règlementaire dans lequel se place ce mémoire, qui n'est autre que Solvabilité II.

La seconde partie permet de poser le cadre de l'étude en présentant le portefeuille automobile fictif et les différentes étapes nécessaires à la détermination des contraintes d'appétence aux risques dont les principales sont : La modélisation de la sinistralité, le calcul du résultat net, le calcul du SCR, et le calcul des indicateurs d'appétence aux risques.

Enfin la troisième et dernière partie présente le modèle d'optimisation choisi ainsi que son application aux données du portefeuille étudié. La démarche retenue dans ce mémoire est une approche par scénarii. Elle s'appuie sur la méthode de Monte Carlo et consiste à comparer un certain nombre de couvertures de réassurance selon des critères d'optimisation établis par appétence aux risques. Cet outil permet de mettre en évidence les stratégies de réassurance les plus efficaces par le biais d'une frontière efficiente. La ou les couvertures optimales sélectionnées par la cédante seront celles lui offrant le meilleur profit pour un niveau de risque donné.

CHAPITRE 1

MISE EN CONTEXTE

Ce premier chapitre permet d'introduire des notions théoriques autour de la réassurance pour une compagnie d'assurance non-vie et de définir le contexte réglementaire dans lequel se place ce mémoire, qui n'est autre que Solvabilité II.

1.1 Généralités autour de la réassurance non-vie

Malgré des efforts de sélection, un assureur s'expose à des risques et ne peut les maîtriser totalement. C'est pourquoi le recours à la réassurance va lui permettre de les limiter et de réduire la volatilité de ses résultats. Les données et graphiques de cette partie sont tirés du cours de réassurance dispensé par R.Boyer-Chammard à l'Université de Paris-Dauphine [Boyer-Chammard, 2019-2020] et du livre de JF WALHIN intitulé "La réassurance" [Walhin, 2007].

Définition

Le code de commerce allemand aime à appeler la réassurance "l'assurance des assureurs".
Ce terme prend tout son sens puisqu'il s'agit d'une technique de transfert de risque d'un organisme d'assurance (la partie cédante) vers un réassureur (le cessionnaire). En contrepartie des risques cédés, la cédante verse au cessionnaire une prime de réassurance. Ce dernier prendra en charge une partie des sinistres si le risque se réalise. Cet engagement se matérialise par la signature d'un traité de réassurance spécifiant des clauses et les périmètres d'application. Ce transfert de risque permet de protéger les Fonds Propres de la cédante. Néanmoins, seul l'assureur est responsable vis-à-vis de l'assuré.

Si le réassureur veut à son tour s'assurer, il a la possibilité de rétrocéder une partie de son risque à un autre réassureur appelé rétrocessionnaire. Les deux membres signent alors un traité de rétrocession. L'organisation de la réassurance est résumée dans la figure

1.1.

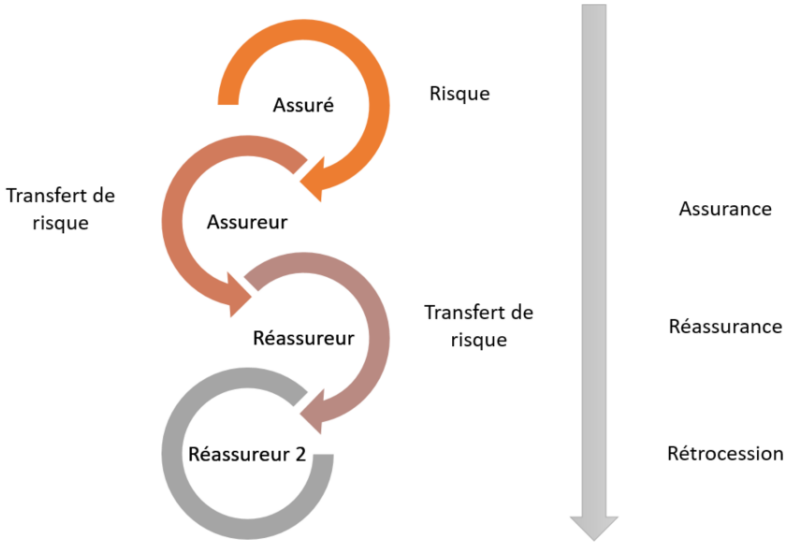

FIGURE 1.1 – Organisation de la réassurance

Quelles sont les utilités de la réassurance ?

La réassurance est un outil de partage de risque permettant de :

- Limiter la probabilité de ruine pour un assureur. En effet, l'assureur peut porter des risques extrêmement lourds qui peuvent mettre en danger sa pérennité. Il fait alors appel à la réassurance pour limiter le risque de ruine.
- Limiter la volatilité du résultat dans le temps. L'assureur veut faire en sorte d'avoir un résultat le plus stable possible en cédant les risques qui présentent la plus forte volatilité.
- Maîtriser la solvabilité règlementaire. Dans le cadre de la règlementation Solvabilité II, l'assureur doit pouvoir prouver qu'il a une probabilité de ruine d'au maximum 0,5% à horizon un an, soit une occurrence tous les deux cents ans. L'assureur évalue ses Fonds Propres et son capital de solvabilité requis, noté SCR dans la suite. Il doit s'assurer que ses Fonds Propres sont supérieurs au montant de SCR. La réassurance peut être utilisée pour réduire le SCR en cédant certains risques.

Exemples de risques réassurés

Les assureurs se couvrent principalement contre les risques les plus lourds.
En France il existe plusieurs catégories notamment :

- Evènements naturels catastrophiques

Les catastrophes naturelles sont définies légalement dans l'article L 125-1 du code des assurances. À chaque évènement l'État est chargé de reconnaître l'état de catastrophe naturelle. Si tel est le cas, la Caisse Centrale de Réassurance (CCR) réassure le marché. Parmi elles peuvent être citées les inondations, les séismes, les éruptions volcaniques, les sécheresses, les ouragans.

- Autres évènements

Ceux-ci ne sont pas qualifiés de catastrophes naturelles au sens légal du terme, tels que les tempêtes, la grêle, les épidémies, le terrorisme, ou encore les responsabilités civiles.

Le marché de la réassurance

Le Swiss Re Institute estime les cessions des compagnies d'assurance primaires aux marchés mondiaux de la réassurance en 2018 à près de 260 milliards de dollars, soit 5% du marché de l'assurance. C'est un marché très fortement concentré. En effet, une dizaine d'acteurs regroupent à eux seuls les trois quarts du marché mondial. La figure 1.2 ci-dessous met en avant la proportion des primes nettes détenues pour ces réassureurs :

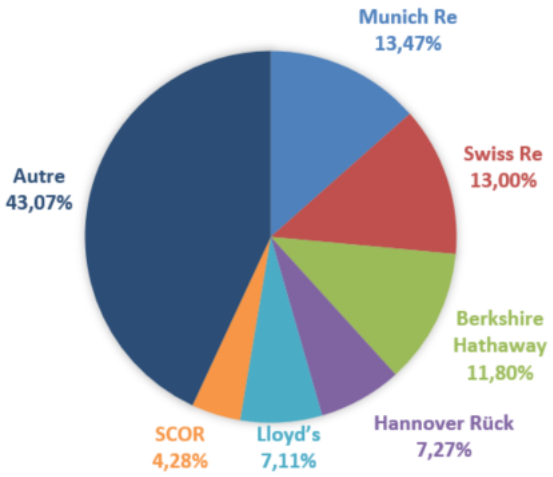

FIGURE 1.2 – Proportion des primes non-vie nettes des premiers réassureurs mondiaux [BOYER-CHAMMARD, 2019-2020]

Le marché de la réassurance fonctionne par cycles :

cycle "soft" :

— Pendant plusieurs années il n'y a pas d'évènement majeur, la réassurance fait du profit

— Cela entraîne une augmentation de la concurrence ⇒ baisse des primes et des marges

cycle "hard" :

— Un évènement majeur survient

— Retrait des acteurs et baisse des capacités ⇒ moins de concurrence

— Les prix remontent

En effet, les réassureurs compensent leurs très mauvaises années (cycle hard) par les bonnes (cycle soft) où ils ont pu faire du profit grâce à une prime de risque élevée.

La rentabilité d'une compagnie d'assurance non-vie (ou de réassurance) se calcule par son ratio combiné :

$$COR = \frac{Sinistres+Frais}{Prime_{acquise}}.$$

- Si COR > 1, la compagnie perd de l'argent sur son activité d'assurance
- Si COR < 1, l'activité est profitable

En France, le COR d'un assureur avoisine les 100% [banque de France, Février 2019]. Ce qui traduit une marge technique très faible et un COR très peu volatil.

En ce qui concerne les réassureurs, la plupart du temps le COR est compris entre 85% et 95%. Dans ces cas-là, ils réalisent une forte marge technique. Quelques années sont cependant extrêmes comme en 2001 où le COR mondial moyen de réassurance est monté jusqu'à 128% lors des attentats du World Trade Center à New York [Boyer-Chammard, 2019-2020]. Aussi, le ratio combiné des réassureurs est très volatil.

Différents types de réassurance

La cession de risque en réassurance peut se faire sous trois modes distincts :

- Cession obligatoire

Dans un traité obligatoire, la cédante s'engage à céder tous ses risques sur une période donnée et la compagnie de réassurance s'engage à les accepter.
C'est le mode de réassurance le plus utilisé.

- Cession facultative

Dans un traité facultatif, la particularité est le libre choix à l'assureur -respectivement au réassureur- de céder -d'accepter- ou non un risque en totalité ou partiellement. Il n'y a pas d'accord préalable.
Le principal défaut d'un tel mode de réassurance est sa lourdeur opérationnelle, un nouveau traité pour chaque assuré est nécessaire. Il permet cependant de mieux couvrir les risques les plus forts.

- Cession obligatoire-facultative

Dans ce dernier cas de figure, la compagnie d'assurance a le choix de céder des polices au réassureur de son choix, mais celui-ci est obligé d'accepter cette cession dès le moment où elle rentre dans le champ d'application de la réassurance.

Exemple : Un assureur habitation choisit de se réassurer en obligatoire sur son portefeuille. Une des clauses du traité stipule que la couverture de réassurance ne s'applique qu'aux biens de moins de cinq millions d'euros. L'ajout d'une police de type château, à vingt millions d'euros nécessite la souscription d'un traité de réassurance facultatif pour ce bien. En effet, la couverture de réassurance obligatoire ne couvre pas ce dernier.

Deux types de réassurance se distinguent : la réassurance proportionnelle et non proportionnelle.

La réassurance proportionnelle

Le terme "proportionnelle" s'explique par le fait que le réassureur participe aux sinistres en proportion équivalente ou non des primes cédées.
Les traités proportionnels sont principalement en quote-part ou en excédent de plein.

Traité en quote part

La réassurance en quote-part est la forme la plus utilisée en réassurance proportionnelle, de par sa simplicité. Elle s'applique sur tous les sinistres présents dans le portefeuille, même les plus petits. Le réassureur reçoit un certain pourcentage θ des primes de la cédante, appelé taux de cession. En contrepartie il prend en charge un pourcentage des sinistres, qui peut être égal à θ ou non.

Ce traité sera noté QP(θ) dans la suite.
La prime de réassurance et le montant de sinistres cédés se calculent comme suit :

- P" = θP avec P la prime commerciale de l'assureur
- S" = θS avec S la charge de sinistres de l'assureur

La réassurance en quote-part n'a pas d'impact sur le loss ratio. En effet, $\frac{S'}{P'} = \frac{(1-\theta)S}{(1-\theta)P} = \frac{S}{P}$.
En revanche, il est intéressant pour un assureur de faire appel à la quote-part lors du lancement d'un nouveau produit par exemple. En effet, l'assureur peut appliquer de la réassurance en quote-part sur un produit la première année le temps de comprendre le comportement des assurés sur celui-ci. Une fois le produit maîtrisé, l'assureur résilie le traité de réassurance.
De plus, ce type de couverture est intéressant pour réduire le besoin en capital des cédantes.
En effet, soit une compagnie d'assurance disposant d'un capital u. En notant S la variable aléatoire représentant la sinistralité à charge de l'assureur et P les primes d'assurance associées à ce risque, sa probabilité de ruine sans réassurance s'écrit :

$$\mathbb{P}(S > u + P).$$

Si l'assureur souscrit un traité en quote-part de taux de cession a, sa probabilité de ruine évolue de la sorte :
$\mathbb{P}(S(1-a) > u + P(1-a)) = \mathbb{P}(S > \frac{u}{1-a} + P)$.
Autrement dit, le traité en quote-part de cession a permet à l'assureur de réduire son besoin de capital d'un facteur *(1 - a)*. Cependant, ce traité est appliqué sur tout le portefeuille, même les plus petits sinistres vont être réassurés, ce qui n'est pas forcement nécessaire. Cela implique une grosse cession de prime.

Finalement, les traités en quote-part permettent de réduire le risque mais il faudra céder de gros volumes de primes pour le réduire de façon significative.

Traité en excédent de plein

Le traité en excédent de plein tente de corriger les inconvénients des traités en quote-part. En effet, les petits sinistres, à forte fréquence, sont généralement bien maîtrisés par les assureurs puisque récurrents. Il n'est donc pas nécessaire de les réassurer. Ainsi, l'idée du traité en excédent de plein est de réassurer les risques à partir d'un certain seuil.
Pour cela, l'assureur définit deux quantités :

- Le plein de conservation, noté PC aussi appelé plein de rétention.

C'est le montant maximal dont l'assureur est prêt à payer par sinistre.

- Le plein de souscription, noté PS.

Il est défini en nombre de pleins, noté k dans la suite. Ainsi, PS = PC x k.

A la différence du traité en quote-part, le taux de cession est calculé par contrat tel que : $\theta_i = min(max(\frac{S_i - PC}{S_i}; 0); \frac{PS}{S_i})$, où θ_i et S_i représentent respectivement le taux de cession et le montant de sinistre pour le contrat i.
Aussi, si :

- $S_i \leq PC$, l'assureur prend en charge l'intégralité du sinistre
- $PC < S_i \leq PS$, l'assureur cède au réassureur $\frac{S_i - PC}{S_i}\%$ de la prime et du sinistre
- $S_i > PS$, l'assureur cède $\frac{PS - PC}{S_i}\%$ au réassureur

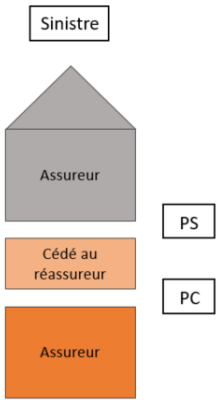

FIGURE 1.3 – Décomposition d'un sinistre pour un traité en excédent de plein

Grâce à l'excédent de plein, l'exposition maximale par risque est limitée au plein. En revanche, un tel traité n'est applicable que sur des branches dont la somme assurée est connue à l'avance, du fait de la définition du taux de cession. Ce qui exclu la responsabilité civile en assurance non-vie qui est qualifiée de branche longue. Ce type de traité ne sera pas étudié dans la suite.

Commissions de réassurance

La prime commerciale versée par les assurés à l'assureur comprend bien entendu la prime pure (c'est-à-dire le montant de sinistres attendu) mais aussi les chargements liés à l'activité d'assurance notamment la rémunération de l'intermédiaire, celle des actionnaires et les frais généraux.

La prime cédée au réassureur est un pourcentage de cette dernière. Une partie de la marge de l'assureur est donc cédée au réassureur lui permettant de financer ses frais de gestion et d'acquisition. Or, les coûts d'acquisition d'un assureur sont nettement plus importants que ceux d'un réassureur. En effet, ces coûts pour un assureur tiennent compte des frais de service des intermédiaires, du marketing, ... lorsque le réassureur, lui, fait éventuellement appel à un courtier et a des frais liés à la relation commerciale.

La gestion administrative présente également des frais plus coûteux pour l'assureur que le réassureur. En effet, la production des polices et la gestion des sinistres nécessitent de nombreux gestionnaires quand le réassureur suit les conditions contractuelles du traité de réassurance.

C'est pour pallier ces inégalités que le réassureur verse à l'assureur une commission de réassurance. Elle est censée représenter les coûts d'acquisition et de gestion de l'assureur. En pratique, la cédante et le réassureur conviennent d'un taux de commission qui sera multiplié à la prime cédée pour donner la commission de réassurance. Dans ce mémoire,

le taux de commission est déterminé par la formule suivante : $\frac{Frais_{brut}}{Prime_{acquise}} Prime_{cedee}$. Il est de l'ordre de 30% contre 32% de frais de gestion et acquisition.

Une clause de participation aux bénéfices peut également intervenir dans le traité. En cas de "bonne" année pour l'assureur, le réassureur verse à ce dernier une partie de son résultat. Ce taux est généralement fixe et s'applique sur le solde de réassurance tel que $PB = \tau(P_{cedee} - S_{cede} - \alpha P_{cedee})$, avec α et τ les taux respectivement de commission et de participation aux bénéfices définis contractuellement.

La réassurance non proportionnelle

La réassurance est dite non proportionnelle dès lors que l'assureur définit un seuil au-delà duquel le réassureur prendra en charge les sinistres. Ce premier seuil est appelé priorité. De plus, la prime de réassurance est fixée par le réassureur. Il n'y a plus de lien de proportionnalité entre la prime cédée et la prime d'assurance.

Les principaux traités en réassurance non proportionnelle sont les excédent de sinistre par risque, par évènement et l'excédent de perte. Cette partie permet de les introduire.

Traité en excédent de sinistre

Un traité en excédent de sinistre couvre la part de chaque sinistre à partir d'un seuil appelé priorité. Le réassureur prend en charge la part excédentaire jusqu'à un certain plafond nommé portée comme illustré sur le shéma 1.4 ci-contre :

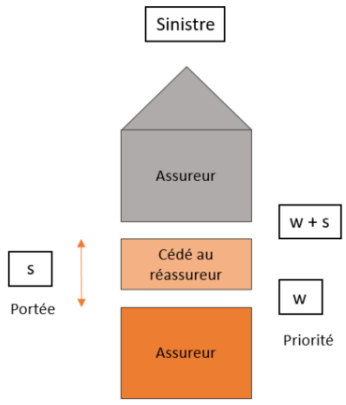

FIGURE 1.4 – Décomposition du sinistre pour un traité en excédent de sinistre

Il existe deux types de couverture pour ce traité :

- Excédent de sinistre par risque : ce traité traite les sinistres police par police

• Excédent de sinistre par évènement : ce traité couvre les sinistres agrégés résultant d'un même fait générateur, appelé évènement

Ce traité est identifié sous la notation *priorité XS portée*.
Ainsi, le réassureur payera

$$\text{S''} = \begin{cases} 0 \text{ si S} \leq \text{w} \\ \text{S - w si w} < \text{S} < \text{w} + \text{s} = \min(\max(\text{S-w} ; 0) ; \text{s}), \\ \text{s si S} \geq \text{w} + \text{s} \end{cases}$$

et l'assureur

$$\text{S'} = \begin{cases} \text{S si S} \leq \text{w} \\ \text{w si w} < \text{S} < \text{w} + \text{s} = \max(\min(\text{w} ; \text{S}) ; \text{S-s}). \\ \text{S - s si S} \geq \text{w} + \text{s} \end{cases}$$

Ce traité a l'avantage de couper la queue de distribution. Intuitivement, un tel programme de réassurance va donc impacter la solvabilité de l'assureur. Et, contrairement à l'excédent de plein, la somme assurée ne doit pas être préalablement déterminée pour mettre en place ce traité, ce qui est particulièrement important dans notre cas afin d'établir la couverture de la responsabilité civile.

Traité en excédent de perte

L'idée de ce traité est d'être couvert contre toutes les dérives possibles des risques attritionnels et de sévérité. Il est également appelé Stop loss et se note SL.

Ce traité fonctionne de manière similaire à un traité par excédent de sinistre mais sur la perte agrégée des sinistres survenus dans l'année. En effet, l'assureur définit le montant total qu'il est prêt à payer dans l'année (la priorité). Dans ce cas ci, une portée infinie sera considérée. Il a pour avantage d'être optimisé en matière de risk management, l'assureur est quasiment sûr de ne pas payer plus de la priorité. En revanche, il est beaucoup plus cher qu'un traité en excédent de sinistre.

AAD, AAL et nombre de reconstitutions

En réassurance non proportionnelle, les montants de sinistres cédés peuvent être extrement élevés. C'est pourquoi, une franchise notée AAD pour *aggregate deductible annuel* et une limite AAl pour *annual agregate limit* peuvent être définies sur l'agrégation annuelle des pertes.

Souvent, cette limite annuelle est définie comme un multiple de la portée du traité. On parle alors de reconstitutions. Elles peuvent être gratuites ou payantes. Dans ce dernier

cas, une prime de reconstitution doit être versée au réassureur dès lors que la tranche en question est touchée.

Tarification de la réassurance

En réassurance proportionnelle, la tarification est établi contractuellement, comme vu dans la section 1.1. Les négociations se portent en particulier sur les commissions et les clauses de participation aux bénéfices.

En revanche, en réassurance non proportionnelle, la prime de réassurance est fixée par le réassureur.

Clause de stabilité et statistique as-if

La clause de stabilité a été introduite afin de mieux répartir le coût de l'inflation entre réassureur et cédante. En effet, sur les branches longues, telle que la responsabilité civile automobile, le montant du sinistre évolue entre la date de survenance du sinistre et la date de règlement.
Ainsi, les montants de prime et réserve sont ajustés par le biais des formules suivantes :
$\frac{P_k}{Indice_k}$xIndice de base $= P_k^{as-if}$
$\frac{S_k}{Indice_k}$xIndice de base $= S_k^{as-if}$ où

- P_k et S_k sont les valeurs respectivement d'une prime et d'un sinistre de l'année k
- $Indice_k$ est l'indice du trimestre précédent la date de paiement
- P_k^{as-if} et S_k^{as-if} sont les valeurs "as-if" d'une prime et d'un sinistre de l'année k

Ces ajustements seront appliqués dès lors que l'indice du trimestre précédent la date de paiement a un écart supérieur à 10% de l'indice de base.
Exemple : Soit un sinistre RC de 9 005 000€.
Le programme de réassurance présente un traité XS de priorité 1M € et une portée illimitée, l'indice de base est de 100.
Le sinistre se règle en trois paiements :

- 3 550 000 € lorsque l'indice est de 105
- 3 960 000 € lorsque l'indice est de 120
- 1 495 000€ lorsque l'indice est de 130

En appliquant la clause de stabilité, le montant du sinistre devient :

- 1^{er} paiement, la variation d'indices est inférieur à 10% : 3 550 000€
- 2^{eme} paiement : $3960000\frac{100}{120} = 3\ 300\ 000$€
- 3^{eme} paiement : $1495000\frac{100}{130} = 1\ 150\ 000$€

Le montant "as-if" du sinistre est finalement de 8 000 000 €.
La priorité étant de 1M€, le réassureur prendra à sa charge 8 000 000 - 1 000 000 = 7 000 000 €

De plus, la tarification est établi sur la base de l'historique des sinistres de l'assureur. Pour tarifer des sinistres peu fréquents, l'assureur doit récupérer des données sur plusieurs années. Ces sinistres doivent prendre en compte l'inflation des années les plus récentes. La sinistralité est alors dite "asifer".

Dans ce mémoire, les années d'historiques à partir de 2014 ont été ajustées avec les différents taux d'inflations issus de [FFA, 2018] :

Année	Inflation
2014	2,90%
2015	3,95%
2016	4,25%
2017	3,05%
2018	3,15%

TABLE 1.1 – Taux d'inflation de l'assurance auto (source : FFA)

L'inflation s'applique comme suit : $S_k^{asif} = \prod_{i=k}^{2018}(1 + taux_i)S_k$.

Détermination de la prime de réassurance

Après avoir ajusté les montants de sinistres, la prime de réassurance se détermine en trois étapes :

1. Calcul de la prime pure
2. Calcul de la prime technique
3. Calcul de la prime commerciale

1. **Prime pure**

Plusieurs approches existent selon la quantité et la qualité des données à disposition. Pour une tranche travaillante, la méthode généralement adoptée est la tarification par expérience appelée « Burning Cost ». Il s'agit de faire la moyenne des ratios historiques des pertes à charge du réassureur et des primes perçues par l'assureur : $\frac{S_{cedesajustes}}{Prime}$; Pour une tranche partiellement travaillante, la méthode couramment appliquée est la méthode

paramétrique. Elle repose sur un modèle collectif où la fréquence et la sévérité sont étudiées séparément ; Pour une tranche peu exposée, la méthode utilisée est la tarification par exposition. Elle consiste à trouver un portefeuille comparable à celui étudié, pour lequel une expérience suffisante est disponible. La charge de sinistre attendue peut alors être estimée en quantifiant les différences entre le portefeuille à tarifer et celui de référence.

Dans le cadre de ce mémoire, les sinistres étudiés de l'assureur sont modélisés en utilisant une méthode paramétrique, c'est donc cette méthode qui est retenue pour déterminer la prime pure. Elle est obtenue en prenant l'espérance des sinistres cédés : Prime pure = $\mathbb{E}(S_{cedes})$.

2. **Prime technique**

Afin de tenir compte du risque porté par le réassureur, un chargement de sécurité vient s'ajouter à la prime pure pour former la prime technique :

$$\text{Prime technique} = \text{Prime pure} + \text{chargement de sécurité}$$

Ce chargement permet de mesurer le risque encouru par le réassureur du fait du traité souscrit par la cédante. Il tient compte du résultat du réassureur exprimé du point de vu de l'assureur : $R_{reas} = S_{cedes} - P_{cedees} + Commissions$.

La mesure de risque retenue dans ce mémoire est le semi écart-type. Il se calcul à l'aide de la fomule suivante : $\sqrt{\mathbb{E}(R_{reas} - \mathbb{E}(R_{reas}))^2}$. Cette mesure est couramment utilisée en finance afin de mesurer le risque de détérioration des investissements d'un portefeuille. Elle permet de mesurer la volatilité du résultat de réassurance uniquement dans le cas où il est supérieur à celui espéré.

Finalement le chargement de sécurité est obtenu en appliquant un coefficient de sécurité tel que :

$$\text{Chargement sécurité} = \alpha \text{ x } \sqrt{\mathbb{E}(R_{reas} - \mathbb{E}(R_{reas}))^2},$$

avec α un coefficient réel positif. Il sera convenu de prendre $\alpha = 2\%$ dans la suite de l'étude.

3. **Prime commerciale**

Afin de tenir compte des coûts de souscription de chaque traité, le réassureur doit assumer des chargements, noté β. Ils s'expriment sous forme de taux à appliquer à la prime technique pour former la prime commerciale. La prime commerciale s'écrit :

$$\text{Prime commerciale} = \frac{1}{1-\beta} \text{ x Prime technique.}$$

Comme évoqué précédemment, la réassurance est un moyen de transfert de risque pour les assureurs dans le but de piloter leur besoin de solvabilité.
Afin de mieux comprendre la notion de solvabilité, il est indispensable d'évoquer la norme prudentielle Solvabilité II.

1.2 Solvabilité II et l'utilisation de la réassurance

Une réglementation prudentielle en assurance est nécessaire. En effet, les produits d'assurance sont des produits de masse, parfois obligatoires comme la garantie responsabilité civile en auto par exemple. De plus, l'activité d'assurance est risquée de part l'inversion du cycle de production qui consiste à payer une prime avant que le sinistre se soit réalisé et les difficultés à tarifer certains aléas, comme les sinistres rares par exemple.

Les grands principes de Solvabilité II

La norme prudentielle Solvabilité II est entrée en vigueur le 1^{er} janvier 2016. Elle établit, pour les sociétés d'assurance européennes, un nouveau cadre réglementaire en matière de gouvernance fondé sur les risques dans le but de protéger les assurés.
Aussi, elle se voit attribuer les objectifs suivants :

- Renforcer l'intégration du marché européen de l'assurance
- Améliorer la protection des preneurs d'assurance et des ayants droit
- Renforcer la compétitivité des assureurs et réassureurs européens au niveau international
- Promouvoir une meilleure réglementation

Cette directive repose sur trois piliers qui définissent un ensemble d'exigences qualitatives et quantitatives comme détaillés ci-dessous :

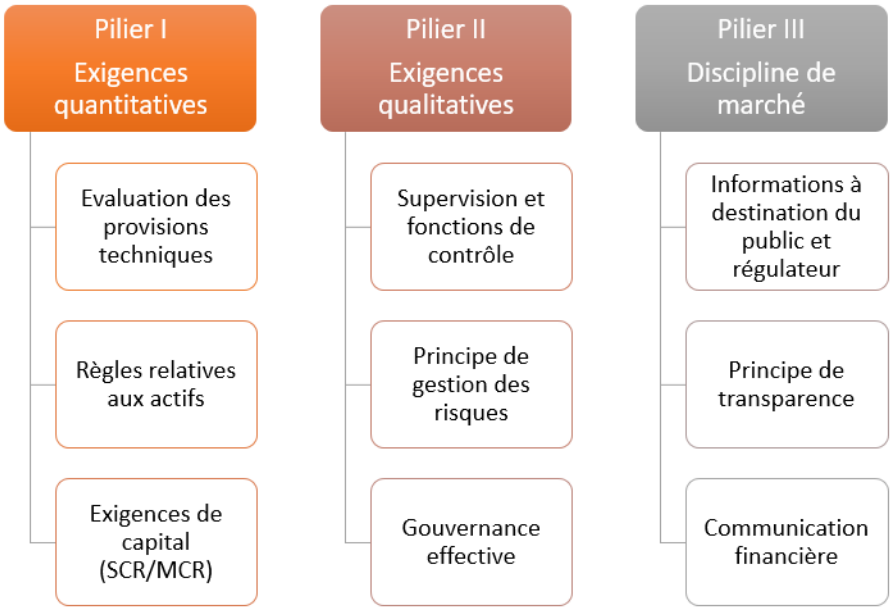

FIGURE 1.5 – Piliers de la norme Solvabilité II

Les grands principes directeurs qui s'en dégagent ont été déclinés par la Commission européenne tels que :

1. Assurer un équilibre entre la protection des assurés et le coût du capital pour les assureurs, donc favoriser une approche fondée sur le profil de risque particulier de l'entreprise d'assurance.

2. Promouvoir une bonne gestion des risques et responsabiliser les assureurs en leur donnant plus de liberté. En contrepartie, le dialogue prudentiel devra être renforcé.

3. Harmoniser les normes et les pratiques prudentielles non seulement dans l'Union Européenne, mais aussi au sein du secteur financier.

Afin d'employer un même langage et de pouvoir établir des benchmarks des sociétés d'assurance européennes, un unique indicateur de solvabilité à été mis en place. Il s'agit du rapport du capital de solvabilité requis (SCR, Solvency Capital Requirement) par les Fonds Propres éligibles. En effet, il reflète le capital cible nécessaire pour absorber un choc provoqué par un risque majeur.

Ainsi, les autorités de contrôle imposent deux exigences à respecter :

- Le MCR (Minimum Capital Requirement)

C'est le montant minimum de Fonds Propres dont doit disposer la compagnie d'assurance. Si les Fonds Propres éligibles sont inférieurs à ce montant, l'Autorité de contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) intervient pour mettre en place un plan de redressement.

- Le SCR

Il correspond au montant de Fonds Propres nécessaires pour faire face à une faillite à horizon un an à un niveau de confiance de 99,5%, soit une probabilité de ruine au maximum une fois tous les 200 ans.

Afin de le calculer, les assureurs et réassureurs peuvent employer la formule standard, choix par défaut proposé par le superviseur, ou encore un modèle interne partiel.

Sous la formule standard, le SCR est décomposé en sous modules comme illustré sur la pieuvre suivante :

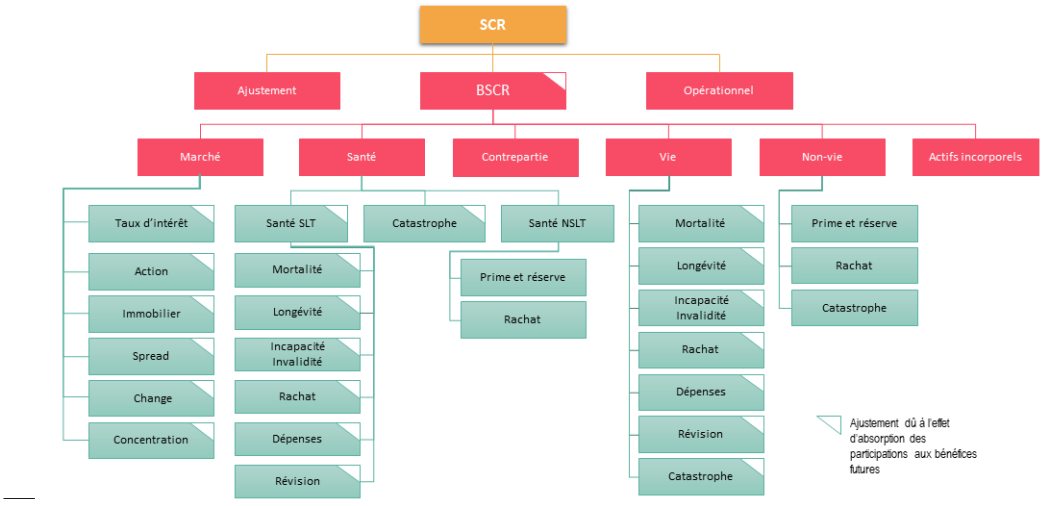

FIGURE 1.6 – Pieuvre de la formule standard

Quelle que soit la méthode utilisée, toutes les pertes potentielles sur les 12 mois à venir, y compris celles qui découleraient d'une réévaluation défavorable des actifs et passifs, doivent être évaluées.

Dans ce mémoire, l'assureur étudié est un assureur non-vie. Le calcul de SCR sera donc restreint aux sous-modules correspondant. Le détail des calculs est explicité dans le chapitre 2.

Le bilan prudentiel

Le bilan prudentiel évalue les actifs en valeurs de marché contrairement à la norme Solvabilité I qui comptabilisait les actifs en coût historique.

Il est détaillé ci-dessous :

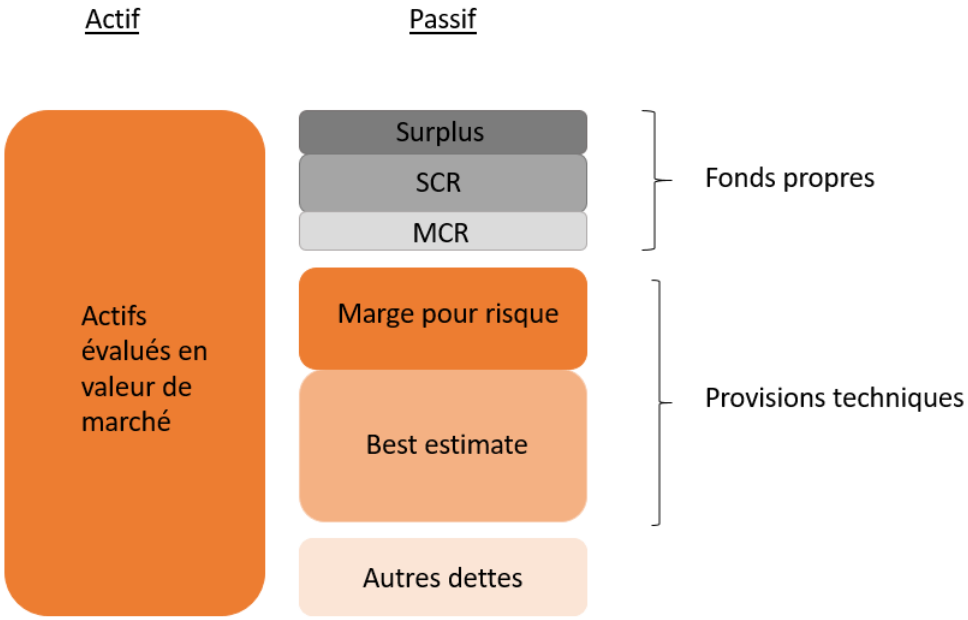

FIGURE 1.7 – Bilan prudentiel sous la norme Solvabilité II

Best Estimate

La meilleure estimation, aussi appelé BE pour Best Estimate, correspond à l'actualisation des flux futurs probabilisés, estimée de la façon la plus exacte possible, c'est-à-dire sans marge de prudence. Seuls les flux associés aux contrats d'assurance ou de réassurance existant doivent être pris en compte. Il est calculé comme suit :
$BE = \sum_{t=0}^{N} \frac{F(t)}{(1+r_t)^t}$, où

- F(t) correspond aux flux de trésorerie constatés à l'instant t.

Parmi les flux de trésorerie sont présents les flux entrants et sortants.
Les flux entrant correspondent aux primes futures et les créances reçues. Les flux sortants sont, quant-à-eux, les prestations et les dépenses liées aux engagements d'assurance (frais d'administration, de gestion des placements, de gestion des sinistres, frais d'acquisition dus, etc.)

- r_t correspond au taux d'intérêt sans risque de base de 2018 [1] pour une maturité de t années. Il est issus de la courbe des taux suivante :

1. L'année d'historique la plus récente du portefeuille fictif est 2018

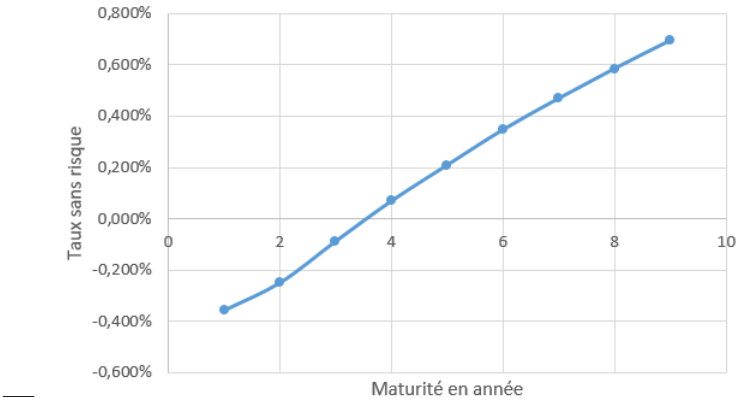

FIGURE 1.8 – Courbe des taux 2018 issus des archives de l'EIOPA

•N correspond au nombre d'années d'engagement de l'assureur, ici onze ans.

Il est à noter que le calcul du BE se fait brut de réassurance.

Marge pour risque

Comme vu précédemment, le best estimate est calculé sans marge de prudence. Or, les provisions techniques doivent prendre en compte une valorisation dans le cas éventuel d'un transfert d'une entreprise à une autre.

La marge pour risque, de son acronyme RM pour Risk Margin, représente alors la rémunération du capital immobilisé dû aux engagements de l'assureur. Elle permet de valoriser les engagements d'assurance. Elle est définie dans l'article 37 des actes délégués par la formule :
$RM = CoC \sum_{t\geq=0} \frac{SCR(t)}{(1+r_{t+1})^{t+1}}$, où

•Coc représente le taux de coût du capital.

•r_{t+1} représente le taux d'interêt sans risque de base de maturité t + 1 années.

•SCR(t) représente le capital de solvabilité requis après t années.

Cependant, la difficulté de mise en oeuvre de cette définition implique l'utilisation de simplifications, comme stipulé dans l'article 58 des actes délégués. La méthode de simplification retenue dans ce mémoire est :
$RM = \frac{CoC}{1+r}.Dur(0).SCR(0)$, où

• CoC est le coût du capital, présenté dans le chapitre 1

• r est le taux d'intérêt sans risque de base, présenté dans le chapitre 1

• Dur(0) est la duration modifiée des engagements nets de réassurance de l'assureur à l'instant t = 0, ici en 2017. Elle est de l'ordre de deux.

est définie par la formule suivante : $Dur(0) = \frac{\sum_{i=0}^{N} \frac{t(i).F_i}{(1+r)^{t(i)}}}{\sum_{i=0}^{N} \frac{F_i}{(1+r)^{t(i)}}}$.

- SCR(0) est le capital de solvabilité requis de 2017 net de réassurance, il est de l'ordre de quatre-vingt-dix-sept millions.

La marge pour risque est calculée nette de réassurance puisque c'est également le cas pour le montant de SCR.

L'impact de la réassurance dans Solvabilité II

Dans le bilan prudentiel, le best estimate est évalué brute de réassurance, et en contrepartie un actif (ou créance) de réassurance doit être reconnu à l'actif du bilan et calculé selon la méthodologie de calcul du Best-estimate. Ce calcul doit toutefois être ajusté afin de tenir compte des pertes possibles en cas de défaut de la contrepartie. En effet, le remboursement des sinistres cédés peut s'écouler sur plusieurs années, en particulier pour la garantie responsabilité civile en auto où la valeur des sinistres peut être extrêmement élevée. De plus, la probabilité de défaut des réassureurs évolue au cours des années selon la notation, comme illustré dans le tableau suivant :

	Horizon (années)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AAA	0,00	0,00	0,09	0,18	0,27	0,37	0,40	0,47	0,51	0,55
AA	0,03	0,08	0,14	0,25	0,34	0,45	0,56	0,65	0,73	0,83
A	0,08	0,20	0,34	0,52	0,72	0,95	1,21	1,45	1,69	1,94
BBB	0,24	0,68	1,17	1,79	2,43	3,06	3,59	4,12	4,63	5,16

Source : S&P "Default, Transition, and Recovery: 2008 Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions" April 2009

TABLE 1.2 – Probabilité de défaut des réassureurs selon la notation

La créance de réassurance correspondant aux provisions techniques cédées est obtenue par la différence entre le BE brut, le BE net auquel s'ajoute l'ajustement [1]. Le bilan prudentiel en tenant compte de la réassurance est défini comme suit :

1. Méthode de calcul issue de l'article 61 des actes délégués

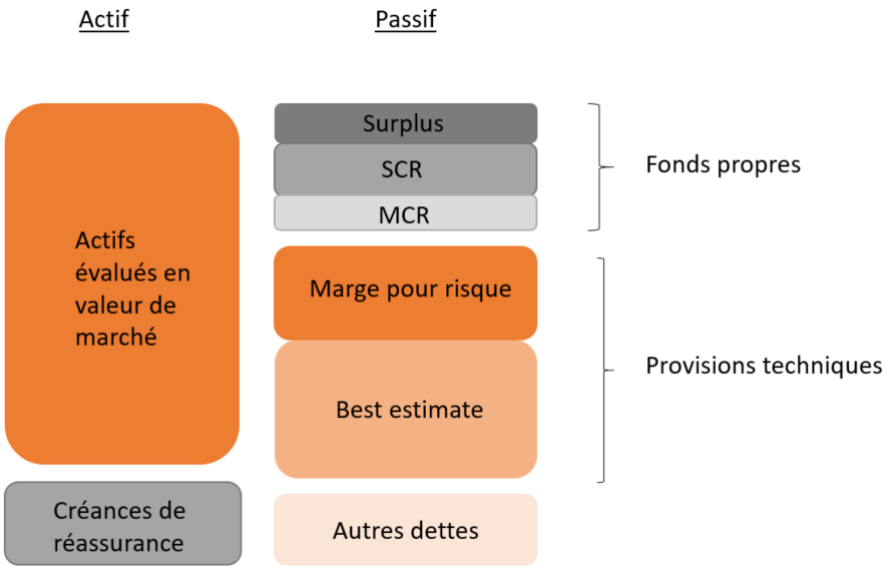

FIGURE 1.9 – Impact de la réassurance dans le bilan prudentiel Solvabilité II

Finalement, le financement de la réassurance va impacter la valeur des actifs à la baisse auxquels vient s'ajouter les provisions techniques cédées et l'ajustement définit plus haut.

Du côté du passif, la marge pour risque va être impactée à la baisse par la réassurance, qui à son tour va réduire le montant de Fonds Propres. En effet, le calcul du SCR est effectué net de réassurance et aura pour conséquence une réduction de celui-ci de façon générale.

Suite aux hypothèses appliquées dans le cadre de ce mémoire, l'impact de la réassurance sur le SCR ne sera observé qu'à travers les modules de risque de contrepartie, de risque de marché et de risque de souscription non-vie. Dans ce dernier seront calculés les sous-modules «Risque de primes et réserves» et «Risque Catastrophe» comme illustré dans la figure 1.10 :

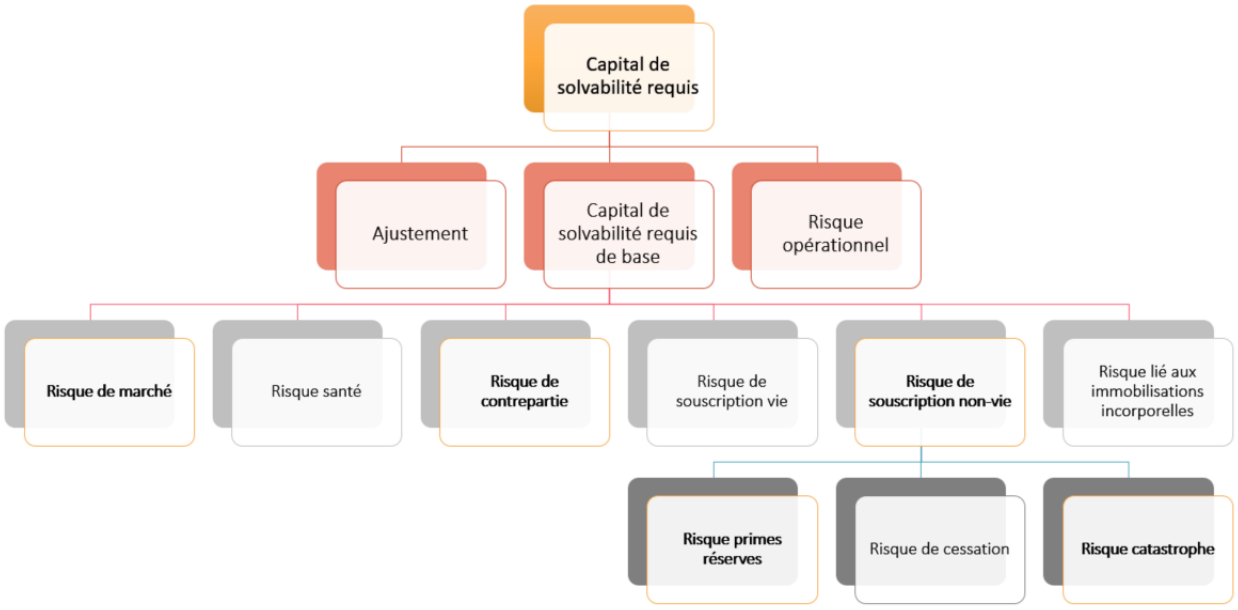

FIGURE 1.10 – Impact de la réassurance dans la formule standard

Chaque sous-module n'est pas imacté de façon similaire par la mise en place de programmes de réassurance. En effet, le SCR de souscription non-vie sera largement réduit du fait d'une cession des primes et des sinistres. Cependant, l'intervention de la réassurance introduira un nouveau risque au titre du SCR de contrepartie. Il dépend de la notation du réassureur et de l'exposition.

Enfin, la diminution du volume des actifs et du passif (meilleure estimation et marge pour risque) implique une légère baisse du risque de marché.

Finalement, l'impact sur le SCR de souscription est dominant et le SCR global diminue. Les impacts de chaque sous module sont résumés dans le tableau 1.3 ci-dessous :

Risque	**Impact de la réassurance**
Souscription	Baisse
Contrepartie	Hausse
Marché	Légère baisse
Global	Baisse générale dû à l'impact majoritaire du SCR de souscription

TABLE 1.3 – Impacts de la réassurance sur les risques

CHAPITRE 2

DÉFINITION DES CONTRAINTES D'OPTIMISATION

Ce chapitre définit le cadre de l'étude en présentant le portefeuille de l'étude et les différentes étapes nécessaires à la détermination des contraintes.

2.1 Présentation du portefeuille

Cette première sous-partie introduit quelques généralités sur le produit du portefeuille étudié afin de mieux comprendre les enjeux. Il s'en suivra une analyse de celui-ci pour mettre en place un programme de réassurance.

L'assurance automobile

Généralités

D'après la Fédération Française de l'Assurance, l'assurance automobile permet de couvrir les dommages matériels et/ou corporels que le véhicule de l'assuré peut occasionner à autrui.

En France, tout véhicule terrestre à moteur (VTAM) doit impérativement être couvert a minima par une assurance responsabilité civile pour être autorisé à circuler sur les voies publiques depuis 1958. En effet, un contrat d'assurance automobile est composé obligatoirement de la garantie responsabilité civile et peut être complété par diverses garanties facultatives. Parmi ces dernières, les plus rependues sont :

- Bris de glace. Elle couvre la réparation ou remplacement de toute partie vitrée du véhicule
- Vols. Comme son nom l'indique, elle couvre l'assuré des dommages subis par le véhicule lors d'un vol total, partiel ou d'une tentative

•Incendie et explosions. Celle-ci couvre les dommages du véhicule causés par la foudre, explosion, attentats, évènements climatiques

Plusieurs types d'assurance sont proposés aux assurés tels que l'assurance au tiers. C'est le niveau de protection minimum exigé en France. Il couvre l'ensemble des dégâts que le véhicule peut causer à autrui. En revanche, le conducteur du véhicule, responsable de l'accident, ainsi que le véhicule lui-même ne seront pas couverts pour les dommages subis ; Il existe également l'assurance au tiers enrichie. Elle comprend des clauses spécifiques en plus de l'assurance au tiers ; Enfin l'assurance tous risques. Elle couvre les risques qu'encourt un véhicule, y compris en cas d'accident responsable. Elle peut prendre en compte les dégradations liées au vandalisme. Elle permet aussi de choisir le type d'indemnisation en cas de destruction totale du véhicule, tel que le remplacement en valeur d'achat.

Particularités

Le parlement a adopté une nouvelle loi depuis janvier 2015 s'appliquant à l'assurance automobile : la loi Hamon. Elle stipule que tout assuré peut résilier son contrat d'assurance auto sans aucun motif après un an d'ancienneté. Cela implique un fort taux de turn-over chaque année, de l'ordre de 15% en 2015 d'après un article de l'Argus de l'assurance.

Ainsi, l'assureur se doit d'inciter les bas risques (les bons conducteurs) à rester dans son portefeuille et d'attirer, dans un même temps, les bas risques des autres compagnies. Pour cela, l'assureur a mis en place le Coefficient de Réduction Majoration (CRM). Ce dernier réévalue à la hausse ou à la baisse la cotisation en fonction du nombre d'accident responsable que l'assuré a déclaré dans l'année. En effet, à la première souscription d'un contrat automobile, le CRM est de 1. À chaque échéance annuelle du contrat, ce coefficient est multiplié par un facteur, déterminé suivant la situation de l'assuré. Trois possibilités se distinguent :

— • Si l'assuré n'est responsable d'aucun accident durant l'année, une réducrion de 5% sera appliquée sur le coefficient.

• Si l'assuré est responsable à 50% d'un accident dans l'année, une majoration de 12,5% sera appliquée sur le coefficient.

• Si l'assuré est entièrement responsable d'un accident, une majoration de 25% sera appliquée.
L'exemple 2.1 ci-dessous détaille les calculs suivant l'implication de l'assuré dans un accident pour un CRM initial de 0,80 :

FIGURE 2.1 – Schéma d'application du CRM (source : Direct Assurance)

Toutefois, le Bonus Malus ne peut dépasser 50%. Le Bonus maximal est atteint au bout de treize années consécutives sans sinistre.

Mis à part un fort renouvellement des contrats tous les ans, l'assureur auto doit faire face à certains risques, notamment :

- le risque de souscription, qui résulte de la distribution des contrats
- le risque de marché, lié aux fluctuations des prix des instruments financiers qui composent le portefeuille
- le risque de crédit, qui serait dû aux incertitudes quant à la possibilité ou la volonté des contreparties ou des clients de remplir leurs obligations telles que les créances sur les réassureurs ou les primes des assurés

Dans le cadre de ce mémoire, les risques de souscription non-vie et de marché seront étudiés dans la partie 2.4.

Le marché de l'assurance automobile

D'après la Fédération Française de l'Assurance, le marché français de l'assurance automobile en 2018 établit un chiffre d'affaires de 22,1 milliards d'euros. Cela représente 39% de l'ensemble des cotisations des assurances de dommages aux biens et de responsabilité civile.
L'assurance auto se répartit entre 90% de contrats particulier et 10% de contrats entreprise. Parmi eux 90% sont souscris pour assurer des automobiles, 7% de 2 roues et 3% d'un autre type de véhicules (tracteurs, engins de chantier par exemple).

Les principaux assureurs français automobile se partagent le marché de la façon suivante :

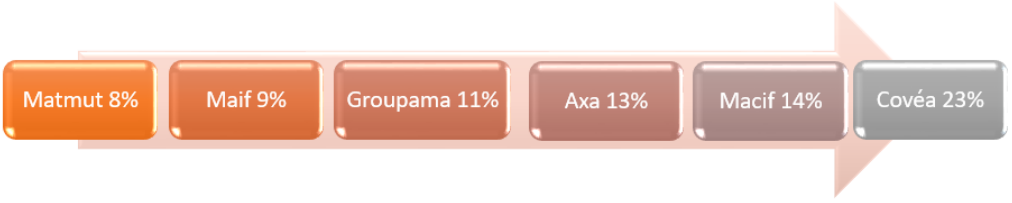

FIGURE 2.2 – Répartition du marché de l'assurance automobile en France

Il en ressort que cette branche de l'assurance est très concurrencée en France entre ces acteurs. Les tarifs doivent donc être attractifs tout en respectant les exigences de rentabilité et de solvabilité de l'assureur et en contrôlant le taux de turn-over, malgré une forte augmentation de la sinistralité. En effet, une augmentation de la fréquence des sinistres se fait ressentir depuis 2011 comme l'illustre le graphique 2.3 issu de la fédération française des sociétés d'assurance :

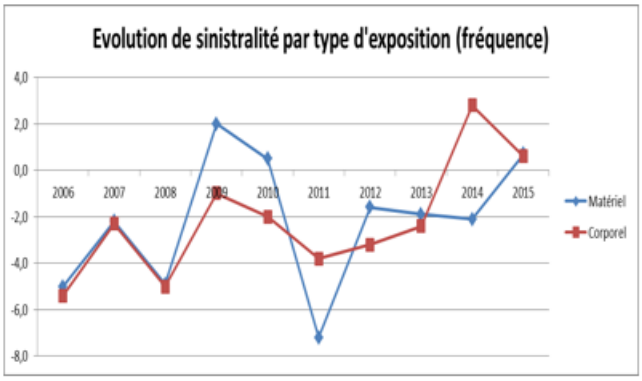

FIGURE 2.3 – Evolution de la sinistralité

Parmi ces sinistres auto, les principaux sont les collissions, le vol, la grêle, le vandalisme et l'incendie.

Présentation des données

Le portefeuille de l'étude est issu d'un assureur automobile anonymisé représentatif du marché français. Il recense sur neuf années, de 2010 à 2018, des sinistres liés aux différents contrats automobile qui se sont succédés sur cette période.

Ce portefeuille présente au total 2,7 millions de contrats pour 2,4 millions d'assurés puisque certains clients assurent plusieurs véhicules. Le tableau 2.1 montre que le nombre d'assurés est assez stable d'une année à l'autre malgré la mise en place de la loi Hamon en 2015. Le nombre d'entrée et de sortie se compensent

Année	Exposition totale	Nombre d'assurés
2010	209 326	283 950
2011	218 210	300 507
2012	222 923	309 681
2013	209 370	283 972
2014	217 908	300 180
2015	209 338	283 820
2016	218 553	300 705
2017	223 445	310 358
2018	223 837	310 438

TABLE 2.1 – Quelques caractéristiques par année

Le portefeuille de l'étude n'est pas un portefeuille spécifique, il ne cible pas une population d'assurés particuliers. En effet, il propose aux assurés dix garanties couramment souscrites notamment le bris de glace, le vol, la garantie incendie ou encore la responsabilité civile. Le graphique 2.4 les répartit selon leur fréquence et leur coût moyen :

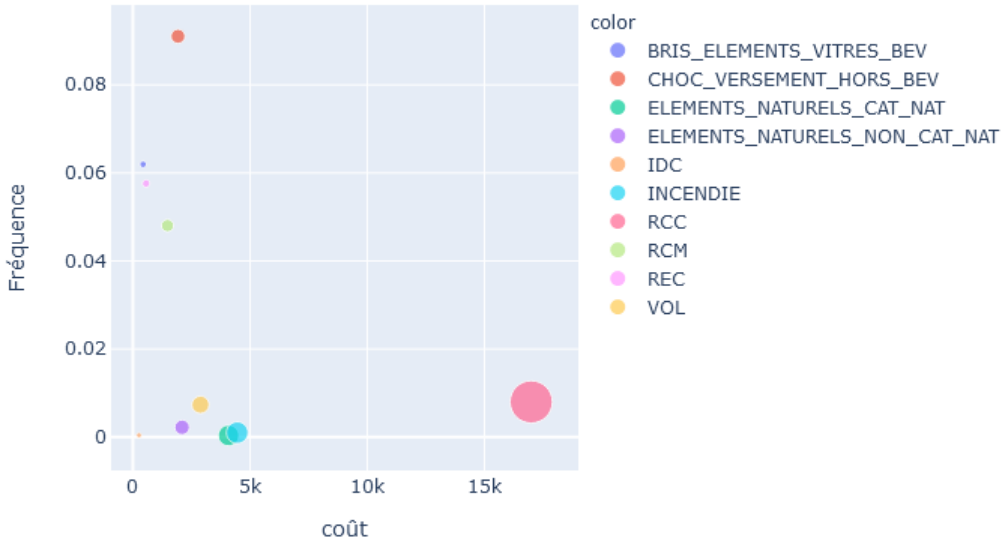

FIGURE 2.4 – Répartition des coûts et fréquences moyens par garantie

Ce schéma laisse penser qu'il faudra mettre un point d'attention sur la garantie la plus coûteuse. En effet, la plupart des garanties sont de faible fréquence de sinistre et de sévérité moyenne à faible, deux garanties sont fortement appliquées mais présentent également une faible indemnisation. En revanche, la garantie responsabilité civile corporelle s'identifie par un fort coût moyen et une faible occurence. C'est ce qui défini un sinistre

extrême. Ainsi, il est d'ores et déjà possible d'identifier les sinistres attritionnels et graves.

En comparaison aux données du marché de 2015, la garantie bris de glace représente un tiers des sinistres du marché de l'assurance auto comme l'indique les figures 2.5 et 2.6. Elle est prépondérante par rapport aux autres garanties classiques mais reste inférieure aux autres garanties non mentionnées. Dans le portefeuille étudié, la proportion n'est pas identique mais ces mêmes conclusions ressortent.

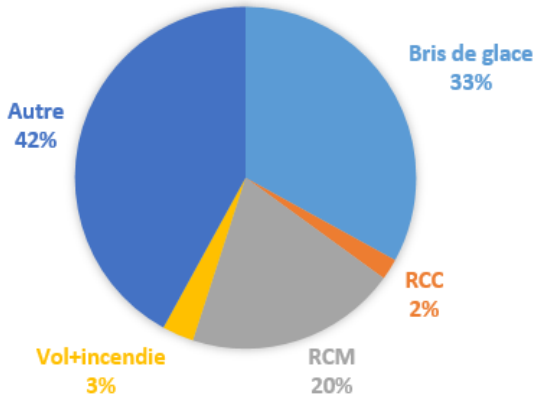

FIGURE 2.5 – Répartition des fréquences par garantie du marché (source : FFA)

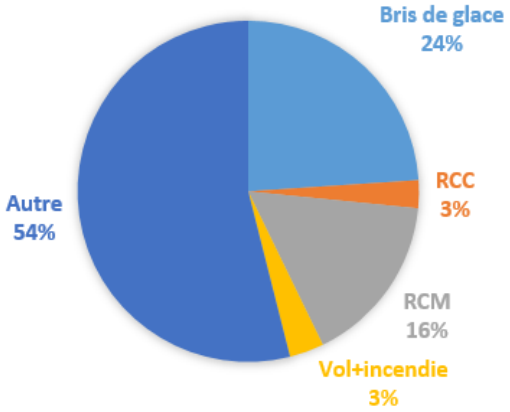

FIGURE 2.6 – Répartition des fréquences par garantie du portefeuille étudié

En matière de répartition des coûts de sinistres, comme attendu, la garantie responsabilité civile (corporelle (RCC) et matérielle (RCM)) représente, sur le marché et pour la base de donnée du mémoire, plus de la moitié de la charge de sinistre.

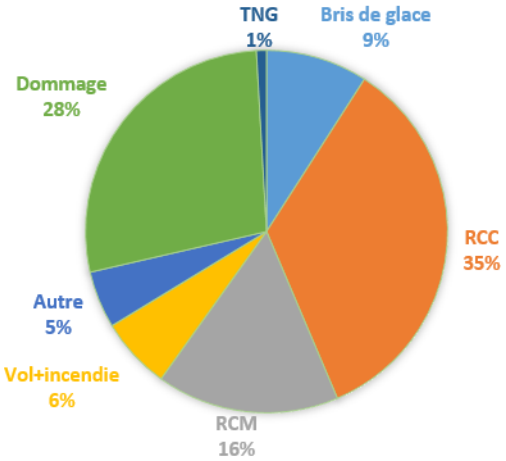

FIGURE 2.7 – Répartition des sinistres auto du marché (source : FFA)

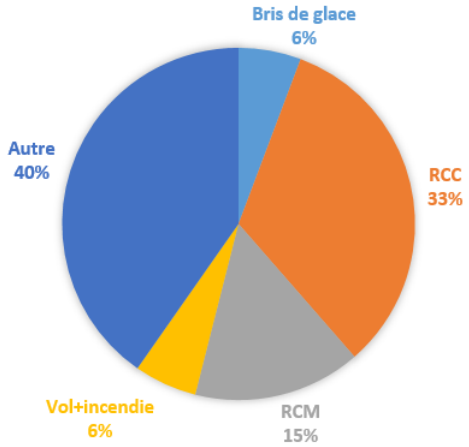

FIGURE 2.8 – Répartition des sinistres auto du portefeuille étudié

Pour les garanties présentes dans le portefeuille, la répartition est quasi-semblable entre les observations réelles et celles du portefeuille étudié. La proportion de RCC est identique ainsi que celle des garanties incendie et vol. Il y a un écart de 1 point pour les sinistres

RCM et 3 points pour le bris de glace.

De façon plus détaillée, la répartition de la charge de sinistres et des primes acquises est présentée sur le graphique 2.9 par année d'exercice :

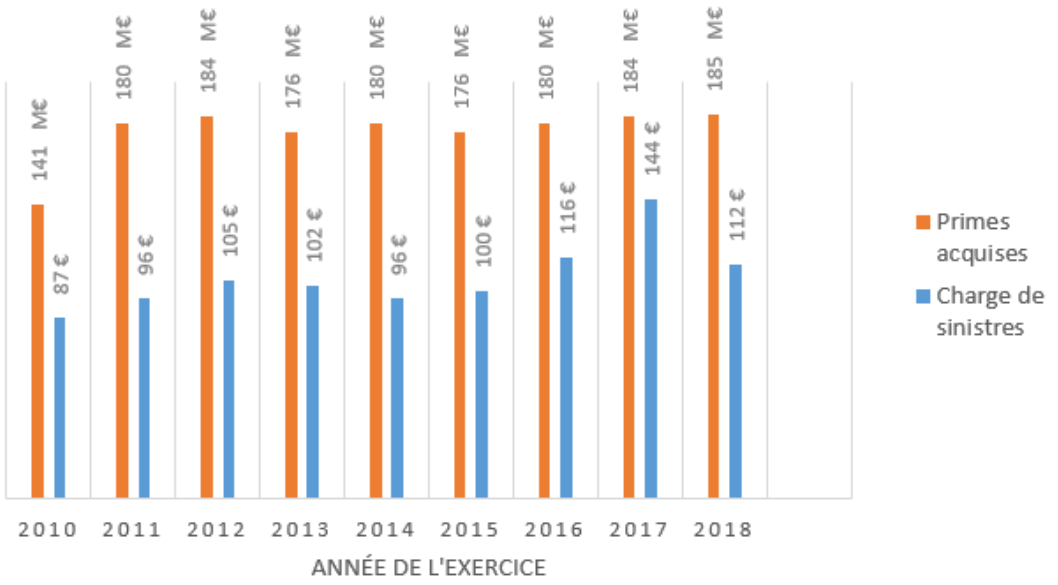

FIGURE 2.9 – Evolution de la charge de sinistres (en €) et des primes acquises (en M€) par année

La valeur des primes est relativement représentative de la situation de la compagnie d'assurance. Il s'agit d'un petit assureur qui est encore à ce jour en développement. Depuis 2011 son activité s'est stabilisée et les primes des années suivantes semblent constantes.

En observant la tendance générale de la sinistralité, il apparaît que les charges de sinistres des années 2010 et 2014 sont inférieures aux autres. Elles sont ensuite suivies d'une tendance à la hausse sur plusieurs années consécutives. De plus, la charge totale de 2017 se démarque par sa forte sinistralité. Cette dernière peut s'expliquer par l'augmentation du coût moyen des sinistres RCC :

Année	RCC	RCM	Dommage matériel
2010 – 2015	13 119,79€	1 515,32€	16 882,11€
2016 - 2018	21 814,26€	1 473,72€	16 738,47€

TABLE 2.2 – Evolution du coût moyen par année et par type de garantie

Ainsi, la garantie responsabilité civile étant obligatoire, chaque assuré qui souscrit un contrat d'assurance automobile sera couvert contre ce risque. De plus, elle présente un

coût moyen très élevé et semble augmenter au fil des années.

C'est pourquoi, dans la suite de ce mémoire, une étude plus approfondie sur cette garantie sera menée. En effet, la source potentielle de risque semble limitée sur les autres garanties tandis que celle-ci est instable. Dans la suite, les couvertures de réassurance des traités s'évaluant sinistre par sinistre seront appliquées uniquement sur la queue de distribution du portefeuille, c'est-à-dire, les sinistres correspondant à cette garantie.

Focus sur la garantie responsabilité civile

En RC Automobile, le rôle de l'assurance consiste à se substituer au responsable pour indemniser la victime. L'indemnisation des dommages liés à cette garantie est basée sur le principe d'une réparation intégrale du dommage. La victime ne doit pas minorer son préjudice ni s'enrichir de la réparation. C'est la seule garantie pour laquelle l'engagement de l'assureur est illimité.

Indemnimsation des sinistres RC

Pour l'indemnisation des dommages corporels automobile, il existe depuis 2005 un référentiel appelé la nomenclature Dintilhac. Elle est communément utilisée par le marché. En effet, elle est fortement recommandée par tous les acteurs car elle permet d'améliorer l'équité, la transparence et la gestion des indemnisations. En voici les principales dispositions :

- Adoption du principe de la responsabilité objective : toutes les victimes d'accidents de la circulation, à l'exception du conducteur fautif, ont droit à une indemnisation.
- La loi définit l'indemnité en fonction de la catégorie des victimes :
  - En cas de blessures, sont pris en charge :
    - les préjudices patrimoniaux : les pertes de gains professionnels actuels et futurs, les dépenses de santé actuelles et futures, les frais engagés pour l'assistance d'une tierce personne pour l'adaptation du logement et du véhicule.
    - les préjudices extra-patrimoniaux : le déficit fonctionnel permanent, les souffrances endurées, le préjudice esthétique permanent.
  - En cas de décès l'indemnité comprend : les pertes de revenus des proches ainsi que le préjudice d'affection.
- Fixation des règles d'évaluation des préjudices : la barémisation.

D'après le livre blanc de la Caisse Centrale de Réassurance (CCR) [CCR-Re, 2019], dont les données sont comparées à celles de l'ONISR [1] du 27 septembre 2018, trois postes de préjudices représentent 66% du coût d'un sinistre corporel : l'assistance tierce personne,

1. Observatoire National Interministériel de la Sécurité Routière

les pertes de gains professionnels futurs et les dépenses de santé futures. Le graphique 2.10 montre plus en détail cette répartition :

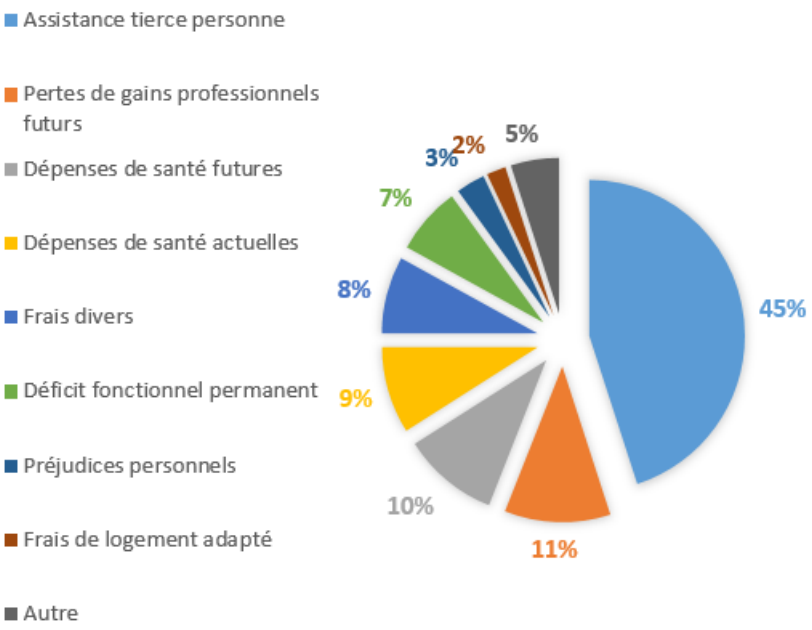

FIGURE 2.10 – Répartition du coût d'un sinistre RC par poste de préjudice

En ce qui concerne la barémisation, elle est instaurée dans le cadre d'une convention signée entre les sociétés d'assurances appelée convention d'Indemnisation et de Recours Corporel Automobile (IRCA). Cette convention n'est pas imposée par la réglementation, c'est un accord inter-compagnies. Elle permet d'indemniser rapidement les victimes sur la base d'une grille commune calibrée sur un nombre important de sinistres. Le barème officiel IRCA fixe les seuils planchers et plafonds d'indemnisation en fonction du taux de séquelles nommé AIPP [1] tel que :

- Si AIPP = 0% : utilisation d'un forfait de base de 1480€ (barème 2020)[SCOR, 2017]
- Si 0% < AIPP < 5% : application du barème officiel IRCA en tenant compte
  - •des souffrances endurées
  - •du préjudice esthétique permanent
  - •du déficit fonctionnel permanent
- Si AIPP > 5% : évaluation au coût réel selon les indemnités déjà réglées ou à régler

Les niveaux de franchises du marché se situent généralement sur une échelle de 0 à 15% d'AIPP pour les garanties du conducteur.

Afin de positionner cet indice, un sinistre est considéré comme "grave" lorsque l'AIPP correspondant est supérieur à 20%. Parmi ces sinistres graves, la CCR indique que la

1. Atteinte à l'Intégrité Physique et Psychique

moyenne des sinistres supérieurs à un million d'euros est de 4,6 M€. De plus, un quart d'entre eux représentent 50% de la charge totale.

De façon générale, les montants d'indemnisation varient en fonction du mode de gestion des contrats, indemnitaire ou forfaitaire. Ils s'élèvent, en cas d'incapacité, de 150 000 à 800 000 € en garantie de base et jusqu'à une fourchette de 1 000 000 à 1 300 000 € en option. La moyenne des offres en option se situe autour de 500 000 ou 600 000 €. Certaines sociétés proposent un montant en deçà de ces moyennes en cas de décès, de l'ordre de 80 000€.

Les modes de règlement

La réparation d'un préjudice corporel peut être effectuée selon deux modes de règlement : un versement immédiat sous forme de capital ou des versements à échéances fixes sous forme de rente.

L'indemnisation sous forme de capital présente l'avantage de rentrer dans la succession lors du décès de la victime. Par ailleurs, le capital n'est pas assujetti à l'impôt. Pour l'assureur, cette forme d'indemnisation a l'avantage d'une gestion rapide des sinistres. En revanche, ce capital doit permettre à la victime de faire face aux dépenses afférentes à sa situation sans pour autant qu'il y ait ni perte ni enrichissement. Le capital et ses produits doivent en théorie avoir été consommés au terme de la période d'indemnisation. En ce sens, le calcul du montant du capital doit tenir compte de la durée de vie de la victime, le taux d'intérêt de ses placements, l'évolution de ses besoins, l'évolution du coût de la vie ou de l'inflation ... Il en résulte que l'indemnisation sous forme de capital des postes de préjudices patrimoniaux futurs ne répond que partiellement au principe de réparation intégrale tel que définit par la jurisprudence.

L'indemnisation sous forme de rente présente l'avantage de garantir à la victime un revenu régulier permettant de faire face à des frais étalés dans le temps. La rente servie est protégée contre l'inflation par les revalorisations de rentes indexées sur le taux d'inflation de la Sécurité Sociale. Les principaux postes de préjudices qui rentrent dans l'évaluation du montant des rentes sont :

— Assistance par tierce personne (ATP)

— Pertes de gains professionnels futures (PGPF)

— Dépenses de santé futures (DSF)

En effet, ce sont les postes les plus significatifs en matière de montant dans l'évaluation des préjudices corporels de la victime comme vu précédemment. L'aggravation de l'état de santé de la victime ou l'aggravation économique liée à des évolutions financières extérieures pourrait conduire à une révision à la hausse du montant de la rente. Inversement pour respecter le principe de réparation du préjudice sans enrichissement de l'assuré,

l'amélioration de l'état de santé de la victime devrait conduire à une adaptation à la baisse du montant de la rente.

Description de la LoB étudiée

Comme expliqué précédemment, la tendance de la sinistralité est à la hausse pour les sinistres corporels à volume d'affaire équivalent (2.2). La fréquence des sinistres n'est pas non plus à l'origine de cette tendance. En effet, la variation moyenne est de 14% avec un nombre de sinistres maximum de 1940 en 2018.

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Nombre de sinistres RC	1 551	1 741	1 920	1 497	1 799	1 497	1 714	1 937	1 940

TABLE 2.3 – Nombre de sinistres RC par année

Sur les neufs années d'historique, la garantie responsabilité civile corporelle présente une charge totale de 288 528 800€ dont 95% des sinistres sont inférieurs à 21 000€. Il y a donc un nombre restreint de très gros sinistres (1% au delà de 120 000€). Ces observations sont tirées du tableau 2.4 :

Nombre	16 957
Moyenne	17 015€
Ecart type	307 032€
Minimum	29€
Médiane	1 520€
75%	4 874€
95%	21 212€
99%	117 486€
Maximum	17 020 340€

TABLE 2.4 – Description des coûts de sinistres de la garantie RC

Il s'agit à présent de déterminer le seuil de cession des sinistres, c'est-à-dire, de déterminer le montant à partir duquel la couverture de réassurance se déclenchera.

Détermination du seuil des sinistres graves

Plusieurs étapes sont nécessaires afin de déterminer le montant à partir duquel un sinistre est considéré comme extrême. Elle sont détaillées dans l'Annexe A . Seules les idées principales vont être explicitées dans cette partie.

1. **Le domaine d'attraction**

Le domaine d'attraction de la queue de distribution permet d'identifier l'épaisseur de queue. L'interprétation du QQ-plot de la loi exponentielle permet d'aiguiller sur l'appartenance à un domaine particulier.

FIGURE 2.11 – QQ plot d'une loi exponentielle et des données fictives

Il apparaît que la courbe est concave. Cela signifie que la queue de distribution de la sinitralité étudiée est plus épaisse que celle d'une loi exponentielle. Cette concavité se traduit par l'appartenance au domaine de Fréchet ($\xi > 0$). La théorie des valeurs extrêmes s'applique.

2. **Mean Excess Plot**

La méthode « excès moyen » est un outil utilisé pour faciliter le choix du seuil. Elle consiste à déterminer le montant moyen de dépassement de seuil. Il s'agit de tracer la courbe (u, e(u)) d'équation $e(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n} max(x_i - u)}{\sum_{i=1}^{n} 1_{x_i < u}}$, avec u le seuil. Lorsque la courbe devient approximativement linéaire, le détachement sera interprété comme un seuil.

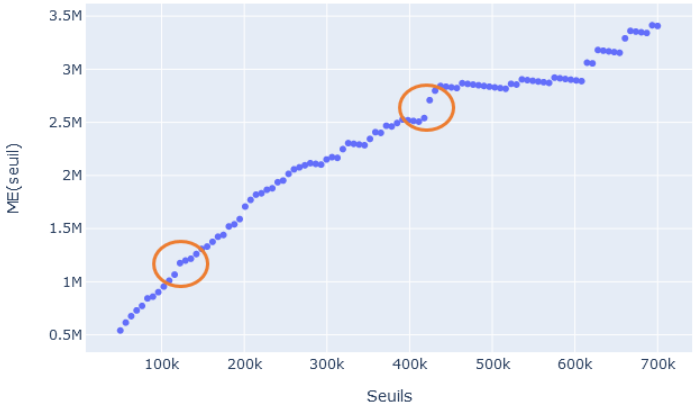

FIGURE 2.12 – Mean Excess Plot

La courbe met en lumière deux détachements, le premier autour de 100 000 et le second de 420 000.

L'utilisation de différents estimateurs vont permettre d'estimer des intervalles de seuils.

3. **Estimateurs de queue**

Les estimateurs de Hill, Pickands et de Dekkers-Einmalh-de Hann (DEdH) ont été étudiés afin de déterminer de façon plus précise les seuils de cession. De cette étude, différents intervalles ressortent :

Estimateurs	Intermédiaire	Grave
	Intervalle de seuil	
Pickands	[100 000; 140 000]	[320 000; 437 000]
Hill	[90 000; 120 000]	[207 000; 435 000]
DEdH	[100 000; 110 000]	[207 000; 321 000]

TABLE 2.5 – Intervalles de seuil

La propriété de stabilité des paramètres d'une loi de Pareto généralisée permet de fixer les seuils des sinistres extrêmes à 120 000€ et 430 000€. Cependant, la théorie seule ne permet pas de fixer un seuil mais donne uniquement un ordre de grandeur de ce montant. Ainsi, afin de rester au plus proche des données du marché, le second seuil considéré sera autour de 500 000€. Ces montants de cessions ne sont pour autant pas définitivement fixés. En effet, les lois de statistiques seront déterminées selon différents montants de cessions. Finalement, les lois et seuils retenus seront alors ceux qui représentent aux mieux les données historiques.

Modélisation de la sinistralité

Dans la section précédente, deux seuils de cession ont été définis, un premier autour de 120 000 € et un second autour de 500 000 €. Ainsi, la modélisation de la sinistralité sera divisée en deux parties : les sinistres intermédiaires et graves seront traités séparément. La réassurance non proportionnelle ne s'appliquant qu'à la queue de distribution, la loi de la sinistralité sera tronquée d'une part à droite et à gauche pour les sinistres intermédiaires et à droite pour les sinistres graves. Le détail de la modélisation des sinistres attritionnels ne sera pas développé.

Les modélisations de la queue de distribution est effectuée selon un modèle collectif :

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i, \text{ où}$$

— S représente la charge de sinistres

— N représente la variable aléatoire du nombre de sinistres, N $\in \mathbb{N}$

— X_i représente la variable aléatoire du coût individuel des sinistres, $X_i \in \mathbb{R}$

Pour utiliser ce modèle, deux hypothèses fortes doivent être faites :

— L'indépendance de la fréquence et du coût individuel des sinistres ($N \coprod X_i$),

— L'indépendance et la stationnarité entre les montants de sinistres individuels

La première hypothèse se justifie par l'homogénéité du portefeuille. Les sinistres sont également supposés indépendants et l'horizon d'observation à un an permet de justifier la stationnarité.

1. **Loi de la sévérité**

Les lois qui peuvent représenter les sinistres extrêmes doivent être des lois à queue épaisse. Les lois de Cauchy, Student, Pareto, Pareto généralisée et Log-gamma ont donc été retenues pour l'étude.

Afin de sélectionner celle qui se rapproche le plus des données, le test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov a été appliqué sur chaque loi. L'hypothèse nulle est l'ajustement des observations à la loi testée. Les statistiques de test et les p-values ont été calculées pour chaque loi et pour plusieurs seuils dans chacun des cas. En effet, comme expliqué précédemment, les seuils trouvés en section 2.1.3 ne sont pas fixes, ils expriment un ordre de grandeur des seuils de cession. Plusieurs seuils ont donc été considérés pour le cas des intermédiaires et des graves afin de déterminer la loi la plus adaptée aux données historiques. Ainsi, les seuils étudiés pour les graves sont compris entre 500 000 et 1,1 million avec un pas de 100 000 et pour les intermédiaires, compris entre 120 000 et 140 000 avec un pas de 5000.

L'étude porte dans un premier temps sur les sinistres graves. Il ressort de l'analyse du test de Kolmogorov-Smirnov que la loi de Pareto pour un seuil de cession de 900 000 présente la meilleure p-value comme l'illustre le tableau 2.6

Loi	Grave	
	P-value	Statistique
Cauchy	0,00091	0,303
Student	8,60 E -05	0,346
Pareto	0,191	0,167
Pareto généralisée	0,036	0,219
Log-gamma	0,001	0,298

TABLE 2.6 – p-value et statistique pour différentes lois

Le choix du seuil a également été influencé par le montant du paramètre de loudeur de queue pour une loi de Pareto qui doit être supérieur à 1. En effet, dans le cas contraire, l'espérance est infinie ce qui se traduit par le fait que le risque n'est pas assurable.
L'étude détaillée comprenant tous les seuils appliqués est présente en Annexe B.

Cette même étude a été réalisée dans un second temps sur les sinistres intermédiaires. Il s'avère dans ce cas-ci qu'une loi de pareto généralisée offre une meilleure adéquation aux données du portefeuille étudié pour des sinistres compris entre 120 000 et 900 000 comme le montre le tableau suivant :

Loi	Intermédiaire	
	P-value	Statistique
Cauchy	1,73 E -05	0,203
Student	4,29 E -05	0,205
Pareto	0,102	0,107
Pareto généralisée	0,727	0,217
Log-gamma	4,53 E -05	0,06

TABLE 2.7 – p-value et statistique pour différentes lois

La totalité des résultats sont présentés en Annexe B.

Pour un seuil de 2%, l'hypothèse nulle n'est pas rejetée pour une loi de Pareto et Pareto généralisée en ce qui concerne les sinistres graves et intermédiaires. La loi retenue est celle

qui présente la meilleure p-value. Ainsi, la loi de Pareto généralisée est sélectionnée pour modéliser les observations des intermédiaires et celle de Pareto pour les sinistres graves. Les paramètres ont été estimés par la log-vraissemblance et calibrés avec les données de la garantie RCC sur toutes les années d'historique.

	Loi retenue
Sinistres intermédiaires	*Par genéralisée*($\xi = 0{,}5434$) avec $\sigma(u) = \mathrm{u} \mapsto 1$
Sinistres graves	$Par(\alpha = 1{,}0171\,;\, x_0 = 900\ 000)$

TABLE 2.8 – Statistiques descriptives des données après application de traités de réassurance

Le détail du calcul des paramètres de loi et les étapes d'obtention d'une loi tronquée sont explicités dans l'Annexe C.

Ainsi, les sinistres intermédiaires sont définis comme étant compris entre 120 000 et 900 000 et les sinistres graves supérieurs à 900 000.

2. **Loi de la fréquence des sinistres**

D'après la théorie, trois lois de probabilité peuvent être utilisées pour modéliser des fréquences : la loi de Poisson, Binomiale ou Binomiale négative. Afin de valider le choix d'une telle loi pour les sinistres intermédiaires et graves, un test du khi deux a été réalisé pour les lois de Poisson et Binomiale négative. En effet, la Binomiale a été écartée de l'étude car la fréquence moyenne des sinistres est inférieure ou égale à sa variance, pour toutes les années d'historique. L'hypothèse nulle de ce test est l'ajustement des données observées à la loi testée. Le niveau de confiance choisi est de 5% pour une statistique de test du khi deux de 67,50. La table 3.18 du khi deux utilisée est présentée en Annexe D.

Les statistiques de test ont été reportées dans le tableau 3.16 :

	Intermédiaire		Grave	
Loi	Statistique	Statut	Statistique	Statut
Poisson	46,98	Acceptée	43,91	Acceptée
Binomiale négative	590,78	Refusée	266,66	Refusée

TABLE 2.9 – Test du khi pour les lois de fréquence

Il apparaît nettement que la loi de poisson représente au mieux les observations de l'étude, c'est donc celle-ci qui sera retenue dans la suite du mémoire. Les paramètres des lois ont

été calibrés sur toutes les années d'historique dans leur catégorie respective (sinistres compris entre 120 000 et 900 000€ et ceux supérieurs à 900 000€). Ils ont été estimés à $\lambda_{intermdiaire} = 4,66E-05$ et $\lambda_{grave} = 1,49E-05$.

Impact de la réassurance sur la RC auto

Une fois la fréquence et la sévérité des sinistres RC estimées, des simulations peuvent être lancées et un premier aperçu de l'impact de la réassurance a pu être modélisé. Les données sont issues d'un scénario central réalisé pour vingt cinq scénarii. Afin de visualiser l'impact de la réassurance sur ces observations, les traités en quote-part et en excédent de sinistre par risque ont été appliqués à cette sinistralité. La priorité et la portée de ce dernier sont exprimées en millions. Le traité en excédent de perte sera étudié plus en détail par la suite. Les résultats sont présentés dans le tableau 2.10 :

	Scénario central	**XS(3 ; 20)**	**QP(30%)**
Minimum	1,70€	1,70€	1,18€
Moyenne	2 595 €	2 139 €	1 816€
Ecart type	86 827 €	48 783 €	60 779 €
Quantile à 50%	767 €	767€	537 €
Quantile à 75%	1 462 €	1 462€	1 023 €
Quantile à 99,5%	18 019€	18 019€	12 613€
Maximum	12 793 152 €	7 562 913 €	8 955 206 €

TABLE 2.10 – Statistiques descriptives des données après application de traités de réassurance

Il ressort de ce tableau que les deux traités appliqués ont une influence sur la queue de distribution, ce qui est souhaitable puisque l'assureur veut transférer ses risques au réassureur. Cela aura un impact sur la solvabilité de l'assureur par le biais d'une diminution du SCR de souscription.

Le traité en excédent de sinistre impactera uniquement la queue de distribution puisque 99,5% des sinistres sont inchangés. Le réassureur prend à sa charge les sinistres de montant supérieur à trois millions d'euros, la priorité. Cela représente sept sinistres pour ce scénario central. Le sinistre de montant maximum a été réduit de cinq millions. Ainsi, un gros sinistre peut suffire à rentabiliser le traité. Il est d'ores et déjà possible de penser que la rentabilité de l'assureur sera peu impactée par ce traité. En effet, bien que la moyenne des sinistres soit réduite de 17%, de gros montants de sinistres vont être cédés, de l'ordre de 22 042 424 € en moyenne pour sept sinistres. La prime de réassurance sera donc calculée en conséquence.

Les montants de la colonne du traité en quote-part sont égaux à 70% des données du scénario central. Comme attendu, ce traité va fortement impacter la queue de distribution, et donc réduire le montant de besoin en capital économique. Cet impact se reflète par la baisse des quantiles de pointe, notamment la Value at Risk à 0,5%. La moyenne des sinistres est également diminuée (de 30%) ce qui implique que la rentabilité sera réduite. En effet, le même pourcentage de prime et de sinistres sera cédé.

Il est à rappeler que dans le cas de cet assureur, la réassurance est employée avant tout pour réduire le risque et non pour améliorer la rentabilité.

2.2 Appétence aux risques

Le Pilier II de la directive Solvabilité II a pour objectif de piloter les organismes assureurs en matière d'exigences qualitatives pour pallier aux limites de l'approche quantitative du Pilier I. L'ORSA est l'élément central de ce dispositif. A partir de l'évaluation interne des risques propres et de la solvabilité et en tenant compte de la stratégie et du profil de risque de l'assureur, l'ORSA aide au pilotage stratégique. Dans l'ORSA, la stratégie globale de gestion des risques prend la forme d'une appétence aux risques. Elle représente le niveau de risque que l'entreprise est prête à assumer pour réaliser son plan stratégique. Des indicateurs spécifiques permettent de retranscrire ses principaux objectifs. Le ratio de solvabilité constitue l'indicateur de base d'appétence aux risques car il prend en compte deux mesures de la solvabilité : le niveau de Fonds Propres disponibles et l'exigence en capital.

Ratio de solvabilité

Le ratio de solvabilité correspond à la capacité d'un assureur à honorer ses engagements en cas de faillite à un niveau de confiance de 99,5%, soit une faillite tous les deux cents ans. En effet, il se présente sous la forme du ratio des Fonds Propres de la compagnie d'assurance et de son capital économique : $\frac{FP}{SCR}$.

Le minimum requis en matière de ratio de solvabilité est de 100%. Ce ratio est très suivi par les régulateurs depuis l'entrée en vigueur de Solvabilité II.

Dans le cadre de cette étude, quatre indicateurs ont été retenus : le Ratio de solvabilité, le RORAC, le RoE et le Ratio combiné.

Return On Risk Adjusted Capital (RORAC)

Le RORAC ou parfois nommé RoRC pour Return on Risk (Adjusted) Capital désigne la rentabilité rapportée à l'exigence en capital. Il exprime la productivité des risques aux-

quels l'assureur est exposé et n'intègre pas la dimension « financement » de l'entreprise. Il se mesure à l'aide de la formule suivante : $RORAC = \frac{Resultat_{net}}{SCR}$. Il constitue un indicateur essentiel dans l'analyse des performances et la gestion du risque. Il est de l'ordre de 15% dans le secteur de l'assurance.

Retour sur investissement

Le ratio Return on Equity (RoE), mesure, en pourcentage, le rapport entre le résultat net et les capitaux propres investis par les actionnaires ou les associés d'une compagnie, $RoE = \frac{Resultat_{net}}{Capitauxpropres}$. Il permet de mesurer la capacité d'une entreprise à générer des profits à partir de ses seuls capitaux propres sans prendre en compte les autres sources de financement.
Le niveau de rentabilité attendu dépend du secteur d'activité. En assurance, il est de l'ordre de 10%.

Ratio combiné

Le ratio combiné est l'indicateur le plus utilisé en assurance IARD. En effet, c'est le rapport entre ce que l'assureur décaisse (les sinistres réglés aux assurés, les commissions versées aux réseaux de distribution, ses frais généraux) et ce qu'il encaisse (les primes acquises versées par les assurés), $COR = \frac{S+F}{P}$.

Pour l'analyse, le CoR est souvent ventilé en Loss Ratio (LR) et Expense Ratio ($ER = \frac{F}{P}$). Si le produit est parfaitement tarifé (prime pure = sinistre et chargements = coûts), il reste en marge le chargement de sécurité. Il contribue à mesurer la suffisance du tarif pour couvrir les sinistres et les coûts et à déterminer la marge technique par type de produit. Le seuil de rentabilité est donc 100%, si le CoR est inférieur, la compagnie réalise un profit technique, sinon, elle fait une perte technique.

Les objectifs stratégiques d'une compagnie d'assurance peuvent se définir en matière de rentabilité, de solvabilité et de croissance comme l'illustre la figure suivante :

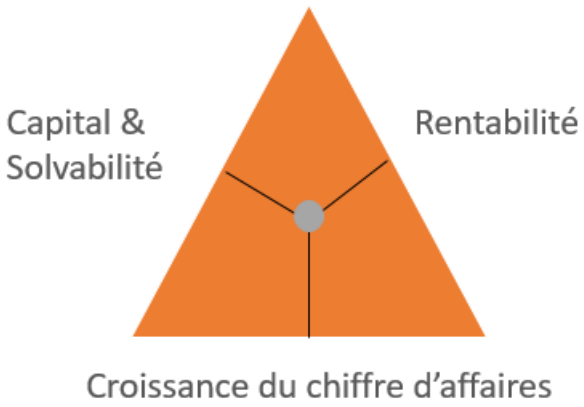

FIGURE 2.13 – Triangle d'optimisation

L'attention de l'assureur se porte avant tout sur sa solvabilité. Cependant, il est difficile de dissocier les notions de solvabilité et de rentabilité. En effet, l'enjeu pour la compagnie est de trouver le bon arbitrage entre ces deux dimensions. Cet exercice est d'autant plus difficile car la compagnie doit satisfaire à la fois les exigences prudentielles de solvabilité requises par les autorités de contrôles et celles de rentabilité demandées actionnaires.

Une troisième caractéristique entre en jeu dans le triangle d'optimisation, il s'agit de la croissance. Celle-ci ne vient qu'en dernière position, une fois que les deux exigences précédentes sont respectées. Elle se présente sous la forme de proposition de valeur, très attendue par les actionnaires notamment.

Ainsi, afin de calculer les différents indicateurs d'appétence aux risques, il est indispensable de connaître le montant de SCR et le résultat net de la compagnie.

2.3 Calcul du résultat net

Construction du compte de résultat

Afin de déterminer le résultat net de l'assureur, un compte de résultat en norme française est établi selon la base du schéma 2.14 :

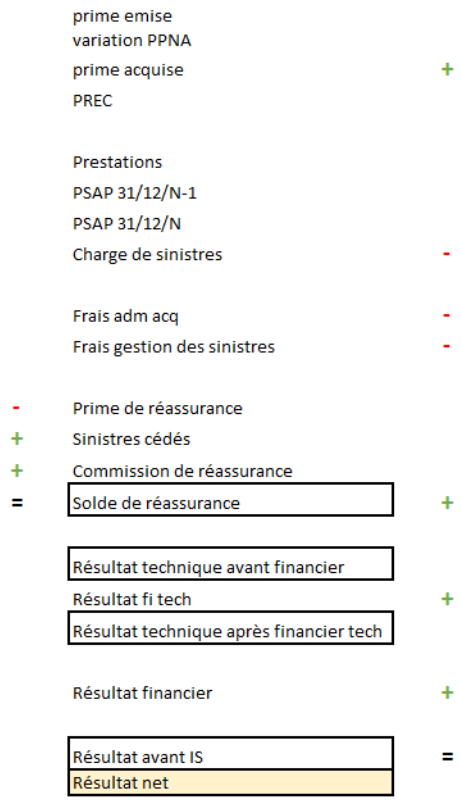

FIGURE 2.14 – Compte de résultat

Les primes émises sont issues du données étudiées et la charge de sinistres est obtenue d'une part du portefeuille de l'étude et d'autre part de la modélisation de la sinistralité.

Le provisionnement intervient ensuite lors de la comptabilisation du montant des sinistres ou des primes à venir. En effet, le contexte d'inversion du cycle de production oblige les assureurs à provisionner afin de s'assurer de pouvoir honorer leurs engagements envers les assurés durant la période de couverture. De plus, il peut y avoir un délai entre la date de déclaration d'un sinistre et le règlement de ce dernier. Cela est notamment dû aux besoins d'expertise ou encore à un délai d'obtention de pièces justificatives surtout sur les branches longues (RC corporels, RC générale, ...). Ainsi, les sinistres connus sont sujets à des fluctuations de coût dans le temps jusqu'à l'ultime. Les sinistres non encore déclarés sont également à prendre en compte.

En assurance IARD, il existe deux types de provisions pour primes, les provisions pour primes non acquises (PPNA) et les provisions pour risques en cours (PREC). Cette dernière vient s'ajouter aux PPNA.

Provisions pour primes non acquises

De part l'inversion du cycle, les assureurs perçoivent les primes des assurés avant que le sinistre n'ait eu lieu. Or la période de souscription n'est pas toujours en phase avec

l'année comptable. C'est pourquoi, lors de la clôture d'un exercice, une partie des primes ont été acquises, tandis qu'une autre servira à couvrir les sinistres sur la période de couverture restante, c'est la PPNA. Deux types de primes se distinguent alors : les primes émises (primes payées par l'assuré au moment de souscription du contrat) et les primes acquises (montant de la prime émise en pro rata de la période de couverture écoulée dans l'année d'exercice [1]).

Il est alors nécessaire de provisionner le montant de prime restant dans les comptes. Il se schématise de la façon suivante pour une prime de 100 € émise le 1^{er} octobre :

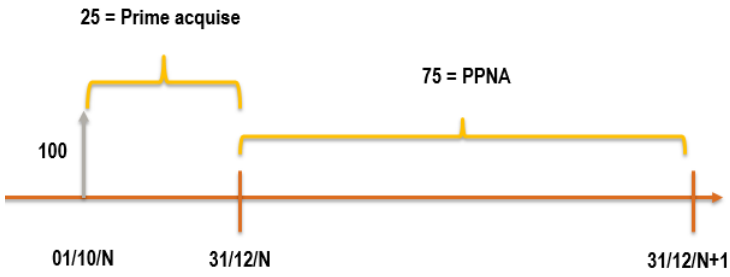

FIGURE 2.15 – Illustration de la provision pour primes non acquises

Compte tenu du fractionnement du portefeuille fictif, 19,5% des primes émises sont reportées à l'exercice suivant.

Provisions pour risques en cours

La Provision pour Risque En Cours (PREC) a pour objectif de compléter la provision pour primes non acquises lorsque cette dernière s'avère insuffisante, c'est-à-dire en cas de sous-tarification. Elle se calcule à partir du ratio combiné observé sur les deux derniers exercices et de la provision pour primes non acquises :
$Ratio = \frac{Charge_N + Frais_{gestion,N} + Frais_{acq,N} + Charge_{N-1} + Frais_{gestion,N-1} + Frais_{acq,N-1}}{Prime_{acquise,N} + Prime_{acquise,N-1}}$.

Finalement la PREC s'obtient par le calcul suivant : $PREC = max(Ratio - 1; 0)PPNA$. Cette provision est constituée dès lors que le ratio combiné des deux dernières années est supérieur à 1. Compte tenu des données étudiées elle ne sera pas comptabilisée.

Provisions pour sinistres à payer

Comme expliqué précédemment, à la clôture d'un exercice, l'assureur a payé une partie des sinistres mais le règlement complet d'un dommage peut s'étendre sur plusieurs années. La provision pour sinistres à payer (PSAP) est la réserve correspondant aux paiements futurs pour des sinistres déjà survenus. Elle se décompose en deux réserves :

1. Un exercice comptable a pour date d'ouverture le 01/01/N et se clôture au 31/12/N

•Les réserves «dossier / dossier» (d/d). Elles correspondent à l'estimation des frais engagés d'un sinistre survenu (coût d'expertise, avocat, ...). Elles sont estimées au cas par cas et peuvent être ré-estimées en cas d'informations supplémentaires sur le sinistre.

•Les IBNR (Incurred But Not Reported) : IBNYR + IBNER

où IBNYR (Incurred But Not Yet Reported) représente les «tardifs» du fait des délais de déclaration. En effet, certains sinistres peuvent être survenus avant la date d'inventaire mais non encore déclarés. Les IBNER (Incurred But Not Enough Reported) correspondent aux sinistres non correctement provisionnés. Cela peut être dû à un changement dans l'évaluation du sinistre. Elle constitue un complément aux réserves d/d lorsque celles-ci s'avèrent insuffisantes. Les IBNER peuvent être négatives en cas de sur-provisionnement des réserves d/d.

La méthode de provisionnement des PSAP retenue dans ce mémoire est la méthode de Chain Ladder. En effet, c'est une méthode déterministe fréquemment utilisée car elle permet de prendre en compte la sinistralité passée et donc la particularité du portefeuille. Le détail de la méthode est présenté en Annexe E.

Application à la garantie responsabilité civile corporelle Auto :

	Années de développement								
Règlement	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7	N+8
2010	2 435 150 €	9 793 949 €	14 350 387 €	16 499 094 €	17 527 674 €	18 257 747 €	18 624 591 €	18 768 729 €	18 971 131 €
2011	2 584 053 €	10 392 825 €	15 227 878 €	17 507 974 €	18 599 449 €	19 374 164 €	19 763 439 €	19 916 391 €	20 131 169 €
2012	3 138 075 €	12 621 050 €	18 492 741 €	21 261 690 €	22 587 177 €	23 527 992 €	24 000 728 €	24 186 473 €	24 447 300 €
2013	4 369 815 €	17 574 997 €	25 751 411 €	29 607 213 €	31 452 973 €	32 763 071 €	33 421 364 €	33 680 016 €	34 043 221 €
2014	2 502 715 €	10 065 692 €	14 748 554 €	16 956 879 €	18 013 998 €	18 764 327 €	19 141 350 €	19 289 487 €	19 497 505 €
2015	4 065 134 €	16 349 595 €	23 955 917 €	27 542 876 €	29 259 942 €	30 478 695 €	31 091 089 €	31 331 707 €	31 669 587 €
2016	5 129 492 €	20 630 347 €	30 228 203 €	34 754 322 €	36 920 961 €	38 458 815 €	39 231 549 €	39 535 168 €	39 961 514 €
2017	8 309 405 €	33 419 666 €	48 967 496 €	56 299 480 €	59 809 278 €	62 300 490 €	63 552 263 €	64 044 103 €	64 734 753 €
2018	4 028 502 €	16 202 264 €	23 740 043 €	27 294 679 €	28 996 272 €	30 204 042 €	30 810 917 €	31 049 367 €	31 384 203 €

TABLE 2.11 – Triangle de provisionnement

Le premier coefficient est obtenu en divisant la somme des montants en vert par la somme des montants en orange du triangle de provisionnement et ainsi de suite.
Ainsi :

j	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7
$\hat{f}_j$	4,02	1,47	1,15	1,06	1,04	1,02	1,01	1,01

TABLE 2.12 – Coefficients de passage pour la garantie RCC

En assurance automobile, les cadences de règlement sont variables selon le type de garantie. En effet, une cadence dépend de la duration des garanties. Celle-ci est liée au

processus d'évaluation des sinistres et à l'incertitude sur le montant à l'ultime. De plus, le fait d'avoir un constat à l'amiable ou en litige va impacter d'autant plus la duration. Par exemple, la garantie bris de glace aura une duration très faible puisque le montant de sinistre est évalué de façon quasi immédiate tandis que le processus d'évaluation d'un sinistre de type incendie peut s'étaler sur plusieurs années du fait de l'intervention d'un expert, du retard des déclaration de la part des assurés, ...

C'est pourquoi, les garanties présentes dans le portefeuille d'étude ont été répertoriées en trois types : responsabilité civile corporelle, responsabilité civile matérielle et dommage matériel. La théorie rappelle le lien entre les cadences de règlement des sinistres et les coefficients de passage par la formule : $cadence_j = \frac{1}{\hat{f}_j * ... * \hat{f}_{n-1}}$. Les cadences de règlement ont été calculées et sont illustrées sur le graphique 2.16 :

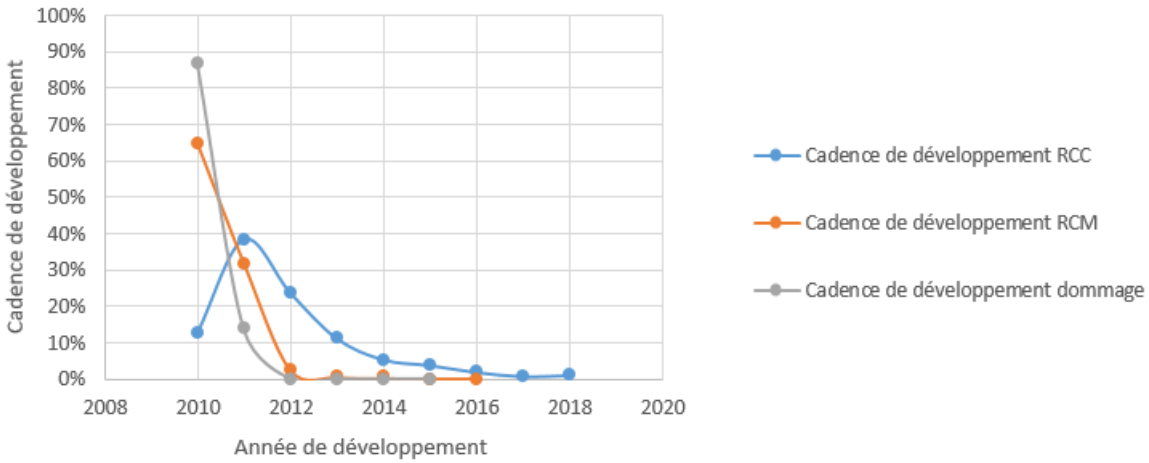

FIGURE 2.16 – Cadence de développement selon les types de garantie

Il est alors possible de constater que pour la branche Dommages matériel, 86% des sinistres sont réglés dès la première année et 99% au bout de la troisième. La branche RCM a également une liquidation courte, 95% des paiements étant effectués dès la deuxième année. En revanche, comme attendu, la branche RCC a une liquidation beaucoup plus longue : il faut attendre la cinquième année pour atteindre 95% des paiements.

Les frais

Le compte de résultat tient compte de frais liés aux primes, aux sinistres ou encore à l'investissement. Les éléments qui ont été comptabilisés dans le cadre de cette étude sont les suivants :

Frais d'acquisition et d'administration

Les frais d'acquisition et d'administration correspondent aux frais internes et externes occasionnés par la conclusion - respectivement la gestion - des contrats d'assurance. Les frais d'acquisition comprennent tant les frais directement imputables, tels que les commissions d'acquisition et les frais d'ouverture de dossiers ou d'admission des contrats d'assurance dans le portefeuille, que les frais indirectement imputables, tels que les frais de publicité ou les frais administratifs liés au traitement des demandes et à l'établissement des contrats.

Les frais d'administration tiennent compte des frais d'encaissement des primes, d'administration du portefeuille, de gestion des participations aux bénéfices et de ristournes, mais aussi des commissions de gestion et d'encaissement et les frais de contentieux liés aux primes.

Ils sont établis en pourcentage des primes acquises.

Frais de gestions des sinistres

Les frais de gestion des sinistres correspondent aux frais internes et externes occasionnés par le traitement des dossiers de sinistres (ouverture des dossiers, évaluation, règlement), les frais de contentieux et les commissions comptabilisées au titre de la gestion des sinistres.

Ils sont établis en pourcentage des prestations.

Ils contribuent tous les trois aux frais généraux de la société tels que les frais de personnel, la quote-part de loyer et les amortissements du mobilier et du matériel engagés dans le cadre de cette activité.
Ces montants viennent des données clients.

Impôt sur les sociétés

L'impôt sur les sociétés est un impôt direct proportionnel sur le bénéfice des entreprises. Le taux initial est de 33,33% d'après le site gouvernemental. Dans certains cas, l'impôt sur les sociétés peut être est majoré. Une contribution sociale intervient, de l'ordre de 3,3 % de l'IS dû pour les entreprises ayant un chiffre d'affaires d'au moins 7,63 millions d'euros et dont l'IS dépasse 763 000 €, d'une contribution exceptionnelle de 15 % pour les entreprises dont le chiffre d'affaires est supérieur à 1 milliard d'euros et d'une contribution addittionnelle de 15 % pour les entreprises dont le chiffre d'affaires est supérieur à trois milliards d'euros.

Dans le cas de l'assureur de l'étude, l'impôt sur les sociétés s'élève à 34, 43%.

Produits nets de placement

Lors de la souscription d'un contrat, l'assureur encaisse la prime d'un assuré qu'il investit. Les produits nets de placement correspondent au montant de produits financiers dégagés par l'assureur sur cet investissement entre l'encaissement de la prime et le règlement des sinistres.

Ils sont fixés à 2% de la prime encaissée dans ce mémoire.

Afin d'établir le résultat net de la compagnie d'assurance, il convient d'ajouter au résultat technique le résultat financier. Celui-ci correspond à 1% des fonds propres.

Finalement, les taux de frais appliqués dans ce mémoire son résumés dans le tableau 2.13 :

Frais d'acquisition et administration	23%
Frais de gestion des sinistres	9%
Impôts sur les sociétés	34,43%
Produits nets de placement	2%
Taux de Fonds Propres	1%

TABLE 2.13 – Tableau des différents montants intervenant dans le compte de résultat

2.4 Calcul du SCR

Le SCR intervient dans deux des quatre indicateurs de référence. Il a été brièvement présenté au chapitre 1.

Le calcul du SCR a été réalisé suivant les règles de la formule standard.
Il est obtenu en appliquant la formule suivante : $SCR = BSCR + ADj + SCR_{op}$.

SCR opérationnel et l'ajustement sont considérés nuls dans l'étude. Le BSCR correspond au SCR de base.

Il est obtenu en agrégeant chaque risque à l'aide d'une matrice de corrélation :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{ij} SCR_i SCR_j} + SCR_{intangibles}.$$

Le $SCR_{intangibles}$ sera considéré nul dans la suite. En effet, il représente l'exigence de capital pour risque lié aux immobilisations incorporelles. D'après le rapport sur la solvabilité et la situation financière de l'assureur étudié, il ne possède pas d'immobilisations incorporelles. La matrice de corrélation est donnée ci-dessous :

	Marché	Défaut	Souscription non-vie
Marché	100%	25%	25%
Défaut	25%	100%	50%
Souscription non-vie	25%	50%	100%

TABLE 2.14 – Matrice des corrélations du SCR

Dans le cas de l'assureur automobile étudié, le BSCR est uniquement composé des sous modules de risque de marché, de risque de défaut de contrepartie et de risque de souscription non vie.

Risque de souscription non-vie

Le SCR de souscription non-vie se détaille en trois sous modules comme illustré dans la figure 2.17 :

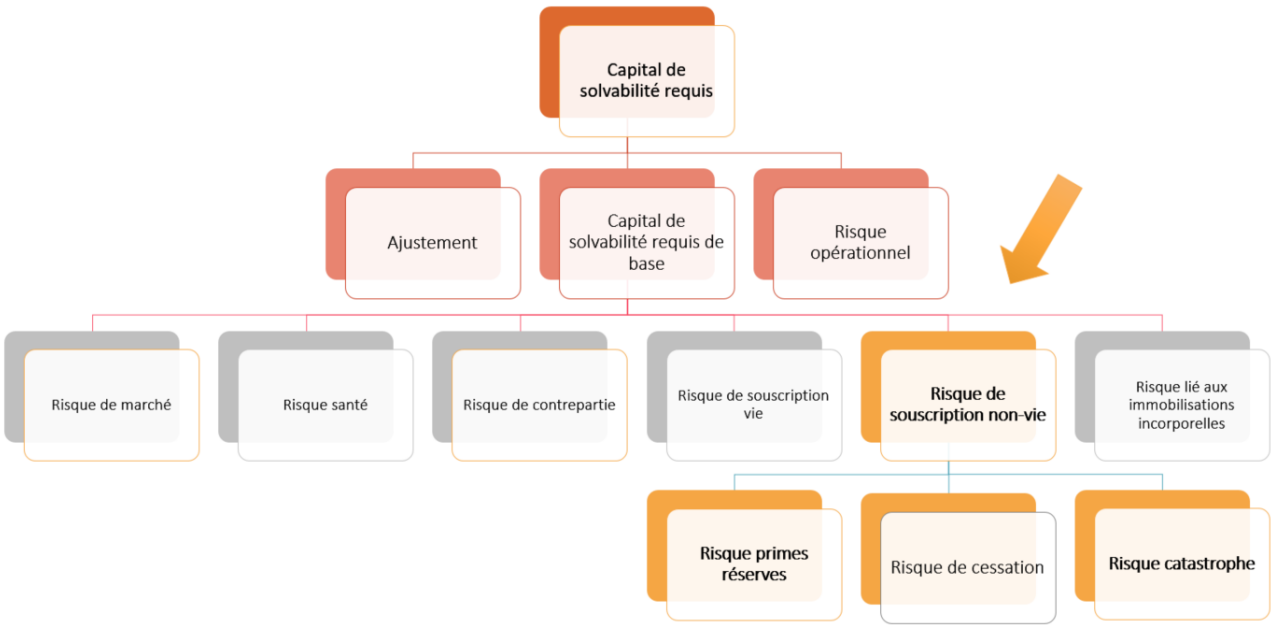

FIGURE 2.17 – Calcul du SCR de souscription Non-vie selon la formule standard

Ils se concilient pour obtenir la charge de capital en souscription non vie par la formule suivante :
$SCR_{Non-vie} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{ij} SCR_i SCR_j}$.
La matrice de corrélation à appliquer dans ce cas est :

	Primes et réserves	Rachat	Catastrophe
Primes et réserves	100%	0	25%
Rachat	0	100%	0
Catastrophe	25%	0	100%

Risque de Primes et réserves

D'après l'article 115 des actes délégués, le capital de Primes & réserves est donné par la formule : $SCR_{PrRes} = 3\sigma V$, où

- σ représente l'écart type combiné des risques de primes et de réserves
- V représente la mesure de volume global de primes et de réserve

Le portefeuille est séparé en deux lignes d'activité : la responsabilité civile et le dommage. Ces risques sont agrégés par la matrice de corrélation suivante donnée par les actes délégués :

	RC	Dommage
RC	100%	25%
Dommage	25%	100%

Les écarts types pour chaque risque sont également issus du même document :

	σ_{primes}	$\sigma_{reserves}$
RC	10%	9%
Dommage	8%	10%

Les écarts types combinés de chaque risque sont alors obtenus par la formule suivante :
$\sigma_s = \frac{\sqrt{(\sigma_{primes,s}V_{primes,s})^2+\sigma_{primes,s}V_{primes,s}\sigma_{reserves,s}V_{reserves,s}+(\sigma_{reserves,s}V_{reserves,s})^2}}{V_{primes,s}V_{reserves,s}}$.
Le $V_{reserves}$ correspond au best estimate de sinistralité net de réassurance et V_{primes} correspond au volume pour le risque de prime.

Enfin, l'écart type combiné prend la forme suivante :
$\sigma = \frac{1}{V}\sqrt{\sum_{i,j} Corr_{ij}\sigma_{RC}V_{RC}\sigma_{Dom}V_{Dom}}$.

Risque catastrophe

Dans la formule standard, le sous-module risque de catastrophe en non-vie est constitué des sous-modules suivants :

- risque de catastrophe naturelle
- risque de catastrophe en réassurance dommages non proportionnelle
- risque de catastrophe d'origine humaine
- autres risques de catastrophe en non-vie

Par soucis d'adaptabilité et de disponibilité des données, uniquement le sous-module de risque catastrophe d'origine humaine a été calculé.Les données internes permettent de comptabiliser le risque de responsabilité civile corporelle. Il est calculé de la façon suivante :
$SCR_{catastrophe} = max(6000000; 50000\sqrt{N_a + 0,05N_b + 0,95min(N_b; 20000)})$,
avec N_a et N_b le nombre de véhicules assurés par l'entreprise d'assurance, pour lesquels la limite présumée du contrat est respectivement supérieure ou inférieure à 24 000 000€. Dans le cas de la garantie responsabilité civile corporelle, l'engagement de l'assureur étant illimité, les nombres "N_a" et "N_b" de la formule sont estimés respectivement au nombre de véhicules assurés sur l'année d'excercice considérée est 0.

La réassurance intervient ici au niveau du best estimate dans le risque de Primes & réserves. En effet, il est calculé net de réassurance contrairement au volume de primes. Elle impacte également le SCR de catastrophe puisque les charges globales des sinistres RCC seront prises en charge, en partie, par le réassureur. Le risque pour l'assureur sera donc plus faible.

Risque de défaut de contrepartie

Contrairement à Solvabilité I, Solvabilité II tient compte de la probabilité de défaut des réassureurs dans le calcul du SCR. Cette attention particulière se manifeste par une augmentation du SCR de contrepartie dès lors qu'un programme de réassurance est mis en place. En effet, d'après l'article 189 des actes délégués, le SCR de contrepartie est composé d'une part de l'exigence de capital pour risque de défaut de la contrepartie sur des expositions de type 1 et de type 2. Dans cette étude nous nous limiterons au cas de type 1.
Ainsi, $SCR_{type1} =$

- $3.\sigma$ si $\sigma \leq 7\%.LGD$,
- $5.\sigma$ si $7\%.LGD < \sigma < 20\%.LGD$,
- LGD si $\sigma \geq 20\%.LGD$.

où

- LGD représente la perte moyenne en cas de défaut de la contrepartie

Il sera considéré que l'assureur de l'étude fera appel à un seul réassureur.

- σ représente l'écart type de la distribution des pertes liées au groupe d'expositions de type 1

Le réassureur en question a pour notation A, il a une probabilité de défaut de 0,240% et un taux de perte de 50%.
La perte en cas de défaut sur un contrat de réassurance ou une titrisation d'assurance se calcule comme suit : $LGD = max(50\%(Recoverables + 50\%RM)F.Collateral; 0)$, où

• Recoverables représente la meilleure estimation des montants recouvrables découlant du contrat de réassurance

• RM représente l'effet d'atténuation du risque qu'a le contrat de réassurance sur le risque de souscription

• Collateral représente la valeur pondérée des sûretés en ce qui concerne le contrat de réassurance

• F représente un facteur visant à tenir compte de l'effet économique du contrat de sûreté en ce qui concerne le contrat de réassurance en cas d'événement de crédit concernant la contrepartie.

Ainsi, il apparaît que le montant de sinistres cédés fera considérablement varier la charge en capital au titre du risque de contrepartie, en particulier si le montant en question est important, pour les traités en quote part par exemple.

Risque de marché

Le risque de marché représente le risque lié aux fluctuations des valeurs de marché des instruments financiers. Il prend notamment en compte la variation des cours des actions, des taux d'intérêt, des taux de change, etc. Il se compose de plusieurs sous-modules comme le montre la figure 2.18 :

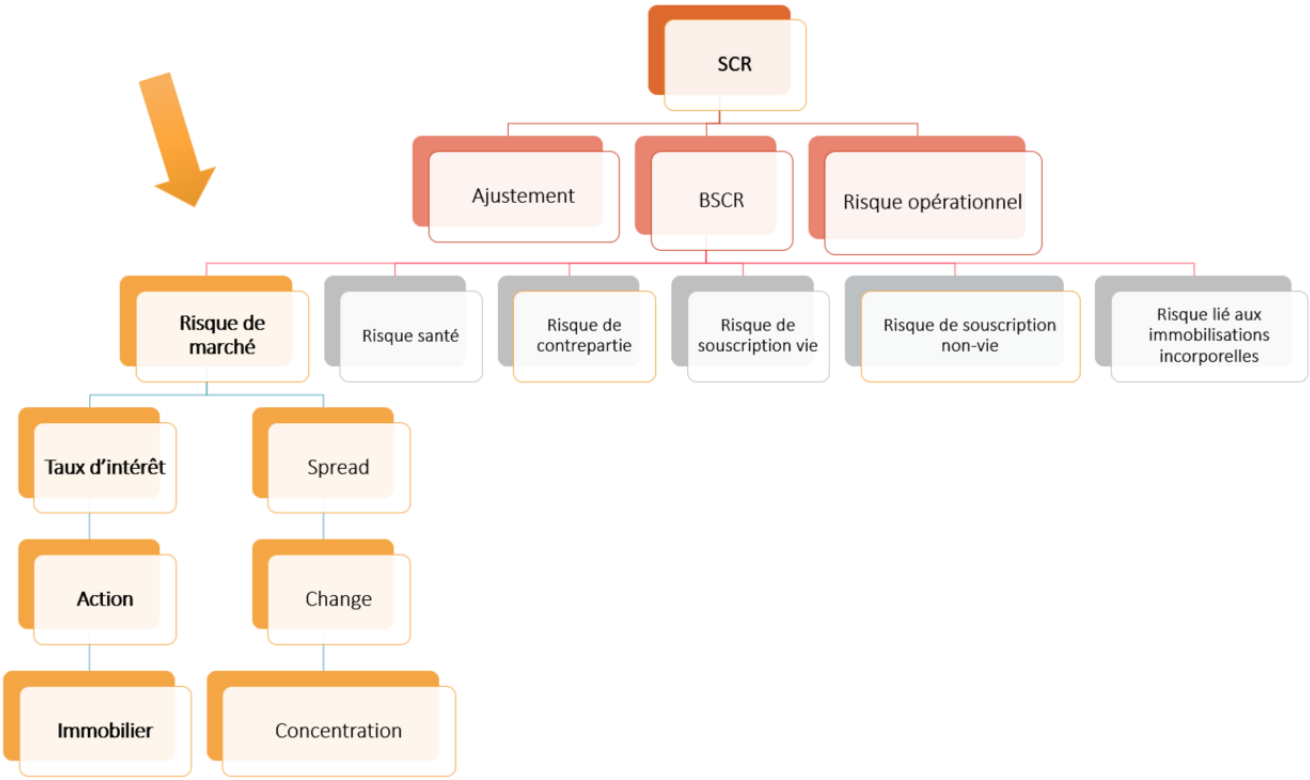

FIGURE 2.18 – Pieuvre du SCR de marché

Dans le cadre de ce mémoire, le SCR de marché prendra en compte uniquement les sous-modules de risque de taux d'intérêt, d'action et d'immobilier. La charge de capital au titre du risque de marché est obtenue en agrégeant les charges de capital de ces trois risques à l'aide de la formule et de la matrices de corrélations ci-dessous :
$SCR_{marche} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{ij} SCR_i SCR_j}$.

	Taux d'intérêt	Action	Immobilier
Taux d'intérêt	100%	0 ou 50% *	0 ou 50% *
Action	0 ou 50% *	100%	75%
Immobilier	0 ou 50%*	75%	100%

* si la situation présente une hausse des taux, les corrélations sont nulles, sinon elles valent 50%

Risque de taux d'intérêt

Le choc de taux concerne l'ensemble des actifs dont l'évolution de la structure des taux impacte leur valeur au bilan. Deux scénarii sont envisageables : une hausse ou une baisse des taux.

- Si une hausse des taux est observée

Les actes délégués nous informent que "l'exigence de capital pour risque d'augmentation de la courbe des taux d'intérêt pour une devise déterminée est égale à la perte de fonds propres de base qui résulterait d'une augmentation soudaine des taux d'intérêt sans risque de base pour cette devise à des échéances différentes selon le tableau suivant :"

Echéance (année)	Augmentation	Diminution
1	70%	75%
2	70%	65%
3	64%	56%
4	59%	50%
5	55%	46%
6	52%	42%
...	...	...

Un choc à la hausse a été appliqué pour l'étude.

Risque Action

Le risque Action mesure la sensibilité des Fonds Propres à une chute instantanée du cours des actions. Pour cela, deux types d'actions sont pris en compte. Les actes délégués

précisent "les actions de type 1 comprennent les actions cotées sur des marchés réglementés dans des pays membres de l'Espace économique européen (EEE) ou de l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE)" et "les actions de type 2 comprennent les actions cotées en bourse dans des pays qui ne sont pas membres de l'EEE ou de l'OCDE, les actions qui ne sont pas cotées, les produits de base et autres investissements alternatifs".

Ainsi, le SCR se calcul par la formule suivante :
$SCR_{action} = \sqrt{SCR_{type1}^2 + 2.0,75.SCR_{type1}SCR_{type2} + SCR_{type2}^2}$.

Le portefeuille de l'étude est supposé contenir que des actions de type 1. L'exigence de capital pour les actions de type 1 est alors égale à la perte de Fonds Propres de base qui résulterait d'une diminution soudaine égale à 39% + des ajustements symétriques de la valeur des investissements en actions de type 1.

Risque Immobilier

Comme pour le risque Action, le SCR immobilier s'évalue comme la perte de fonds propres de base qui résulterait d'une diminution soudaine de 25% de la valeur des actifs immobiliers.

Ainsi, le risque de marché est impacté par la prise en compte de la réassurance. En effet, il dépend du volume d'actifs. Or ceux-ci, comme expliqué au chapitre 1 diminue dès lors qu'un programme de réassurance intervient dans le bilan (une créance de réassurance apparaît et le montant d'actifs est réduit).

2.5 Définition des contraintes

Afin de définir les critères d'optimisation, l'année la plus récente du portefeuille est étudiée, c'est-à-dire 2018. Les indicateurs de référence sont calculés sur cette année d'historique ainsi que sur la sinistralité simulée.

SCR	62 058 742 €
CoR	91%
RORAC	21%
ROE	13%
Ratio S2	164%

TABLE 2.15 – Indicateurs de références calculés sur l'année 2018

SCR	62 390 634 €
CoR	92%
RORAC	20%
ROE	11%
Ratio S2	181%

TABLE 2.16 – Indicateurs de références calculés sur la sinistralité simulée

Après avoir simulé les données, une augmentation de la charge de sinistres de 2% par rapport à l'année 2018 est observée. Cela implique une légère dégradation des indicateurs de rentabilité (ratio combiné et ROE) et du montant de SCR. En revanche l'augmentation du montant de Fonds Propres de 9% du fait d'un résultat technique net positif induit une hausse du ratio de solvabilité.

Historiquement, l'optimisation de la réassurance se présente sous la forme d'un espace à deux dimensions. L'objectif étant de comparer les programmes de réassurance en mettant en relation une mesure de risque et une mesure de gain. Dans le cadre de ce mémoire, le ratio de solvabilité a été sélectionné pour mesurer le risque de l'assureur et la rentabilité sera mesurée par le ratio combiné. La représentation graphique des couvertures de réassurance permet de définir une courbe sur le bord supérieur appelée frontière efficiente. Le graphique obtenu sera alors de la forme :

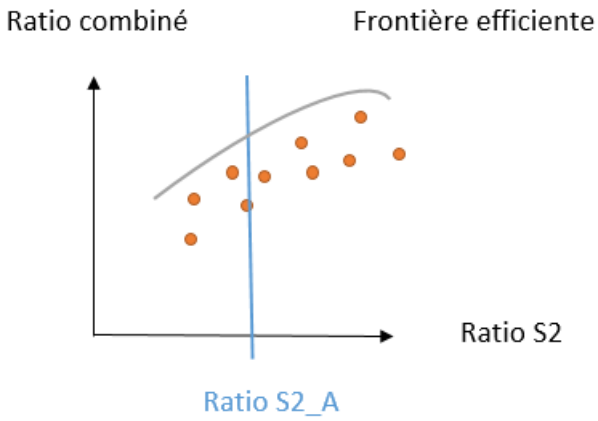

FIGURE 2.19 – Frontière efficiente

De façon générale, l'assureur préférera un ratio combiné faible. Le ratio de solvabilité, quant à lui, sera fixé par le niveau d'appétence aux risques de l'assureur. En effet, ce ratio doit être supérieur à 100% pour satisfaire les autorités de contrôle mais ne doit pas être trop élevé pour contenter les actionnaires. Un ratio de solvabilité important signifie qu'un fort montant de capital est immobilisé alors qu'il aurait pu être investi.

Comme constaté dans l'étude de la LoB "RC auto", l'assureur va chercher à se protéger d'une éventuelle insuffisance tarifaire due à l'augmentation de la sinistralité en RC auto en 2017 et maintenir ses indicateurs d'appétence aux risques stables. L'arbitrage optimal pour la cédante sera alors un ratio de solvabilité lui permettant de rester solvable et une tarification suffisante pour couvrir ses frais, ce qui se traduit par un ratio combiné inférieur à 1.

Au regard des données du portefeuille, il s'avère que l'assureur étudié est peu développé

et a un petit portefeuille. De plus, la table 2.16 montre que pour un scénario futur, le ratio de solvabilité s'établit à 181% contre 164% pour la sinistralité de 2018. Bien que le marché français de l'assurance automobile affiche un ratio de solvabilité autour de 260% d'après la banque de France, 2019, l'assureur étudié cherche à stabiliser sa situation progressivement en tenant compte de l'impact de la réassurance qui viendra rehausser le ratio de solvabilité. Un seuil à 190% sera alors considéré pour cet indicateur au regard de ces objectifs.

La contrainte de rentabilité sera alors de maintenant une certaine stabilité selon le niveau de solvabilité.

Sur cette frontière, l'assureur choisira ensuite la couverture lui offrant le meilleur ratio combiné pour un ratio de solvabilité donné.

In fine les contraintes sont :

Dimension	Indicateur	Seuil
Solvabilité	Ratio de solvabilité	190%
Rentabilité	Ratio combiné	À minimiser

Table 2.17 – Critères d'optimisation

CHAPITRE 3

MISE EN PLACE DU MODÈLE D'OPTIMISATION

Ce chapitre introduit quelques notions théoriques autour de l'optimalité de la réassurance. Le modèle retenu sera ensuite détaillé ainsi que l'application de celui-ci aux données du portefeuille de l'étude.

3.1 Théorie de la réassurance optimale

L'optimisation de la réassurance relève d'un arbitrage entre le coût de la réassurance et le gain en capital. De nombreuses méthodes théoriques classiques ont été publiées sur le sujet, deux d'entre elles sont détaillées dans cette partie.

Modèle de De Finetti

De Finetti (1940) s'intéresse au cas de la réassurance proportionnelle. Il met en avant le problème d'optimisation suivant : minimiser la variance du résultat de l'assureur sous contrainte d'un gain fixé de celui-ci. Il démontre que la solution à ce problème est un taux de cession optimal pour un traité en quote-part, sous réserve d'indépendance des risques et de constance des primes d'assurance et des taux de commission par risque. La résolution du problème d'optimisation proposée par De Finetti s'appuie sur le Lagrangien et le théorème de Kuhn-Tucker. Ainsi, un taux de cession est défini pour chaque police d'assurance.

La variance n'étant pas toujours une bonne mesure de risque, les travaux de Cai et Tan (2007) utilise les mesures de la *Value at Risk* (VaR) et de la *Tail Value at Risk* (TVaR)

Modèle de Cai et Tan

Leurs travaux consistent à minimiser la VaR et la TVaR. Cai et Tan démontrent l'existence d'une rétention optimale pour un traité Stop-Loss lorsque des conditions sur les frais de réassurance, le niveau de risque de la VaR (ou de la TVaR) et l'inverse de la fonction

de survie des sinistres sont vérifiées.

Cependant, ces méthodes imposent un certains nombre d'hypothèses. Etant donné la composition du portefeuille de l'étude et le calcul des mesures de risque telle que le SCR rendent une étude purement analytique difficile.

Ainsi, afin de rester au plus proche de la réalité du marché, la méthodologie d'optimisation adoptée dans ce mémoire s'appuie sur une approche par scénarii. Un certain nombre de portefeuilles ont été simulés sur lesquels les programmes de réassurance seront appliqués. Un scénario correspond alors à une couverture de réassurance prédéfinie. Il va s'agir de mettre en lumière l'impact des programmes de réassurance sur les critères d'optimisation.

3.2 Définition du modèle

L'approche par scénarii consiste à simuler un grand nombre de portefeuilles sur lesquels la réassurance sera appliquée. Un scénario correspond à un programme de réassurance pour des paramètres donnés appliqué à un portefeuille simulé. L'optimisation de la réassurance est alors menée individuellement pour chaque traité toutes choses étant égales par ailleurs. Autrement dit, l'optimisation de la réassurance se réduit à l'optimisation d'un seul traité, les autres traités demeurant inchangés. Cette méthodologie offre ainsi une meilleure lisibilité de l'impact de chacun des traités sur les contraintes imposées.

Le nombre de simulations exécutées est établi par étude de convergence des paramètres de lois utilisées pour simuler la sinistralité.

L'outil d'optimisation consiste à mettre en évidence les stratégies de réassurance offrant le meilleur profit pour un niveau de risque donné. Ces couvertures vont définir une frontière efficiente sur laquelle la cédante pourra choisir la couverture optimale selon les critères d'optimisation orientés par son niveau d'appétence aux risques. Les principales étapes de construction de l'outil sont les suivantes :

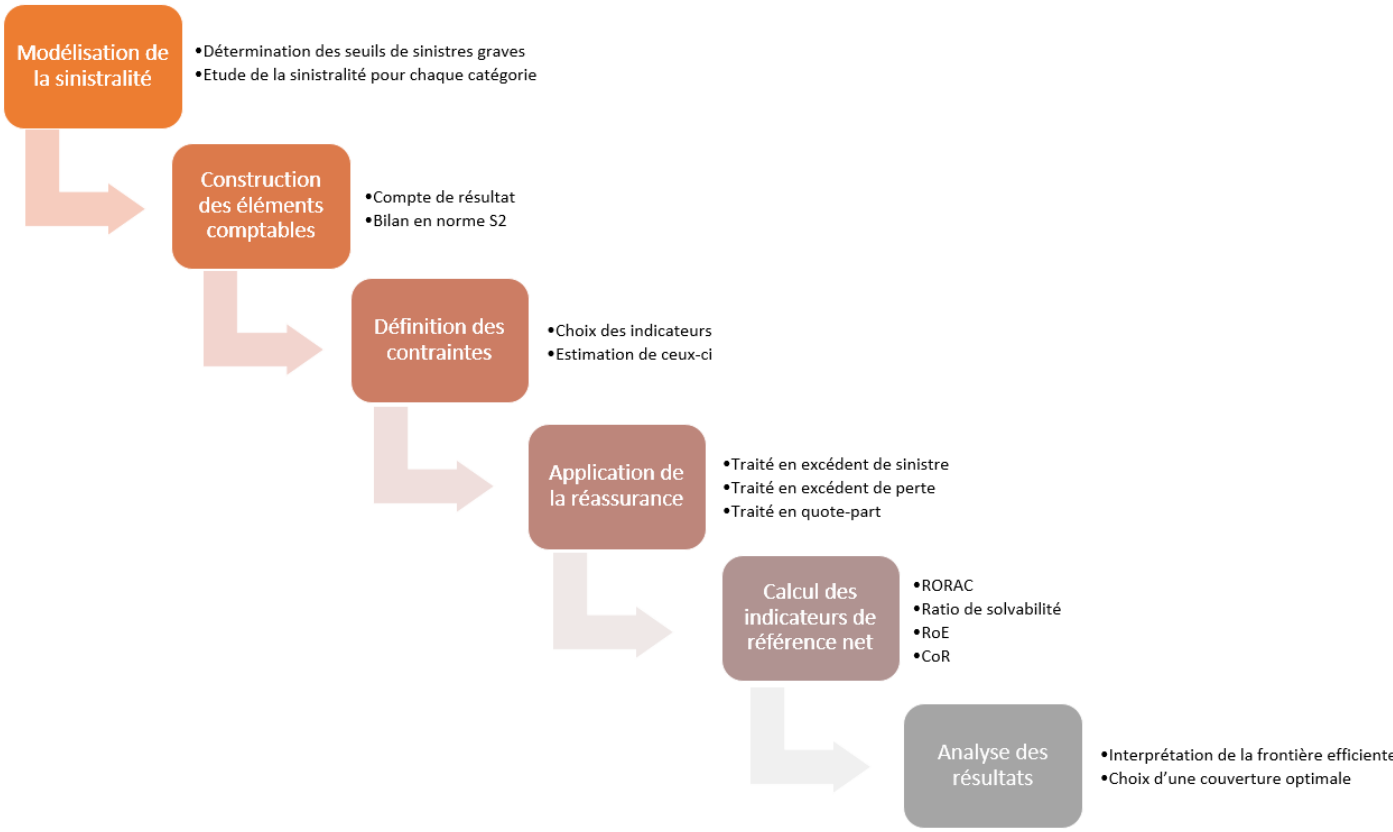

FIGURE 3.1 – Étapes de construction de l'outil d'optimisation

Hypothèses du modèle

Les traités de réassurance

Le choix des traités de réassurance s'est porté sur :

— Excédent de siniste par risque

— Excédent de perte

— Quote-part

Ceux sont les plus couramment rencontrés sur le marché. Le traité en excédent de plein ne sera pas retenu dans cette étude puisque la somme assurée doit être connue à l'avance. Or la responsabilité civile corporelle est considérée comme une branche longue. L'évaluation d'un sinistre RC s'étale sur plusieurs années puisque différents acteurs peuvent intervenir dans la procédure de son évaluation à l'ultime.

Pour chaque traité, différents paramètres seront implémentés afin de visualiser l'impact de chacun d'eux sur le traité en question. Les paramètres pour un traité en excédent sont la portée et la priorité et le taux de cession pour un traité en quote-part.

Dans la suite de l'étude, les clauses *annual aggregate deductible (AAD)* et *annual aggregate limit (AAL)* ne seront pas prises en compte et les reconstitutions seront supposées

illimitées et gratuites pour les traités en excédent.

Le nombre de simulations

La tarification de la réassurance est estimée pour chaque traité à l'aide d'un certain nombre de portefeuilles simulés. Le nombre de modélisations nécessaire est estimé en étudiant la potentielle convergence empirique du ratio variance sur espérance de la sinistralité.

Un portefeuille de sinistres est créé à partir des modélisations de la sinistralité dont le détail a été développé en partie 2.1.3. Pour un nombre de simulations donné, la charge totale de sinistres moyenne, la variance associée ainsi que leur ratio seront calculés. Les outils utilisés étant limités, le nombre de simulations réalisées sera au maximum de 100 000. Le graphique 3.2 permet de mettre en avant la convergence de ce ratio :

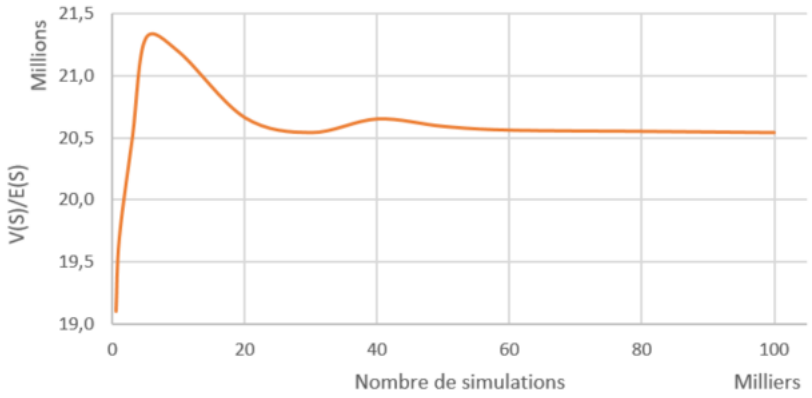

FIGURE 3.2 – Convergence du ratio variance sur espérance

Il apparaît que le ratio converge à partir de 50 000 simulations, et se stabilise à partir de 80 000. Un trop faible nombre de modélisations induit une forte fluctuation du ratio dû à la non convergence des paramètres des lois utilisées pour estimer la sinistralité. Étant donné que la méthode employée est issue d'un modèle collectif, pour que le ratio se stabilise il faut atteindre la convergence du nombre de sinistres et de leur sévérité pour les sinistres intermédiaires et graves.

En revanche, simuler et étudier 100 000 ou 80 000 portefeuilles nécessitent des ressources de calculs importantes. Pour limiter le temps de calcul, 50 000 portefeuilles sont simulés. C'est le nombre de simulations minimum qui permet de respecter la convergence des paramètres de loi.

3.3 Méthode d'interpolation

La frontière efficiente étant représentée par un nombre fini de points, elle sera difficilement interprétable, tout du moins, son analyse manquera de précision. Intervient alors

la notion d'interpolation. Elle consiste en une fonction affine par morceaux permettant de remplacer une courbe par une autre plus simple, mais qui coïncide avec la première en un nombre fini de points donnés au départ. Le choix de ces points de départ est donc un élément important dans l'intérêt de la construction.

La méthode d'interpolation de courbe la plus simple est l'interpolation linéaire. Elle est utilisée lorsqu'il n'est pas possible de calculer l'image d'un point par la fonction existante. L'interpolation linéaire consiste alors à remplacer cette fonction par une autre affine par morceaux. Dans le cadre de cette étude, la frontière efficiente est définie par une mesure de risque et une mesure de gain. Elles sont représentées par les ratios de solvabilité et combiné respectivement. Ainsi, les couvertures de réassurance définies selon ces deux indicateurs sont représentées par des points qu'ils faut relier.

En notant F la frontière efficiente, pour un ratio de solvabilité t compris entre t_1 et t_2, le ratio combiné associé à t est obtenu par interpolation linéaire à l'aide de la formule suivante :
$F(t) = \frac{(t_2-t)F(t_1)+(t-t_1)F(t_2)}{t_2-t_1}$.

Cette technique d'interpolation ne permet pas d'ajuster les données puisqu'elle est linéaire. D'après l'allure de la frontière efficiente, il serait préférable d'étudier d'autres interpolations.

Une deuxième technique très utilisée est l'interpolation cubique. Elle se présente sous la forme d'une fonction affine par morceaux définie selon certaines contraintes. Un premier segment entre t_1 et t_3 est défini où F(t_1), F(t_2) et F(t_3) sont connus ; La valeur F(t) est alors déterminée par la formule : $F(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, sous la contrainte que la courbe passe par ces trois points d'où les contraintes :

$$\begin{cases} F(t_1) = at_1^3 + bt_1^2 + ct_1 + d \\ F(t_2) = at_2^3 + bt_2^2 + ct_2 + d \\ F(t_3) = at_3^3 + bt_3^2 + ct_3 + d \end{cases}$$

Ces deux techniques ont été implémentées et représentées sur la figure 3.3.

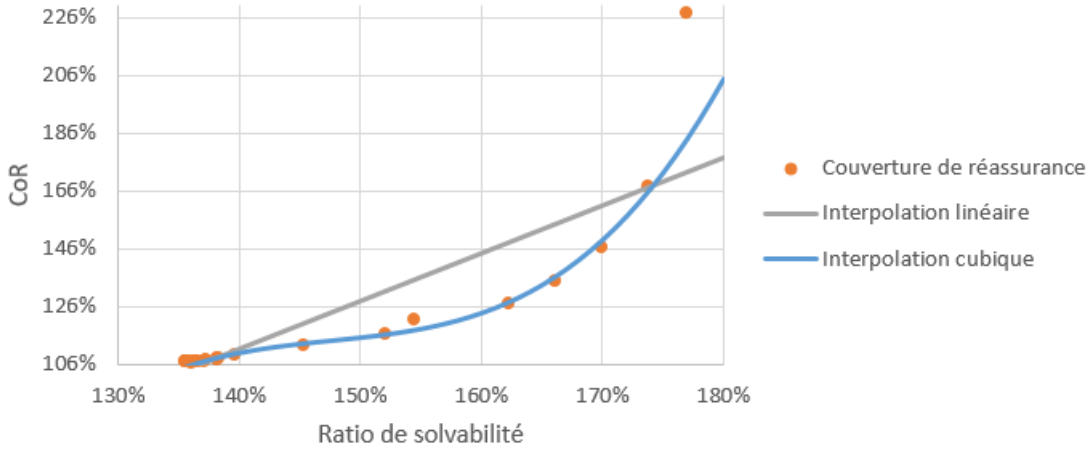

FIGURE 3.3 – Méthodes d'interpolation

Il en résulte que, comme son nom l'indique, la première méthode présentée est linéaire et selon les données à décrire, elle s'ajustera plus ou moins à celles-ci . En revanche, l'interpolation cubique suit l'allure des couvertures de réassurance. Elle admet néanmoins des limites pour des valeurs extrèmes mais celles-ci ne seront pas exploitées dans l'analyse car peu réalistes.

La frontière efficiente sera alors définie par interpolation cubique dans la suite de l'étude.

3.4 Application du modèle aux traités séléctionnés

Traité en excédent de sinistre par risque

Démarche

En pratique, le choix d'un seuil de priorité est établi selon un quantile lié à la distribution des sinistres. Dans le cadre de ce mémoire, plusieurs montants de priorités seront étudiés. Ils sont calculés par la formule suivante : $q_p = \frac{x_0}{(1-p)^{\frac{1}{\alpha}}}$, avec x_0 le seuil de cession est établi à 900 000€ dans le chapitre 2, p est la probabilité d'attachement et α le paramètre de la loi de Pareto définie dans le chapitre 2. Les priorités étudiées sont répertoriées dans le tableau 3.1 :

Probabilité d'attachement	0,7	0,75	0,8
Priorité (en M€)	2	3	5

TABLE 3.1 – Montants de priorité choisis pour l'étude

Etant donné que le plafond d'indemnisation en Responsabilité Civile Automobile est illimitée, la portée doit l'être également. Compte tenu que le plus gros sinistre est de l'ordre de 17 000 000€ les portées s'établiront de 10 000 000€ jusqu'à 40 000 000 € avec un pas de 10 000 000 € afin d'étudier suffisamment de traités.

Le compte de réassurance est établi et les indicateurs de références calculés. Les graphes sont présentés dans la partie Résultats.

Résultats

Une fois les paramètres du traité fixés, les indicateurs sont calculés pour chaque scénario.
De plus, il est d'ores et déjà possible de supposer une faible distinction entre les indicateurs de référence pour les priorités à trois et cinq millions d'euros. En effet, sur les 50 000 simulations, il y a seulement deux sinistres supérieurs à trois millions d'euros en moyenne et un au-delà de cinq millions d'euros. La réassurance n'interviendra donc que rarement. Les graphiques 3.4 et 3.5 des indicateurs de solvabilité ont été établis :

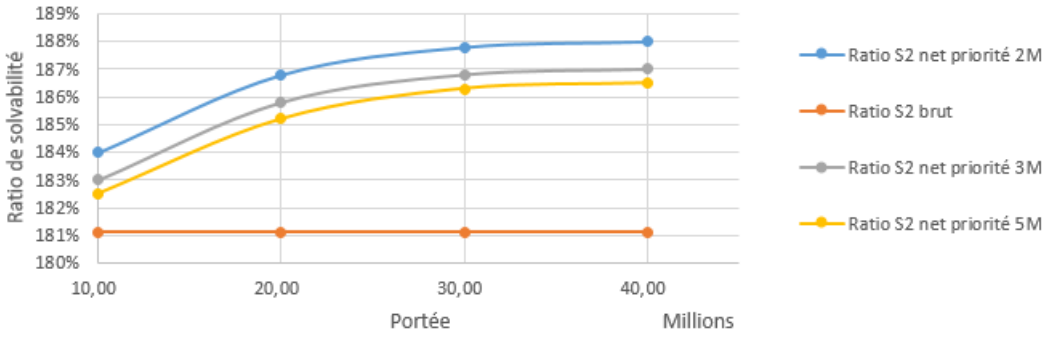

FIGURE 3.4 – Évolution du ratio de solvabilité pour un traité en excédent de sinistre

Il est possible de constater sur cet indicateur que la solvabilité de l'assureur a été améliorée avec l'application d'un traité XS. En effet, quelles que soient la portée et la priorité, le ratio de solvabilité est supérieur au ratio brut. La propriété de la réassurance comme étant un levier de libération de capital économique est donc vérifiée.

A titre indicatif, l'évolution du SCR est détaillée dans le tableau 3.2 pour une priorité de trois millions d'euros :

Portée (en M€)	10	20	30	40
SCR (€)	60 935 128	60 740 776	60 362 534	60 348 930
SCR de souscription non-vie (€)	57 092 998	56 731 456	56 549 540	56 536 640
SCR de marché (€)	4 991 834	4 918 945	4 882 221	4 879 619
SCR de contrepartie (€)	400 834	449 085	473043	474 708

TABLE 3.2 – Evolution des SCR par risque pour un traité en excédent de sinistre

Comme attendu, le montant du SCR de souscription non-vie est nettement plus élevé que les deux autres. Il diminue en fonction que la portée augmente puisque le SCR de réserves est impacté à la baisse. En revanche, le SCR de marché diminue du fait que le volume d'actif est réduit tout comme le volume de passif (Meilleure estimation + marge pour risque). Le risque de contrepartie, quant à lui est en hausse puisque plus le montant

de sinistres cédés augmente plus le risque de défaut de la contrepartie augmente à son tour.

De plus, le ratio de solvabilité évolue dans le sens contraire de la priorité. En effet, le ratio augmente lorsque celle-ci diminue puisque l'assureur cède plus de risque pour une priorité faible. A l'inverse, plus la portée est grande plus le ratio est fort puisque le réassureur prendra en charge une plus large fenêtre de sinistres.

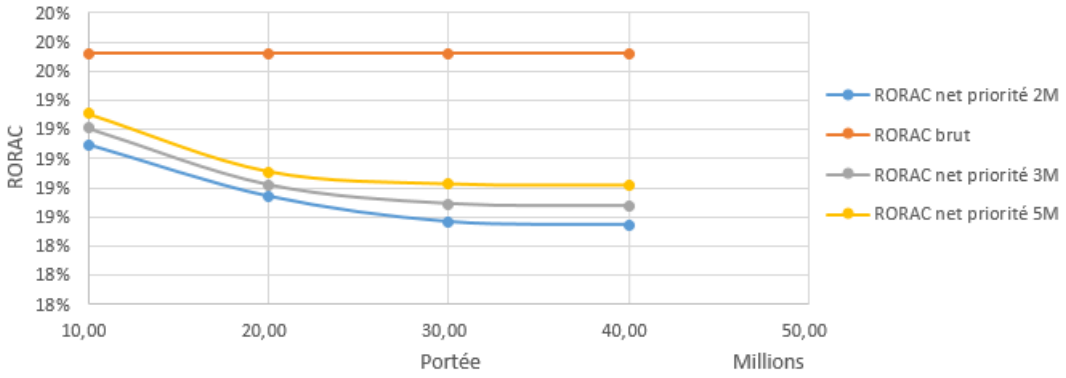

FIGURE 3.5 – Evolution du RORAC pour un traité en excédent de sinistre

En ce qui concerne le RORAC, la mise en place d'un programme de réassurance dégrade l'indicateur de productivité des risques. En effet, le RORAC baisse au deçà du ratio brut quelles que soient la portée et la priorité. Cela signifie que la rentabilité se dégrade plus vite que le SCR ne diminue. Il est donc attendu de voir les indicateurs de rentabilité se dégrader.

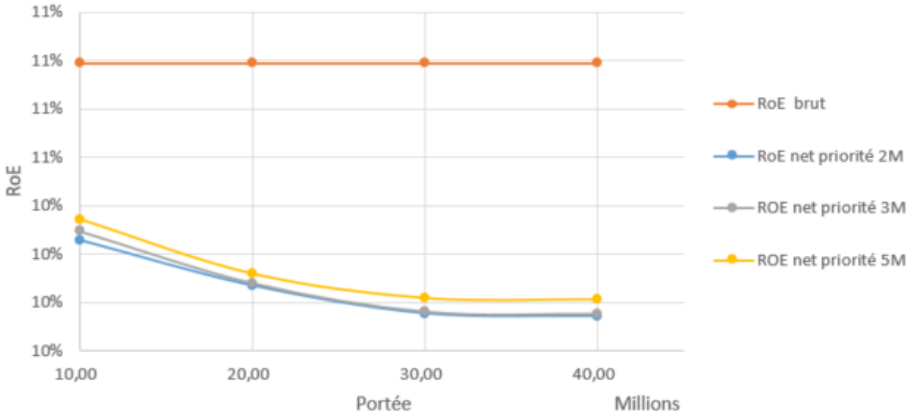

FIGURE 3.6 – Evolution du RoE pour un traité en excédent de sinistre

Comme attendu, plus le retour sur investissement diminue plus la portée augmente. En effet, plus l'assureur cède de sinistres au réassureur, plus la prime de réassurance sera élevée. Le résultat technique net de l'assureur est donc dégradé comme le montre le tableau suivant :

Portée (en M€)	10	20	30	40
Priorité de 2M€	11 658 359	11 417 945	11 271 409	11 256 792
Priorité de 3M€	11 705 620	11 431 559	11 281 280	11 269 480
Priorité de 5M€	11 769 975	11 483 860	11 356 011	11 349 248

TABLE 3.3 – Évolution du résultat technique net selon les paramètres de réassurance

Il en est de même pour le ratio combiné :

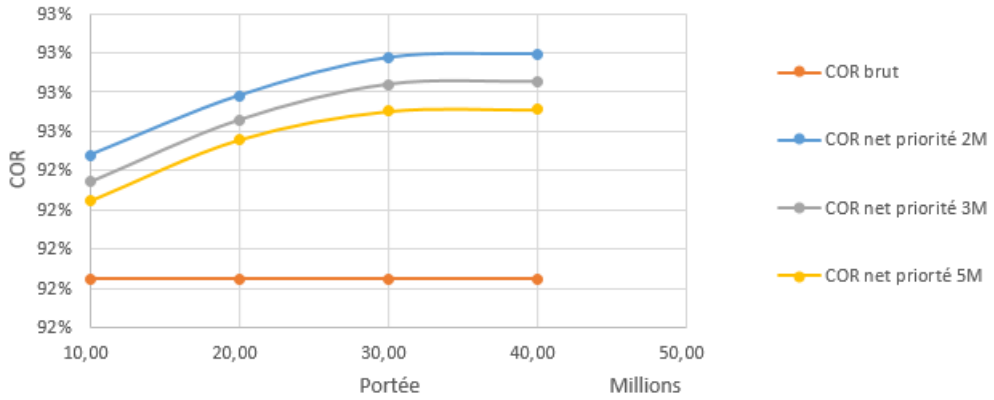

FIGURE 3.7 – Évolution du COR pour un traité en excédent de sinistre

Le ratio combiné évolue dans le même sens que la portée. En effet, la prime cédée sera d'autant plus cher que la portée augmente. Or, le montant de prime cédée étant supérieur à celui des sinistres cédés, l'assureur paye plus cher que la réassurance n'a d'impact. De plus,l'allure de la courbe à tendance à stagner au delà d'une portée de 30M€. Cela s'explique par une intervention de moins en moins forte de la réassurance puisque peu de sinistres seront concernés par ces tranches pour des primes cédées grandissantes. Le tableau suivant permet de chiffrer cette décélération pour une priorité de 3M€ :

Portée (en M€)	10	20	30	40
Montant de prime cédées (€)	4 519 219	6 292 323	7 194 729	7 259 529
Variation (en %)		28,17%	12,54%	0,89
Montant de sinistres cédés (€)	3 604 881	4 960 018	5 633 234	5 680 039
Variation (en %)		27,32%	11,95%	0,82%

TABLE 3.4 – Évolution des primes et sinistres cédés pour une priorité de 3M€

Le montant de sinistres cédés stagne plus vite que celui des primes de réassurance.

En conclusion, ce traité permet une légère amélioration de la solvabilité de l'assureur mais dégrade faiblement sa rentabilité.

Traité en excédent de perte

Démarche

Le traité en stop-loss est souscrit dès lors que l'assureur veut écrêter ses sinistres agrégés sur une année. Il est déjà possible d'appréhender les résultats de rentabilité de l'assureur en sachant que ce traité sera plus coûteux qu'un traité en excédent de sinistre. En effet, ce traité va prendre en compte les petits comme les grands risques, la prime de réassurance sera, en conséquence, plus élevée que pour le traité précédent.

L'idée est de limiter les pertes éventuelles de l'assureur de l'année suivante avec la priorité. Pour se faire, la priorité sera exprimée en termes de Loss ratio. Elle variera de 80% à 70% avec un pas de 2%, choisi de telle sorte à traiter suffisamment de programmes de réassurance.
La lutte contre une eventuelle insuffisance tarifaire et une stabilisation des indicateurs de rentabilité reviendraient à maximiser le ratio combiné à environ 95%.

Résultat

Les figures 3.8 et 3.9 permettent de constater l'évolution des indicateurs net de réassurance :

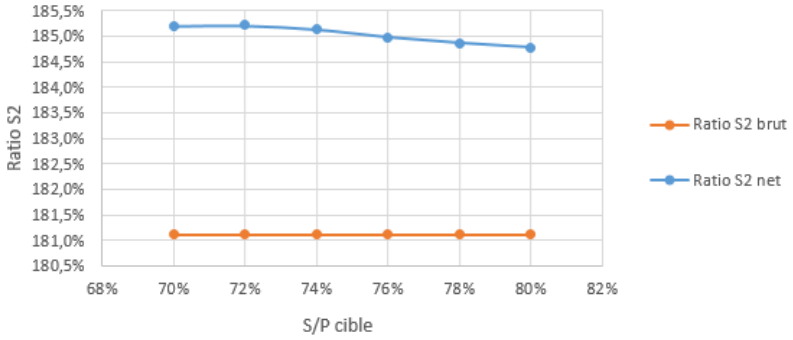

FIGURE 3.8 – Évolution du ratio de solvabilité pour un traité en Stop loss

Il est notable que le ratio de solvabilité, comme attendu, est maximisé par rapport au ratio brut. Toutefois, il diminue lorsque le loss ratio augmente. En effet, plus le loss ratio souhaité est faible, plus la queue de distribution sera écrêtée. L'assureur cédera donc plus de risques, plus le loss ratio tend à la baisse comme le montre la table 3.5 :

Loss ratio cible	80%	78%	76%	74%	72%	70%
SCR	61 769 130	61 721 163	61 661 044	61 585 440	61 530 681	61 499 797
Souscription non-vie	57 894 633	57 849 109	57 792 030	57 720 223	57 669 487	57 612 739
SCR de marché	5 108 636	5 099 531	5 088 101	5 073 704	5 050 721	5 027 956
SCR de contrepartie	290 869	296 925	304 606	314 377	326 662	342 386

TABLE 3.5 – SCR net d'un traité en stop loss (en €)

Ce tableau montre que l'impact d'un loss ratio cible sur le montant de SCR est très faible puisqu'il varie très peu. En effet, les montants de capital économique varient en moyenne de 0,14%. En comparaison au traité précédent, les montants de risques de contrepartie et de marché sont inférieurs tandis que ceux de souscription non-vie sont plus élevés. Cela signifie que moins de risques ont été cédés, ce qui expliquerait le fait que le ratio de solvabilité soit plus faible pour ce traité.

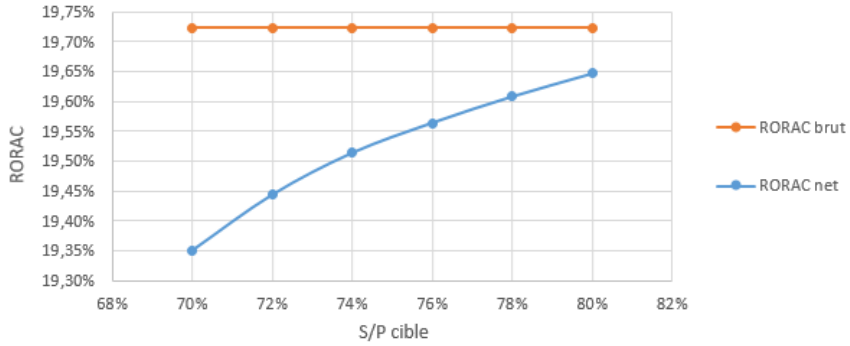

FIGURE 3.9 – Evolution du RORAC pour un traité en Stop loss

C'est alors la rentabilité qui peut expliquer la baisse du RORAC par rapport à l'indicateur brut. En effet, le capital économique est inférieur au montant brut dans tous les cas de figure, or celui-ci est toujours sous la courbe brute. Ainsi, le résultat technique net se dégrade plus rapidement que le SCR ne diminue, comme pour le traité précédent.

Loss ratio	70%	72%	74%	76%	78%	80%
Résultat technique net	12 135 443	12 102 273	12 063 375	12 017 669	11 963 944	11 900 633

TABLE 3.6 – Evolution du résultat technique net selon les paramètres de réassurance (en €)

Néanmoins, il est à rappeler que l'objectif d'un tel traité est de limiter les pertes exprimant un ratio combiné maximal de 95%.

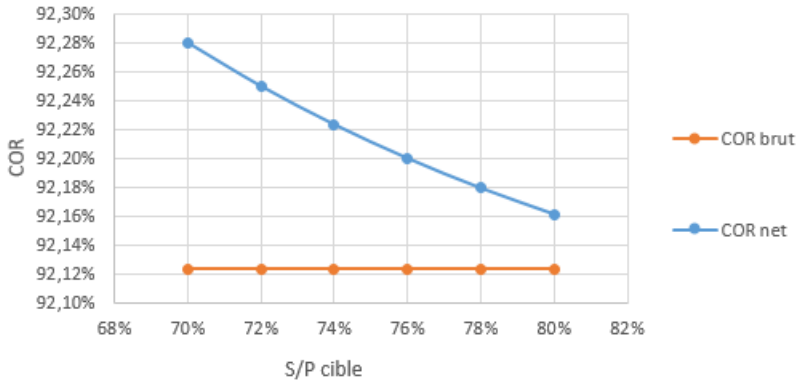

FIGURE 3.10 – Evolution du ratio combiné pour un traité en Stop loss

La figure 3.10 montre que cet objectif est atteint. En effet, le CoR maximum s'établi à 92,28% pour un loss ratio cible de 70% et tend à diminuer dès lors que ce paramètre augmente. En effet, plus le loss ratio souhaité est faible, plus la queue de distribution sera écrêtée. L'assureur va donc céder davantage de risques, ce qui augmente la prime cédée. Ainsi, le montant de sinistres nets étant supérieur à celui des primes nettes, le ratio combiné se voit baisser. En revanche, ce ratio reste supérieur au brut quels que soient les loss ratio cibles choisis. La rentabilité est donc dégradé mais de moins de 1% sur l'échelle du ratio combiné.

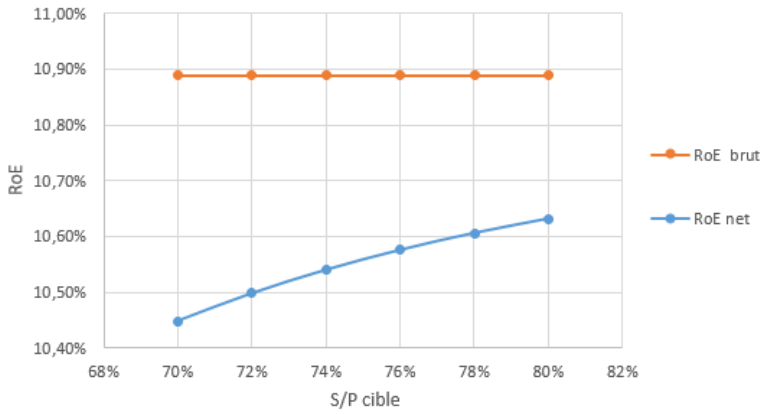

FIGURE 3.11 – Evolution du RoE pour un traité en Stop loss

Les graphes précédents ont permis d'observer l'évolution du résultat net et des Fonds Propres à travers les différents indicateurs. Le retour sur investissement est donc sans surprise détérioré après la mise en place d'un dispositif de réassurance.
La table 3.6 montre un résultat technique net négatif évoluant suivant la même tendance que le paramètre du traité. Pour un loss ratio élevé, le montant de sinistres cédés compense le coût de la réassurance. En revanche, plus l'assureur cède de risque au réassureur, plus le prix du traité sera important ce qui affaibli cette compensation et réduit le résultat technique net.

Les Fonds Propres vont eux aussi augmenter car l'assureur va puiser dans ses ressources pour financer la réassurance. La tendance à la hausse du RoE indique que le résultat technique net augmente plus vite que le montant de Fonds Propres.

En conclusion, pour un produit rentable, le traité en stop loss va permettre d'écrêter la queue de distribution. Dans ce cas là, le programme de réassurance sera souscrit dans un objectif de transfert de risques et non de rentabilité.

Ce qui ressort de l'étude du portefeuille donné est que les objectifs de rentabilité de l'assureur ne sont pas atteints. Comme indiqué dans la démarche, la cédante cherche à minimiser le ratio combiné pour un niveau de risque défini. Or le ratio combiné varie

peu et se situe autour de 92,2%. De plus, le traité en stop-loss est très peu appliqué sur le marché. Un assureur préférera souscrire un traité en quote-part ayant une forte commission de réassurance plutôt qu'un traité en excédent de perte.

Traité en quote part

Le traité en quote-part est souvent appliqué lors d'un lancement de produit. L'assureur préfèrera céder une partie de son résultat pour se protéger contre les risques d'une insuffisance tarifaire. Il peut également être appliqué pour réduire le besoin en capital économique de façon significative.

Démarche

Le traité en quote-part faisant partie de la réassurance proportionnelle, contrairement aux deux autres, une commission de réassurance s'ajoute au compte de réassurance. Elle est calculée en fonction du taux de cession, des frais de gestion de sinistres et des frais d'acquisition comme détaillée dans le chapitre 1.

Afin de visualiser l'impact de la réassurance sur les indicateurs, plusieurs taux de cession ont été appliqués, de 10% à 90% avec un pas de 10% afin de traiter suffisament de programmes de réassurance . Tout en sachant qu'un taux de 90% se voit rarement appliqué sur le marché. En effet, d'après un article issus de l'Argus de l'assurance, en 2015, un taux de cession de 56% est établit pour la garantie catastrophe naturelle contre 8% en assurance automobile. Le traité en XS étant privilégié pour cette dernière.

Résultats

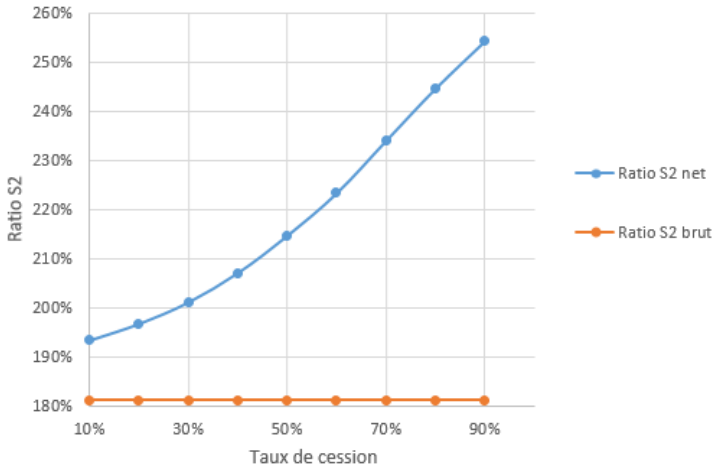

FIGURE 3.12 – Evolution du ratio de solvabilité pour un traité en quote-part

Comme attendu, le ratio de solvabilité explose plus le taux de cession augemnte jusqu'à atteindre 255% pour un taux de cession de 90%. Plus le taux de cession est élevé, plus

l'assureur cède de risques au réassureur. En effet, le SCR de souscription et de marché vont nettement diminuer. Il restera la contribution du SCR de contrepartie dans le SCR global. Ainsi le montant de SCR est nettement inférieur au montant brut.

Afin de visualiser cet impact, quelques montants ont été répertoriés dans le tableau 3.7 :

Taux de cession (en %)	30	50	70	90
SCR (€)	51 478 821	45 155 563	40 027 762	36 862 702
SCR de souscription non-vie (€)	47 849 180	41 840 041	39 904 906	33 766 354
SCR de marché (€)	4 493 554	3 127 067	1 892 523	825 237
SCR de contrepartie (€)	1 513 521	2 344 590	3 178 104	4 014 061

TABLE 3.7 – Evolution des SCR par risque pour un traité en quote-part

Il apparaît que le montant de SCR est nettement plus diminué en appliquant ce type de traité. En revanche, le risque de défaut de la contrepartie est extrêmement élevé comparé aux autres traités. Pour une portée de 40 millions dans un traité XS, le risque de défaut représente 80% de ce même risque pour un traité en quote-part, de cession à 90%. Cela s'explique par le fait que le montant de sinistres cédés en quote-part est 94 fois plus important que pour un traité en XS pour ces mêmes paramètres. Il est à noter que le SCR de souscription non-vie reste tout de même majoritaire quel que soit le traité appliqué.

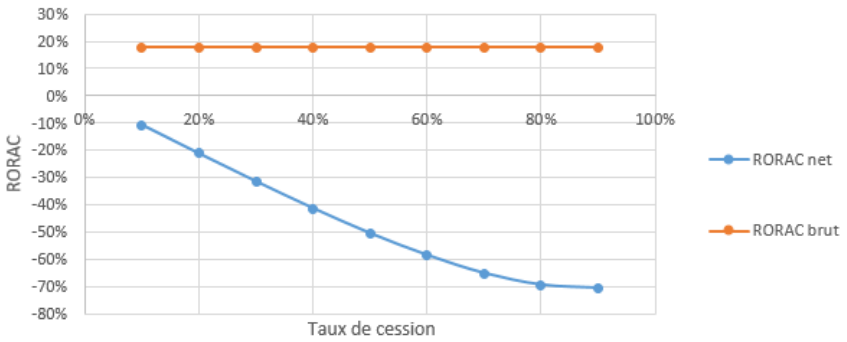

FIGURE 3.13 – Évolution du RORAC pour un traité en quote-part

L'allure de l'indicateur de productivité des risques est majoritairement à la baisse puis remonte legèrement en fin de parcours. En effet, le SCR diminu et le résultat technique est négatif et chute jusqu'au taux de cession de 80% puis remonte mais reste négatif. Cela s'explique par le fait que le solde de réassurance remonte à partir d'une cession à 80%. La commission établit dans le chapitre 1 augmente avec la portée et vient alterner le sens du solde technique à partir d'un taux de cession à 80%. D'où l'allure de la courbe du RORAC.

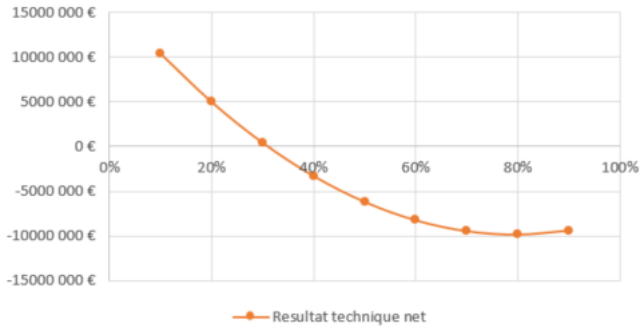

FIGURE 3.14 – Évolution du solde de réassurance pour un traité en quote-part

Comme pour les traités précédents, la rentabilité de l'assureur est très fortement dégradée puisque le montant de primes cédées s'exprime par le même pourcentage de cession de sinistre. Or comme le Loss ratio est inférérieur à un, le montant de primes cédées est plus élevé que celui des sinistres cédés donc le résultat de réassurance est négatif malgré la compensation de la commission de réassurance. Cet impact sera plus marqué sur le graphique du ratio combiné.

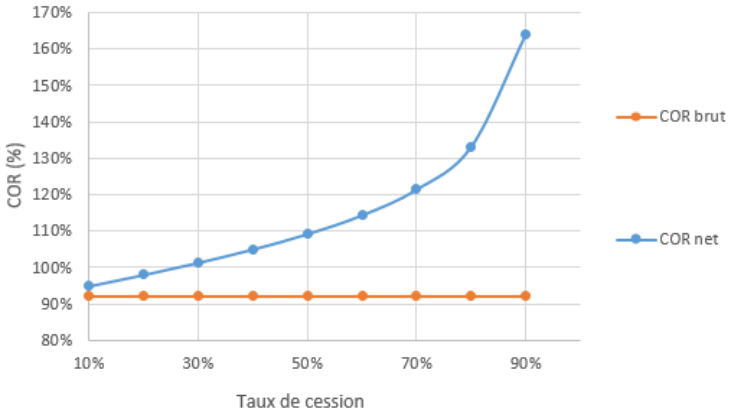

FIGURE 3.15 – Evolution du COR pour un traité en quote-part

Comme expliqué dans le chapitre 1, la commission de réassurance est calculée afin de compenser les dépenses de l'assureur concernant des frais de gestion de sinistres et des frais d'acquisition. Les frais d'administration resteront entièrement à sa charge. Ainsi, plus le taux de cession augmente, plus le ratio combiné est élevé et de façon de plus en plus franche. En effet, la cédante se retrouve à payer des frais d'administration (de l'ordre de 25 millions d'euros) avec un montant de prime qui diminue tandis que les frais sont fixes. L'assureur va donc puiser dans ses ressources pour financer les frais d'acquisition et son résultat en subira les conséquences. Il en est de même pour son indicateur d'investissement.

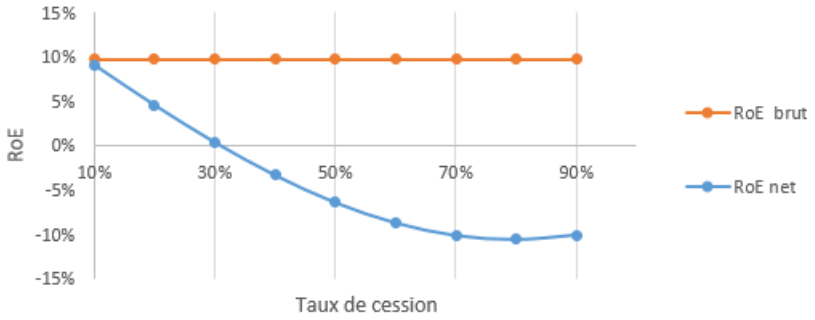

FIGURE 3.16 – Évolution du RoE pour un traité en quote-part

Le résultat technique net étant négatif, le RoE l'est également. De plus, l'allure de sa courbe est semblable à celle du RORAC puisque le numérateur et le dénominateur diminuent de façon similaire.

Ainsi, comme précisé dans l'introduction du traité en quote-part, celui-ci est très efficace pour réduire le besoin en capital réglementaire et protéger l'assureur contre certains risques. En revanche, la rentabilité de la cédante sera en ce sens nettement plus dégradée qu'après une application de la réassurance non proportionnelle. Cela est une des caractéristiques de ce traité, l'assureur est conscient qu'il va devoir céder une partie de son résultat pour se protéger contre les risques qui le menacent.

Structures complexes

Les programmes de réassurance peuvent faire intervenir plusieurs traités, que l'on appelle aussi combinaison de traités. Dans ce cas là, l'assureur souscrit plusieurs traités de réassurance qui peuvent être appliqués au net de réassurance du précédent. Selon l'ordre des traités, le montant de reste à charge de la cédante varie, les premiers réassureurs payent plus que les suivants.

Il est courant de rencontrer un traité en quote-part après un excédent de sinistre ou inversement.

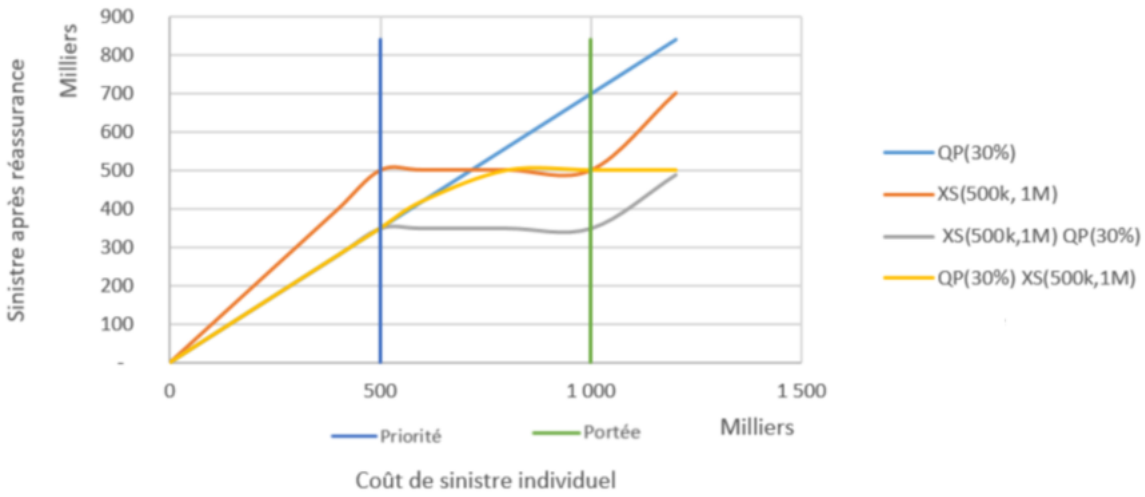

FIGURE 3.17 – Impact des programmes de réassurance sur la sinistralité

Comme le montre la figure 3.17, le traité en quote-part libère un certain pourcentage de la charge de sinistres (30% dans le cas de cet exemple). Or pour un loss ratio inférieur à 1, la réassurance a pour effet de dégrader la rentabilité de l'assureur puisqu'il va céder plus de primes qu'il ne recevra de compensation (sinistres cédés et commission de réassurance). En revanche, la mise en place de ce dispositif aura un effet positif sur la solvabilité de celui-ci. A l'inverse, le traité en excédent de sinistre est choisi de tel sorte à écrêter ses sinistres en fonction d'un seuil de rentabilité acceptable fixé.

L'intérêt de la combinaison de traités est d'obtenir un équilibre entre ces deux situations. Il est d'ores et déjà possible de constater qu'une combinaison commençant par un excédent de sinistre écrête davantage la queue de distribution. Ce traité sera donc probablement plus cher qu'une combinaison débutant par une quote-part.

Deux combinaisons de traités ont été réalisées dans cette étude. Dans un premier temps, un traité en quote-part à 30% a été appliqué à la sinistralité puis un excédent de sinistre.

Afin de comparer la pertinence des combinaisons de traités, la priorité et la portée seront ajustées de sorte à obtenir une prime pure proche de celle du traité XS(3M, 20M) puisque c'est le plus pertinent parmi ceux étudiés précédemment. Ainsi après une quote-part à 30%, la portée s'établit à 40 millions d'euros et la priorité à 2,1 millions d'euros.

Dans un second temps, un traité en excédent de sinistre est appliqué puis une quote-part à 30% également. Ici encore les montants de portée et de priorité doivent être ajustés. Elles s'établissent respectivement à 24 millions d'euros et 2,1 millions d'euros.

Une première constatation met en lumière l'effet de levier que présente une combinaison de traités commençant par un traité en quote-part. En effet, à niveau de prime pure équi-

valent, la première combinaison (quote-part puis excédent de sinistre) à une plus forte portée que la seconde pour une même priorité. Le tableau 3.8 met en avant cet impact :

Traités	XS	QP(30%) XS	XS QP(30%)
Prime pure (en euros)	5 329 469	5 321 859	5 362 073
Priorité (en millions d'euros)	3	2,1	2,1
Portée (en millions d'euros)	20	40	24

TABLE 3.8 – Montant de couverture par traité selon le niveau de prime pure

De façon générale, la combinaison de traité offre une meilleure couverture à l'assureur à prime pure équivalente.

Les indicateurs d'appétence aux risques ont été calculés dans le cas de ces deux combinaisons comme le montre le tableau 3.9 :

Combinaison traité	QP(30%) XS(2,1M; 40M)	XS(2,1M; 24M) QP(30%)
CoR	122%	131%
RORAC	-20%	-20%
ROE	-30%	-29%
Ratio S2	147%	146%

TABLE 3.9 – Indicateurs d'appétence aux risques après combinaisons de traités

Il ressort de ce tableau que la combinaison de traités fait augmenter très nettement l'indicateur de rentabilité. En effet, la tarification de la réassurance tient compte d'un coefficient de sécurité qui est plus fort pour une combinaison de traité que pour un unique traité. Celui-ci vient impacter la prime commerciale à la hausse. En ce qui concerne la solvabilité, son critère d'optimisation reste inférieur à celui souhaité selon les stratégies de l'assureur mais s'en approche plus significativement que ceux des traités en excédent. En revanche, la rentabilité est bien trop dégradée pour envisager de mettre en place un tel dispositif.

Les structures complexes ne seront donc pas mises en place dans la suite.

Il faut avoir en tête que la réassurance n'est pas un moyen pour la cédante de faire du profit. Elle va lui permettre de transférer ses risques moyennant une partie de son résultat. Le choix d'une couverture de réassurance sera alors orienté par un arbitrage entre l'exigence de solvabilité et la rentabilité par rapport à une situation donnée. Un assureur ayant une

solvabilité proche de 100% peut accepter de détériorer son résultat de façon provisoire afin de libérer du capital.

3.5 Arbitrage des exigences de solvabilité et de rentabilité

Après avoir appliqué les programmes de réassurance sur la sinistralité simulée, les critères d'optimisation ont pu être calculés. Les couvertures de réassurance choisies pour l'étude peuvent ainsi être représentées graphiquement selon ces critères. Le graphique obtenu fait alors apparaître une frontière efficiente. Cette courbe représente les combinaisons offrant une rentabilité optimum pour un niveau de risque donné. Elle a été tracée comme le montre la figure 3.18 à l'aide de l'interpolation cubique présentée au début de ce chapitre :

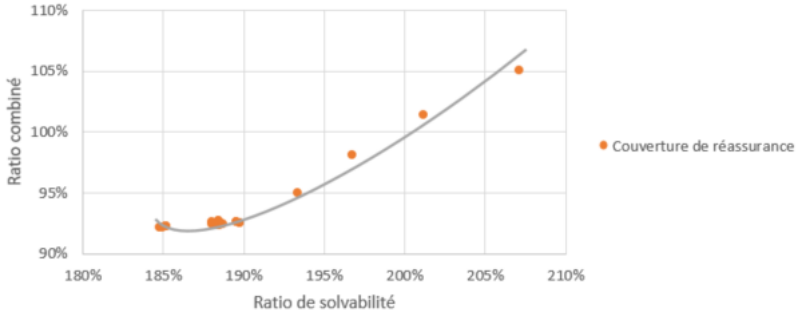

FIGURE 3.18 – Frontière efficiente

Les traités en excédent de perte et de sinistre ont des ratios de solvabilité qui varient peu et se situent autour entre 184% pour le traité en excédent de perte et 188% pour ceux en excédent de sinistre. Les couvertures de réassurance correspondant à ces traités sont donc regroupés dans la partie inférieure gauche de la figure. En revanche, les traités en quote-part se distinguent plus largement vers la droite du fait de la forte cession de risque qui fait augmenter le ratio de solvabilité.

Une première constatation de ce graphique suggère que les traités en excédent sont moins coûteux, donc dégrade moins fortement la rentabilité, que le traité en quote-part. Parallèlement ils libèrent moins de capital. En effet, en cas d'application d'un XS ou d'un SL, l'épaisseur de la queue de distribution sera impactée à la baisse alors qu'une quote-part s'appliquera dans les mêmes proportions sur tout le portefeuille.

Les contraintes d'appétence aux risques exigent un ratio de solvabilité de 190%. Ainsi, les traités en excédent de perte sont d'ores et déjà écartés comme une large partie des traités en quote-part.

Les résultats précédents permettent de déduire le traité le plus pertinent pour répondre aux contraintes d'appétence aux risques. Le traité en quote-part de taux de cession à 10% offre un ration de solvabilité de 193% et un ratop combiné de 95%. Let traité en excédent de sinistre de priorité de cinq million et de portée de quarante million offre un ratio combiné de 92,58% et un ratio de solvabilité de 189%. Le traité optimal est choisi par la cédante de sorte à minimiser le rapport $\frac{Sinistres+Frais}{Primes}$. Par interpolation, le CoR obtenu pour un ratio de solvabilité de 190% est de 92,44%, ce qui fait du traité en excédent de sinistre XS(5M, 40m) le traité optimal.
In fine le traité optimal est :

Traité	**Porté**	**Priorité**	**Ratio combiné**	**Ratio de solvabilité**
XS	40M	5M	92,58%	189, 78%

TABLE 3.10 – Caractéristiques du traité optimal

La priorité de l'assureur dans ce mémoire est de stabiliser et maintenir sa solvabilité, c'est pourquoi le choix d'un traité en excèdent de sinistres ou de perte s'avèrent être efficaces. En effet, ces traités sont idéals pour rehausser légèrement la solvabilité tout en limitant les pertes financières.

Les traités en quote-part, quant-à-eux, sont employés en matière de transfert massif de risque, de protection contre une insuffisance tarifaire ou lorsque le portefeuille est encore en phase d'apprentissage. De plus, comme expliqué à la section précédente, une combinaison de traité n'est pas raisonnable pour l'assureur financièrement et ont été écartées de l'analyse.

Un traité en excédent de sinistre est une solution traditionnelle en réassurance qui peut être complété par des aggregates en fonction d'une franchise ou d'une limite choisies selon l'appétence aux risques de l'assureur. Il est davantage utilisé pour couvrir une intensité de la sinistralité que d'une insuffisance tarifaire. Il apparaît donc être le meilleur choix au regard du portefeuille étudié et des critères d'optimisation.

L'outil d'optimisation de la réassurance est alors employé comme aide à la décision quant au choix d'une couverture de réassurance optimale. Il permet de sélectionner un programme de réassurance et de le paramétrer mais ne présente un choix définitif.

CONCLUSION

Le principe de l'assurance repose sur la mutualisation des risques. Or, cela nécessite une bonne maîtrise de ces derniers. Afin d'améliorer ses résultats, l'assureur dispose de différents leviers pour atténuer le risque présent dans son portefeuille, c'est-à-dire des risques de forte intensité et d'occurrence faible. Cette atténuation peut s'effectuer via différents léviers. Le plus couramment utilisé est la réassurance, c'est un levier majeur de réduction du besoin en capital. De plus, l'entrée en vigueur de la directive européenne Solvabilité II met en avant cette technique de part son importance dans le calcul du capital économique.

Afin de se protéger, l'assureur cherche à souscrire à une couverture de réassurance optimale selon certaines contraintes définies par appétence aux risques. Le pilier II de la directive impose aux assureurs de satisfaire des exigences stratégiques selon leur profil de risques.

Ainsi, l'optimisation de la réassurance doit permettre à la cédante de réduire son risque tout en limitant les pertes financières. Pour cela, plusieurs leviers sont à considérer tels que le traité employé, les paramètres de couverture ou encore le prix de la réassurance. L'outil d'optimisation repose sur une approche par scénarii qui consiste à comparer différentes stratégies de réassurance selon des contraintes d'appétence aux risques. Les critères d'analyse considérés dans cette étude sont le ratio combiné et le ratio de solvabilité. Ainsi, cet outil permet de mettre en lumière l'impact des différents leviers de réassurance utilisés sur les critères d'optimisation.
Parmi les couvertures de réassurance étudiées, la stratégie employée a mis en avant celles se révélant être les plus efficaces pour la cédante. Afin de satisfaire les attentes de l'assureur étudié, un traité en excédent de sinistre de priorité 5M et ed porté 40M apparaît être la couverture optimale. Les traités en excédent de perte ne permettent pas de libérer suffisamment de capital et les quote-part ou les combinaisons de traités dégradent fortement la rentabilité. Cet outil est un outil d'aide à la décision quant au choix d'une couverture de réassurance. Il permet de paramétrer le traité choisi mais ne présente pas un choix définitif.

Néanmoins, l'outil d'optimisation créé à cet effet présente des limites relevant de certaines hypothèses fortes appliquées. D'une part, la non application de franchises et limites en réassurance non-proportionnelle aurait revu le coût de la réassurance à la baisse et ainsi produit une combinaison de traités moins onéreuse. D'autre part, le calcul du SCR a été simplifié en se restreignant à l'étude de trois sous-module, un modèle interne partiel aurait permis de mieux prendre en compte l'impact de la réassurance. L'effet des négociations des différentes parties a également été écarté.

Face à l'incertitude de la sinistralité due au coronavirus, le recours à la réassurance doit être encore plus étudié. Des fluctuations importantes sur une courte durée se sont déjà manifestées durant l'année 2020 avec une première baisse des dommages auto lors du premier confinement [1] suivie d'une hausse [2] à la sortie de celui-ci [Abadie, Septembre 2020].

Une remise en question des méthodes de provisionnement et le gel des cotisations pourraient inciter les assureurs automobile à se protéger davantage contre les futurs risques. Les primes de réassurance pourraient augmenter, ce qui est déjà le cas comme l'a annoncé la [SCOR, 2021] avec une hausse des cotisations de 12,2% lors des renouvellements de janvier 2021 sur la branche *PC Lines* incluant les contrats de responsabilité civile auto.

L'augmentation du coût de la réassurance impliquera une translation vers le haut de la frontière efficiente puisque la rentabilité de l'assureur sera d'autant plus réduite qu'il cédera de risques. Les stratégies de réassurance devront alors être reconsidérées.

1. Diminution de 75% des accidents de la route et 53% du nombre de vols de voitures
2. Hausse de 2% des accidents survenus au mois d'août 2020 par rapport à l'an dernier due au nombre massif de Français passant leurs vacances dans l'Hexagone cet été là.

BIBLIOGRAPHIE

Abadie, A. (Septembre 2020). Auto, MRH : vers une nouvelle hausse des tarifs en 2021. *Argus de l'assurance*.

Acte délégués (2014). *Journal officiel de l'Union européenne*.

assurance, I. (décembre 2020). Convention IRCA. *Guide de l'assurance auto*.

Banque de France, A. (2019). La situation des assureurs soumis à Solvabilité II en France au premier semestre 2019. *Analyses et synthèses*.

Banque de France, A. (Février 2019). La rentabilité technique des organismes d'assurance non-vie en 2017. *Analyses et synthèses*.

Boyer-Chammard, R. (2019-2020). Théorie du risque et de la réassurance. Université Paris Dauphine.

CCR-Re (2019). L'indemnisation des préjudices corporels graves en RC Automobile.

FFA (2018). L'assurance française - Données clé de 2018.

Robert, C. Y. (Avril 2018). Théorie des Valeurs Extrêmes. ISFA - Université Lyon 1.

SCOR (2017). De la gestion du capital à son optimisation. *Lettre technique*.

SCOR (2021). SCOR: hausse des primes de réassurance de 15,9% en janvier. *Capital*.

Walhin, J.-F. (2007). La réassurance. Larcier.

ANNEXES

Annexe A

Plusieurs étapes sont nécessaires afin de déterminer le montant à partir duquel un sinistre est considéré comme "extrême". Elle sont détaillées ci-dessous.

1. **Le domaine d'attraction**

Avant de s'engager dans une analyse statistiques détaillée, il est important d'examiner les données.
Le théorème de Fisher-Tippett fournit, en quelque sorte, la contrepartie du Théorème Central Limite (TCL) dans le cas d'événements extrêmes. Cependant, contrairement au TCL, où la loi normale est la seule loi limite possible, dans le cas des extrêmes, trois types de loi limite sont possibles D'après les travaux de Fisher et Tippett en 1928, quelque soit la distribution de la sinistralité, la loi de la queue de distribution a trois lois limites possibles :

- Fréchet ($\xi > 0$)
- Weibull ($\xi < 0$)
- Gumbel ($\xi = 0$)

où ξ est appelé l'indice de queue et donne une information sur l'épaisseur des queues de distribution.
En effet, si $\xi > 0$, la queue de distribution est épaisse, si $\xi = 0$, elle est dite intermédiaire. Sinon elle est fine.

FIGURE 3.19 – QQ plot d'une loi exponentielle et des données client

Ici, le QQ plot de la loi exponentielle à été tracé. il va permettre de comparer les distributions empirique et théorique, en particulier leur queue de distribution.
Il apparait que la courbe est légèrement concave. Cela signifie que la queue de distribution de la sinitralité étudiée est plus épaisse que celle d'une loi exponentielle.
Les lois à queue épaisse sont de type Pareto, Log-gamme ou Cauchy. Or, les distributions de type Pareto sont définies par
$1 - F(x) \sim_{x\to\infty} \frac{c}{x^\alpha}$, avec c>0 et $\alpha > 0$.
De plus, la théorie nous apprend que $\alpha = \frac{1}{\xi}$.
D'où, $\alpha > 0 \Rightarrow \xi > 0$.
Ainsi, cette concavité se traduit par l'appartenance au domaine de Fréchet ($\xi > 0$), la théorie des valeurs extrêmes s'applique.

A présent, il va s'agir de déterminer un intervalle contenant le seuil de sinistres des graves. L'enjeux est de trouver un seuil suffisamment élevé pour pouvoir appliquer les résultats de convergence en loi mais pas trop pour avoir une bonne adéquation de la queue de distribution.

2. **Mean Excess Plot**

La méthode « excès moyen » est un outil utilisé pour faciliter le choix du seuil. Elle consiste à déterminer le montant moyen de dépassement de seuil.
Il s'agit de tracer le graphe (u, e(u)) avec u le seuil et $e(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n} max(x_i - u)}{\sum_{i=1}^{n} 1_{x_i<u}}$.
Le seuil se détermine lorsque la courbe devient approximativement linéaire.
La mean excess plot à été tracée ci-dessous :

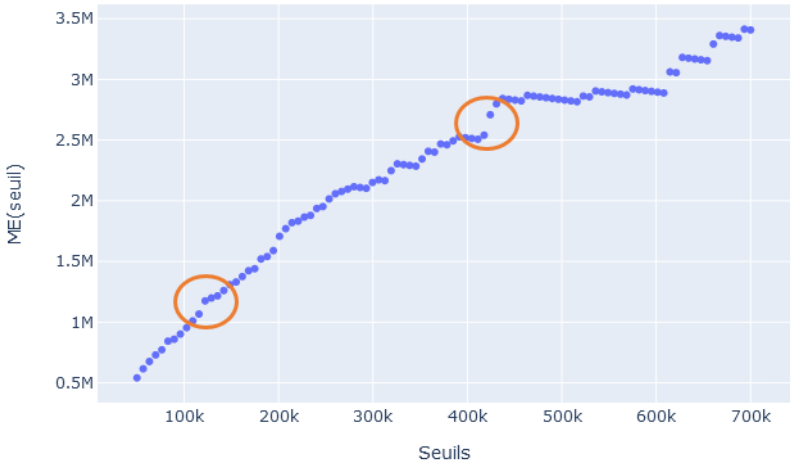

FIGURE 3.20 – Mean Excess Plot

Il apparait que la courbe du dépassement moyen est croissante. D'après la théorie, la ME plot d'une loi de type pareto est croissante, de pente $\frac{\xi}{1-\xi}$. Il est d'ores et déjà possible de supposer que la queue de distribution suit une loi de pareto de paramètre $\frac{1}{\xi}$.

Deux paliers se détachent, le premier autour de 100 000 et le second de 420 000.
Une première estimation situerait ces seuils entre 80 000 et 150 000 pour le premier et 400 000 et 450 000 pour le second.

L'utilisation de différents estimateurs vont permettre de réduire ces intervalles.

Cette méthode graphique de détermination de seuil repose aussi sur la stabilité de la loi GPD qui sera étudiée au point 4.

3. **Estimateurs de queue**

Trois estimateurs vont être étudiés afin de déterminer de façon plus précise le seuil des sinistres graves.
Les graphes de ces derniers seront tracés en fonction du seuil u, ou plutôt en fonction du nombre de sinistres supérieurs au seuil u, noté k dans la suite.
Plus k est petit, plus l'intervalle de confiance de l'estimateur est large, ce qui signifie plus de volatilité. Cependant, il est souhaité que k soit le plus petit possible, car le biais de l'estimateur augmente avec k. Il consiste donc à choisir le plus petit k pour lequel l'estimateur ξ se stabilise.

• Estimateur de Pickands

L'avantage de cet estimateur est qu'il est valable quelle que soit la distribution des

extrêmes. Cependant, il est très volatile et dépend sensiblement de la taille de l'échantillon sur lequel on travaille. En effet, comme observable dans la formule, l'estimation se base sur très peu de points : $\frac{1}{ln(2)} ln(\frac{X_{n-2}-X_{n-2k}}{X_{n-2k}-X_{n-4k}})$, avec X la variable de coûts.

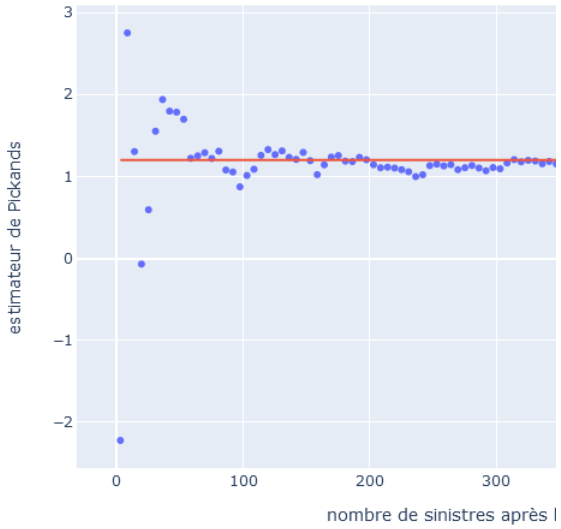

FIGURE 3.21 – Estimateur de Pickands pour les graves

FIGURE 3.22 – Estimateur de Pickands pour les larges

Dans ce cas de figure, les estimateurs convergent pour k compris entre 140 et 200 pour le premier cas et entre 57 et 74 dans le second. Cela donne des seuils apparetant aux intervalles [100 000 ; 140 000] et [320 000 ; 437 000].

• Estimateur de Hills

L'estimateur de Hill est l'estimateur le plus utilisé dans l'estimation du paramètre de queue, car il offre une estimation plus stable, donc plus efficace que l'estimateur de Pickands. Il est utilisable que pour les distributions du domaine d'attraction de Fréchet. Il est donc applicable dans notre cas.
L'estimateur de Hill s'exprime par la formule suivante : $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} ln(\frac{X_{n-i}}{X_{n-k}})$.

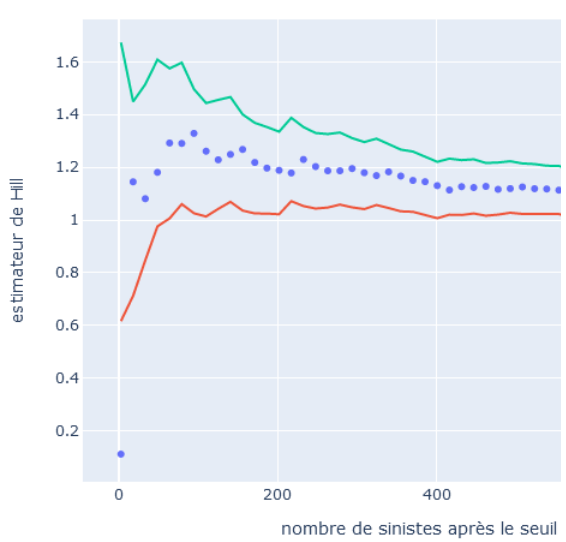

FIGURE 3.23 – Estimateur de Hill pour les intermédiaires

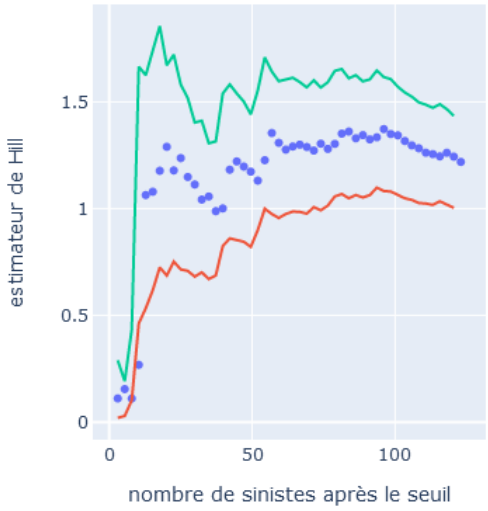

FIGURE 3.24 – Estimateur de Hill pour les graves

Les estimateurs commencent à converger aux alentour de 160 à 220 sinistres au-dessus du seuil dans le cas des intermédiaires et entre 58 et 100 pour les graves. Les seuils alors retenus appartiennent aux intervalles suivants : [90 000 ; 120 000] et [207 000 ; 435 000].

• Estimateur de Dekkers-Einmalh-de Hann (DEdH)

Le dernier estimateur étudié est l'estimateur de Dekkers-Einmalh-de Hann d'où son abréviation DEdH. C'est une généralisation de l'estimateur de Hill à tous les domaines. Il s'exprime à l'aide de la formule suivante : $\xi^{H}_{n,m}(1) + 1 - \frac{1}{2}[1 - \frac{(\xi^{H(1)}_{n,m})^2}{\xi^{H(2)}_{n,m}}]^{-1}$,
avec $\xi^{H(r)}_{n,m} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m-1}(ln(X_{n-i}) - ln(X_{n-m}))^r$, r = 1, 2, ...
Il est à noter que $\xi^{H(1)}_{n,m}$ correspond à l'estimateur de Hill.

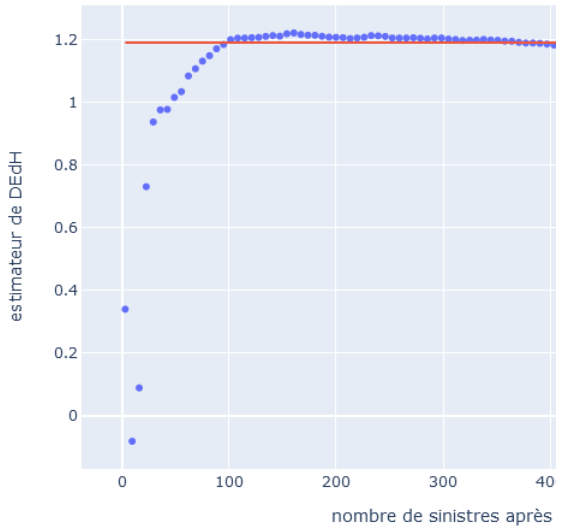

FIGURE 3.25 – Estimateur de DEdH pour les intermédiaires

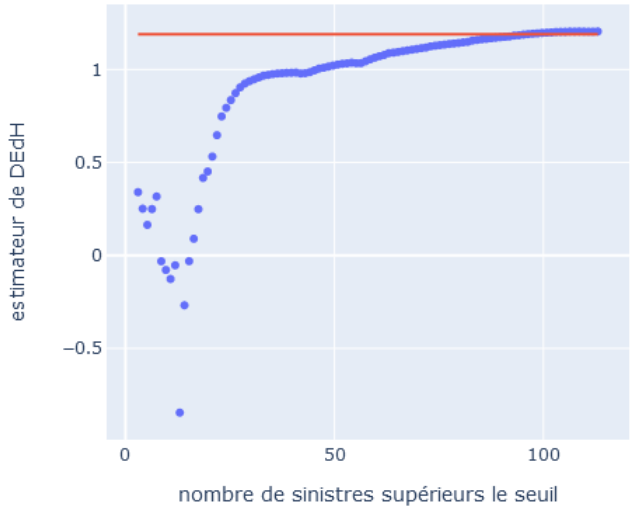

FIGURE 3.26 – Estimateur de DEdH pour les graves

Pour ce dernier estimateur, la convergence s'opère pour des seuils compris entre 100 000 et 110 000, et 207 000 et 321 000.

4. **Stabilité des lois de type pareto**

La distribution de Pareto généralisée (GPD) est utilisée pour modéliser les observations des dépassements au delà d'un seuil.
Il sera supposé dans la suite que les dépassements Yu,1,...,Yu,n au delà du seuil u suivent une telle loi GPD(σ_u, ξ).
Une des propriétés de cette loi nous apprend que quelque soit le seuil u choisi, alors pour tout seuil supéreir à celui-ci v > u, la variable aléatoire associée à ce seuil v suit également une loi de paréto généralisée de parammètre GPD($\sigma_u + \xi(v-u)$, ξ). Le nouveau paramètre d'échelle est donc $\sigma_v = \sigma_u + \xi(v-u)$.
En notant $\sigma^* = \sigma_u + \xi(v-u)$, si la variable aléatoire suit une loi de Pareto Généralisée pourle seuil u, alors les paramètres (σ^*, ξ) seront approximativement constants pour des seuils v plus grands.
Le cas de ξ a été observé lors de l'analyse des différents indicateurs. Etudions à présent la stabilité du paramètre d'échelle.

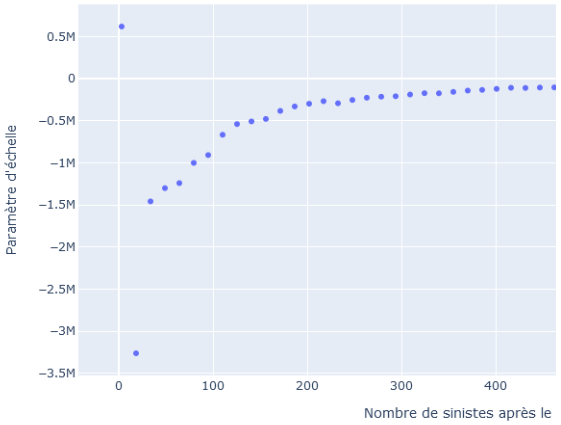

FIGURE 3.27 – Stabilité du paramètre d'échelle d'une loi GPD pour les intermédiaires

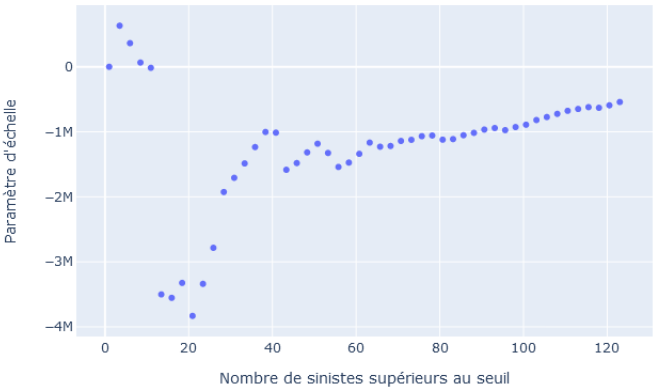

FIGURE 3.28 – Stabilité du paramètre d'échelle d'une loi GPD pour les graves

La propriété de stabilité des paramètres d'une loi de pareto généralisé permet de fixer les seuils des sinistres extrèmes à 120 000€ et 430 000€ d'après les graphes ci-dessus.
Cependant, la théorie seule ne permet pas de fixer le seuil de cession mais donne un ordre de grandeur de ce montant. Pour rester au plus proche des données du marché, le second seuil considéré sera de 500 000€.
Finalement, un seuil de sinistres à 120 000 € sera retenu pour les sinistres intermédiaires et de 500 000€ pour les sinistres graves.

Annexe B

Test de Kolmogorov smirnov pour les sinistres graves

Seuil de 500 000

Loi	p-value	Statistique
Cauchy	0,005683119	0,22901971
Pareto généralisé	0,14569121	0,152584905
Log-gamma	1,65108E-05	0,322830621
Pareto	0,449812871	0,114554922
Student	0,005997743	0,227963847
Log-normale	0,332338439	0,116100926

TABLE 3.11 – Caractéristiques des lois pour un seuil de 500 000

Le paramètre de la loi de Pareto dans ce cas est de 0,821517252.

Seuil de 600 000

Loi	p-value	Statistique
Cauchy	0,003730012	0,243822529
Pareto généralisé	0,329173528	0,129803319
Log-gamma	3,9332E-05	0,319545927
Pareto	0,413201696	0,121172863
Student	0,004299564	0,241051697
Log-normale	0,217732807	0,144186054

TABLE 3.12 – Caractéristiques des lois pour un seuil de 600 000

Le paramètre de la loi de Pareto dans ce cas est de 0,906225559.

Seuil de 700 000

Loi	p-value	Statistique
Cauchy	0,003865469	0,26728552
Pareto généralisé	0,248678556	0,153605893
Log-gamma	0,000781694	0,299343693
Pareto	0,349488938	0,140244494
Student	0,002550457	0,276006913
Log-normale	0,25884501	0,152093344

TABLE 3.13 – Caractéristiques des lois pour un seuil de 700 000

Le paramètre de la loi de Pareto dans ce cas est de 0,84906964.

Seuil de 800 000

Loi	p-value	Statistique
Cauchy	0,000912861	0,303497717
Pareto généralisé	0,036008821	0,2193412
Log-gamma	0,001196823	0,298149939
Pareto	0,191222419	0,167105401
Student	8,60942E-05	0,346367953
Log-normale	0,171673784	0,15385994

TABLE 3.14 – Caractéristiques des lois pour un seuil de 800 000

Le paramètre de la loi de Pareto dans ce cas est de 0,908324243.

Seuil de 900 000

Loi	p-value	Statistique
Cauchy	0,000912861	0,303497717
Pareto généralisé	0,036008821	0,2193412
Log-gamma	0,001196823	0,298149939
Pareto	0,191222419	0,167105401
Student	8,60942E-05	0,346367953
Log-normale	0,171673784	0,15385994

TABLE 3.15 – Caractéristiques des lois pour un seuil de 900 000

Le paramètre de la loi de Pareto dans ce cas est de 1,01714353.

Seuil de 1 000 000

Loi	p-value	Statistique
Cauchy	0,000275362	0,338547795
Pareto généralisé	0,051672968	0,217273016
Log-gamma	0,00294603	0,2903672
Pareto	0,107571085	0,194017925
Student	0,000478527	0,328001404
Log-normale	0,001150623	0,310450831

TABLE 3.16 – Caractéristiques des lois pour un seuil de 1 000 000

Le paramètre de la loi de Pareto dans ce cas est de 1,04662649.

Test de Kolmogorov smirnov pour les sinistres intermédiaires

Seuil graves 900000

Seuil intermédiaires

	120000		125000		130000		135000		140000	
Loi	p-value	statistique	p-value	statistique	p-value	statistique	p-value	statistique	p-value	statistique
Cauchy	1,7E-05	0,2037	6,6E-05	0,2087	2,7E-05	0,22013	2,8E-05	0,22172	1,9E-05	0,22851
Pareto généralisée	0,7275	0,21796	0,20024	0,09816	2,5E-06	0,24252	0,43257	0,08158	0,00089	0,18694
Log-gamma	4,5E-05	0,00671	0,00028	0,19352	0,00051	0,18929	0,00059	0,18936	0,00069	0,19004
Pareto	0,10265	0,10762	0,06825	0,11916	0,20691	0,09871	0,22861	0,09734	0,3687	0,08696
Student	4E-05	0,20596	0,00019	0,19789	0,00033	0,19435	0,00045	0,1925	0,00058	0,1921
Log-normale	4,3E-83	0,78769	3,1E-93	0,84273	1E-61	0,72876	1,7E-64	0,74722	7E-49	0,67317

TABLE 3.17 – Caractéristiques des sinsitres intermédiaires

Annexe C

Loi de Pareto généralisée

La loi de pareto généralisée à pour fonction de répartition :
$G_{\xi,\sigma(u)}(x) = 1 - (1 + \xi\frac{x}{\sigma(u)})^{-\frac{1}{\xi}}$ pour $\xi \neq 0$ où x ≥ 0 si $\xi > 0$ et $0 \leq$ x $\leq -\sigma(u)\xi$ si ξ<0 avec σ une fonction positive.
Dans le cadre de ce mémoire, $\sigma(u) =$ u $\mapsto 1$ et ξ est le paramètre de forme.

Loi de Pareto

La loi de Pareto à les caractéristiques suivantes :
Fonction de densité : $f(x) = \frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}}\mathbb{1}_{[x_0;\infty[}(x)$.
Fonctionn de répartition : $F_X(x) = 1 - (\frac{x_0}{x})^\alpha$.
Le paramètre α est déterminé par maximum de vraissemblance tel que $\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=0}^{n} ln(\frac{x_i}{x_0})}$.

Loi tronquée

Posons X une variable aléatoire suivant une loi de Pareto. Soit Y une variable aléatoire de fonction de répartition F_Y qui suit la loi de X tronquée à gauche en une valeur g et à droite en une valeur d.
La fonction de répartition de Y s'écrit alors :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > d \\ \frac{F_X(x)-F_X(g)}{F_X(d)-F_X(g)} & \text{si } g < x \leq d \\ 0 & \text{si } x \leq g \end{cases}$$

et la fonction de densité est :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{F_X(d)-F_X(g)} & \text{si } g < x \leq d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les variables aléatoires issues d'une loi tronquées sont obtenues en appliquant une variable de loi uniforme $U_{[0;1]}$ à la fonction inverse de $F_Y(x)$ où
$F_Y^{-1}(x) = \frac{x_0}{(1-x(F_X(d)-F_X(g)))^{\frac{1}{\alpha}}}$.

Dans le cadre de ce mémoire, une première loi tronquée s'applique sur l'intervalle [120 000 ; 900 000] et une seconde sur [900 000 ; 100 000 000].
La loi des sinistres larges est également tronquée à droite puisque les sinistres de la garantie RCC sont supposés majorés à cent millions d'euros.

Annexe D

p ddl	0,999	0,995	0,99	0,98	0,95	0,9	0,8	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,001
1	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0039	0,0158	0,0642	1,6424	2,7055	3,8415	5,4119	6,6349	7,8794	10,8276
2	0,0020	0,0100	0,0201	0,0404	0,1026	0,2107	0,4463	3,2189	4,6052	5,9915	7,8240	9,2103	10,5966	13,8155
3	0,0243	0,0717	0,1148	0,1848	0,3518	0,5844	1,0052	4,6416	6,2514	7,8147	9,8374	11,3449	12,8382	16,2662
4	0,0908	0,2070	0,2971	0,4294	0,7107	1,0636	1,6488	5,9886	7,7794	9,4877	11,6678	13,2767	14,8603	18,4668
5	0,2102	0,4117	0,5543	0,7519	1,1455	1,6103	2,3425	7,2893	9,2364	11,0705	13,3882	15,0863	16,7496	20,5150
6	0,3811	0,6757	0,8721	1,1344	1,6354	2,2041	3,0701	8,5581	10,6446	12,5916	15,0332	16,8119	18,5476	22,4577
7	0,5985	0,9893	1,2390	1,5643	2,1673	2,8331	3,8223	9,8032	12,0170	14,0671	16,6224	18,4753	20,2777	24,3219
8	0,8571	1,3444	1,6465	2,0325	2,7326	3,4895	4,5936	11,0301	13,3616	15,5073	18,1682	20,0902	21,9550	26,1245
9	1,1519	1,7349	2,0879	2,5324	3,3251	4,1682	5,3801	12,2421	14,6837	16,9190	19,6790	21,6660	23,5894	27,8772
10	1,4787	2,1559	2,5582	3,0591	3,9403	4,8652	6,1791	13,4420	15,9872	18,3070	21,1608	23,2093	25,1882	29,5883
11	1,8339	2,6032	3,0535	3,6087	4,5748	5,5778	6,9887	14,6314	17,2750	19,6751	22,6179	24,7250	26,7568	31,2641
12	2,2142	3,0738	3,5706	4,1783	5,2260	6,3038	7,8073	15,8120	18,5493	21,0261	24,0540	26,2170	28,2995	32,9095
13	2,6172	3,5650	4,1069	4,7654	5,8919	7,0415	8,6339	16,9848	19,8119	22,3620	25,4715	27,6882	29,8195	34,5282
14	3,0407	4,0747	4,6604	5,3682	6,5706	7,7895	9,4673	18,1508	21,0641	23,6848	26,8728	29,1412	31,3193	36,1233
15	3,4827	4,6009	5,2293	5,9849	7,2609	8,5468	10,3070	19,3107	22,3071	24,9958	28,2595	30,5779	32,8013	37,6973
16	3,9416	5,1422	5,8122	6,6142	7,9616	9,3122	11,1521	20,4651	23,5418	26,2962	29,6332	31,9999	34,2672	39,2524
17	4,4161	5,6972	6,4078	7,2550	8,6718	10,0852	12,0023	21,6146	24,7690	27,5871	30,9950	33,4087	35,7185	40,7902
18	4,9048	6,2648	7,0149	7,9062	9,3905	10,8649	12,8570	22,7595	25,9894	28,8693	32,3462	34,8053	37,1565	42,3124
19	5,4068	6,8440	7,6327	8,5670	10,1170	11,6509	13,7158	23,9004	27,2036	30,1435	33,6874	36,1909	38,5823	43,8202
20	5,9210	7,4338	8,2604	9,2367	10,8508	12,4426	14,5784	25,0375	28,4120	31,4104	35,0196	37,5662	39,9968	45,3147
21	6,4467	8,0337	8,8972	9,9146	11,5913	13,2396	15,4446	26,1711	29,6151	32,6706	36,3434	38,9322	41,4011	46,7970
22	6,9830	8,6427	9,5425	10,6000	12,3380	14,0415	16,3140	27,3015	30,8133	33,9244	37,6595	40,2894	42,7957	48,2679
23	7,5292	9,2604	10,1957	11,2926	13,0905	14,8480	17,1865	28,4288	32,0069	35,1725	38,9683	41,6384	44,1813	49,7282
24	8,0849	9,8862	10,8564	11,9918	13,8484	15,6587	18,0618	29,5533	33,1962	36,4150	40,2704	42,9798	45,5585	51,1786
25	8,6493	10,5197	11,5240	12,6973	14,6114	16,4734	18,9398	30,6752	34,3816	37,6525	41,5661	44,3141	46,9279	52,6197
26	9,2221	11,1602	12,1981	13,4086	15,3792	17,2919	19,8202	31,7946	35,5632	38,8851	42,8558	45,6417	48,2899	54,0520
27	9,8028	11,8076	12,8785	14,1254	16,1514	18,1139	20,7030	32,9117	36,7412	40,1133	44,1400	46,9629	49,6449	55,4760
28	10,3909	12,4613	13,5647	14,8475	16,9279	18,9392	21,5880	34,0266	37,9159	41,3371	45,4188	48,2782	50,9934	56,8923
29	10,9861	13,1211	14,2565	15,5745	17,7084	19,7677	22,4751	35,1394	39,0875	42,5570	46,6927	49,5879	52,3356	58,3012
30	11,5880	13,7867	14,9535	16,3062	18,4927	20,5992	23,3641	36,2502	40,2560	43,7730	47,9618	50,8922	53,6720	59,7031
40	17,9164	20,7065	22,1643	23,8376	26,5093	29,0505	32,3450	47,2685	51,8051	55,7585	60,4361	63,6907	66,7660	73,4020
50	24,6739	27,9907	29,7067	31,6639	34,7643	37,6886	41,4492	58,1638	63,1671	67,5048	72,6133	76,1539	79,4900	86,6608
60	31,7383	35,5345	37,4849	39,6994	43,1880	46,4589	50,6406	68,9721	74,3970	79,0819	84,5799	88,3794	91,9517	99,6072
70	39,0364	43,2752	45,4417	47,8934	51,7393	55,3289	59,8978	79,7146	85,5270	90,5312	96,3875	100,4252	104,2149	112,3169
80	46,5199	51,1719	53,5401	56,2128	60,3915	64,2778	69,2069	90,4053	96,5782	101,8795	108,0693	112,3288	116,3211	124,8392
90	54,1552	59,1963	61,7541	64,6347	69,1260	73,2911	78,5584	101,0537	107,5650	113,1453	119,6485	124,1163	128,2989	137,2084
100	61,9179	67,3276	70,0649	73,1422	77,9295	82,3581	87,9453	111,6667	118,4980	124,3421	131,1417	135,8067	140,1695	149,4493
120	77,7551	83,8516	86,9233	90,3667	95,7046	100,6236	106,8056	132,8063	140,2326	146,5674	153,9182	158,9502	163,6482	173,6174
140	93,9256	100,6548	104,0344	107,8149	113,6593	119,0293	125,7581	153,8537	161,8270	168,6130	176,4709	181,8403	186,8468	197,4508
160	110,3603	117,6793	121,3456	125,4400	131,7561	137,5457	144,7834	174,8283	183,3106	190,5165	198,8464	204,5301	209,8239	221,0190
180	127,0111	134,8844	138,8204	143,2096	149,9688	156,1526	163,8682	195,7434	204,7037	212,3039	221,0772	227,0561	232,6198	244,3705
200	143,8428	152,2410	156,4320	161,1003	168,2786	174,8353	183,0028	216,6088	226,0210	233,9943	243,1869	249,4451	255,2642	267,5405
250	186,5541	196,1606	200,9386	206,2490	214,3916	221,8059	231,0128	268,5986	279,0504	287,8815	298,0388	304,9396	311,3462	324,8324
300	229,9634	240,6634	245,9725	251,8637	260,8781	269,0679	279,2143	320,3971	331,7885	341,3951	352,4246	359,9064	366,8444	381,4252
400	318,2596	330,9028	337,1553	344,0781	354,6410	364,2074	376,0218	423,5895	436,6490	447,6325	460,2108	468,7245	476,6064	493,1318
500	407,9470	422,3034	429,3875	437,2194	449,1468	459,9261	473,2099	526,4014	540,9303	553,1268	567,0698	576,4928	585,2066	603,4460
600	498,6229	514,5289	522,3651	531,0191	544,1801	556,0560	570,6680	628,9433	644,8004	658,0936	673,2703	683,5156	692,9816	712,7712
700	590,0480	607,3795	615,9075	625,3175	639,6130	652,4973	668,3308	731,2805	748,3591	762,6607	778,9721	789,9735	800,1314	821,3468
800	682,0665	700,7250	709,8969	720,0107	735,3623	749,1852	766,1555	833,4557	851,6712	866,9114	884,2789	895,9843	906,7862	929,3289
900	774,5698	794,4750	804,2517	815,0267	831,3702	846,0746	864,1125	935,4987	954,7819	970,9036	989,2631	1001,6296	1013,0364	1036,8260

TABLE 3.18 – Table du Khi deux

Annexe E

La méthode de Chain Ladder est un modèle de développement par cadence, basé sur un triangle de montant de sinistres cumulés ou de nombre de sinistres cumulés.
Elle repose sur les trois hypothèses suivantes :

- L'indépendance des prestations cumulées $C_{i,j}$ d'une période de survenance à l'autre
- L'existence d'une relation linéaire entre les prestations cumulées d'une année de développement à l'autre
- L'absence d'existence de tendance entre les résidus par rapport aux années de survenance

En nommant i et j les années de survenance et de développement respectivement, une estimation des coefficients de passage est donnée par : $\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j}}$, pour j = 1, ..., N avec N le nombre d'années de développement.
Grâce à ces coefficients, qui sont commun pour les années de survenance, peuvent être estimés :
Les charges ultimes par année de survenance : $\hat{C}_{i,N} = C_{i,N-i} x \prod_{j=N-i}^{N-1} \hat{f}_j$,
Les provisions par exercice de survenance :$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,N} - \hat{C}_{i,N-i}$,
Les provisions totales : $\hat{R} = \sum_{i=0}^{N} \hat{R}_i$.