

**Mémoire présenté devant l'Institut du Risk Management
pour la validation du cursus à la Formation d'Actuaire
de l'Institut du Risk Management
et l'admission à l'Institut des actuaires
le**

Par : Quentin POUGEOISE

Titre : Score multi-objectifs pour l'allocation stratégique et méthodes d'optimisation

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des
actuaires :

Membres présents du jury de l'Institut du Risk
Management :

Secrétariat :

Bibliothèque :

Entreprise :

Nom : MUTAVIE

Signature et Cachet :

MUTAVIE 9, rue des Iris CS 50000 - Bessines 79088 NIORT Cedex 9 Tél. 05 49 32 50 50
--

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Eddy BIRARD

Signature :



Invité :


Nom :

Signature :


**Autorisation de publication et de mise en
ligne sur un site de diffusion de documents
actuariels**

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise



Signature(s) du candidat(s)



Résumé

L'allocation stratégique fournit les limites d'investissement dans une vision de long terme des grandes classes d'actifs que composent un portefeuille. Dans le cadre d'un portefeuille d'actifs en représentation d'un contrat d'épargne en assurance-vie, commercialisé par Mutavie, ce mémoire propose une méthodologie de construction basée sur le calcul d'un score multi-objectifs. L'utilisation d'un score permet l'agrégation d'un maximum d'indicateurs de risque et de performance, construits selon trois visions distinctes, complémentaires et parfois contradictoires. Il s'agit d'agréger les risques liés aux actifs, ceux liés aux interactions entre l'actif et le passif et enfin les risques réglementaires modélisés à l'aide de la directive Solvabilité 2.

Dans un souci de faisabilité opérationnelle des différentes études de risques, le modèle utilisé pour la vision des risques actif seuls est optimisé permettant un gain opérationnel sur trois points principaux : le générateur de scénarios économiques, la modélisation des actifs et la modélisation de la provision pour dépréciation durable.

Cependant, la pluralité des études et des allocations à tester ainsi que les modélisations par Monte-Carlo engendrent toujours une difficulté opérationnelle pour obtenir l'ensemble des résultats nécessaires aux scores. Pour répondre à cette problématique que l'on rencontre également dans un cadre plus général tel que celui des nappes de sensibilités, différentes solutions sont proposées. Il s'agit de méthodes de complétion de matrice, de réduction de la variance et une méthode prometteuse combinant ces deux axes d'optimisation. Ces techniques d'optimisation permettent de réduire dans des proportions différentes la quantité de simulations nécessaires.

MOTS-CLEFS : Allocation stratégique, Complétion de matrice, Générateur de Scénario Economique, Indicateurs de risque, Provision pour Dépréciation Durable, Réduction de variance, Score, Solvabilité II, Variables antithétiques, Variable de contrôle,

Abstract

Strategic allocation supplies investment limits in a long-term view for the main asset classes composing a portfolio. Within the context of an asset portfolio backing a life-insurance contract, sold by Mutavie, this report suggests a methodology to construct a multiple-objectives score. The use of such a score enables the aggregation of the maximum amount of risk and return indicators. These indicators are built according to three views that are distinct, complementary and even sometimes adversarial. The risks are linked to assets, asset and liabilities interactions and regulatory risks given by the Solvency II directive.

Designed for feasibility of each risk studies, the model regarding the assets risks is optimized in order to reduce time spent, mainly on three topics : the economic scenario generator, the assets model and provision for lasting impairment of investment value.

However, the diversity of studies and allocations in addition to Monte Carlo simulations generate operational difficulties to obtain the whole and necessary results to build the score. In order to solve this problem that we can meet in sensitivity analysis too, several solutions are proposed. These are matrix completion methods, variance reduction techniques and a promising method combining the previous two. These optimization techniques enable to reduce in different proportions the necessary simulations quantity.

Remerciements

Je souhaite remercier l'ensemble de mes responsables qui m'ont permis de travailler sur ce sujet. Ce fut un plaisir de pouvoir approfondir et résoudre les différentes problématiques rencontrées, si variées et stimulantes. Ainsi, je remercie Alexandre Banière, Eddy Birard, Valery Jost et François Bonnin.

J'adresse également mes remerciements à Isabelle Hetroy pour ses conseils et son regard critique sur mes travaux.

Aussi, je tiens à remercier mon partenaire d'aventure actuarielle sur ces trois dernières années, lui qui a grandement participé à rendre les voyages et les études plus agréables et m'a permis de conserver une motivation intacte. Merci donc à Pierre Tardy.

Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude à ma femme qui a rendu possible la réalisation de tous ces travaux.

Table des matières

Résumé.....	1
Abstract	2
Remerciements	3
Introduction.....	6
1. L'allocation stratégique : la maîtrise d'une somme de risques.....	8
1.1. Contexte de l'étude	8
1.2. Données et domaine d'étude.....	11
1.3. Cartographie des risques.....	13
1.3.1. Risques sur l'actif.....	13
1.3.2. Risques liés aux interactions entre actif et passif	16
1.3.3. Risque réglementaire	17
2. Construction des indicateurs et agrégation.....	19
2.1. Allocation stratégique sur la dimension « actif ».....	20
2.1.1. Générateur de Scénarios Economiques	20
2.1.2. Modélisation de l'actif.....	27
2.1.3. Provision pour Dépréciation Durable	30
2.1.4. Indicateur de performance	41
2.1.5. Indicateur de risque	41
2.2. Allocation stratégique sur la dimension « actif-passif »	42
2.2.1. Hypothèses de modélisation.....	42
2.2.2. Indicateur de performance	43
2.2.3. Indicateur de risque	44
2.3. Allocation stratégique sur dimension « solvabilité »	45
2.3.1. Hypothèses de modélisation.....	45
2.3.2. Indicateurs.....	48
2.4. Construction d'un score	49
2.5. Choix d'allocation optimale.....	52
2.5.1. Markowitz.....	52
2.5.2. Agrégation totale.....	53
3. Méthodes d'optimisation des calculs	56
3.1. Complétion de matrice.....	57
3.1.1. Interpolation.....	57
3.1.2. Régression	65
3.1.3. Factorisation.....	67
3.1.4. Critères de comparaison	75
3.2. Réduction du nombre de scénarios	77
3.2.1. Variables antithétiques	77
3.2.2. Variable de contrôle	82
3.3. Optimisation combinée.....	85
3.4. Synthèse des méthodes	88

Conclusion	97
Bibliographie.....	99
Annexe 100	
Annexe I : Identification des paramètres d'un modèle de taux (Ornstein-Uhlenbeck)	100
Annexe II : Probabilité de dépréciation durable à partir d'un processus brownien géométrique si situation finale incertaine	102
Annexe III : Probabilité de dépréciation durable à partir d'un processus brownien géométrique si situation finale connue.....	104
Annexe IV : Probabilité de dépréciation durable à partir d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck si situation finale connue.....	106
Annexe V : Espérance de la valeur de marché en fin d'année sachant une dépréciation durable.	108
Annexe VI : Résultats du GLM	110

Introduction

Les théories sur la recherche d'allocations d'actifs optimales ont véritablement débuté dans les années 50 dans le monde de la finance (Markowitz, 1952). Cet acte fondateur de la finance moderne a introduit la notion d'optimisation multi-objectif en recherchant le meilleur compromis entre l'espérance de résultat et le risque modélisé par la variance. Cette théorie a vu apparaître différentes variantes selon les objectifs et durées des investissements (J. Campbell, 2001).

Mise en place dans les années 70, dans le domaine bancaire aux Etats-Unis, puis dans les années 90 dans le domaine de l'assurance, la gestion actif-passif a permis d'évaluer au sens large toutes les décisions de gestion pour l'équilibre dynamique du bilan. Elle intervient ainsi dans l'analyse et la maîtrise des risques liés aux événements financiers et impactant non seulement la valorisation de l'actif mais le bilan dans son intégralité. Dans ce cadre, plusieurs stratégies d'investissement sont communément utilisées. L'allocation stratégique est une vision à long terme et définit des proportions fixes pour quelques grandes classes d'actifs. Elle doit apporter des éléments de réponse à la politique financière sur la quantité de risque tolérée par l'assureur et le niveau de rendement espéré en contrepartie. En référence à l'allocation stratégique, l'allocation tactique définit les choix de déviation par rapport aux poids de celle-ci dans un objectif de gestion du risque à court ou moyen-terme et de saisie des opportunités sur les marchés. Avec une vision plus courte, les catégories d'actifs définies dans l'allocation tactique sont bien souvent à une maille plus fine que dans l'allocation stratégique.

Depuis quelques années, deux facteurs ont généré un regain d'attention sur les questions de calcul du risque et de la rentabilité, et par conséquent sur l'allocation stratégique. Il s'agit tout d'abord de l'accélération des contraintes réglementaires, à l'image de la directive Solvabilité II entrée en application le 1^{er} janvier 2016. En complément, le contexte de baisse des taux (TEC10¹ à -0,33% au 31/12/2020) fait apparaître de nouveaux risques sur le bilan de l'assureur. Ces deux facteurs viennent donc chambouler les stratégies d'investissement des assureurs plus que jamais confrontés à la problématique de la recherche de rémunération des actifs, tout en limitant la hausse des risques et en protégeant leur solvabilité.

Le choix de l'allocation stratégique, et la méthodologie pour y parvenir doivent donc être étudiés de manière rigoureuse, en prenant en compte l'exhaustivité des risques et leurs conséquences. La clarté de la méthode est indispensable pour que le conseil d'administration ou de surveillance puisse faire des choix en parfaite connaissance des risques implicites. Dans ce contexte particulièrement tendu, la non prise en compte de certains risques pourrait s'avérer très dangereuse pour la pérennité de l'assureur.

La multiplication des risques inhérents aux contextes économique et réglementaire nécessite de concilier l'ensemble des études. Ces études prises indépendamment aboutissent potentiellement à des allocations stratégiques différentes et un compromis devra donc être trouvé et approuvé. La première problématique auquel ce mémoire tentera de répondre est la construction puis la consolidation de différentes études de risques à partir des méthodes d'optimisation multi-objectifs.

Faisant suite à la présentation du contexte actuel, la première partie recensera les différents risques à analyser dans le cadre de la recherche d'une allocation stratégique et auxquels est confronté une société d'assurance commercialisant un contrat d'épargne. La construction d'indicateurs de risque et

¹ Taux d'emprunt français à 10 ans

de performance sera détaillée dans le second chapitre. Des propositions de méthodes d'agrégation de ces indicateurs sont également proposées afin de répondre à l'optimisation multi-objectifs.

La construction de l'allocation stratégique au travers d'une optimisation multi-objectifs d'indicateurs fait apparaître trois dimensions. Tout d'abord, la première dimension réside dans le nombre d'allocations à tester. Ensuite, en raison de l'optimisation multi-objectif, la seconde dimension correspond au nombre d'études et d'indicateurs construits pour chaque allocation. Enfin, pour chaque indicateur, un certain nombre de simulations ou scénarios est nécessaire, générant ainsi une troisième dimension. En raison de ces trois dimensions, les assureurs-vie sont rapidement confrontés à une problématique opérationnelle et se voient dans l'incapacité de produire l'ensemble des résultats souhaités. La première problématique en amène alors une seconde : comment réussir opérationnellement à produire ces indicateurs complets pour le plus grand nombre d'allocations ?

Des idées de modélisation permettant de réduire la masse d'information nécessaire aux calculs d'indicateurs sont présentées dans le second chapitre. Par ailleurs, pour les indicateurs nécessitant invariablement un grand temps de calcul, le troisième chapitre aborde d'autres méthodes d'optimisation qui permettent de réduire la taille de deux dimensions parmi les trois : le nombre d'allocations et le nombre de scénarios à simuler. Ces techniques tenteront ainsi de répondre à la problématique opérationnelle à laquelle est confrontée une étude d'allocation stratégique, mais également de manière plus générale, pour la construction d'une nappe de sensibilité.

1. L'allocation stratégique : la maîtrise d'une somme de risques

1.1.	Contexte de l'étude.....	8
1.2.	Données et domaine d'étude.....	11
1.3.	Cartographie des risques.....	13
1.3.1.	Risques sur l'actif.....	13
1.3.2.	Risques liés aux interactions entre actif et passif	16
1.3.3.	Risque réglementaire	17

En raison du contexte économique et réglementaire, le sujet de l'allocation stratégique en assurance-vie est regardé avec davantage d'attention. La recherche de l'optimisation de l'allocation stratégique passe par une phase préliminaire consistant à bien connaître le ou les contrat(s) considéré(s) et donc leurs risques propres. Une cartographie des risques liés à l'allocation d'actif peut ainsi être construite dans un premier temps.

1.1. Contexte de l'étude

Les portefeuilles d'actifs des assureurs, toutes activités d'assurance confondues, sont composés en très grande majorité d'actifs de taux. A fin 2019, 69,7% des placements sont des produits de taux (36,3% d'obligations d'entreprises, 29,8% d'obligations souveraines et 3,6% de trésorerie et dépôts)². En parallèle, les actions représentent en moyenne 19,2% du portefeuille tandis que l'immobilier seulement 6,3%. Sur les supports euros des contrats d'assurance vie plus spécifiquement, la part d'actifs de taux est encore plus importante avec près de 83% du portefeuille et environ 9% d'actions. Ces chiffres reflètent la dépendance de la rémunération des supports euros aux niveaux de taux. Or, depuis maintenant 35 ans, les taux n'ont cessé de diminuer et depuis peu, ils ont franchi un nouveau cap en devenant négatifs. Par exemple, le TEC10, taux d'emprunt d'Etat français à 10 ans, est passé en territoire négatif depuis juin 2019 et se situe à -0,33% au 31/12/2020.

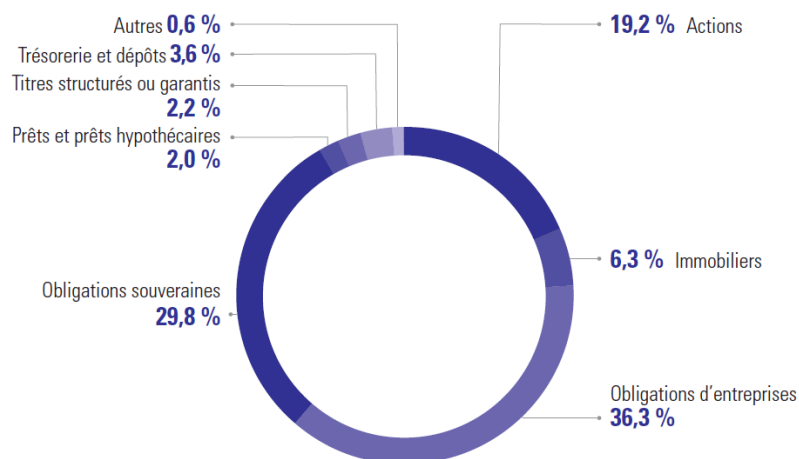


Figure 1 - Répartition des placements des assureurs français en 2019 en valeur de marché (FFA, 2020)

² Source FFA

L'inertie du portefeuille obligataire, liée à sa durée, combinée à la diversification sur d'autres actifs, a permis aux assureurs de servir en moyenne des taux à 1,4% en 2019, sans pour autant avoir besoin de réaliser des reprises de Provision pour Participation aux Bénéfices (PPB). Cependant, les obligations qui ont été souscrites plusieurs années auparavant arrivent à échéance progressivement, et les rendements obligataires convergent inexorablement vers des niveaux difficilement soutenables pour les assureurs-vie. La conséquence de ce contexte sur le rendement et donc la rentabilité des assureurs est directe. En effet, une partie de la rémunération des assureurs provient de chargements sur les produits financiers. De manière indirecte, une baisse de la participation aux bénéfices versée aux assurés pourrait, à moyen-terme, entraîner des rachats massifs et une baisse des chargements sur encours et sur versements. Enfin, la garantie en capital des fonds euros représente potentiellement un coût à l'avenir et dégrade déjà significativement la solvabilité des assureurs.

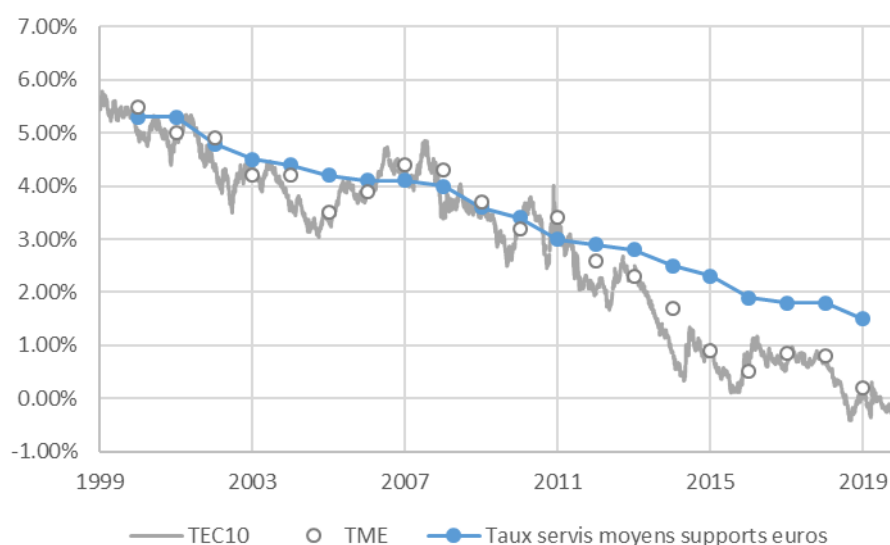


Figure 2 - Taux servis moyens des supports euros en fonction des taux d'Etat

La solvabilité réglementaire a été revue avec la mise en place de la directive Solvabilité II au 1^{er} janvier 2016. Le pilier I de la directive requiert une exigence de capital. Ce montant, appelé SCR (*Solvency Capital Requirement* ou Capital de Solvabilité Requis), correspond à la quantité de fonds propres à immobiliser par l'assureur pour garantir une probabilité de ruine d'au plus 0,5% à horizon d'un an. En assurance vie, ce besoin de capital est modélisé dans un univers risque-neutre, c'est-à-dire où chaque actif rapporte en moyenne l'équivalent du taux sans risque défini par la courbe des taux publiée par l'Eiopa³. Dans ce contexte de taux négatifs, les assureurs sont dans l'obligation de servir un taux positif, net ou brut de chargements selon les contrats. En cas de modélisation de produits financiers négatifs, phénomène devenu courant avec la courbe des taux actuelle, ces produits financiers doivent être compensés par l'assureur, affectant ainsi son résultat et donc son capital. Il s'agit du coût de la garantie en capital. Dans cette situation, chaque choc modélisé amplifie davantage ce coût et c'est la raison pour laquelle le capital de solvabilité requis devient plus élevé. Parallèlement, le capital de l'assureur est également dégradé. Ces deux effets pro cycliques réduisent la solvabilité des assureurs-vie. Celle-ci est représentée par le ratio de solvabilité (fonds propres rapportés au capital de solvabilité requis).

³ European Insurance and Occupational Pensions Authority

D'un côté la baisse des taux engendre une baisse des rendements des assureurs et de leur rentabilité, ce phénomène étant amplifié par la composition actuelle des portefeuilles des assureurs-vie. De l'autre, certains risques nouveaux apparaissent comme le coût de la garantie en capital ou les risques réglementaires matérialisés par une solvabilité qui se dégrade avec le niveau des taux. Les assureurs-vie sont donc plus que jamais à la recherche de solutions leur permettant de contenir ces deux effets antagonistes : la baisse de leur rentabilité et la hausse de leurs risques. Un élément de réponse majeur à ces deux effets est la définition d'une allocation stratégique adaptée. En effet, celle-ci impacte significativement la rentabilité, la solvabilité, et de manière plus générale, une grande partie des mesures de risques.

La recherche de rendement est légitime afin de réduire le risque de produits financiers inférieurs aux taux techniques. Mais celle-ci occasionnera d'autres risques, parmi ceux-ci, le manque de solvabilité. Remplacer des obligations souveraines, certes peu rémunératrices, par des actions, a un impact négatif sur le capital de solvabilité requis. En effet, le choc affecté à ces obligations souveraines est très faible (seul le risque de taux est modélisé dans la formule standard, pas de risque de spread) tandis que le choc modélisé sur la valeur de marché des actions est compris entre 29% et 59% selon le type d'actions et le *Volatility Adjustment (VA)*. Autre conséquence à cette orientation d'investissement : certains risques comme les risques de spread et de défaut sont réduits tandis que la diversification peut éventuellement amener une réduction du risque de volatilité du portefeuille. Au-delà du risque réglementaire de non solvabilité, de nouveaux risques apparaissent comme les risques de krach boursiers, de liquidité ou bien de provisionnement tels que la Provision pour Risque d'Exigibilité (PRE) ou les Provisions pour Dépréciation Durable (PDD). Chaque étude de risque réalisée indépendamment aboutira potentiellement à des stratégies d'investissement différentes et pour cette raison il serait dangereux de ne considérer qu'une partie d'entre elles. Ainsi, la recherche d'une allocation stratégique qui maximiserait la rentabilité et minimiserait les risques est illusoire. C'est pourquoi un compromis doit être trouvé et une optimisation multi-objectifs réalisée.

A noter que le contexte actuel implique un défi supplémentaire pour les directions des investissements des assureurs : réconcilier l'allocation stratégique de long-terme et l'allocation tactique de court et moyen-terme. En effet, certaines limites établies par l'allocation tactique peuvent entrer en conflit ou du moins biaiser les résultats attendus de l'allocation stratégique. Par exemple, une limite d'investissement peut légitimement être de ne pas investir sur des obligations à taux négatifs. Or, sur l'année 2019, il s'agissait de la quasi-totalité des émissions primaires de titres obligataires de notations comprises entre AAA et A. Investir sur des titres obligataires afin de respecter l'allocation stratégique implique par conséquent d'investir sur des titres de notation BBB et/ou de très longue maturité. Or, ces investissements sur une frange particulière du portefeuille engendrent des risques supplémentaires, notamment en terme de solvabilité via le SCR de spread, qui n'étaient pas anticipés lors du calcul de l'allocation stratégique.

1.2. Données et domaine d'étude

La première problématique de ce mémoire concerne la construction d'une optimisation multi-objectifs dans le cadre très précis de la construction d'une allocation stratégique. Afin d'illustrer les différentes méthodologies et indicateurs proposés dans ce mémoire, les données utilisées seront celles d'un portefeuille financier, également appelé canton, en représentation de contrats d'épargne proposés par Mutavie, filiale assurance-vie du Groupe Macif.

Sur ce canton financier, deux contrats d'épargne classiques représentent la grande majorité de l'encours : les contrats multi et mono support Multivie et Livret-vie avec près de 74% de l'encours au 31/12/2019 et les contrats multi et mono support Actiplus option et Actiplus avec plus de 24% de l'encours. Les autres contrats constituant ce canton financier, représentant environ 2% de l'encours sont négligés.

Les contrats considérés possèdent des caractéristiques très proches. Ils disposent d'une clause de participation aux bénéfices identique. Mutavie s'engage à redistribuer chaque année aux adhérents au moins 95% des produits financiers nets engendrés dans l'exercice par les actifs. Ces produits financiers sont affectés :

- A la rémunération de l'épargne par les intérêts garantis servis chaque jour, et éventuellement par les intérêts complémentaires servis en fin d'année ou en cas de clôture du contrat
- A la garantie décès versée aux bénéficiaires
- Eventuellement à la provision pour participation aux bénéfices afin d'être redistribués ultérieurement.

Le taux technique de ces contrats est nul et chaque année, un taux d'intérêt minimum garanti est fixé conformément aux obligations réglementaires. Il est valable pour l'année en cours.

La différence entre ces contrats réside sur le niveau de chargements. Sur Multivie et Livret-vie, uniquement des chargements sur encours sont prélevés annuellement (0,60% de l'encours) tandis que sur Actiplus et Actiplus option, des chargements sont prélevés sur chaque versement uniquement (3% des versements).

Au 31/12/2020, les actifs du portefeuille financier en représentation de ces contrats sont en très grande majorité des produits de taux avec 88,4% en incluant le monétaire. Les actions ne représentent que 7,1% du portefeuille et l'immobilier 4,5%. Les contraintes liées à la réconciliation des allocations stratégique et tactique sont très prégnantes avec le contexte car malgré une trésorerie importante caractérisée par 7,4% de monétaire, le manque d'opportunités sur les différents marchés actuellement amène un écart par rapport aux limites d'investissement préconisées par l'allocation stratégique. Cette dernière permet des investissements jusqu'à 9% de la valeur nette comptable totale sur les actions et 9% également sur les actifs immobiliers.

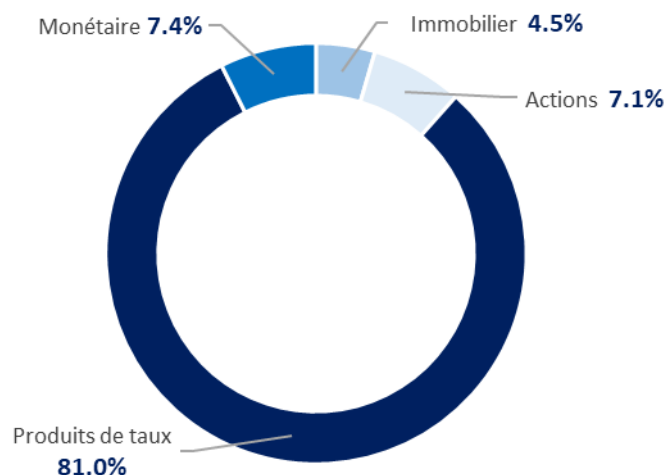


Figure 3 - Allocation d'actifs sur contrats d'épargne de Mutavie au 31/12/2020, exprimée en VNC

Bien qu'appliquée à un contrat d'épargne, la méthodologie présentée dans ce mémoire peut également être appliquée à tout type de produit d'assurance-vie. Dans ce cas, une attention particulière devra être portée aux contrats qui disposent d'une comptabilité auxiliaire (type PERP ou contrat PER à compter de 2023).

La seconde problématique porte sur l'optimisation des calculs afin de rendre les études opérationnelles. Cette problématique est très bien adaptée au cadre de l'allocation stratégique en raison de la quantité de données nécessaires. Les techniques présentées peuvent répondre également à cette même problématique opérationnelle dans un cadre plus général demandant un grand nombre de simulations. C'est le cas par exemple du calcul d'une matrice de sensibilité à deux facteurs de ratios de solvabilité. En effet, là encore, trois dimensions interviennent, ce qui rend la tâche opérationnelle difficile : le nombre de sensibilités, le nombre de SCR et le nombre de scénarios simulés pour chaque SCR.

Les éléments de réponse apportés par ce mémoire portent sur la réduction des axes correspondant au nombre de sensibilités (ou d'allocations dans le cadre de l'allocation stratégique) et du nombre de scénarios. Pour illustrer et quantifier l'efficacité des différentes méthodes proposées, nous utilisons un calcul de valeur actuelle des flux de trésorerie futurs obtenue sur chaque scénario et sur chaque allocation. La moyenne de ces valeurs sur une allocation donnée permet d'obtenir le *Best Estimate* (BE). L'objectif sera d'obtenir les meilleures estimations de *Best Estimate* sur l'ensemble de la nappe.

Le domaine d'étude correspond toujours aux contrats d'épargne de Mutavie présentés ci-dessus. Les calculs sont réalisés à partir du logiciel Solveo, outil de simulation actif-passif présenté plus précisément dans la section 2.2.1. Il s'agit de calculs prospectifs de type ORSA réalisés à fin d'année 2023, de manière à ce que, à partir d'une situation initiale identique au 31/12/2018, le calibrage de la politique financière sur les 5 années déterministes en amont permette de converger vers l'allocation à tester.

1.3. Cartographie des risques

La première étape consiste à répertorier l'ensemble des risques majeurs quantifiables auxquels est soumis l'assureur sur un contrat d'épargne. Ces risques sont regroupés selon trois axes d'analyse potentiels pour l'allocation stratégique.

1.3.1. Risques sur l'actif

Le premier impact dans le choix d'une allocation stratégique concerne les risques inhérents aux actifs sélectionnés, en amont de toute interaction avec le passif. C'est pourquoi le premier axe d'analyse de l'allocation stratégique concerne les risques financiers traditionnels auxquels s'ajoutent les risques de provisionnement liés aux cours des actifs.

Risque de marché sur R343-10 non amortissables

Le risque de marché correspond aux pertes liées aux variations des cours des actifs. Selon le type d'actif, la raison de ces variations de cours ne sera pas la même et les conséquences seront différentes dans un portefeuille en représentation d'un contrat d'épargne.

Les placements R343-10 non amortissables correspondent aux actions, OPCVM et placements immobiliers. La nature des titres regroupés dans ce type de placement est donc très variée, tout comme les causes d'une variation de leurs cours. Les cours des actions et des OPCVM à dominante action évolueront au gré de leur propre marché. Tandis que les obligations détenues dans les OPCVM évolueront en fonction des taux d'intérêts et des spreads. Enfin, le marché immobilier possède également ses propres caractéristiques et évolutions. Pour ces titres, une variation négative du cours de ces actifs aura des impacts différents selon leur situation de plus ou moins-values latentes individuelle et globale.

Si le niveau de plus-values latentes est suffisamment conséquent, un choc de marché n'aura de conséquence qu'au moment de la vente, sur les produits financiers générés. Selon la modélisation du passif (continuité d'activité ou bien *run off*) et la politique financière de l'assureur vis-à-vis de la gestion de ces titres, les impacts peuvent être à plus-ou-moins long terme. De plus, ce risque de perte de produits financiers conditionné aux ventes, sera supporté principalement par l'assuré et dans une moindre mesure par l'assureur en fonction du taux de chargements sur produits financiers du contrat.

Selon les articles 123-7 et 123-10 du code des assurances, des dépréciations à caractère durable peuvent être constituées en analysant l'ensemble des risques identifiés sur le placement en fonction de l'horizon de détention considéré pour chaque titre. Ainsi, en cas de baisse des marchés ramenant son cours en-dessous de 70% (si marchés très volatiles) ou 80% (si marchés moins volatiles) pendant plus de six mois, une dépréciation à caractère durable est alors en théorie constatée, modérée selon le calcul d'une valeur recouvrable. Cette provision vient en déduction de la valeur comptable de l'actif. Elle représente une charge constatée immédiatement en réduction des produits financiers.

De manière plus globale, une Provision pour Risque d'Exigibilité (PRE) est une provision technique constituée lorsque les placements R343-10 hors valeurs amortissables que l'organisme d'assurance a la capacité et l'intention de détenir jusqu'à leur maturité se trouvent en situation de moins-value latente nette globale. La dotation annuelle à la PRE est alors comprise entre un tiers et un huitième (selon la durée des passifs) du montant de la moins-value latente nette globale, sans que cette

provision puisse être supérieure au montant de moins-value latente. Il s'agit d'une provision technique qui impacte par conséquent le résultat de l'assureur.

A noter que les dépréciations à caractère durables et la PRE sont liées par le fait que les premières, en vision ligne à ligne, permettent de constater des pertes immédiatement et ainsi réduire la moins-value latente globale, donc la PRE. De manière analogue, la méthode de comptabilisation des placements immobilier permet d'inscrire annuellement des amortissements qui viennent augmenter leur plus ou moins-value latente en réduisant leur valeur comptable, toute chose égale par ailleurs.

Risque de marché sur R343-9 et R343-10 amortissables

Les placements R 343-9 correspondent aux valeurs mobilières amortissables. Il s'agit des obligations émises ou garanties par un Etat, une collectivité locale de l'OCDE⁴ ou une institution supranationale ainsi que des obligations d'entreprise cotées. De manière analogue, les placements R343-10 amortissables regroupent les prêts, obligations d'entreprise non cotées et fonds de prêt à l'économie. Pour ces deux catégories de placements, la date d'arrivée à échéance et la valeur de remboursement sont connus ce qui justifie une gestion similaire de la part de l'assureur.

Pour ces placements représentant la grande majorité du portefeuille de l'assureur, l'objectif de l'assureur est généralement de les détenir jusqu'à maturité. Dans ce cas, leur variation de cours n'a donc pas de conséquence sur le résultat technique de l'assureur, tant qu'aucune dépréciation durable n'est constatée. Toutefois, dans certaines situations extrêmes, en cas de manque de liquidité face aux engagements de l'assureur, ces titres peuvent être amenés à être vendus. Mais il s'agit plutôt dans ce cas d'un risque lié au passif sur lequel nous reviendrons dans la vision des risques actif-passif. Sur une vision d'actif pure, le risque de marché peut donc être écarté. C'est la raison pour laquelle la volatilité du portefeuille global de l'assureur n'est pas un bon indicateur de risque et une distinction selon la catégorie de placement est nécessaire.

Risque de crédit

Le risque de crédit peut être considéré de deux manières complémentaires. La première constatation de ce risque est une hausse du spread du titre et donc une baisse de sa valorisation. Comme expliqué précédemment, ce risque de marché n'a pas de conséquence dans une certaine limite. Car, pour les placements R343-9 et R343-10 amortissables, dans le cas où il y a lieu de considérer que le débiteur ne sera pas en mesure de respecter ses engagements, une dépréciation doit être considérée à l'inventaire de manière analogue aux provisions pour dépréciation durable des placements R343-10 non amortissables. Dans ce cas, cette dépréciation s'inscrit comme une charge et vient donc impacter les produits financiers. Cette perte impacte principalement la participation aux bénéfices versée à l'assuré puis l'assureur dans la proportion correspondant au taux de chargement sur produits financiers.

Au-delà de la dépréciation, le risque de défaut ou de contrepartie représente les pertes liées au défaut de l'émetteur du titre. Celle-ci se modélise à partir du produit de deux facteurs : la probabilité d'occurrence (*Probability of Default* PD) qu'il est possible d'obtenir à partir des matrices de migration de rating et la perte encourue en cas de défaut (*Loss Given Default* LGD) car une partie de l'encours peut être récupérée.

⁴ Organisation de Coopération et de Développement Economique

Risques liés aux manques de produits financiers

Depuis 1982, les taux nominaux des obligations décroissent. Et depuis peu, pour un certain nombre de titres, ils sont passés en territoire négatif à l'image du TEC 10, taux d'emprunt d'Etat français à 10 ans négatif depuis juin 2019. Cette baisse des rendements obligataires se matérialise avec un retard sur le rendement du portefeuille de l'assureur. Cette inertie est due à la dilution des nouveaux actifs à faible rendement dans un portefeuille constitué d'obligations plus anciennes, à plus fort rendement. Cette inertie sera plus ou moins longue selon la durée du portefeuille et le niveau de la collecte nette. Mais cette baisse de rendement est inexorable.

Cette baisse des produits financiers a tout d'abord un impact direct pour l'assureur dans le sens où une partie de sa marge est assurée par ces produits financiers, qu'ils proviennent de ses fonds propres ou bien d'un chargement prélevé sur les produits financiers issus du portefeuille d'actifs en représentation de ses engagements. Pour que l'activité soit pérenne, les marges de gestion et financière doivent être suffisantes pour compenser les diverses charges (frais généraux, commissions, actionnaires).

La baisse des produits financiers peut ensuite avoir des conséquences indirectes au travers des trois éléments suivants que sont la garantie du capital, le minimum réglementaire et la Provision pour Aléas Financiers (PAF).

Garantie du capital

Un contrat d'épargne présente un taux technique, c'est-à-dire un taux minimum garanti de long terme à l'assuré. En France, seuls quelques anciens contrats d'épargne possèdent encore un taux technique supérieur à 0%. Les taux techniques des contrats les plus récents sont quant à eux nuls. Mais cette garantie du capital peut représenter désormais une option coûteuse pour l'assureur dans le cas où il n'aurait pas suffisamment de produits financiers ou de participations aux bénéfices pour le servir. En effet en cas de manque de produits financiers pour satisfaire cette clause contractuelle, aucune reprise sur la PPB n'est autorisée et un financement intégral par l'assureur est donc nécessaire. Il s'agit d'un risque à étudier à long voire à moyen terme si le niveau des taux ne remonte pas. Le niveau des taux est donc une des principales préoccupations vis-à-vis de la garantie en capital mais celle-ci est également liée aux autres risques impactant les produits financiers tels que le risque de marché sur placements R343-10 non amortissables en cas de vente, ou encore les dépréciations durables.

Minimum réglementaire

Au-delà de la clause contractuelle, il existe une clause réglementaire exprimée dans l'article A132-11 du code des assurances. La participation aux bénéfices doit être supérieure à la somme de :

- 90% d'un compte de participation aux résultats (ou 100% si négatif). Ce compte de participation aux résultats est obtenu à partir du solde de souscription et des charges d'acquisition et de gestion nettes.
- 85% d'un compte financier correspondant à une quote-part des produits financiers calculée au prorata des provisions techniques et ne pouvant être négatif.

Cette contrainte supplémentaire, à l'instar de la clause contractuelle peut représenter un coût non négligeable pour l'assureur dans le cas où la clause contractuelle serait insuffisante. Le manque serait entièrement financé par l'assureur. Les 85% du compte financier sont bien souvent moins contraignants que la clause contractuelle mais le risque se matérialise en fonction du niveau du compte de participation aux résultats. Outre le résultat technique de l'assureur, il intègre les variations de la

provision pour risque d'exigibilité. Une reprise brutale de celle-ci peut alors occasionner un financement nécessaire de cette contrainte réglementaire.

Provision pour Aléas Financiers

Enfin, d'après l'article R331-3 du code des assurances, en cas d'insuffisance théorique des rendements futurs face aux engagements pris, des dotations à la Provision pour Aléa Financier (PAF) peuvent être nécessaires. Celle-ci se déclenche lorsque le rendement réel des actifs calculé sur l'ensemble des cantons est inférieur à 125% des taux garantis.

1.3.2. Risques liés aux interactions entre actif et passif

La gestion du risque pour un assureur-vie nécessite de bien prendre en considération les conséquences des actifs financiers sur les engagements mais également les conséquences de la collecte nette sur les actifs. Différents risques propres à ce contexte sont à contrôler.

Risque de participation minimale

Les participations aux bénéfices minimales, qu'elles soient contractuelles ou réglementaires ont été évoquées dans la section précédente. La prise en compte du passif permet d'améliorer la précision du calcul du compte de participation aux résultats du minimum réglementaire, même si les principales variations sont liées aux produits financiers et aux variations de PRE, donc à l'actif.

Risque de passif

Un contrat d'épargne classique possède une option de rachat, c'est-à-dire que l'assuré peut à tout moment choisir de reprendre tout ou partie du montant de son contrat. En cas de rachat du contrat d'épargne par l'assuré, l'assureur dispose d'un délai légal de deux mois pour lui verser le montant du rachat. Pour cela, l'assureur dispose de trésorerie lui permettant de ne pas avoir à se désengager sur ses placements. D'autre part, le décès de l'assuré occasionne bien souvent la fermeture du contrat. Ainsi, une bonne modélisation des rachats et des décès ainsi qu'une bonne adéquation des flux de l'actif (coupons, arrivées à échéance) et du passif (rachats, décès) doit permettre de calculer la quantité de trésorerie nécessaire chaque année.

Cependant, pour différentes raisons possibles, une soudaine augmentation de rachats ou décès peut intervenir. L'une des raisons de rachats massifs qu'il est possible de modéliser est une hausse soudaine des taux. Dans ce contexte, pour les mêmes raisons que les taux servis sont aujourd'hui supérieurs aux taux de marché, l'inertie du portefeuille de l'assureur ne lui permettra pas de servir des taux équivalents. Ainsi, une concurrence avec des contrats nouveaux constitués uniquement de produits de taux récents à plus fort rendement peut entraîner de tels rachats conjoncturels. Dans un tel scénario de rachats ou décès en grande quantité, la trésorerie peut devenir insuffisante et l'assureur sera peut-être contraint de se désengager sur certains actifs pour faire face à ses engagements. La liquidité des actifs, c'est-à-dire la capacité à vendre rapidement, dépend de la contrepartie mais surtout du type d'actif. De plus, selon le contexte occasionnant ce rachat de masse, la liquidité des actifs peut être moindre qu'en situation normale.

Au-delà de la capacité à vendre des actifs, ces ventes doivent être réalisées pendant un contexte incertain et imposé à l'assureur, donc potentiellement en fortes moins-values latentes liées aux différents risques de marché. Les placements R343-9 et R343-10 amortissables seront conservés au

maximum mais en cas de vente nécessaire, les plus-values réalisées devront être dotées à la réserve de capitalisation et pourront être reprises en cas de réalisation de moins-values.

Risque de charges

L'assureur doit être capable de gérer les contrats des assurés en portefeuille. C'est l'objectif de la Provision Globale de Gestion (PGG) qui est dotée à due concurrence de l'ensemble des charges de gestion futures des contrats non couvertes par des chargements sur primes ou par des prélèvements sur produits prévus par ceux-ci. Ainsi, suite à la modélisation des rendements comptables de l'actif, des flux de passif et des charges de gestion futures du contrat, les valeurs négatives actualisées des marges de gestion sont dotées à la PGG.

1.3.3. Risque réglementaire

La directive Solvabilité II est entrée en application le 1^{er} janvier 2016. Elle repose sur trois piliers regroupant les différentes exigences prudentielles applicables aux assureurs : les exigences quantitatives, les exigences qualitatives et les informations à destination du public et du superviseur.

Le pilier I regroupe donc les exigences quantitatives, c'est-à-dire les règles de valorisation des actifs et des passifs, ainsi que les exigences de capital et leur mode de calcul. Celles-ci peuvent être obtenues au moyen de la formule standard, ou bien au moyen d'un modèle interne complet ou partiel. Dans ce cadre, les provisions techniques sont évaluées en « meilleure estimation » (*Best estimate*) auxquelles s'ajoute une marge de risque.

Le *Best estimate* est la moyenne pondérée en fonction de leur probabilité des futurs flux de trésorerie compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, laquelle est estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente. Dans un monde risque-neutre, en continuité d'activité où les primes futures ne sont pas prises en compte⁵, il permet la valorisation des différentes options de l'assuré représentant un coût ou un risque pour l'assureur comme l'option de rachat ou la participation aux bénéfices minimale.

La marge de risque est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance. Elle est déterminée en calculant le coût représentant la mobilisation d'un montant de fonds propres éligibles égal au capital de solvabilité requis nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance pendant toute la durée de ceux-ci.

L'exigence de capital de solvabilité (*Solvency Capital Requirement* ou SCR) correspond aux fonds propres nécessaires pour obtenir une probabilité de ruine à un an inférieure à 0,5%. Autrement dit, si l'assureur satisfait à cette exigence de capital, il est alors supposé faire faillite au maximum une fois tous les 200 ans.

L'assureur choisissant d'appliquer la formule standard doit modéliser des chocs par nature de risque afin d'en déduire les SCR correspondants à l'impact sur les fonds propres. Les spécifications techniques indiquent alors précisément les niveaux et application des chocs. Le montant du capital de solvabilité

⁵ A l'exception des cotisations futures dont l'assureur peut juridiquement contraindre l'assuré à les payer ou bien que les montants sont fixés à la date de souscription

requis doit être calibré de manière à garantir que tous les risques quantifiables auxquels l'assureur est exposé soient pris en considération. Il doit couvrir à minima les modules suivants :

- Risques portés sur les placements et les activités de marché
- Risques de souscription lié aux activités d'assurance vie
- Risque opérationnel, y compris risque juridique
- Risque de défaut de contrepartie

L'absence de simultanéité de ces différents risques est prise en compte lors de leur agrégation à l'aide d'une matrice de corrélation.

Les risques de placements, de souscription en vie et de contrepartie ont déjà été listés dans les risques liés directement aux actifs et dans ceux liés aux interactions entre actif et passif. Ils sont donc pris en compte une seconde fois parmi les risques réglementaires mais avec une approche propre à la formule standard et font apparaître ici une quantification de leur couverture. Nous reviendrons plus précisément sur les calculs réglementaires dans la section 2.3.2.

Le risque réglementaire de manque de solvabilité est un risque majeur pour les assureurs. En effet, les conséquences d'une solvabilité insuffisante peuvent aller jusqu'à la perte de l'agrément, en passant par une mise sous tutelle de l'ACPR. Avant de tels dénouements, il demeure également un risque d'image, le ratio de solvabilité étant public. Ce sont les raisons pour lesquelles le risque réglementaire est devenu central depuis la mise en place de Solvabilité II et chaque choix stratégique passe systématiquement sous le prisme de la solvabilité.

2. Construction des indicateurs et agrégation

2.1.	Allocation stratégique sur la dimension « actif »	20
2.1.1.	Générateur de Scénarios Economiques	20
2.1.2.	Modélisation de l'actif	27
2.1.3.	Provision pour Dépréciation Durable	30
2.1.4.	Indicateur de performance	41
2.1.5.	Indicateur de risque	41
2.2.	Allocation stratégique sur la dimension « actif-passif »	42
2.2.1.	Hypothèses de modélisation	42
2.2.2.	Indicateur de performance	43
2.2.3.	Indicateur de risque	44
2.3.	Allocation stratégique sur dimension « solvabilité »	45
2.3.1.	Hypothèses de modélisation	45
2.3.2.	Indicateurs	48
2.4.	Construction d'un score	49
2.5.	Choix d'allocation optimale	52
2.5.1.	Markowitz	52
2.5.2.	Agrégation totale	53

Les études d'allocations stratégiques reposent traditionnellement sur la maximisation du couple rendement/risque. Les trois visions de risque présentées en partie 1.3 permettent de définir une cartographie des risques majeurs auxquels est soumis un assureur commercialisant un contrat d'épargne. A chacune de ces trois visions, il convient donc d'associer un indicateur de performance. Ainsi, trois études d'allocations stratégiques sont présentées dans ce chapitre :

- Analyse de l'allocation optimale sur une dimension purement actif ;
- Analyse de l'allocation optimale en monde réel en prenant en compte des interactions actif-passif ;
- Analyse de l'allocation optimale sur la dimension réglementaire de solvabilité.

Par la suite des stratégies d'optimisation multi-objectif sont présentées afin de concilier ces trois études. Pour cela, chaque allocation étudiée fera l'objet d'un score ce qui permettra, une fois consolidé, de définir l'allocation stratégique de l'assureur.

2.1. Allocation stratégique sur la dimension « actif »

L'étude de l'allocation stratégique sur la dimension actif a pour objectif d'étudier un maximum d'allocations à partir d'un modèle complet et permettant une durée de calcul limitée.

Le modèle de choix de portefeuille de Markowitz utilise la volatilité du portefeuille comme indicateur de risque. L'avantage de cette démarche est sa simplicité grâce à l'utilisation d'une formule fermée : la volatilité du portefeuille est calculée à partir d'hypothèses de volatilités propres à chaque classe d'actif et de corrélations. Cependant, celle-ci ne fournit qu'une vision partielle du risque. Comme vu dans la section 1.3.1, pour un assureur, la volatilité ne présente pas le même risque s'il s'agit de titres détenus jusqu'à maturité comme les obligations ou bien de titres destinés à être vendus. En conséquence, d'autres risques uniquement liés à l'évolution des actifs doivent être pris en compte. Parmi eux, le niveau du rendement du portefeuille par rapport au taux minimum garanti, la Provision pour Risque d'Exigibilité (PRE), les Provisions pour Dépréciation Durable (PDD).

Intégrant l'ensemble de ces éléments, un modèle spécifique a été construit sur Excel. Grâce à des simplifications et optimisations dans la modélisation, il permet de calculer un indicateur de risque et un indicateur de performance pour une allocation donnée dans un temps inférieur à celui pris par un progiciel de gestion actif-passif plus complexe. Il utilise un générateur de scénarios économiques afin de modéliser un grand nombre de trajectoires économiques possibles. La modélisation des actifs prend en considération les provisionnements éventuels ainsi que l'impact de l'évolution de la situation économique sur les rendements.

Bien que l'étude porte sur la dimension actif, le passif est tout de même intégré par des hypothèses simplifiées. Cette modélisation permet d'aboutir jusqu'au résultat technique sur lequel est axé l'indicateur de risque.

Trois aspects techniques du modèle, dont les hypothèses de modélisation permettent un gain de temps de calcul important afin de rendre possible le calcul sur un grand nombre d'allocations, sont présentés ci-après :

- Le générateur de scénarios économiques (GSE),
- La modélisation des actifs,
- La modélisation de la PDD.

2.1.1. Générateur de Scénarios Economiques

Le générateur de scénarios économiques (GSE) est construit spécifiquement pour cette étude avec l'objectif de trouver un compromis entre la simplicité, afin d'avoir un temps d'exécution rapide, et la pertinence du modèle. Pour cette raison, le GSE construit dispose de trois variables qui sont diffusées à partir d'un processus stochastique, à pas annuel : les taux incluant les spreads, le cours des actions et le cours de l'immobilier. Pour l'ensemble des autres paramètres de modélisation tels que le taux monétaire, les dividendes, les loyers, il a été choisi de ne pas les diffuser, mais qu'ils soient déterminés à partir des trois variables stochastiques.

Taux

Le taux d'investissement moyen est modélisé à partir d'un processus continu $(R_t)_{t \geq 0}$ qui sera par la suite discrétisé pour obtenir le taux en fin d'année N , noté R_N . Ce taux est une vision moyenne, incluant la prime de risque. Il permet de modéliser la variation des cours des obligations en portefeuille et de déduire les revenus des obligations achetées en cours de simulation.

Soit $r_t = \ln(R_t - d)$ le logarithme du taux d'investissement décalé avec d le décalage correspondant au taux minimal modélisé. d est potentiellement négatif afin de modéliser des taux négatifs ($R_t \geq d$). Le processus r_t est modélisé par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr_t = K(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t^R \quad (2.1.1)$$

Avec :

- $(W_t^R)_{t \geq 0}$ un processus de Wiener standard
- θ la moyenne stationnaire long-terme de r_t ($\mathbb{E}[r_t] \xrightarrow{\infty} \theta$)
- $K \geq 0$ la force de rappel vers cette moyenne stationnaire
- σ l'écart-type stationnaire de r_t ($\mathbb{V}[r_t] \xrightarrow{\infty} \sigma^2$)

La solution de cette équation est la suivante :

$$r_t = r_0 e^{-Kt} + \theta(1 - e^{-Kt}) + \sigma \int_0^t e^{-K(t-s)} dW_s^R \quad (2.1.2)$$

Cette solution valable en temps continu peut être discrétisée, à pas annuel de la manière suivante (F. Planchet, 2009) et (Théron, 2005) :

$$r_{N+1} = r_N e^{-K} + \theta(1 - e^{-K}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2K}}{2K}} \varepsilon_{R,N} \quad (2.1.3)$$

Avec $(\varepsilon_{R,N})_{N \geq 0}$ une suite i.i.d. de lois normales centrées réduites.

Il s'agit de l'expression d'un processus autorégressif d'ordre 1. Puis le taux d'investissement R_N est déduit de la manière suivante :

$$R_N = e^{r_N} + d$$

Pour le calibrage de ce processus, les grandeurs K , θ et σ n'étant pas observables immédiatement, il convient de trouver une expression en fonction des grandeurs économiques suivantes :

- Θ : Moyenne stationnaire long terme ($\mathbb{E}[R_t] \xrightarrow{\infty} \Theta$)
- E : Ecart-type stationnaire ($\mathbb{V}[R_t] \xrightarrow{\infty} E^2$)
- $T_{1/2}$: Temps de demi-vie, temps nécessaire pour que le processus $(R_t)_{t \geq 0}$ atteigne en moyenne la moitié de la distance entre R_0 et Θ . Il est le même pour le processus r_t .
définition : $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{K}$

Les paramètres K , θ et σ de calibrages du processus $(r_t)_{t \geq 0}$ sont obtenus à partir des paramètres Θ , E , $T_{1/2}$ et d de calibrage des taux d'investissement R_t par les relations suivantes :

$$K = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}}$$

$$\theta = \ln(\Theta - d) - 0,5 \cdot \ln(E^2 \cdot e^{-2\ln(\Theta-d)} + 1)$$

$$\sigma^2 = 4 \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} (\ln(\Theta - d) - \theta)$$

Pour plus de détails sur l'identification de ces paramètres, voir annexe I.

Actions

Le cours des actions, noté A_t est modélisé à partir d'un processus brownien géométrique :

$$dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t dW_t^A \quad (2.1.6)$$

Avec :

- $(W_t^A)_{t \geq 0}$ un processus de Wiener standard,
- μ_A la tendance de long-terme du rendement des cours actions,
- σ_A sa volatilité.

La solution de cette équation est la suivante :

$$A_t = A_0 e^{(\mu_A - \sigma_A^2/2)t + \sigma_A W_t^A} \quad (2.1.7)$$

Cette solution valable en temps continu peut être discrétisée, à pas annuel de la manière suivante :

$$A_{N+1} = A_N e^{\mu_A - \sigma_A^2/2 + \sigma_A \varepsilon_{A,N}} \quad (2.1.8)$$

Avec $(\varepsilon_{A,N})_{N \geq 0}$ une suite i.i.d. de lois normales centrées réduites.

Les paramètres μ_A et σ_A peuvent être calibrés à partir de l'observation historique d'un indice approprié.

Immobilier

Le cours de l'immobilier (I_t) est modélisé de la même manière que celui des actions, par un processus brownien géométrique :

$$dI_t = \mu_I I_t dt + \sigma_I I_t dW_t^I \quad (2.1.9)$$

Avec :

- $(W_t^I)_{t \geq 0}$ un processus de Wiener standard,
- μ_I la tendance de long-terme du rendement des cours de l'immobilier,
- σ_I sa volatilité.

De cette manière, l'indice immobilier peut être discrétisé, à pas annuel de la manière suivante :

$$I_{N+1} = I_N e^{\mu_I - \sigma_I^2/2 + \sigma_I \varepsilon_{I,N}} \quad (2.1.10)$$

Avec $(\varepsilon_{I,N})_{N \geq 0}$ une suite i.i.d. de lois normales centrées réduites.

Corrélations

Les trois variables économiques modélisées ne sont pas indépendantes mais nécessitent une étude approfondie pour rechercher la nature de leur corrélation. La structure de dépendance choisie impacte le calcul du capital économique ou prudentiel (K. Armel, 2010) et (Planchet, 2017).

Le choix de la structure de dépendance est issu des historiques du TEC10, de l'Eurostoxx 50 et de l'indice EDHEC Immobilier. Ils sont extraits pour calibrer respectivement les taux d'investissement, le cours des actions et le cours de l'immobilier. A partir de ces trois historiques sont extraits les vecteurs générateurs u_T , u_A et u_I de la manière suivante à partir des équations (2.1.3), (2.1.8) et (2.1.10) :

$$\begin{cases} r_{N+1} = r_N e^{-K} + \theta(1 - e^{-K}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2K}}{2K}} \varepsilon_{R,N} \\ A_{N+1} = A_N e^{\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} + \sigma_A \varepsilon_{A,N}} \\ I_{N+1} = I_N e^{\mu_I - \frac{\sigma_I^2}{2} + \sigma_I \varepsilon_{I,N}} \end{cases}$$

Passage à pas quotidien, pour chaque jour j :

$$\begin{cases} r_{j+1} = r_j e^{-K/252} + \theta(1 - e^{-K/252}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2K/252}}{2K}} \varepsilon_{R,j} \\ A_{j+1} = A_j e^{\frac{\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}}{252} + \frac{\sigma_A}{\sqrt{252}} \varepsilon_{A,j}} \\ I_{j+1} = I_j e^{\frac{\mu_I - \frac{\sigma_I^2}{2}}{252} + \frac{\sigma_I}{\sqrt{252}} \varepsilon_{I,j}} \end{cases}$$

Soit pour simplifier :

$$\begin{cases} r_{j+1} = f(r_j; \varepsilon_{R,j}) \\ A_{j+1} = g(A_j; \varepsilon_{A,j}) \\ I_{j+1} = h(I_j; \varepsilon_{I,j}) \end{cases}$$

Les trois vecteurs gaussiens ε_R , ε_A et ε_I sont ainsi déterminés à partir des historiques de r_j , A_j et I_j :

$$\begin{cases} \varepsilon_{R,j} = f^{-1}(r_j; r_{j+1}) \\ \varepsilon_{A,j} = g^{-1}(A_j; A_{j+1}) \\ \varepsilon_{I,j} = h^{-1}(I_j; I_{j+1}) \end{cases}$$

Soit F la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. En posant :

$$\begin{cases} u_R = F(\varepsilon_R) \\ u_A = F(\varepsilon_A) \\ u_I = F(\varepsilon_I) \end{cases}$$

Nous obtenons les trois vecteurs générateurs, issus d'une loi uniforme sur $[0; 1]$. Ce sont ces aléas qui permettent de modéliser chacune des variables économiques et sur lesquels une corrélation est recherchée (Figure 4 et Tableau 1).

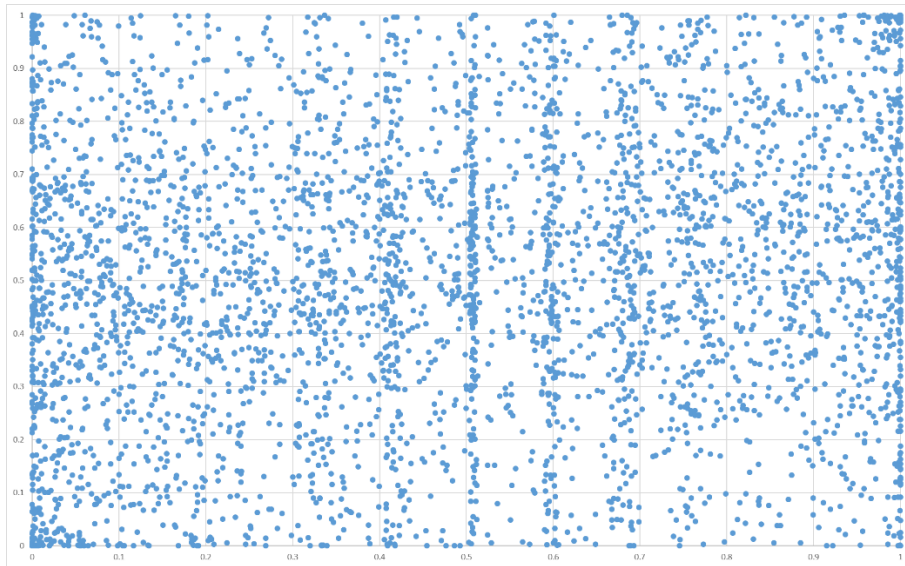


Figure 4 – Nuage de points - Générateur des actions u_A (Eurostoxx 50) en fonction du générateur des taux u_T (TEC10)

[0.9 ; 1.0]	51	16	18	15	23	31	36	37	22	77
[0.8 ; 0.9]	42	29	14	31	26	37	30	25	34	48
[0.7 ; 0.8]	35	32	24	34	26	36	40	40	29	52
[0.6 ; 0.7]	75	48	30	51	49	56	47	56	50	67
[0.5 ; 0.6]	80	47	45	48	48	73	52	43	43	71
[0.4 ; 0.5]	84	60	53	66	60	66	48	49	42	68
[0.3 ; 0.4]	71	38	47	32	36	37	43	39	29	49
[0.2 ; 0.3]	45	35	24	32	23	31	30	30	22	45
[0.1 ; 0.2]	55	38	14	32	24	25	22	13	10	35
[0 ; 0.1]	100	38	27	28	29	24	36	17	19	31
	[0 ; 0.1]	[0.1 ; 0.2]	[0.2 ; 0.3]	[0.3 ; 0.4]	[0.4 ; 0.5]	[0.5 ; 0.6]	[0.6 ; 0.7]	[0.7 ; 0.8]	[0.8 ; 0.9]	[0.9 ; 1.0]

Tableau 1 – Dénombrement - Générateur des actions u_A (Eurostoxx 50) en fonction du générateur des taux u_T (TEC10)

Le vecteur générateur des taux et celui des actions sont corrélés visuellement. La corrélation est plus forte pour des aléas issus du vecteur générateur des taux proches de 0,5 et de 1 (colonnes du milieu et de droite du Tableau 1). En effet, une valeur proche de 1 implique une plus forte probabilité que l'aléa correspondant au vecteur générateur des actions soit proche de 1 également. Par contre, une telle corrélation n'est pas vérifiée visuellement pour les valeurs proches de 0 des aléas issus du vecteur générateur des taux (colonnes de gauche de la figure 2) où la répartition sur la colonne semble plus uniforme.

Une copule de Clayton (Figure 5) modélise une corrélation forte pour les valeurs proches de 0 puis celle-ci devient moins importante pour les valeurs plus élevées.

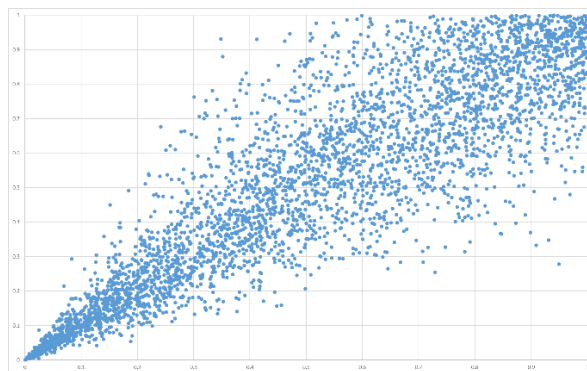


Figure 5 – Illustration d'une copule de Clayton

Une copule de Frank (Figure 6) modélise une corrélation uniforme quelle que soit la valeur de l'aléa.

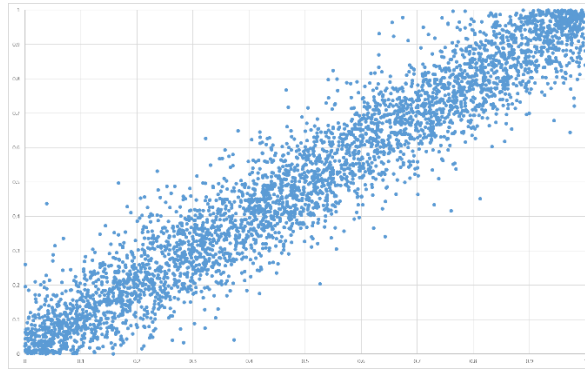


Figure 6 – Illustration d'une copule de Frank

Une copule HRT (Figure 7) modélise une corrélation forte pour les valeurs proches de 1 puis celle-ci devient moins importante pour les valeurs plus faibles. C'est cette relation qui est la plus proche de celle observée sur les figures 1 et 2 et c'est la raison pour laquelle les aléas du GSE seront modélisés à partir de cette copule, pour laquelle il faut calibrer son paramètre de corrélation θ . Celui-ci est obtenu à partir du taux de Kendall (Tableau 2).

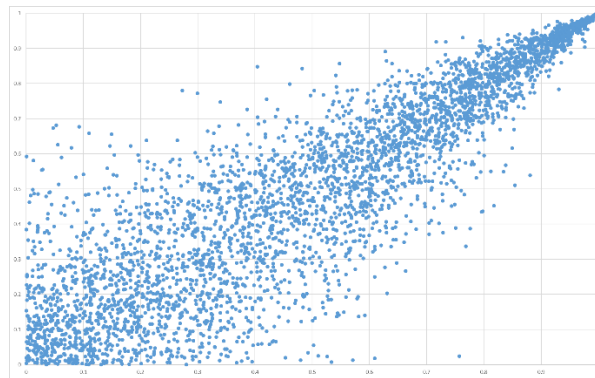


Figure 7 – Illustration d'une copule HRT

	Taux de Kendall	θ
Taux / Actions	23,47%	0,6133
Taux / Immobilier	2,27%	0,0464

Tableau 2 - Calibrage des copules HRT

Les vecteurs générateurs corrélés selon la copule HRT sont ainsi obtenus à partir de $u_1, u_2, u_3 \sim U[0; 1]$ indépendants selon les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_T = u_1 \\ u_A = 1 - \left(\left((1 - u_2) \times (1 - u_1)^{\theta+1} \right)^{\frac{-\theta}{\theta+1}} + 1 - (1 - u_1)^{-\theta} \right)^{\frac{-1}{\theta}} \\ u_I = 1 - \left(\left((1 - u_3) \times (1 - u_1)^{\theta+1} \right)^{\frac{-\theta}{\theta+1}} + 1 - (1 - u_1)^{-\theta} \right)^{\frac{-1}{\theta}} \end{cases}$$

Les Figure 8 et Figure 9 correspondent aux représentations graphiques :

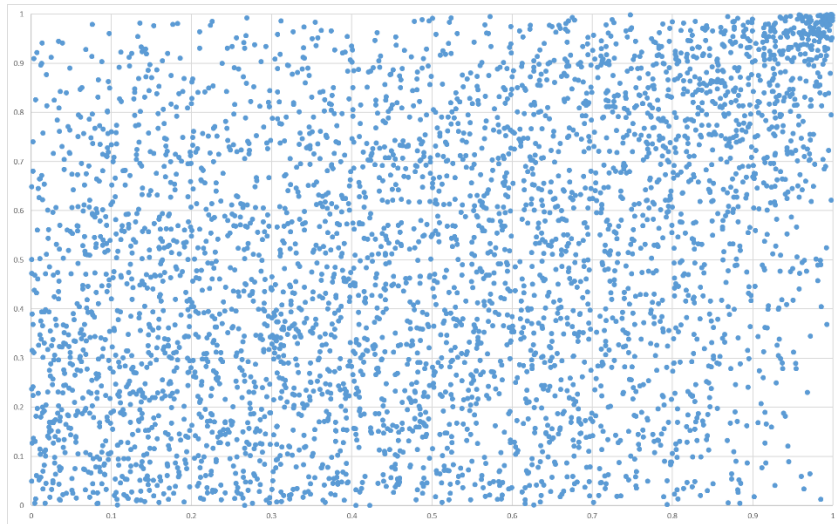


Figure 8 - Nuage de points - Générateur des actions u_A modélisé en fonction du générateur taux u_T modélisé

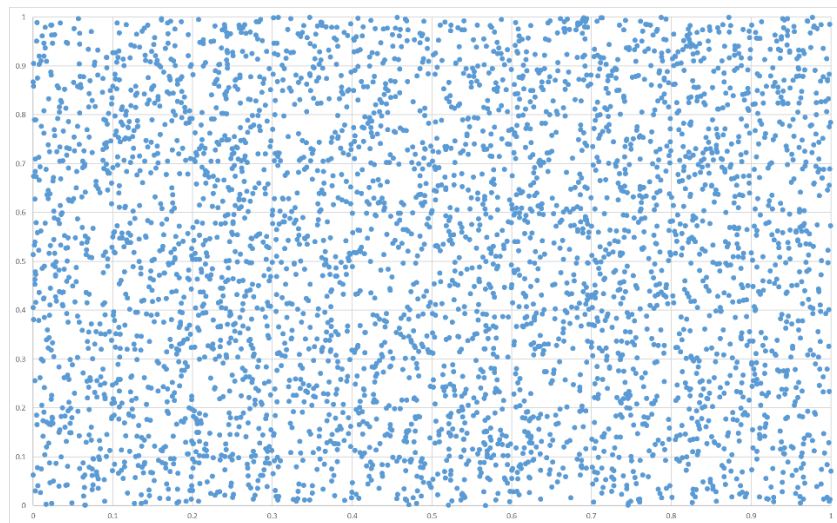


Figure 9 - Nuage de points - Générateur des cours immobilier u_I modélisé en fonction du générateur taux u_T modélisé

Le paramètre θ de la copule HRT entre les taux et l'immobilier est proche de zéro, justifiant une très faible corrélation entre les deux variables. C'est la raison pour laquelle la modélisation est presque uniforme.

2.1.2. Modélisation de l'actif

Agrégation des actifs

La Provision pour Dépréciation Durable (PDD) est calculée selon les normes comptables en ligne à ligne. Les actifs non soumis à la PDD peuvent être regroupés en une seule ligne par catégorie et par portefeuille financier.

L'allocation stratégique sur laquelle porte notre étude définit quatre catégories : actions, immobilier, monétaire et produits de taux. Ce dernier est scindé en deux catégories afin de distinguer les placements R343-9 (obligations directes) des placements R343-10 (OPCVM de taux).

Le modèle intègre deux portefeuilles financiers, celui relatif au contrat d'épargne et celui correspondant aux fonds propres. Au total, le modèle valorise ainsi l'équivalent de 10 lignes d'actifs, plus les lignes d'actifs dont la PDD est modélisée et qui sera évoquée dans la section 2.1.3.

Modélisation des produits de taux

Bien que les produits de taux aient été regroupés en une ou deux lignes d'actifs dans un souci d'optimisation des calculs, cet actif n'est pas modélisé comme une unique obligation. Pour être réaliste, la modélisation des actifs de taux doit intégrer la structure du portefeuille obligataire à savoir l'échéancier, les flux de coupons et de remboursement. Le modèle peut également permettre les achats et ventes.

Pour cela, un échéancier est modélisé à partir de la maturité moyenne des obligations en portefeuille. Par hypothèse, les arrivées à échéance des produits de taux en portefeuille sont équipondérées sur la période comprise entre la date de situation initiale et deux fois la maturité. Par exemple, si la maturité moyenne des obligations en portefeuille est de 5 ans alors 10% des obligations arrivent annuellement à échéance entre la 1^{ère} année et la 10^{ème} année.

Ensuite, chaque réinvestissement d'obligation est investi sur une maturité égale à deux fois la maturité moyenne du portefeuille précédemment paramétrée. Les achats de la première année arriveront à échéance à la 11^{ème} année si elles ne sont pas vendues avant cela. Dans cette modélisation des obligations au sein d'une unique ligne, la prise en compte des ventes avant maturité est permise grâce à un facteur de conservation depuis l'investissement compris entre 0 et 1. Par exemple, si 20% des obligations sont vendues une année donnée, alors ce facteur passe de 1 à 0,80 quelle que soit la quantité d'obligations achetées cette même année. L'année suivante, avec une maturité moyenne de 5 ans donc un renouvellement automatique de 10% du portefeuille, seul 10% x 80% du portefeuille sera renouvelé.

Cette modélisation du renouvellement du portefeuille permet de représenter de manière plus réaliste le rendement du portefeuille obligataire. En effet, le taux de rendement de cette obligation agrégée évolue en fonction des taux des obligations vendues ou arrivées à échéance et des taux des obligations achetées. Pour cela, l'échéancier qui modélise la quantité d'obligations arrivant à échéance considère également les taux de ces obligations.

La valeur de marché des produits de taux est calculée à partir d'une sensibilité paramétrée et de la variation des taux d'intérêts.

Illustrons le modèle de rendement via un exemple simplifié (Tableau 3) où la maturité moyenne est paramétrée à 2,5 années, c'est-à-dire une maturité initiale de chaque obligation de 5 ans. Les obligations acquises auront également une maturité de 5 ans :

Année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
Part de l'actif à échéance		20%	20%	20%	20%	20%	20%	20%	20%	
Taux obligations à échéance		2.50%	2.25%	2.00%	1.75%	1.50%	1.00%	1.10%	1.20%	
Taux obligations achetées		1.00%	1.10%	1.20%	1.30%	1.40%	1.50%	1.60%	1.70%	
Ventes exceptionnelles		0	0	0	0	0	0	0	0	
Achats exceptionnels		0	0	0	0	0	0	0	0	
Facteur de conservation		1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
Arrivées à échéance		20	20	20	20	20	20	20	20	
Réinvestissement		20	20	20	20	20	20	20	20	
VNC obligation		100	100	100	100	100	100	100	100	
Taux de rendement		2.00%	1.70%	1.47%	1.31%	1.22%	1.20%	1.30%	1.40%	1.50%
		$\left(1,70\% = \frac{100 \times 2\% - 20 \times 2,5\% + 20 \times 1\%}{100 - 20 + 20}\right)$								

Tableau 3 - Exemple n°1 de modélisation de la classe obligataire

En considérant les obligations constituées pour moitié par le stock en situation initiale et l'autre moitié des achats exceptionnels, la chronique des obligations arrivant à échéance est modifiée tout comme le taux de rendement moyen du portefeuille obligataire (Tableau 4).

Année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
Part de l'actif à échéance		20%	20%	20%	20%	20%	20%	20%	20%	
Taux obligations à échéance		2.50%	2.25%	2.00%	1.75%	1.50%	1.00%	1.10%	1.20%	
Taux obligations achetées		1.00%	1.10%	1.20%	1.30%	1.40%	1.50%	1.60%	1.70%	
Ventes exceptionnelles		0	0	0	0	0	0	0	0	
Achats exceptionnels		50	0	0	0	0	0	0	0	
Facteur de conservation		1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	
Arrivées à échéance		10	10	10	10	10	60	10	10	
Réinvestissement		10	10	10	10	10	60	10	10	
VNC obligation		50	100	100	100	100	100	100	100	
Taux de rendement		2.00%	1.35%	1.24%	1.16%	1.11%	1.10%	1.40%	1.45%	1.50%
		$\left(1,35\% = \frac{50 \times 2\% - 10 \times 2,5\% + 60 \times 1\%}{50 - 10 + 60}\right)$								

Tableau 4 - Exemple n°2 de modélisation de la classe obligataire en cas d'achats exceptionnels

L'intégration de ventes exceptionnelles modélisées sur la fin d'une année modifie également la chronique de remboursement pendant cinq années au travers du facteur de conservation. Sur cette période, les arrivées à échéance sont réduites de 15% (Tableau 5).

Année	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Part de l'actif à échéance		20%	20%	20%	20%	20%	20%	20%	20%
Taux obligations à échéance		2.50%	2.25%	2.00%	1.75%	1.50%	1.00%	1.10%	1.20%
Taux obligations achetées		1.00%	1.10%	1.20%	1.30%	1.40%	1.50%	1.60%	1.70%
Ventes exceptionnelles	0	15	0	0	0	0	0	0	0
Achats exceptionnels	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Facteur de conservation	1.00	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85	1.00	1.00
Arrivées à échéance	20	20	17	17	17	17	17	20	17
Réinvestissement	20	20	17	17	17	17	17	20	17
VNC obligation	100	100	85	85	85	85	85	85	85
Taux de rendement	2.00%	1.70%	1.43%	1.27%	1.18%	1.16%	1.26%	1.38%	1.48%
		$\left(1,43\% = \frac{(100 - 15) \times 1,70\% - 20 \times 2,25\% + 20 \times 1,10\%}{85}\right)$							

Tableau 5 - Exemple n°3 de modélisation de la classe obligataire en cas de ventes exceptionnelles

Dans le cas d'achats et de ventes exceptionnels, les rendements de l'actif simplifié sont repris dans le Tableau 6.

Année	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Part de l'actif à échéance		20%	20%	20%	20%	20%	20%	20%	20%
Taux obligations à échéance		2.50%	2.25%	2.00%	1.75%	1.50%	1.00%	1.10%	1.20%
Taux obligations achetées		1.00%	1.10%	1.20%	1.30%	1.40%	1.50%	1.60%	1.70%
Ventes exceptionnelles	0	15	0	0	0	0	0	0	0
Achats exceptionnels	50	0	0	0	0	0	0	0	0
Facteur de conservation	1.00	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85	0.85	1.00	1.00
Arrivées à échéance	10	10	9	9	9	9	51	10	9
Réinvestissement	10	10	9	9	9	9	51	10	9
VNC obligation	50	100	85	85	85	85	85	85	85
Taux de rendement	2.00%	1.35%	1.21%	1.13%	1.09%	1.08%	1.38%	1.44%	1.49%
		$\left(1,21\% = \frac{(100 - 15) \times 1,35\% - 10 \times 2,25\% + 10 \times 1,10\%}{85}\right)$							

Tableau 6 - Exemple n°4 de modélisation de la classe obligataire en cas de ventes exceptionnelles

Modélisation des actions et de l'immobilier

Les actions sont valorisées à partir de l'indice action dont la modélisation par un processus brownien géométrique est présentée dans la section 2.1.1. Leurs revenus correspondant aux dividendes sont obtenus à partir d'un taux de dividende fixe, rapporté à la valeur de marché de l'actif. Des revenus complémentaires peuvent être générés en cas de ventes exceptionnelles, selon le niveau de plus ou moins-values latentes.

De manière analogue, les actifs immobiliers sont valorisés à partir de l'indice immobilier également modélisé par un processus brownien géométrique. Leurs revenus bruts d'amortissement sont issus d'un taux de loyer appliqué à la valeur de marché du titre. Les amortissements viennent réduire la valeur nette comptable des actifs immobiliers tous les ans d'une proportion fixe de la valeur nette comptable. Le revenu net d'amortissement est le résultat du revenu brut réduit de ces amortissements. Cette réduction de revenu comptable pourra être compensée lors de la vente du titre

car la baisse automatique de la valeur comptable des amortissements implique une augmentation équivalente de la plus ou moins-values latente et donc des revenus générés des ventes.

2.1.3. Provision pour Dépréciation Durable

Mécanisme de la Provision pour Dépréciation Durable

La provision pour Dépréciation Durable, notée par la suite PDD, est une provision complexe à modéliser compte tenu des modalités de calcul nécessitant beaucoup d'informations donc de temps de calcul pour être obtenue. Elle est calculée titre par titre par ligne FIFO⁶. Un titre ayant été acheté en deux fois aura donc deux lignes avec des valeurs de PDD potentiellement différentes.

La provision est constituée lorsque la valeur de marché de la ligne est inférieure au seuil de 80% du prix d'achat du titre (ou 70% en cas de forte volatilité des marchés) sur cette période depuis plus de six mois. La PDD correspond alors au niveau de moins-value latente. Cependant un assureur peut utiliser la valeur recouvrable, qui viendra réduire le niveau de PDD théorique. En effet, cette valeur recouvrable qui est calculée une fois l'activation de la PDD, permet de plafonner le niveau de provisions à l'écart entre la valeur recouvrable et le prix d'achat de l'actif. Au moment de son activation, elle est calculée à partir de la valeur de marché du titre en dépréciation :

$$VR = VM \times (1 + TxVR)^{DuréeVR}$$

L'hypothèse de cette formule est que la valeur de marché du cours du titre considéré retrouvera le niveau de sa valeur recouvrable suite à une durée *DuréeVR*. Si pendant cette durée d'activation, la valeur de marché repasse au-dessus du prix d'achat, la valeur recouvrable est désactivée. Autrement, elle est désactivée automatiquement à la fin de la durée. Attention, l'utilisation de la valeur recouvrable engage l'assureur à la conservation du titre sur la durée qui a servi à son évaluation.

Le schéma de l'algorithme de calcul de la PDD de la Figure 10 reprend son fonctionnement.

⁶ First In First Out

- Sur les titres pour lesquels une valeur recouvrable peut être activée, cette dernière doit être conservée pendant un nombre d'années variable car la PDD est déduite de celle-ci.
- Le niveau de déclenchement du cours pour considérer le titre en dépréciation amène un effet de seuil important. Pour une faible variation de cours, il est ainsi possible d'effectuer un provisionnement important sur un titre non provisionné. Cet effet binaire limite le recours à une modélisation déterministe où tous les cours suivraient exactement un même indice prévisionnel. L'incertitude sur le cours des titres nécessite la modélisation d'une volatilité.

Dans le cadre d'une étude d'allocation stratégique où un nombre conséquent de calculs sont réalisés en raison du grand nombre d'allocations et de scénarios, il est nécessaire d'utiliser une modélisation de la PDD réduisant au maximum ses temps de calcul.

Modélisation probabiliste à 1 an de la PDD

La méthode présentée ici est basée sur une vision probabiliste du calcul de la PDD à horizon d'un an. Ce choix a été dicté par un compromis entre l'exactitude du calcul et le temps de calcul nécessaire.

Avec l'utilisation d'un générateur de scénarios économiques, le modèle effectue des tirages de scénarios économiques aléatoires, par Monte-Carlo. Pour un scénario donné, il est nécessaire de modéliser le cours de chaque ligne d'actif potentiellement concernée par une dotation ou reprise à la PDD, et ce de manière intra-annuelle.

Une vision déterministe simplifiée pourrait considérer que le cours de tous les actifs suit exactement celui de l'indice modélisé et qu'il n'y a pas de volatilité intra-annuelle. Cependant, cette vision déterministe s'éloigne de la réalité où chaque titre possède son propre cours, plus ou moins éloigné de celui de l'indice, et ce cours n'évolue pas de manière linéaire entre deux dates d'inventaire. Les résultats obtenus, en raison de l'effet de seuil expliqué précédemment et du caractère durable non vérifié seraient faux.

Une vision stochastique, en simulant un grand nombre de trajectoires des cours quotidiens pour chaque ligne étudiée, permettrait de répondre aux besoins mais engendrerait des simulations stochastiques dans d'autres simulations stochastiques, et cela sur un pas de temps quotidien. Cette procédure n'est pas réalisable.

Le compromis trouvé est d'utiliser une vision probabiliste, moyennant quelques hypothèses, afin de prendre en compte le caractère incertain par rapport à l'indice des cours des titres ainsi que le côté durable de la dépréciation. Cela permet également d'éviter d'augmenter le nombre de simulations. Les valeurs de PDD sont alors estimées à partir de l'espérance issue des formules suivantes selon les cas :

Cas	PDD initiale	Soumis à VR	VR(0)<PdR activée	Part à provisionner	Espérance de PDD sur cette part à provisionner	Espérance de PDD
N°1	Non	Non		$P\left(\frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, t \in [0,5; 1]\right)$ (P)	$PdR(0) - E\left[VM(1)\frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, t \in [0,5; 1]\right]$ (E)	(P) × (E)
N°2	Oui	Non		$P(VM(1) < PdR(0))$ (P)	$PdR(0) - E[VM(1) VM(1) < PdR(0)]$ (E)	(P) × (E)
N°3	Non	Oui	Oui	Nulle	Nulle	Nulle
N°4	Oui	Oui	Oui	$P(VR(0) < VM(1) < PdR(0))$ (P1)	$PdR(0) - E[VM(1) VR(0) < VM(1) < PdR(0)]$ (E1)	$(P1) \times (E1) + (P2) \times (E2)$
				$P(VM(1) < VR(0) < PdR(0))$ (P2)	$PdR(0) - VR(0)$ (E2)	
N°5	Non	Oui	Non	$P\left(\frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, t \in [0,5; 1] \cap VR(1) < PdR(0)\right)$ (P) avec $VR(1) = VM(1) \times (1 + TxVR)^{DuréeVR}$	$PdR(0) - E\left[VR(1)\frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, t \in [0,5; 1] \cap VR(1) < PdR(0)\right]$ (E)	(P) × (E)
N°6	Oui	Oui	Non	Cas impossible		

Tableau 7 - Tableau de synthèse des espérances de PDD selon la situation en t=0

Le Tableau 7 permet de formaliser les calculs de PDD moyenne en théorie selon les cas. Cependant, les probabilités et espérances explicitées doivent pouvoir être calculées directement à partir des données initiales : valeur de marché, valeur recouvrable, prix de revient et paramètres du processus. Pour cela, certaines hypothèses doivent être prises. Celles-ci sont détaillées ci-après.

La suite de cette section consiste à exprimer de manière directe la PDD en fonction des données initiales dans le cas d'une action modélisée à partir d'un mouvement brownien géométrique dont nous connaissons le prix de revient et la valeur de marché en situation initiale ($PdR(0)$ et $VM(0)$), et éventuellement la valeur recouvrable.

$$dVM(t) = \mu VM(t)dt + \sigma VM(t)dW_t$$

$$VM(t) = VM(0)e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}$$

Cas n°1 (actif non provisionné initialement et non soumis à la valeur recouvrable)

Nous cherchons la probabilité que le titre soit en dépréciation durable pendant les six derniers mois de l'année. Il s'agit de la probabilité que le processus $VM(t)/PdR(0)$ soit continuellement en-dessous d'un seuil s (=80% ou 70%) entre $t = 0,5$ (correspondant au 30/06/N) et $t = 1$ (31/12/N).

Dans le cas où le cours du titre en $t = 1$ est inconnu et incertain, nous avons :

$$P\left(\frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, \forall t \in [0,5; 1] \mid \frac{VM(0)}{PdR(0)}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} P_1\left(\frac{(i+0,5) \cdot s}{n}, \frac{s}{n}\right) \times P'_1\left(\frac{(i+0,5) \cdot s}{n}, s\right)$$

Avec $P_1(a, \varepsilon)$ la probabilité pour que $\frac{VM(0,5)}{PdR(0)}$ soit proche d'une valeur a quelconque (ie $\in [a - \varepsilon; a + \varepsilon]$), connaissant $\frac{VM(0)}{PdR(0)}$:

$$P_1(a, \varepsilon) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0,5}\sigma} \left(\ln\left((a + \varepsilon) \frac{VM(0)}{PdR(0)}\right) - (\mu - \sigma^2/2)0,5\right)\right) - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0,5}\sigma} \left(\ln\left((a - \varepsilon) \frac{VM(0)}{PdR(0)}\right) - (\mu - \sigma^2/2)0,5\right)\right)$$

Et $P'_1(a, s)$ la probabilité pour que, connaissant $\frac{VM(0,5)}{PdR(0)} = a < s$, $\frac{VM(t)}{VM(0)}$ soit sous un seuil s quel que soit $t \in [0,5; 1]$.

$$P'_1(a, s) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{0,5}} \left(\frac{\mu - \sigma^2/2}{2}0,5 - \ln\left(\frac{s}{a}\right)\right)\right) - \exp\left(2 \frac{(\mu - \sigma^2/2)\ln\left(\frac{s}{a}\right)}{\sigma^2}\right) \Phi\left(-\frac{1}{\sigma\sqrt{0,5}} \left(\frac{\mu - \sigma^2/2}{2}0,5 + \ln\left(\frac{s}{a}\right)\right)\right)$$

Le détail des calculs se trouve en annexe II.

Pour simplifier les calculs, il est possible de considérer non plus la distribution des valeurs de $\frac{VM(0,5)}{PdR(0)}$ en $t = 0,5$ mais une valeur déterministe :

$$P\left(\frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, \forall t \in [0,5; 1] \mid \frac{VM(0)}{PdR(0)}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{VM(0)}{PdR(0)} e^{(\mu - \sigma^2/2)0,5} \geq s \\ P'_1\left(\frac{VM(0)}{PdR(0)} e^{(\mu - \sigma^2/2)0,5}, s\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

La probabilité d'être en dépréciation durable formalisée, il convient de quantifier le montant de la provision à éventuellement doter. Celle-ci peut être déduite de la valeur de marché en $t = 1$ de l'actif calculée de manière déterministe, ou bien en restant dans le cadre stochastique, de la distribution de probabilité de cette valeur de marché. Dans ce second cas, une bonne estimation de la PDD est son espérance. La façon la plus exacte de l'obtenir est de calculer l'espérance de la valeur de marché en $t = 1$ sachant que $\frac{VM(t)}{PdR(0)} < s$ sur $t \in [0,5; 1]$. Pour simplifier les formules, nous considérons la situation en $t = 0,5$ connue. De cette manière, dans un modèle brownien géométrique :

$$VM(1) = VM(0,5)e^{(\mu - \sigma^2/2)0,5 + \sigma W_{0,5}}$$

Ce qui implique que $\frac{VM(1)}{VM(0,5)}$ suit une loi log-Normale :

$$\ln\left(\frac{VM(1)}{VM(0,5)}\right) \sim N\left(\left(\mu - \sigma^2/2\right)0,5; 0,5\sigma^2\right)$$

On déduit de la loi de $\frac{VM(1)}{VM(0,5)}$:

$$E\left[\frac{VM(1)}{VM(0,5)} \mid \frac{VM(1)}{VM(0,5)} < x\right] = \frac{1}{F_{LN}(x)} e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} \Phi\left(\frac{\ln(x) - \alpha}{\beta} - \beta\right)$$

avec $\alpha = \left(\mu - \sigma^2/2\right)0,5$, $\beta^2 = 0,5\sigma^2$ et F_{LN} la fonction de répartition de la loi log-normale de $\frac{VM(1)}{VM(0,5)}$.

Les calculs sont explicités en annexe V.

En posant $x = \frac{s.PdR(0)}{VM(0,5)}$:

$$E\left[VM(1) \mid \frac{VM(1)}{PdR(0)} < s\right] = \frac{VM(0,5)}{F_{LN}\left(\frac{s.PdR(0)}{VM(0,5)}\right)} e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{s.PdR(0)}{VM(0,5)}\right) - \alpha}{\beta} - \beta\right)$$

La seconde hypothèse prise est que $E\left[VM(1) \mid \frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, t \in [0,5; 1]\right] \approx E\left[VM(1) \mid \frac{VM(1)}{PdR(0)} < s\right]$

Ainsi :

$$E\left[VM(1) \mid \frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, t \in [0,5; 1]\right] \approx \frac{VM(0,5)}{F_{LN}\left(\frac{s.PdR(0)}{VM(0,5)}\right)} e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{s.PdR(0)}{VM(0,5)}\right) - \alpha}{\beta} - \beta\right)$$

Et en remplaçant α et β^2 par leurs valeurs respectives en fonction de μ et σ , l'espérance de la PDD peut de cette manière être approximée :

$$E\left[VM(1) \mid \frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, t \in [0,5; 1]\right] \approx \frac{VM(0,5)}{F_{LN}\left(\frac{s.PdR(0)}{VM(0,5)}\right)} e^{\mu} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{s.PdR(0)}{VM(0,5)}\right) - \left(\mu + \sigma^2/2\right)0,5}{\sqrt{0,5}\sigma}\right)$$

Cas n°2 (actif déjà provisionné initialement et non soumis à la valeur recouvrable)

$VM(1) = VM(0)e^{(\mu - \sigma^2/2) + \sigma W_1}$ ou $VM(1) = VM(0,5)e^{(\mu - \sigma^2/2)0,5 + \sigma W_{0,5}}$ selon le choix du dernier point connu (en $t = 0$ ou en $t = 0,5$). Dans les deux cas, $VM(1)$ suit une loi log-normale, ce qui permet de déterminer exactement les valeurs de la probabilité d'avoir toujours une PDD non nulle en fin d'année 1. Pour une valeur connue en $t = 0,5$, on a :

$$P(VM(1) < PdR(0)) = P\left(\frac{VM(1)}{VM(0,5)} < \frac{PdR(0)}{VM(0,5)}\right) = F_{LN}\left(\frac{PdR(0)}{VM(0,5)}\right)$$

Et le montant de cette PDD est :

$$\begin{aligned} E[VM(1)|VM(1) < PdR(0)] &= VM(0,5) \times E\left[\frac{VM(1)}{VM(0,5)} \mid \frac{VM(1)}{VM(0,5)} < \frac{PdR(0)}{VM(0,5)}\right] \\ &= \frac{VM(0,5)}{F_{LN}(PdR(0))} e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} \Phi\left(\frac{\ln(PdR(0)) - \alpha}{\beta} - \beta\right) \end{aligned}$$

Avec F_{LN} la fonction de répartition de la loi log-normale de paramètres $\alpha = (\mu - \sigma^2/2)0,5$ et $\beta^2 = 0,5\sigma^2$

Cas n°3 (actif non provisionné initialement avec valeur recouvrable déjà activée)

Ce cas de figure engendre systématiquement une PDD nulle. En effet, si la valeur recouvrable est activée et que l'actif n'est pas provisionné alors cela signifie que cette valeur recouvrable est supérieure au prix de revient.

Ce point se justifie par contraposée : si un titre possédait effectivement une valeur recouvrable inférieure au prix de revient, selon le montant de sa valeur de marché en situation initiale, il présenterait une provision (cas où la valeur de marché est inférieure au prix de revient) et l'on serait donc dans le cas n°4 ou bien la valeur recouvrable serait désactivée (cas où la valeur de marché est supérieure au prix de revient) et l'on se retrouve dans le cas n°5.

Cas n°4 (actif provisionné initialement avec valeur recouvrable activée)

Dans ce cas, la dépréciation durable n'est pas un critère à vérifier, seule une distinction entre les deux événements complémentaires $\{VR(0) < VM(1)\}$ et $\{VM(1) < VR(0)\}$ doit être faite car le montant de la PDD en dépend.

Dans le premier cas ($VR(0) < VM(1)$), la probabilité $P(VR(0) < VM(1) < PdR(0))$ est obtenue directement à partir de la loi de $VM(1)$ et la PDD sera égale à :

$$\begin{aligned} &PdR(0) - E[VM(1)|VR(0) < VM(1) < PdR(0)] \\ &= PdR(0) - \frac{P(VM(1) < PdR(0)) \times E[VM(1)|VM(1) < PdR(0)] - P(VM(1) < VR(0)) \times E[VM(1)|VM(1) < VR(0)]}{P(VM(1) < PdR(0)) - P(VM(1) < VR(0))} \end{aligned}$$

Ce montant peut être calculé en connaissance de la loi de $VM(1)$ et de ses paramètres.

Dans le second cas ($VM(1) < VR(0)$), la probabilité $P(VM(1) < VR(0) < PdR)$ et la PDD $PdR(0) - VR(0)$ sont obtenues directement.

Cas n°5 (actif non provisionné initialement et soumis à valeur recouvrable non encore activée)

Le calcul de $P\left(\frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, t \in [0,5; 1] \cap VR(1) < PdR(0)\right)$ peut-être simplifié en ne considérant que la contrainte la plus forte. Ainsi, si $P[VM(t) < 0,8 \times VO, t \in [0,5; 1]] < P[VR(1) < VO]$ alors, en faisant l'hypothèse que $\{VM(t) < 0,8 \times VO, t \in [0,5; 1]\} \subset \{VR(1) < VO\}$, on en déduit l'espérance de la PDD par :

$$P\left(\frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, t \in [0,5; 1]\right) \times \left(PdR(0) - E\left[VR(1) \mid \frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, t \in [0,5; 1]\right]\right)$$

A l'inverse, si la contrainte la plus forte est d'avoir $\{VR(1) < VO\}$, c'est-à-dire que $P[VR(1) < VO] < P[VM(t) < 0,8 \times VO, t \in [0,5; 1]]$ alors, en faisant l'hypothèse que $\{VR(1) < VO\} \subset \{VM(t) < 0,8 \times VO, t \in [0,5; 1]\}$, on en déduit l'espérance de la PDD par :

$$P(VR(1) < VO) \times (PdR(0) - E[VR(1) \mid VR(1) < VO])$$

Modélisation déterministe prospective de la PDD au-delà d'1 an

Sur la première année, la distribution de la valeur de marché est modélisée à partir d'un processus stochastique. De plus, la probabilité de franchir un seuil sur les 6 derniers mois, c'est-à-dire le caractère durable est correctement pris en compte. Bien que la distribution complète de la VM soit disponible à la fin de la première année, soit une infinité de points et de PDD, c'est la vision moyenne donc l'espérance qui est conservée.

Pour l'année suivante, la distribution de la VM en $t = 2$ peut en théorie être également obtenue, de la même manière. Mais pour le calcul de la PDD, l'information du point de départ ($t = 1$) et du point d'arrivée ($t = 2$) est nécessaire pour estimer le caractère durable et pour appliquer la valeur recouvrable potentiellement calculée l'année précédente. Dans une vision probabiliste, nous disposons d'une distribution donc une infinité de points en $t=1$ rendant l'estimation de l'information en $t = 2$ difficile. De plus, un grand nombre de trajectoires simulées par Monte Carlo n'est pas non plus une solution car cela signifierait une multiplication des trajectoires à chaque pas de temps, dans un modèle lui-même conçu via des simulations de Monte Carlo pour le GSE. Il est par conséquent nécessaire pour cette modélisation au-delà de 1 an de connaître de manière certaine (ou déterministe) les valeurs de marché, les valeurs recouvrables et le provisionnement de chaque début et donc fin d'année.

Dans cette perspective, il est nécessaire de modéliser les trajectoires des cours d'une année à l'autre de manière déterministe. L'inconvénient déjà évoqué est que l'incertitude de la trajectoire des cours disparaît et tous les actifs varient de manière identique selon le même indice. L'effet de seuil engendré sur les titres dont le cours est proche du seuil de dépréciation durable sur un scénario est atténué par le nombre important de scénarios simulés au total par Monte-Carlo.

Il reste tout de même à prendre en compte le caractère durable de la dépréciation, calculé sur les six derniers mois de chaque année. Bien que déterministes, les trajectoires simulées sont à pas annuel et

la trajectoire entre deux points n'est pas connue. Si seul le cours de fin d'année est pris en compte, la PDD sera alors majorée. Plusieurs solutions, présentées ci-dessous par ordre croissant de complexité, permettent de prendre en compte le caractère durable.

Une première possibilité consiste à faire l'hypothèse d'absence de volatilité en cours d'année. Le cours du titre est alors déduit directement à partir de sa valeur au 01/01/N et de celle au 31/12/N. Cela suppose qu'un titre sera considéré en dépréciation durable si son cours au 31/12/N et la moyenne des deux cours connus de l'année (correspondant ainsi au cours du 30/06/N) sont inférieurs au seuil. La Figure 11 illustre cette hypothèse. Le titre bleu n'est alors plus considéré en dépréciation durable, bien que son cours de clôture en fin d'année soit inférieur au seuil de dépréciation.

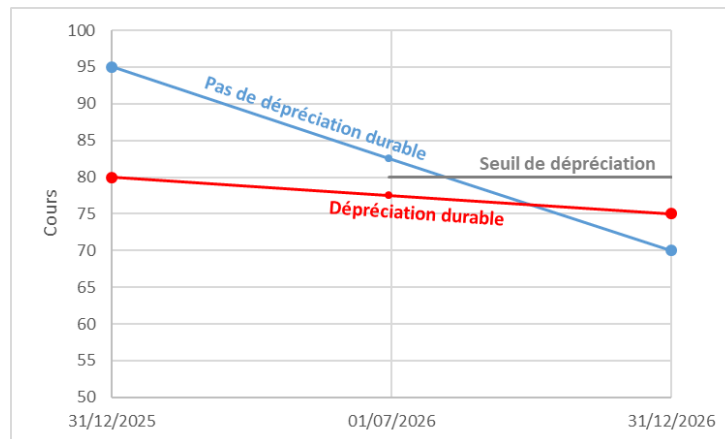


Figure 11 - Exemple de modélisation n°1 : interpolation linéaire du cours

Cette première proposition, même si elle prend partiellement en compte le caractère durable, a toujours tendance à majorer la PDD en raison de l'absence de volatilité modélisée. Par exemple, le titre rouge, qui s'il présente une forte volatilité, a de fortes probabilités de franchir le seuil de dépréciation une fois sur la période et donc ne pas faire l'objet d'une dépréciation. La volatilité du cours intra-annuelle pourrait permettre de répondre à cette problématique.

Une solution simple est d'intégrer une marge au seuil de dépréciation, tout en conservant la même modélisation des cours. Cette marge peut être calibrée à partir de la première année. Sur cette année, la PDD est calculée de manière probabiliste, donc en prenant correctement en compte le caractère durable et la marge permettant de se rapprocher du même montant est alors déterminée. Dans le modèle construit pour notre étude, cette marge est de l'ordre de 4%, même si cela peut varier en fonction de la situation initiale et surtout de la volatilité des actifs modélisés. Avec une telle marge, le titre rouge sur la Figure 12 n'est plus considéré en dépréciation durable.

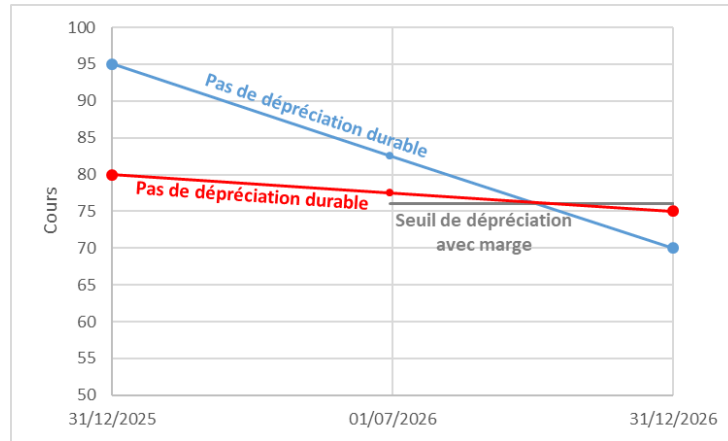


Figure 12 - Exemple de modélisation n°2 : interpolation linéaire et marge sur le seuil de dépréciation

Enfin, il est possible de calculer exactement la probabilité que le processus $VM(t)/PdR(0)$ soit continuellement en-dessous d'un seuil s entre $t = 0,5$ et $t = 1$ dans le cas où le cours du titre en $t = 1$ est connu et certain (Wallez-Maskay, 2000), illustré Figure 13 :

$$P\left(\frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, \forall t \in [0,5 ; 1] \mid \frac{VM(0)}{PdR(0)} ; \frac{VM(1)}{PdR(0)}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} P_2\left(\frac{(i+0,5).s}{n}, \frac{s}{n}\right) \times P'_2\left(\frac{(i+0,5).s}{n}, s\right)$$

Avec $P_2(a, \varepsilon)$ la probabilité pour que $\frac{VM(0,5)}{PdR(0)}$ soit proche d'une valeur a quelconque (ie $\in [a - \varepsilon ; a + \varepsilon]$), connaissant $\frac{VM(0)}{PdR(0)}$ et $\frac{VM(1)}{PdR(0)}$:

$$P_2(a, \varepsilon) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0,25}\sigma} \left(\ln\left(\frac{(a+\varepsilon)PdR(0)}{VM(0)}\right) - \ln\left(\frac{A PdR(0)}{VM(0)}\right)\right) 0,5\right) - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0,25}\sigma} \left(\ln\left(\frac{(a-\varepsilon)PdR(0)}{VM(0)}\right) - \ln\left(\frac{A PdR(0)}{VM(0)}\right)\right) 0,5\right)$$

Et $P'_2(a, s)$ la probabilité pour que, connaissant $\frac{VM(0,5)}{PdR(0)} = a < s$ et $\frac{VM(1)}{PdR(0)} = A < s$, $\frac{VM(t)}{PdR(0)}$ soit sous un seuil s quel que soit $t \in [0,5 ; 1]$.

$$P'_2(a, s) = 1 - \exp\left(\frac{-2 \ln\left(\frac{s}{A}\right) \ln\left(\frac{s}{a}\right)}{0,5\sigma^2}\right)$$

Le détail des calculs se trouve en annexe III.

Pour simplifier les calculs, il est possible de considérer non plus la distribution des valeurs de $\frac{VM(0,5)}{PdR(0)}$ en $t = 0,5$ mais une valeur déterministe :

$$P\left(\frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, \forall t \in [0,5 ; 1] \mid \frac{VM(0)}{PdR(0)}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{VM(0)}{PdR(0)} e^{(\mu-\sigma^2/2)0,5} \geq s \\ P'_2\left(\frac{VM(0)}{PdR(0)} e^{(\mu-\sigma^2/2)0,5}, s\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

A noter qu'il est également possible de calculer cette probabilité pour un produit de taux dont les taux sont valorisés à partir d'un processus d'Ornstein-Ulhenbeck.

$$VM(t) = VM(t-1) \times (1 - Sensi \times (Tx_t - Tx_{t-1}))$$

avec $Tx_t = e^{rt} - 2\%$

$$dr_t = K(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

$$r_t = r_0 e^{-Kt} + \theta(1 - e^{-Kt}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2Kt}}{2K}} W_t$$

La probabilité $P_3(a, \varepsilon)$ pour que $\frac{VM(0,5)}{PdR(0)}$ soit proche d'une valeur a quelconque (ie $\in [a - \varepsilon ; a + \varepsilon]$), connaissant $\frac{VM(0)}{PdR(0)}$ et $\frac{VM(1)}{PdR(0)}$ possède alors une l'expression suivante :

$$P_3(a, \varepsilon) = \Phi \left(-\frac{1}{\sqrt{0,25}} \left(\frac{\ln \left(\frac{(1-(a+\varepsilon)\frac{VNC(0)}{Sensi}) + e^{r_0}}{\frac{VM(0)}{PdR(0)}} \right) - r_0 e^{-0,5K} - \theta(1 - e^{-0,5K})}{\sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-K}}{2K}}} - 0,5 \times \frac{\ln \left(\frac{(1-A\frac{VNC(0)}{Sensi}) + e^{r_0}}{\frac{VM(0)}{PdR(0)}} \right) - r_0 e^{-K} - \theta(1 - e^{-K})}{\sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2K}}{2K}}} \right) \right) - \Phi \left(-\frac{1}{\sqrt{0,25}} \left(\frac{\ln \left(\frac{(1-(a-\varepsilon)\frac{VNC(0)}{Sensi}) + e^{r_0}}{\frac{VM(0)}{PdR(0)}} \right) - r_0 e^{-0,5K} - \theta(1 - e^{-0,5K})}{\sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-K}}{2K}}} - 0,5 \times \frac{\ln \left(\frac{(1-A\frac{VNC(0)}{Sensi}) + e^{r_0}}{\frac{VM(0)}{PdR(0)}} \right) - r_0 e^{-K} - \theta(1 - e^{-K})}{\sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2K}}{2K}}} \right) \right)$$

Le détail des calculs se trouve en annexe IV.

Afin d'obtenir une expression analytique de la probabilité $P'_3(a, s)$ pour ces actifs, l'hypothèse est faite que le processus $\frac{VM(t)}{PdR(0)}$ sur $t \in [0,5 ; 1]$ suit un mouvement brownien géométrique.

Une fois la probabilité de dépréciation durable calculée, il est alors nécessaire de choisir le niveau de probabilité à partir duquel le titre est considéré en dépréciation durable. Il peut s'agir de 50% mais il est également possible de considérer par prudence tous les titres ayant une probabilité supérieure à 40% par exemple comme étant en dépréciation durable.

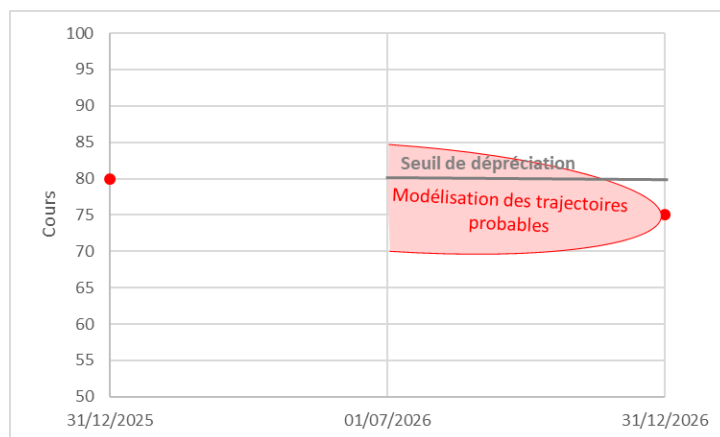


Figure 13 - Exemple de modélisation n°3 : quantification de la proportion théorique de trajectoires en dépréciation durable

2.1.4. Indicateur de performance

Le modèle construit spécifiquement pour la définition de l'allocation stratégique sur la dimension actif permet une modélisation au plus juste des revenus des actifs tout en limitant les temps de calcul. Comme vu précédemment, les revenus des produits de taux prennent en considération l'évolution des taux d'investissement avec la modélisation du roulement du portefeuille. Les actions et actifs immobiliers génèrent des revenus courants et exceptionnels liés au niveau de leurs cours respectifs. La particularité des amortissements immobiliers et leurs impacts sur la valorisation et les revenus sont également modélisés. La PDD est calculée au plus juste.

La participation aux bénéficiaires affectée aux contrats d'épargne et définie par la clause contractuelle⁷ chaque année est réinvestie dans les différentes classes d'actif.

La clause réglementaire de participation minimale (85% d'un compte financier + 90% d'un solde technique ou 100% si négatif) est également évaluée et permet d'ajuster au mieux les transferts d'actifs entre le canton d'épargne et les fonds propres en cas de non-respect de cette clause.

Toutes ces considérations permettent de modéliser de la manière la plus réaliste possible les revenus des actifs du canton financier du contrat d'épargne dans le cadre théorique simplifié d'un encaissement net nul. C'est la raison pour laquelle, l'indicateur de performance conservé dans ce cadre est la moyenne du **rendement comptable des actifs** du canton d'épargne sur la durée de simulation.

2.1.5. Indicateur de risque

La modélisation séparée des actifs du canton d'épargne et de ceux des fonds propres permet de construire un résultat technique complet propre à l'activité d'épargne. En plus de l'ensemble des points évoqués précédemment, la provision pour risque d'exigibilité et la réserve de capitalisation sont modélisées. Ainsi le résultat net d'impôt peut être déduit.

Ce résultat net est réintégré chaque année dans les fonds propres. L'indicateur de risque proposé est la **part de scénarios voyant la valeur de marché des fonds propres passer sous un seuil critique** à un moment de la simulation. Cela se rapproche de la définition d'une probabilité de ruine.

Le choix du seuil est important. Il ne doit pas être trop faible car s'il n'est que trop rarement voire jamais atteint alors cet indicateur ne sera pas suffisamment discriminant. A l'inverse, choisir un seuil trop élevé supprime toute notion de risque dans l'indicateur construit.

⁷ La clause de participation aux bénéfices des contrats étudiés correspond à 95% des produits financiers

2.2. Allocation stratégique sur la dimension « actif-passif »

La première vision présentée se limite à une modélisation adaptée de l'actif dans le but de pouvoir générer les indicateurs de risque et de performance pour un grand nombre d'allocations. Le passif est modélisé succinctement en supposant des flux de passifs nuls, une participation aux bénéfices servie à 100% et sans aucune gestion de la provision pour participation aux bénéfices (PPB).

Ce modèle permet une bonne prise en compte des risques liés aux actifs mais omet un certain nombre de risques qui apparaissent suite à la prise en compte des interactions entre l'actif et le passif et à la modélisation plus réaliste de la participation aux bénéfices et de la politique financière. C'est la raison pour laquelle un modèle de simulation actif-passif plus complet doit être utilisé. Le logiciel en question étant la propriété d'une entité extérieure à la Macif, seuls les principes généraux de calcul seront présentés ici.

2.2.1. Hypothèses de modélisation

Solveo est un outil de simulation actif-passif généraliste destiné aux applications d'aide à la décision, de management des risques et d'évaluation en assurance vie. Il permet de projeter les comptes et cash-flow, en simulation stochastique, sur différents horizons. Le programme fonctionne sur la base de quatre étapes avant de pouvoir générer des résultats.

La première étape est l'alimentation de la situation initiale à partir de données de deux natures :

- Les données liées au passif à savoir les provisions mathématiques, les taux de chargements, le taux minimum garanti, le taux de participation au bénéfice
- Les données liées à l'actif à savoir le détail du portefeuille ligne à ligne. On trouve également les paramètres comptables ainsi que certaines données financières (historique des marchés, frais de gestion et de transaction...)

La deuxième étape est celle de la construction des scénarios économiques. Dans le cadre de cette étude, ils sont tirés par simulation stochastique en probabilité historique. Cela signifie que les projections futures sont issues de processus calibrés à partir des observations passées. Le nombre de variables économiques simulées est plus important que pour la première vision avec l'ajout de l'inflation, du taux de dividende et des spreads par exemple.

La troisième étape est l'alimentation des politiques de l'assureur qui regroupe :

- La politique financière : elle permet de fixer les règles concernant l'évolution des actifs de la société d'assurance et de déterminer la stratégie d'allocation d'actif de l'entreprise. C'est le paramétrage de cette politique financière qui est modifié afin d'étudier les résultats de différentes allocations
- La politique de résultats : elle permet de simuler les décisions du management en matière de taux servis et de résultats. Celle-ci est basée sur un algorithme tentant de reproduire les décisions de taux servi sur le contrat d'épargne en fonction de la situation économique, de la concurrence et du niveau de PPB par exemple.
- Le paramétrage des frais généraux.

La quatrième étape est celle de l'alimentation des données concernant le comportement des assurés. En dehors des échéances et des décès, les mouvements des polices sont régis par les fonctions de comportement. Ces fonctions sont au nombre de cinq :

- Rachats anticipés,
- Souscription (affaires nouvelles),
- Versements supplémentaires,
- Réductions,
- Prorogations.

Elles doivent pouvoir reproduire au mieux le comportement des assurés dans les différentes situations, comme un mécontentement en raison d'un taux servi inférieur à celui de la concurrence. Il s'agit donc d'un lien entre le passif, la situation économique et la politique de l'assureur.

Ces quatre étapes permettent la simulation de l'activité de l'assureur via la projection des résultats comptables et financiers. Le moteur de simulation de Solveo peut être résumé par le schéma suivant de la Figure 14.

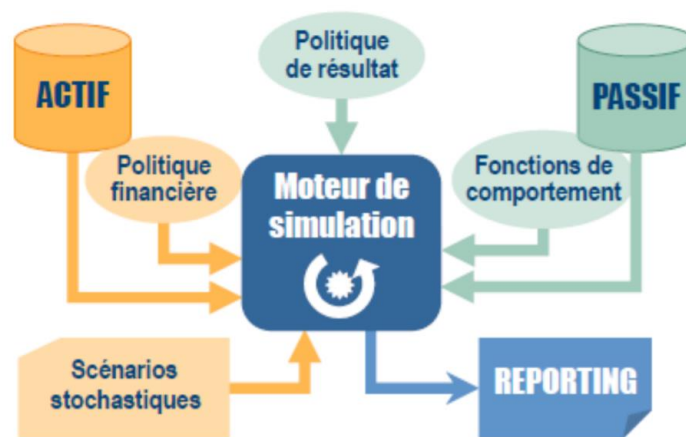


Figure 14 - Schéma de fonctionnement du modèle ALM de Solveo

2.2.2. Indicateur de performance

Le premier modèle (section 2.1) utilisé pour déterminer les risques liés uniquement aux actifs financiers possède une vision globale moyennée. Il permet de déterminer la provision pour risque d'exigibilité et les revenus comptables. Aussi, lorsque c'est nécessaire, comme pour les actifs concernés par un risque de provision pour dépréciation durable, il utilise une vision ligne à ligne. Ce premier modèle est donc pertinent dans une vision comptable, à l'instar de l'indicateur de performance retenu. La performance comptable utilisée comme indicateur ne prend pas en considération les performances latentes des actifs, c'est-à-dire les gains ou pertes de valeurs observés mais qui n'ont pas été réalisés par des ventes. Pourtant, bien que latente, il s'agit bien d'une richesse accumulée dont seule la date de constatation inconnue diffère.

Ce second modèle sur la dimension actif-passif, incluant de nouvelles notions et de nouveaux risques, ne cherche pas de compromis par rapport aux temps de calcul. La modélisation ligne à ligne des actifs, avec leurs caractéristiques propres telles que la sensibilité ou le spread pour les actifs de taux, permet

un calcul de valeur de marché plus précis. C'est la raison pour laquelle l'indicateur de performance retenu pour cette seconde étude est la moyenne du **rendement financier des actifs** du canton d'épargne étudié sur la durée de simulation. Le rendement financier correspond au rendement comptable auquel sont ajoutés les variations de plus ou moins-values latentes d'une année à l'autre.

Ce deuxième indicateur de performance intègre donc tout comme le premier les revenus comptables. Mais à la différence de la première étude, ils sont calculés à partir d'un GSE différent, avec un *model point* différent. Ils intègrent les impacts d'une politique financière, d'une politique de résultat et de fonctions de comportement mais n'incluent pas de PDD. Sur un indicateur d'une telle importance que la rentabilité des actifs pour une problématique d'allocation stratégique, il peut être utile de disposer de plusieurs moyens de calcul de celle-ci et de pouvoir confronter les résultats. Bien sûr, si les rendements comptables étaient identiques entre les deux études, ce qui paraît peu probable étant donné les différences d'hypothèses énumérées ci-dessus, il ne serait pas utile de conserver les deux indicateurs mais uniquement les rendements latents pour cette seconde.

2.2.3. Indicateur de risque

Le modèle permet un calcul des engagements de l'assureur au travers des fonctions de comportement et de la politique de résultat. Le risque de l'assureur pour cette étude est de ne pas disposer de suffisamment d'actifs pour faire face à ses engagements. L'indicateur de risque proposé est le **poids des fonds propres au regard des engagements dans des scénarios risqués**.

Concrètement, il s'agit dans un premier temps de déterminer la richesse de l'assureur chaque année. Celle-ci correspond aux fonds propres auxquels peuvent s'ajouter sa richesse latente correspondant à une part des plus ou moins-values mobilisables immédiatement du canton d'épargne, c'est-à-dire des actifs à forte liquidité (par exemple tous les types de fonds, actions cotées) hors obligations en raison de la réserve de capitalisation. Cette part est issue de la clause contractuelle de prélèvements sur produits financiers. Chaque année, cette richesse de l'assureur est rapportée aux engagements modélisés par les provisions techniques, principalement la provision mathématique. Ensuite, sur chaque scénario, seul le plus bas ratio de la période simulée est conservé. Enfin, l'indicateur de risque correspond à un quantile de la distribution obtenue, comme par exemple la VaR à 95% correspondant au 50^{ème} pire scénario sur les 1000 simulés.

2.3. Allocation stratégique sur dimension « solvabilité »

Les assureurs sont soumis à la directive Solvabilité II où les options et garanties d'un contrat d'épargne d'assurance-vie doivent être valorisées dans un univers risque-neutre, sans prime de risque. Dans ce cadre, les engagements (*Best estimate*) doivent être évalués tout comme les risques (*Solvency Capital Requirement*). Compte tenu de ces spécificités de modélisation, cette vision réglementaire ne peut être intégrée dans les deux premières études d'allocation stratégique réalisées dans des univers en probabilité historique, c'est-à-dire où l'on cherche à reproduire les événements économiques futurs de manière réaliste à partir du passé.

Cette vision des risques aboutissant au calcul de la solvabilité de l'assureur est indispensable dans toute étude stratégique. En effet, cet indicateur est réglementaire et peut avoir de graves conséquences en cas de non solvabilité, et pour cette raison il est connu et maîtrisé par l'ensemble des instances dirigeantes.

2.3.1. Hypothèses de modélisation

Les calculs réglementaires sont également effectués à partir du logiciel Solveo dont le fonctionnement reste identique à celui présenté dans la figure 12. Les différences résident principalement dans :

- Le générateur de scénario économique désormais *market consistent*⁸ et risque neutre
- La politique de production avec une activité en *run-off*. Ce point signifie qu'aucun versement n'est modélisé, seules les sorties par rachat, décès ou transfert sont conservées.
- Le nombre de simulations qui est multiplié par rapport à l'étude précédente. En effet, l'exigence de capital de solvabilité (SCR) correspond aux fonds propres nécessaires pour éviter la ruine dans un an dans 99,5% des cas. Celle-ci est obtenue à partir de la simulation de différents chocs indépendants, eux-mêmes nécessitant un grand nombre de scénarios.

Le besoin de solvabilité matérialise les risques que l'assureur doit couvrir. Chaque risque est évalué indépendamment puis agrégé en deux étapes à l'aide de matrices de corrélations pour déterminer le capital de solvabilité requis. La première étape consiste à consolider par module de risque puis une consolidation générale afin d'obtenir le *Basic Solvency Capital Requirement* (BSCR) (Figure 15).

⁸ D'après l'article 76 (3) de la Directive 2009/138/CE, « le calcul des provisions techniques utilise, en étant cohérent avec elles, les informations fournies par les marchés financiers et les données généralement disponibles sur les risques de souscription (cohérence avec le marché). »

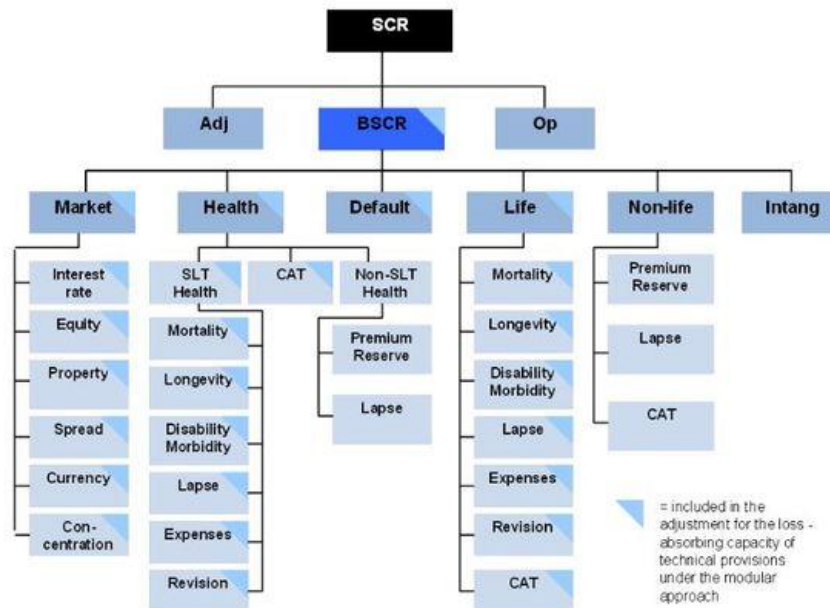


Figure 15 - Modules de risques pour le calcul du SCR

Le SCR de marché représente l'exigence de capital vis-à-vis des risques liés aux placements. Différents risques sont ainsi modélisés indépendamment :

- **Risque de taux d'intérêt** : Il inclut tout d'abord le risque de mouvement sur les taux d'intérêts à la hausse comme à la baisse. Cependant, dans le contexte actuel de taux négatifs, la baisse des taux modélisée est limitée puisque nulle pour les taux d'intérêts sans risque négatifs, ce qui concerne une partie significative de la courbe des taux. L'évolution des taux d'intérêts impacte non seulement la valorisation des actifs mais également les calculs de *Best estimate* et l'actualisation des flux.
- **Risque action** : Il correspond à la modélisation d'un krach boursier. Le choc appliqué sur les actifs concernés est compris entre -29% et -59% en fonction du type d'action et d'un ajustement calculé à partir du niveau des cours par rapport aux dernières années. Ce *Symmetric adjustment* a pour objectif d'atténuer le caractère procyclique des chocs. Les actions listées sur un marché réglementé ou échangées dans un pays membre de l'Union Européenne ou de l'OCDE sont considérées comme moins volatiles et donc subissent un choc réduit de 10 points par rapport aux autres placements. Enfin un choc spécifique est attribué aux actions de projets et de société d'infrastructures éligibles.
- **Risque immobilier** : Analogue au risque action, le risque de marché sur les placements immobiliers est modélisé à partir d'un choc unique initial de 25% sur ces actifs.
- **Risque de spread** : Le risque de crédit se matérialise également par un choc unique sur la valorisation des actifs de taux afin de quantifier le besoin en capital correspondant au risque d'une évolution à la hausse des spreads de crédit. Le niveau du choc en question est propre à chaque actif selon sa notation et sa durée.
- **Risque de change** : Il est pris en compte en calculant la sensibilité de la valeur des actifs, des passifs et des instruments financiers aux changements affectant le niveau ou la volatilité des taux de change.
- **Risque de concentration** : Les risques supplémentaires supportés par l'assureur du fait soit d'un manque de diversification de son portefeuille d'actifs, soit d'une exposition importante au

risque de défaut d'un seul émetteur ou d'un groupe d'émetteurs liés sont quantifiés dans le module de risque de concentration.

Le SCR de souscription vie modélise le besoin en capital pour faire face à l'ensemble des risques inhérents à la souscription et à la gestion des contrats d'assurance vie :

- Risque de mortalité : La couverture du risque de surestimation de la durée de vie est obtenue à l'aide du SCR de mortalité, via un choc à la hausse sur les taux annuels de mortalité par âge.
- Risque de longévité : A l'inverse, pour couvrir le risque de sous-estimation de la durée de vie, le SCR de longévité est obtenu de manière symétrique en choquant les taux de mortalité par âge à la baisse. Sur un contrat d'épargne classique, l'assureur sera le plus souvent moins sensible à la longévité qu'à la mortalité.
- Risque de morbidité : Le risque de catastrophe naturelle, de pandémie et des autres risques majeurs similaires est couvert selon la formule standard en augmentant instantanément les taux de mortalité de l'année à venir et en mesurant l'impact sur les fonds propres.
- Risque de rachats : La principale option dont dispose l'assuré sur un contrat d'épargne classique est son droit à racheter en partie ou complètement son contrat à n'importe quel moment. Il s'agit d'une option potentiellement coûteuse pour l'assureur dans le cas où elle serait exercée par un grand nombre à un moment non propice pour l'assureur. La couverture de ce risque se calcule à partir de trois modifications des taux de rachats calibrés dans le modèle et exercées indépendamment. La première est une baisse des taux de rachats tout au long de la période simulée. De manière similaire au risque de longévité, le coût en capital est mineur voir nul sur un contrat d'épargne classique. La seconde est une hausse des taux de rachats chaque année de la simulation. Enfin, un rachat massif de contrat en début de simulation est modélisé afin d'en évaluer son coût. Le coût en capital le plus élevé parmi ces trois chocs de rachats est alors considéré comme le capital permettant de couvrir le risque de rachats.
- Risque de frais : L'impact d'une hausse des frais de gestion ainsi que de l'inflation permet de mesurer le SCR de frais. Celui-ci permet de couvrir tout risque de dérive de ceux-ci par rapport à leur modélisation

Le risque opérationnel se définit d'après la directive Solvabilité II comme le risque de pertes résultant de procédures internes, de membres du personnel, ou de systèmes inadéquats ou défaillants, ou d'événements extérieur. Le pilier I de la formule standard propose une quantification de ce risque en le considérant comme le prorata des risques précédemment cités ou bien directement calculé à partir des provisions et primes acquises. Autrement, un modèle interne utilisant la méthode *Loss Distribution Approach* (LDA) par exemple peut être pertinent.

Les contreparties dont le risque de défaut est évalué au sein du SCR de contrepartie correspondent aux tiers possédant un engagement envers l'assureur. Il s'agit par exemple des réassureurs ou bien des organismes financiers auprès desquels l'assureur possède un compte. Sont prises en compte ici la qualité de la contrepartie ainsi que l'exposition.

Les allocations stratégiques sont testées, comme pour la seconde étude, en modifiant les règles de gestion sur la politique financière au cours de la simulation afin de contraindre les allocations que l'on teste. Cependant, partant d'une situation initiale potentiellement très éloignée de l'allocation que l'on

souhaite tester, cela signifie que de nombreuses ventes et achats devront être réalisés dans un univers risque-neutre, où le passif décroît. Pour éviter les conséquences de ce biais de simulation il est possible de décaler la date initiale des simulations stochastiques de quelques années. Le principe est de projeter le portefeuille en monde réel sur une période déterministe (choix de 5 ans) durant laquelle l'allocation converge vers la cible testée, avant un calcul réglementaire en monde risque-neutre.

2.3.2. Indicateurs

Par méthodologie, le SCR global agrège l'ensemble des risques imposés par la réglementation. Concernant l'indicateur de performance, il n'est pas opportun d'utiliser les rendements des actifs dans un univers où les primes de risques sont annulées. Or, au-delà du rendement des actifs, la performance peut être vue comme la capacité pour l'assureur de générer du résultat sur les prochaines années. Ce résultat peut se calculer comme la moyenne des résultats futurs actualisés dans notre cadre réglementaire (*Present Value of Future Profits* ou PVFP). Or, dans le bilan prudentiel, les fonds propres comptabilisés en norme solvabilité II sont égaux à la somme des fonds propres sociaux, de leurs plus ou moins-values latentes et de la PVFP auxquels sont soustraits la marge de risque et les impôts différés. Ainsi, les fonds propres prudentiels reflètent une vision de la performance.

Le ratio de solvabilité correspondant au rapport entre les fonds propres comptabilisés en normes solvabilité II et le SCR global regroupe ainsi à lui seul les deux dimensions de rendement et de risque. Il s'agit par conséquent de l'indicateur conservé pour la dimension réglementaire.

2.4. Construction d'un score

Dans la théorie du portefeuille, le modèle de choix de portefeuille de Markowitz permet de classer différentes allocations sur le plan risque/performance et ainsi de matérialiser la frontière efficiente, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons d'actifs affichant la meilleure rentabilité pour un risque donné. Cette matérialisation des allocations optimales est possible dans le cas d'un unique indicateur de performance et d'un unique indicateur de risque.

Cependant, nous avons vu précédemment qu'un assureur vie doit intégrer dans sa gestion différents risques que nous pouvons, en limitant la perte d'information, agréger en trois indicateurs de risque distincts auxquels s'ajoutent trois indicateurs de performance. Il n'est donc pas possible de matérialiser de la même manière une frontière efficiente, le nombre de dimensions étant trop important. Il s'agit d'un problème d'optimisation multi-objectif.

Afin de réduire à nouveau le nombre de dimensions, il conviendrait d'agréger les divers indicateurs définis dans les trois études. Cependant, les natures différentes de risques et de performances ne permettent pas une agrégation directe. Pour remédier à cette problématique de non homogénéité, chaque indicateur est transformé en score.

Pour qu'il puisse être modifié en score, il est nécessaire qu'un indicateur puisse permettre une relation d'ordre ; c'est-à-dire que la valeur de l'indicateur pour une allocation puisse être comparable à celui calculé pour une autre allocation et que cette comparaison permette directement d'en déduire laquelle des deux allocations est la meilleure selon l'indicateur. De cette manière, il sera possible d'attribuer un score plus élevé à celle-ci. Les indicateurs construits dans les trois études répondent à cette contrainte. L'utilisation d'autres indicateurs tel que le *Best estimate* seul n'est pas adaptée à notre problématique car celui-ci reflète la juste valeur de l'engagement de l'assureur mais un montant plus élevé de celui ne permet pas de conclure à une meilleure ou moins bonne allocation pour l'assureur. Cette conclusion dépend par exemple du niveau de la valeur de marché, différente selon l'allocation testée.

Plaçons-nous dès maintenant dans la situation où nous disposons de tous ces indicateurs pour toutes les allocations souhaitées. Il s'agit d'un vaste travail préliminaire étant donné la quantité de données nécessaires mais nous verrons dans la partie 3 comment des méthodes d'optimisation permettent leur obtention.

Il existe plusieurs possibilités d'attribuer un score selon un indicateur. Le premier élément à définir est l'échelle de score, c'est-à-dire le score minimal et le score maximal pour un indicateur donné. Cette échelle peut être différente selon l'indicateur pour donner plus d'importance à un indicateur plutôt qu'à un autre mais elle est importante afin de conserver une comparabilité entre les scores et éviter que des indicateurs prennent trop d'importance involontairement. Pour la suite, notons S_{min} et S_{Max} les scores minimum et maximums choisis.

Une fois l'échelle choisie pour chaque indicateur, il convient de choisir la manière d'attribuer les points en fonction de la valeur de l'indicateur, autrement dit, définir la fonction f telle que pour chaque allocation i dont la valeur de l'indicateur est notée ind_i :

$$S_i = f(ind_i)$$

Sous la contrainte $S_{min} \leq f(ind_i) \leq S_{Max}$.

Une première hypothèse de construction du score est d'attribuer S_{min} et S_{Max} aux indicateurs obtenus de valeurs extrêmes notés $ind_{(1)}$ et $ind_{(n)}$ (Figure 16). Attention, pour un indicateur de performance $ind_{(1)}$ correspondra bien souvent à la valeur la plus faible car on cherchera à maximiser cet indicateur tandis que pour un indicateur de risque, $ind_{(1)}$ correspondra plutôt à la valeur la plus élevée car on cherchera à minimiser cet indicateur. En prenant une fonction f linéaire, les scores pour les indicateurs intermédiaires peuvent être déduits par interpolation linéaire entre les deux allocations extrêmes :

$$S_i = a \cdot ind_i + b$$

$$\text{Avec } a = \frac{S_{Max} - S_{min}}{ind_{(n)} - ind_{(1)}} \text{ et } b = S_{min} - \frac{ind_{(1)}}{ind_{(n)} - ind_{(1)}} (S_{Max} - S_{min})$$

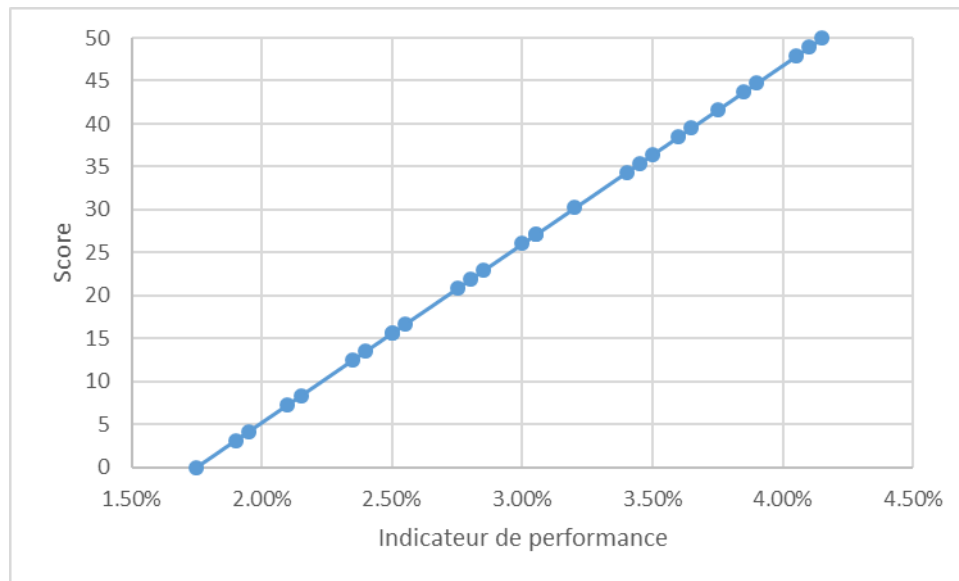


Figure 16 - Illustration n°1 de la construction d'un score avec $S_{min}=0$ et $S_{Max}=50$ et une fonction de score intermédiaire de forme linéaire

Cette première fonction de score présente l'avantage de ne nécessiter aucune hypothèse car entièrement basée sur les valeurs extrêmes des indicateurs. Cependant, d'une étude à l'autre, un score identique ne signifie pas une même valeur pour l'indicateur, ce qui peut être gênant dans un souci de comparaison ou d'analyse de variation. Autre problématique, le score sera très dépendant du nombre d'allocations testées. Pour éviter cela, il est nécessaire de calibrer les valeurs d'indicateurs auxquels attribuer les scores S_{min} et S_{Max} que nous noterons ind_{min} et ind_{Max} (Figure 17). Une manière d'interpréter ind_{Max} pour un indicateur de risque est de le considérer comme une limite de risque, où la réduction du risque au-delà de ce niveau n'apporte plus à l'assureur. Il s'agit du niveau de risque optimal. En conservant une relation linéaire entre les indicateurs intermédiaires, la fonction de score devient :

$$S_i = \begin{cases} S_{min} & \text{si } ind_i \leq ind_{min} \\ a \cdot ind_i + b & \text{si } ind_{min} \leq ind_i \leq ind_{Max} \\ S_{Max} & \text{si } ind_i \geq ind_{Max} \end{cases}$$

$$\text{Avec } a = \frac{S_{Max} - S_{min}}{ind_{Max} - ind_{min}} \text{ et } b = S_{min} - \frac{ind_{min}}{ind_{Max} - ind_{min}} (S_{Max} - S_{min})$$

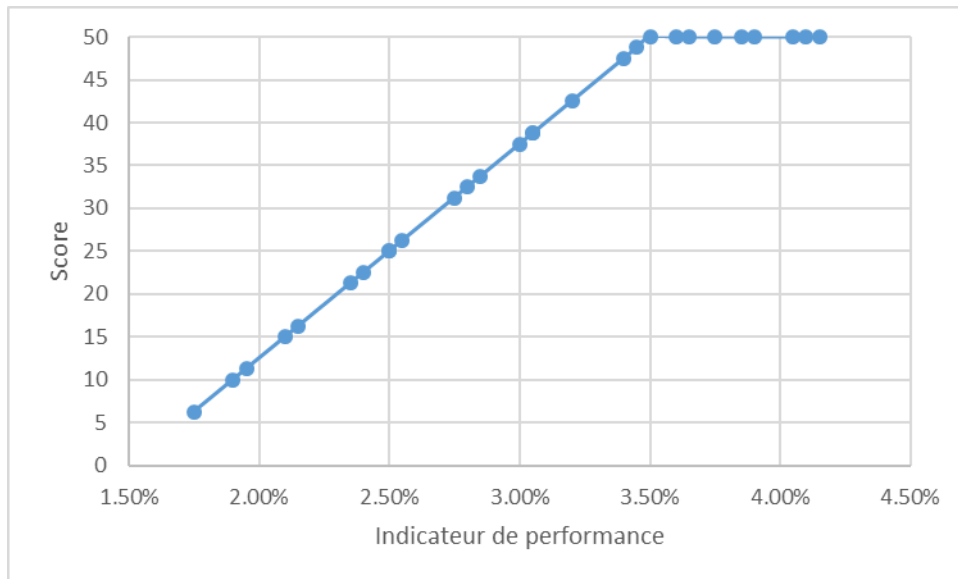


Figure 17 - Illustration n°2 de la construction d'un score avec $S_{min}=0$ pour $ind_{min}=1,5\%$ et $S_{Max}=50$ pour $ind_{Max}=3,5\%$ et une fonction de score intermédiaire de forme linéaire

Enfin, une complexification possible à la fonction de score est d'utiliser une autre fonction que la fonction linéaire pour déduire les scores intermédiaires (Figure 18). Cela permet par exemple de pouvoir discriminer de manière plus importante sur des niveaux d'indicateurs choisis. Sans perdre de généralité, on peut donc écrire :

$$S_i = \begin{cases} S_{min} & \text{si } ind_i \leq ind_{min} \\ f(ind_i) & \text{si } ind_{min} \leq ind_i \leq ind_{Max} \\ S_{Max} & \text{si } ind_i \geq ind_{Max} \end{cases}$$

Avec une fonction f à choisir et calibrer selon l'objectif poursuivi.

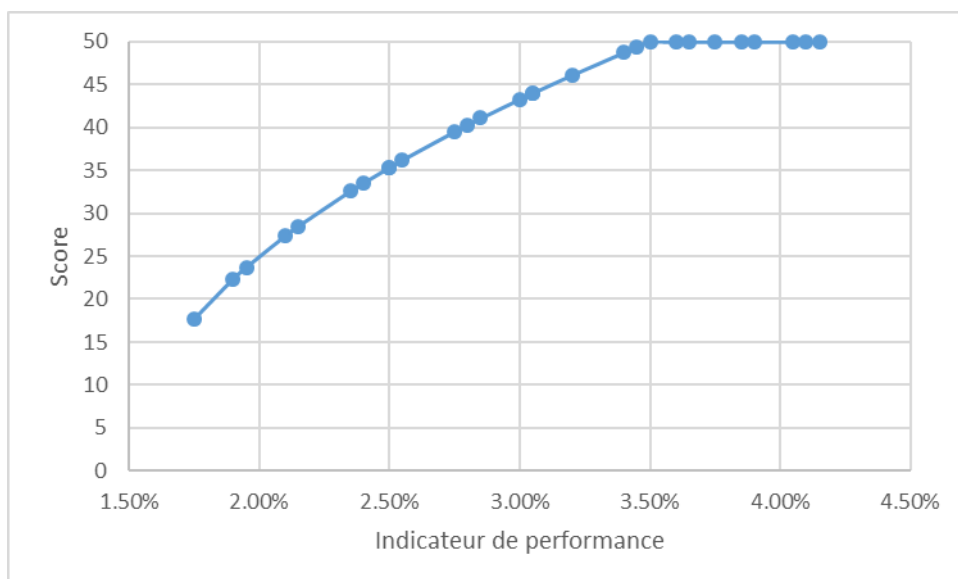


Figure 18 – Illustration n°3 de la construction d'un score avec $S_{min}=0$ pour $ind_{min}=1,5\%$ et $S_{Max}=50$ pour $ind_{Max}=3,5\%$ et une fonction de score intermédiaire de forme \sqrt{x}

2.5. Choix d'allocation optimale

2.5.1. Markowitz

Une fois les échelles et les fonctions de score calibrées, nous disposons de scores de performance et de scores de risque.

Une première démarche consiste à se ramener dans le cadre de la théorie du choix de portefeuille de Markowitz en sommant séparément les scores de performance et les scores de risque. Ainsi, il est possible de représenter le nuage de points dans le repère de la performance globale en fonction du risque global, chaque point correspondant à une allocation testée. La frontière efficiente peut de cette manière être tracée (Figure 19).

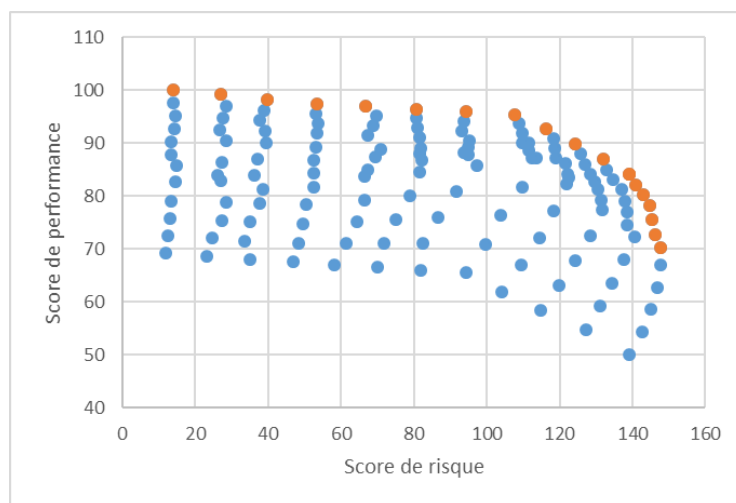


Figure 19 - Performance en fonction du risque et frontière efficiente

Afin de sélectionner les allocations à conserver et ainsi de définir les limites d'investissement de l'allocation stratégique, il est nécessaire de tracer une fonction d'utilité (Figure 20). Cette fonction consiste à définir la quantité de risque acceptée pour un gain de performance d'un point ainsi que le risque maximal accepté.

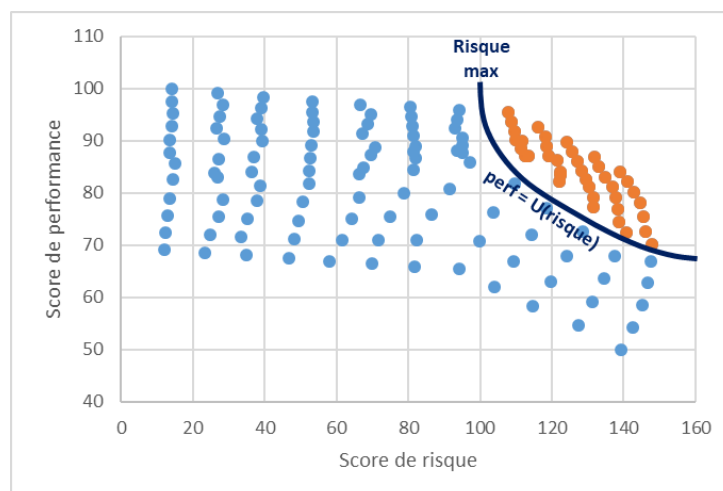


Figure 20 - Sélection des allocations optimales à partir d'une fonction d'utilité

Pourtant déterminant dans ce cadre, définir une fonction d'utilité est difficile, d'autant plus sur des scores agrégés ne permettant pas de rattacher les grandeurs à des notions concrètes. Le choix de la fonction d'utilité entre performance et risque peut finalement être traitée en amont lors du calibrage des constructions de score individuel de manière à ce qu'un point de performance équivaut à un point de risque. Traiter ce problème à ce niveau de la construction du score permet de ramener les scores individuels et donc leur échelle à des risques et performances concrets, ce qui est plus simple que sur une vision déjà agrégée. De cette manière, la construction des scores de performance et de risque permet de rendre la fonction d'utilité linéaire.

2.5.2. Agrégation totale

Si les scores de performance et de risque sont construits de manière à ce qu'un point soit équivalent quel que soit l'indicateur, il est possible de non plus raisonner en terme d'optimisation du couple performance/risque mais directement sur un score final agrégé correspondant à la somme de tous les scores, performance et risque additionnés. La recherche des allocations optimales réside simplement dans la recherche de l'allocation qui maximise ce score.

Ramener le problème à un seul indicateur permet de représenter ce choix de manière visuelle, mais pour cela il faut se ramener sur un problème à deux dimensions comme par exemple la recherche des parts d'actions et d'immobilier optimales (Tableau 8). Ainsi, les scores obtenus peuvent être représentés dans une matrice dont la dimension dépend du nombre d'allocations que l'on souhaite tester.

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	194	182	173	166	162	149	137	125	115	103	92	82
	5%	199	187	179	173	168	152	142	132	118	105	96	84
	6%	203	193	186	181	175	158	148	138	121	109	101	87
	7%	206	198	191	188	183	165	153	142	126	113	105	89
	8%	210	203	196	193	190	173	157	143	129	117	105	92
	9%	212	202	197	193	188	170	157	145	130	115	106	93
	10%	212	203	197	191	186	168	157	146	130	116	108	94
	11%	212	203	196	189	183	169	157	146	130	118	111	96
	12%	212	203	195	186	180	167	156	143	131	119	108	97
	13%	211	202	194	185	179	164	155	144	131	117	109	97
	14%	208	201	192	185	177	165	154	145	131	118	110	97
	15%	206	199	191	183	177	165	154	143	131	120	109	98

Tableau 8 - Exemple de matrice de scores finaux

Bien que les différentes visions de risque et de performance aient pu être agrégées, le choix de l'allocation stratégique nécessite encore une réflexion. En effet, même si l'allocation stratégique optimale peut être définie comme celle maximisant notre score final, ce sont plutôt les limites d'investissement qui sont recherchées. Dans l'exemple du Tableau 8 ci-dessus, l'allocation qui maximise le score final est celle composée de 4% d'actions et 9% d'immobilier. Pourtant, les allocations allant jusqu'à 13% d'immobilier possèdent des scores très proches et il serait dommageable de les considérer comme inappropriées en raison d'un si faible écart. L'objectif, à partir de cette matrice est donc plutôt de définir la zone d'investissement acceptable, qui pourra par la suite être retranscrite en limites d'investissement. Plusieurs possibilités pour cela existent.

La première consiste à définir le nombre d'allocations à conserver. Le niveau du score final permettra de sélectionner les meilleures allocations correspondantes. Cette méthode est très dépendante du choix des allocations testées. Le Tableau 9 conserve par exemple les 50 meilleurs scores. Dans notre exemple, le résultat serait très différent si les allocations contenant moins de 4% d'actions ou d'immobilier étaient incluses dans le périmètre des allocations testées.

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	194	182	173	166	162	149	137	125	115	103	92	82
	5%	199	187	179	173	168	152	142	132	118	105	96	84
	6%	203	193	186	181	175	158	148	138	121	109	101	87
	7%	206	198	191	188	183	165	153	142	126	113	105	89
	8%	210	203	196	193	190	173	157	143	129	117	105	92
	9%	212	202	197	193	188	170	157	145	130	115	106	93
	10%	212	203	197	191	186	168	157	146	130	116	108	94
	11%	212	203	196	189	183	169	157	146	130	118	111	96
	12%	212	203	195	186	180	167	156	143	131	119	108	97
	13%	211	202	194	185	179	164	155	144	131	117	109	97
	14%	208	201	192	185	177	165	154	145	131	118	110	97
	15%	206	199	191	183	177	165	154	143	131	120	109	98

Tableau 9 - Sélection des 50 meilleures allocations

Une autre méthodologie consiste à définir un score minimal en dessous duquel l'allocation ne doit pas faire partie des limites d'investissement. La Tableau 10 ci-dessous conserve par exemple les allocations au-dessus du seuil de 200 points. De manière analogue, il est possible de considérer une distance maximale au score maximal, de 12 points dans notre exemple. Pour une telle règle de discrimination, et pour conserver une pertinence d'une étude à l'autre, il est important que les scores individuels soient calculés à partir du calibrage des niveaux minimaux et maximaux pour chaque indicateur (ind_{min} et ind_{Max}) et non par défaut à partir de l'indicateur minimum et maximum ($ind_{(1)}$ et $ind_{(n)}$).

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	194	182	173	166	162	149	137	125	115	103	92	82
	5%	199	187	179	173	168	152	142	132	118	105	96	84
	6%	203	193	186	181	175	158	148	138	121	109	101	87
	7%	206	198	191	188	183	165	153	142	126	113	105	89
	8%	210	203	196	193	190	173	157	143	129	117	105	92
	9%	212	202	197	193	188	170	157	145	130	115	106	93
	10%	212	203	197	191	186	168	157	146	130	116	108	94
	11%	212	203	196	189	183	169	157	146	130	118	111	96
	12%	212	203	195	186	180	167	156	143	131	119	108	97
	13%	211	202	194	185	179	164	155	144	131	117	109	97
	14%	208	201	192	185	177	165	154	145	131	118	110	97
	15%	206	199	191	183	177	165	154	143	131	120	109	98

Tableau 10 - Sélection des allocations au-dessus de 200 pts

Un autre raisonnement possible est de ne pas prendre en compte les allocations qui n'auraient pas atteint un score minimal défini pour chaque vision de risque et de performance. Ainsi, ne sont présentes dans la matrice finale, que les scores non « éliminés » durant les calculs de scores précédents. Une seconde discrimination sur le score final est alors possible. Avec cette méthodologie de sélection, peuvent être conservées des allocations obtenant un score final moins élevé que d'autres pourtant non conservées, mais qui présentent un risque trop élevé ou bien une performance trop faible pour une certaine vision de risque ou de performance (Tableau 11).

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	194	182	173	166	162	149	137	125	115	103	92	82
	5%	199	187	179	173	168	152	142	132	118	105	96	84
	6%	203	193	186	181	175	158	148	138	121	109	101	87
	7%	206	198	191	188	183	165	153	142	126	113	105	89
	8%	210	203	196	193	190	173	157	143	129	117	105	92
	9%	212	202	197	193	188	170	157	145	130	115	106	93
	10%	212	203	197	191	186	168	157	146	130	116	108	94
	11%	212	203	196	189	183	169	157	146	130	118	111	96
	12%	212	203	195	186	180	167	156	143	131	119	108	97
	13%	211	202	194	185	179	164	155	144	131	117	109	97
	14%	208	201	192	185	177	165	154	145	131	118	110	97
	15%	206	199	191	183	177	165	154	143	131	120	109	98

Tableau 11 - Sélection des allocations supérieures à un seuil dans chaque score individuel

Au-delà du choix de la méthodologie de sélection des allocations, il est primordial que celle-ci soit claire et bien comprise par les instances décisionnaires. Ainsi, conserver une cohérence d'une année sur l'autre est nécessaire.

3. Méthodes d'optimisation des calculs

3.1.	Complétion de matrice.....	57
	3.1.1. Interpolation.....	57
	3.1.2. Régression	65
	3.1.3. Factorisation.....	67
	3.1.4. Critères de comparaison	75
3.2.	Réduction du nombre de scénarios	77
	3.2.1. Variables antithétiques	77
	3.2.2. Variable de contrôle	82
3.3.	Optimisation combinée.....	85
3.4.	Synthèse des méthodes	88

L'allocation stratégique sur la dimension « actif » a été construite de manière que les indicateurs soient obtenus dans un temps raisonnable avec des astuces portant sur le nombre de variables économiques, la méthode de calcul de la PDD ou encore la modélisation agrégée des actifs. Cependant, certains indicateurs, en raison de leur méthode de construction, nécessitent d'importants temps de calcul. C'est le cas par exemple du ratio de solvabilité. Celui-ci est obtenu à partir de la simulation de 1 000 à 5 000 trajectoires économiques sur un horizon de 30 à 50 ans et cela pour chaque situation de stress, soit une quinzaine de fois. Sans parallélisations des simulations, en fonction de la puissance des serveurs, cela représente plusieurs heures de calcul. A ce temps de calcul machine, il faut rajouter les temps de traitement manuels que sont les initialisations des simulations et la consolidation des résultats. Ce travail doit être répété pour chacune des allocations à tester. Le nombre d'allocations dépend du choix de l'assureur mais il augmentera de manière exponentielle avec le nombre de classes d'actif étudiées. Factuellement, avec quatre classes d'actifs, si l'on cherche à analyser dix parts d'actions, dix parts d'immobilier et dix parts de monétaire, la part d'obligations évoluant en fonction des trois autres, nous obtenons ainsi mille allocations à tester.

Cet exemple montre qu'il n'est pas possible d'obtenir tous nos indicateurs sur l'ensemble des allocations à tester dans un temps raisonnable. Pour résoudre ce problème, deux axes d'optimisation sont possibles. En effet, le temps de calcul important est principalement lié au nombre d'allocations à tester et au nombre de scénarios simulés par Monte-Carlo.

Ainsi, la première solution consiste à ne calculer les indicateurs que sur un nombre restreint d'allocations puis de s'en servir pour estimer les indicateurs des autres allocations. Il s'agit d'un problème de complétion de matrice. La seconde optimisation consiste à réduire le nombre de scénarios simulés, tout en limitant la hausse de la variance du résultat. Nous verrons qu'il est possible de prendre en compte les deux axes d'optimisation en même temps, ce que nous appellerons optimisation combinée par la suite.

3.1. Complétion de matrice

Le nombre d’allocations à tester représente une limite importante à une étude d’allocation stratégique. La raison à cela est le nombre de variables à croiser c’est-à-dire le nombre de dimensions. Dans le cas de l’allocation stratégique, il s’agit du nombre de classes d’actifs mais la problématique est identique pour un calcul de sensibilités croisées.

Dans le souci de rendre la problématique visuelle, nous travaillerons dans la suite du mémoire sur un problème à deux dimension. Nous chercherons à déterminer les indicateurs pour l’ensemble des parts d’actions et d’immobilier testées, sachant que la résolution du problème peut être étendue à plus de deux dimensions. Le cas pratique présenté ici consiste à déterminer les ratios de solvabilité pour l’ensemble des allocations comprenant entre 4% et 15% d’actions et entre 4% et 15% d’immobilier ; soit un total de 144 allocations.

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	5%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	6%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	7%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	8%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	9%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	10%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	11%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	12%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	13%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	14%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	15%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Tableau 12 - Matrice à compléter par ratios de solvabilité

3.1.1. Interpolation

Une première approche afin de compléter la matrice d’indicateurs consiste à calculer de manière exacte les indicateurs de certaines allocations et d’estimer les autres par interpolation. Pour que l’interpolation ait du sens, les allocations pour lesquelles le ratio est calculé (appelées le semis dans la suite du mémoire) doivent être correctement réparties sur l’ensemble de la matrice. De plus, il est préférable que certaines de ces allocations se situent aux extrémités afin d’éviter toute extrapolation. En effet, le résultat d’une extrapolation possède toujours une plus grande variance que celui obtenu par interpolation.

Ainsi, dans notre exemple, le semis est constitué de 16 ratios, de manière à ce qu’aucune allocation ne soit distante de plus de 2 points d’une allocation du semis. Les ratios affichés dans le Tableau 13 ont été réduits d’une valeur arbitraire identique et sont exprimés en pourcentage.

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	22,5	?	?	?	-10,7	?	?	?	-53,8	?	?	-82,5
	5%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	6%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	7%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	8%	15,5	?	?	?	-12,1	?	?	?	-50,7	?	?	-77,5
	9%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	10%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	11%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	12%	-1,2	?	?	?	-24,1	?	?	?	-56,0	?	?	-78,4
	13%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	14%	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?
	15%	-18,2	?	?	?	-37,0	?	?	?	-62,2	?	?	-81,0

Tableau 13 - Matrice suite au calcul de 16 ratios (semis)

Soit x le vecteur de variables explicatives et y la variable à estimer. L'objectif de l'interpolation est de trouver la fonction f telle que $y = f(x)$ avec la contrainte que pour tout point (x_S, y_S) appartenant au semis, $y_S = f(x_S)$ exactement. Dans notre exemple, $x = (x_A; x_I)$ est de dimension deux avec x_A la part d'actions et x_I la part d'immobilier et y est le ratio de solvabilité.

Malgré les 16 ratios constituant le semis permettant le calibrage du modèle, sans contrainte supplémentaire sur la fonction f , il existe une infinité de fonctions possibles. Différentes fonctions d'interpolation sont proposées par la suite.

Interpolation linéaire

Une fonction d'interpolation particulière consiste à contraindre la linéarité de l'interpolation entre les points du semis. Afin de construire la fonction correspondante, il faut se placer sur une sous-matrice de taille $n \times m$ pour laquelle les ratios $y_{1,1}$, $y_{1,m}$, $y_{n,1}$ et $y_{n,m}$ font partie du semis (Tableau 14).

		Part actions			
		12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	-53,8	?	?	-82,5
	5%	?	?	?	?
	6%	?	?	?	?
	7%	?	?	?	?
	8%	-50,7	?	?	-77,5

Tableau 14 - Sous-matrice de taille 5 x 4

Pour une ligne $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donnée, posons la relation linéaire suivante : $\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket$

$$y_{i,j} = y_{i,1} + (j - 1) \frac{y_{i,m} - y_{i,1}}{m - 1} \quad (3.1.1)$$

De même, pour une colonne $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ donnée, posons la relation linéaire suivante : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$y_{i,j} = y_{1,j} + (i - 1) \frac{y_{n,j} - y_{1,j}}{n - 1} \quad (3.1.2)$$

En combinant les deux relations linéaires unidimensionnelles (3.1.1) et (3.1.2), nous obtenons la relation linéaire à deux dimensions suivante : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket$

$$y_{i,j} = y_{1,1} + (i - 1) \frac{y_{n,1} - y_{1,1}}{n - 1} + (j - 1) \frac{y_{1,m} + (i - 1) \frac{y_{n,m} - y_{1,m}}{n - 1} - \left(y_{1,1} + (i - 1) \frac{y_{n,1} - y_{1,1}}{n - 1} \right)}{m - 1} \quad (3.1.3)$$

		Part actions			
		12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	-53,8	-63,4	-72,9	-82,5
	5%	-53,0	-62,4	-71,8	-81,2
	6%	-52,2	-61,5	-70,7	-80,0
	7%	-51,4	-60,5	-69,6	-78,7
	8%	-50,7	-59,6	-68,5	-77,5

Tableau 15 – Sous matrice complétée par interpolation linéaire

La matrice finale (Tableau 16) est alors construite en agrégeant l'ensemble des sous-matrices complétée par cette même méthode.

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	22,5	14,2	5,9	-2,4	-10,7	-21,5	-32,2	-43,0	-53,8	-63,4	-72,9	-82,5
	5%	20,7	12,8	4,8	-3,1	-11,0	-21,5	-32,0	-42,5	-53,0	-62,4	-71,8	-81,2
	6%	19,0	11,4	3,8	-3,8	-11,4	-21,6	-31,8	-42,0	-52,2	-61,5	-70,7	-80,0
	7%	17,2	10,0	2,8	-4,5	-11,7	-21,7	-31,6	-41,5	-51,4	-60,5	-69,6	-78,7
	8%	15,5	8,6	1,7	-5,2	-12,1	-21,7	-31,4	-41,0	-50,7	-59,6	-68,5	-77,5
	9%	11,3	4,7	-1,9	-8,5	-15,1	-24,3	-33,5	-42,8	-52,0	-60,6	-69,1	-77,7
	10%	7,2	0,8	-5,5	-11,8	-18,1	-26,9	-35,7	-44,5	-53,3	-61,5	-69,8	-78,0
	11%	3,0	-3,0	-9,1	-15,1	-21,1	-29,5	-37,9	-46,3	-54,7	-62,5	-70,4	-78,2
	12%	-1,2	-6,9	-12,7	-18,4	-24,1	-32,1	-40,1	-48,0	-56,0	-63,5	-71,0	-78,4
	13%	-6,9	-12,3	-17,6	-23,0	-28,4	-35,8	-43,2	-50,7	-58,1	-65,2	-72,2	-79,3
	14%	-12,6	-17,6	-22,6	-27,6	-32,7	-39,5	-46,4	-53,3	-60,1	-66,8	-73,5	-80,2
	15%	-18,2	-22,9	-27,6	-32,3	-37,0	-43,3	-49,6	-55,9	-62,2	-68,5	-74,7	-81,0

Tableau 16 – Matrice complétée par interpolation linéaire

Interpolation par pondération

L'interpolation présentée ci-dessus matérialise un plan linéaire sur chacune des sous-matrices. Ainsi, sur ces espaces, il est possible d'exprimer chaque ratio à partir des quatre ratios du semis de la sous-matrice et en leur affectant un poids respectif. En effet, l'expression (3.1.3) peut se réécrire de la manière suivante :

$$y_{i,j} = y_{1,1} \left(1 - \frac{i-1}{n-1} - \frac{j-1}{m-1} + \frac{(i-1)(j-1)}{(n-1)(m-1)} \right) + y_{1,m} \left(\frac{j-1}{m-1} + \frac{(i-1)(j-1)}{(n-1)(m-1)} \right) + y_{n,1} \left(\frac{i-1}{n-1} + \frac{(i-1)(j-1)}{(n-1)(m-1)} \right) + y_{n,m} \frac{(i-1)(j-1)}{(n-1)(m-1)} \quad (3.1.4)$$

Tout en continuant à travailler par sous-matrice comme celle du Tableau 14, l'idée de la seconde interpolation proposée est de modifier les poids affectés en se basant sur l'inverse des distances.

Pour les ratios situés sur les bords de la sous-matrice, c'est-à-dire pour les lignes $i = \{1, n\}$ et les colonnes $j = \{1, m\}$, la problématique consiste à effectuer une interpolation à une seule dimension, donc entre deux valeurs, en fonction de leur distance. Pour $i = 1$ et $j \in \llbracket 2, m - 1 \rrbracket$ par exemple :

$$y_{1,j} = \frac{\frac{y_{1,1}}{\text{dist}(x_{1,1}; x_{1,j})} + \frac{y_{1,m}}{\text{dist}(x_{1,m}; x_{1,j})}}{\frac{1}{\text{dist}(x_{1,1}; x_{1,j})} + \frac{1}{\text{dist}(x_{1,m}; x_{1,j})}} \quad (3.1.5)$$

Avec $\text{dist}(x_{1,b}; x_{1,j}) = b - j$ la distance entre le point $x_{1,b}$ et le point $x_{1,j}$. Il s'agit en fait d'une interpolation linéaire et les résultats sont par conséquent identiques à la méthode précédente pour ces ratios.

Pour les autres ratios, à l'intérieur de la sous-matrice, donc pour $i \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 2, m - 1 \rrbracket$, il est possible d'exprimer le ratio $y_{i,j}$ de la manière suivante :

$$y_{i,j} = \frac{\frac{y_{1,1}}{\text{dist}(x_{1,1}; x_{i,j})} + \frac{y_{1,m}}{\text{dist}(x_{1,m}; x_{i,j})} + \frac{y_{n,1}}{\text{dist}(x_{n,1}; x_{i,j})} + \frac{y_{n,m}}{\text{dist}(x_{n,m}; x_{i,j})}}{\frac{1}{\text{dist}(x_{1,1}; x_{i,j})} + \frac{1}{\text{dist}(x_{1,m}; x_{i,j})} + \frac{1}{\text{dist}(x_{n,1}; x_{i,j})} + \frac{1}{\text{dist}(x_{n,m}; x_{i,j})}} \quad (3.1.6)$$

Avec $\text{dist}(x_{a,b}; x_{i,j}) = \sqrt{(a - i)^2 + (b - j)^2}$ la distance entre le point $x_{a,b}$ et le point $x_{i,j}$

La matrice complétée de cette manière correspond au Tableau 17.

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	22,5	14,2	5,9	-2,4	-10,7	-21,5	-32,2	-43,0	-53,8	-63,4	-72,9	-82,5
	5%	20,7	9,2	4,3	-0,4	-11,0	-25,6	-31,9	-38,3	-53,0	-64,3	-69,2	-81,2
	6%	19,0	7,4	3,8	0,2	-11,4	-27,0	-31,8	-36,6	-52,2	-64,5	-67,7	-80,0
	7%	17,2	7,4	3,3	-1,1	-11,7	-25,8	-31,7	-37,6	-51,4	-63,1	-67,8	-78,7
	8%	15,5	8,6	1,7	-5,2	-12,1	-21,7	-31,4	-41,0	-50,7	-59,6	-68,5	-77,5
	9%	11,3	0,7	-3,8	-7,3	-15,1	-28,8	-34,7	-40,0	-52,0	-62,9	-67,4	-77,7
	10%	7,2	-2,5	-5,5	-8,4	-18,1	-31,6	-35,7	-39,9	-53,3	-64,2	-67,1	-78,0
	11%	3,0	-4,1	-7,2	-11,2	-21,1	-32,1	-36,7	-42,0	-54,7	-64,2	-68,1	-78,2
	12%	-1,2	-6,9	-12,7	-18,4	-24,1	-32,1	-40,1	-48,0	-56,0	-63,5	-71,0	-78,4
	13%	-6,9	-15,4	-19,3	-22,3	-28,4	-39,2	-44,3	-48,8	-58,1	-67,1	-71,0	-79,3
	14%	-12,6	-18,2	-21,0	-24,6	-32,7	-41,3	-45,4	-50,0	-60,1	-68,0	-71,6	-80,2
	15%	-18,2	-22,9	-27,6	-32,3	-37,0	-43,3	-49,6	-55,9	-62,2	-68,5	-74,7	-81,0

Tableau 17 – Matrice complétée par interpolation par pondération

Interpolation par pondération alternative

L'interpolation par pondération précédente considère les variables x_A et x_I correspondant aux parts actions et parts immobilier de l'allocation testée pour déterminer les pondérations et ainsi compléter la matrice. Dans cette interpolation alternative, la distance utilisée pour les pondérations des ratios du semis prend également en compte la part des actifs de taux restants. Les expressions (3.1.5) de $y_{1,j}$ et (3.1.6) de $y_{i,j}$ restent identiques, mais en utilisant :

$$\text{dist}(x_{1,b}; x_{1,j}) = \sqrt{(b - j)^2 + (100 - 1 - b - (100 - 1 - j))^2} = \sqrt{2}(b - j)$$

et

$$\begin{aligned} dist(x_{a,b}; x_{i,j}) &= \sqrt{(a-i)^2 + (b-j)^2 + (100-a-b-(100-i-j))^2} \\ &= \sqrt{(a-i)^2 + (b-j)^2 + (i+j-a-b)^2} \end{aligned}$$

La matrice complétée à partir de cette distance permet d'obtenir le Tableau 18 suivant.

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	22,5	14,2	5,9	-2,4	-10,7	-21,5	-32,2	-43,0	-53,8	-63,4	-72,9	-82,5
	5%	20,7	8,2	3,5	-1,4	-11,0	-26,8	-32,8	-39,6	-53,0	-65,6	-70,5	-81,2
	6%	19,0	6,8	3,4	0,2	-11,4	-27,5	-32,1	-36,6	-52,2	-64,9	-67,5	-80,0
	7%	17,2	7,9	3,5	-0,5	-11,7	-24,9	-31,3	-36,8	-51,4	-62,0	-66,7	-78,7
	8%	15,5	8,6	1,7	-5,2	-12,1	-21,7	-31,4	-41,0	-50,7	-59,6	-68,5	-77,5
	9%	11,3	-0,5	-4,6	-7,9	-15,1	-30,2	-35,7	-41,1	-52,0	-64,2	-68,6	-77,7
	10%	7,2	-3,2	-5,8	-8,3	-18,1	-32,3	-36,2	-39,9	-53,3	-64,7	-67,1	-78,0
	11%	3,0	-4,0	-6,9	-10,5	-21,1	-31,7	-36,5	-41,2	-54,7	-63,4	-67,3	-78,2
	12%	-1,2	-6,9	-12,7	-18,4	-24,1	-32,1	-40,1	-48,0	-56,0	-63,5	-71,0	-78,4
	13%	-6,9	-16,4	-19,6	-22,3	-28,4	-40,1	-44,7	-49,3	-58,1	-67,8	-71,5	-79,3
	14%	-12,6	-18,7	-21,2	-24,1	-32,7	-41,6	-45,8	-49,8	-60,1	-67,9	-71,3	-80,2
	15%	-18,2	-22,9	-27,6	-32,3	-37,0	-43,3	-49,6	-55,9	-62,2	-68,5	-74,7	-81,0

Tableau 18 - Matrice complétée par interpolation par pondération alternative

Ces deux méthodes d'interpolation par pondération inverse à une distance engendrent des nappes dont le nombre de points d'inflexion semble trop important. Par exemple, pour une part d'immobilier fixe de 10%, la Figure 21 représente les interpolations obtenues pour les différentes parts d'actions.

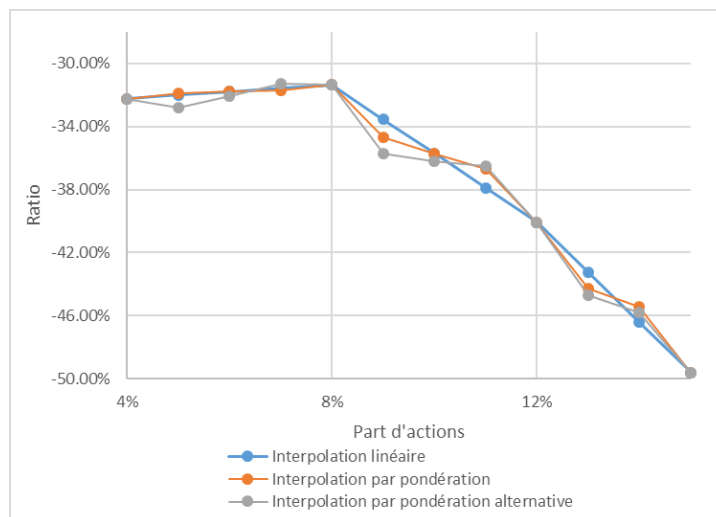


Figure 21 – Comparaison des interpolations par pondération pour 10% d'immobilier

Il existe d'autres interpolations inverses à la distance telles que la pondération de Shepard, la pondération de Lukaszuk-Karmowski ou encore la pondération Franke-Little dont les méthodes de construction aboutissent à l'utilisation d'autres distances. Ces pondérations alternatives ne sont pas étudiées en détail dans ce mémoire.

Interpolation polynomiale

L'interpolation linéaire de la matrice complète peut être construite à partir de l'agrégation de ses différentes sous-matrices dans lesquelles est construit à chaque fois un plan linéaire permettant de relier les quatre points du semis. Il est également possible d'aboutir aux mêmes résultats en se plaçant directement sur la matrice complète et en réalisant des interpolations linéaires à une dimension sur les colonnes dont des ratios sont connus ($i = \{1,5,9,12\}$ dans notre exemple) suivies d'autres interpolations linéaires sur chaque ligne (illustration sur la Figure 22).

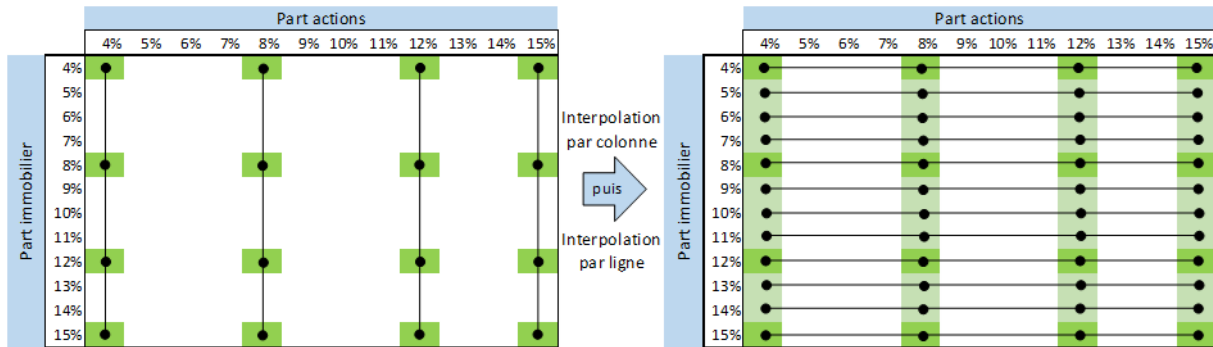


Figure 22 – Illustration des interpolations à une dimension successives

Cette approche de la construction montre que si l'on extrait une ligne ou une colonne de la matrice, la fonction d'interpolation sera continue et linéaire par morceaux et fera apparaître des points non dérivables au niveau des allocations du semis. Concrètement, l'interpolation linéaire n'est pas une approche qui permette de construire une nappe lisse. D'où l'idée d'utiliser d'autres types d'interpolations permettant de « lisser » les résultats aux abords des allocations du semis. C'est le cas de l'interpolation polynomiale de degré supérieur à 1.

Sur chaque ligne et chaque colonne de notre exemple où sont appliquées les interpolations, quatre points du semis sont connus. L'idée est alors de trouver le polynôme d'ordre le plus faible avec pour racine ces quatre points. Il s'agit du polynôme de Lagrange, d'ordre 3 (nombre de points du semis – 1). Soient les quatre points du semis connus notés (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) connus. Alors le polynôme :

$$L(X) = \sum_{j=0}^3 y_j \left(\prod_{i=0, i \neq j}^3 \frac{X - x_i}{x_j - x_i} \right)$$

est l'unique polynôme passant par les quatre points du semis et d'ordre inférieur ou égal à 3. En déterminant le polynôme de Lagrange propre à chaque colonne puis chaque ligne, la matrice se complète alors de la manière suivante (Tableau 19) :

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	22,5	16,0	8,2	-0,8	-10,7	-21,2	-32,1	-43,0	-53,8	-64,1	-73,8	-82,5
	5%	21,8	15,8	8,4	-0,2	-9,8	-20,0	-30,5	-41,3	-51,9	-62,1	-71,8	-80,5
	6%	20,4	14,8	7,7	-0,5	-9,7	-19,6	-29,9	-40,4	-50,8	-60,9	-70,4	-79,0
	7%	18,3	13,0	6,2	-1,7	-10,5	-20,1	-30,1	-40,3	-50,4	-60,3	-69,5	-78,0
	8%	15,5	10,5	4,0	-3,6	-12,1	-21,3	-31,0	-40,8	-50,7	-60,2	-69,2	-77,5
	9%	12,1	7,3	1,2	-6,1	-14,3	-23,2	-32,5	-42,0	-51,4	-60,6	-69,3	-77,3
	10%	8,2	3,6	-2,3	-9,3	-17,1	-25,6	-34,5	-43,6	-52,6	-61,4	-69,8	-77,4
	11%	3,7	-0,7	-6,3	-12,9	-20,4	-28,5	-36,9	-45,6	-54,2	-62,6	-70,5	-77,8
	12%	-1,2	-5,4	-10,8	-17,1	-24,1	-31,7	-39,7	-47,9	-56,0	-64,0	-71,5	-78,4
	13%	-6,5	-10,6	-15,6	-21,6	-28,2	-35,3	-42,8	-50,4	-58,0	-65,5	-72,6	-79,2
	14%	-12,2	-16,1	-20,8	-26,4	-32,5	-39,1	-46,0	-53,0	-60,1	-67,1	-73,8	-80,1
	15%	-18,2	-21,9	-26,3	-31,4	-37,0	-42,9	-49,2	-55,7	-62,2	-68,7	-75,0	-81,0

Tableau 19 - Matrice complétée par interpolations polynomiales successives d'ordre 3

Interpolation polynomiale par morceaux

En restant dans la même approche d'interpolations unidimensionnelles successives, dans notre exemple nous disposons systématiquement d'un semis de quatre allocations, ce qui contraint le polynôme passant par chaque point à être de degré 3 au minimum. Le polynôme de Lagrange correspond à l'unique polynôme de degré minimal, c'est-à-dire 3. Or, si le semis est composé d'un plus grand nombre d'allocations, cela augmentera le nombre de degrés de l'interpolation polynomiale. Dans ce cadre, il peut être souhaité de limiter le nombre de degrés à 2, tout en conservant la contrainte de passer par tous les points (nous restons dans le cadre de l'interpolation et non de la régression). Pour satisfaire ces deux contraintes, il convient de réaliser une interpolation polynomiale par morceaux. Il s'agit d'une vision proche de l'interpolation linéaire par morceaux, correspondant à une interpolation polynomiale de degré 1 par morceaux, mais permet tout de même de lisser l'interpolation au niveau des allocations du semis.

Soient les quatre points du semis connus notés (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) tels que $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$.

Pour les $X \in]x_0; x_1[$, on applique le polynôme de Lagrange de degré 2 appliqué sur les points (x_0, y_0) , (x_1, y_1) et (x_2, y_2) :

$$L_1(X) = \sum_{j=0}^2 y_j \left(\prod_{i=0, i \neq j}^2 \frac{X - x_i}{x_j - x_i} \right)$$

Pour les $X \in]x_2; x_3[$, on applique le polynôme de Lagrange de degré 2 appliqué sur les points (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) :

$$L_2(X) = \sum_{j=1}^3 y_j \left(\prod_{i=1, i \neq j}^3 \frac{X - x_i}{x_j - x_i} \right)$$

Enfin, pour les $X \in]x_1; x_2[$, les deux polynômes précédemment obtenus $L_1(X)$ et $L_2(X)$ fournissent des résultats différents. Une moyenne pondérée appliquée à $L_1(X)$ et $L_2(X)$ en fonction de la distance respective à x_1 et x_2 donne :

$$L_3(X) = L_1(X) \frac{X - x_1}{x_2 - x_1} + L_2(X) \frac{x_2 - X}{x_2 - x_1}$$

Cette méthode permet d'obtenir la matrice suivante (Tableau 20) :

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	22,5	15,1	7,1	-1,5	-10,7	-20,9	-32,0	-43,2	-53,8	-63,7	-73,3	-82,5
	5%	21,6	14,7	7,1	-1,1	-10,0	-20,0	-30,8	-41,8	-52,2	-62,0	-71,5	-80,7
	6%	20,2	13,7	6,4	-1,5	-10,1	-19,7	-30,2	-40,9	-51,2	-60,8	-70,1	-79,2
	7%	18,2	12,0	5,1	-2,5	-10,8	-20,0	-30,2	-40,7	-50,6	-60,0	-69,2	-78,2
	8%	15,5	9,6	3,1	-4,2	-12,1	-21,0	-30,9	-41,0	-50,7	-59,8	-68,7	-77,5
	9%	12,2	6,6	0,3	-6,6	-14,2	-22,8	-32,3	-42,0	-51,3	-60,1	-68,8	-77,2
	10%	8,2	2,8	-3,2	-9,8	-17,1	-25,3	-34,4	-43,7	-52,6	-61,0	-69,3	-77,4
	11%	3,7	-1,4	-7,2	-13,5	-20,5	-28,3	-36,9	-45,8	-54,2	-62,3	-70,2	-77,9
	12%	-1,2	-6,1	-11,5	-17,5	-24,1	-31,5	-39,6	-48,0	-56,0	-63,6	-71,1	-78,4
	13%	-6,5	-11,1	-16,2	-21,9	-28,0	-35,0	-42,5	-50,3	-57,9	-65,1	-72,2	-79,1
	14%	-12,1	-16,5	-21,3	-26,6	-32,3	-38,7	-45,7	-52,9	-59,9	-66,7	-73,4	-80,0
	15%	-18,2	-22,3	-26,8	-31,7	-37,0	-42,8	-49,2	-55,8	-62,2	-68,5	-74,8	-81,0

Tableau 20 - Matrice complétée par interpolation polynomiale par morceaux

Les résultats obtenus à partir des interpolations polynomiales sont très différents de ceux obtenus précédemment. Entre les deux méthodes d'interpolation polynomiale, pour le semis testé, les écarts sont faibles : l'écart absolu maximal obtenu entre les deux interpolations est de 1,3 point de ratio. Sur la ligne correspondant à 10% d'actions, l'écart maximal est de seulement 0,3 point de ratio, ce qui se voit graphiquement avec les deux courbes presque superposées sur la Figure 23 suivante :

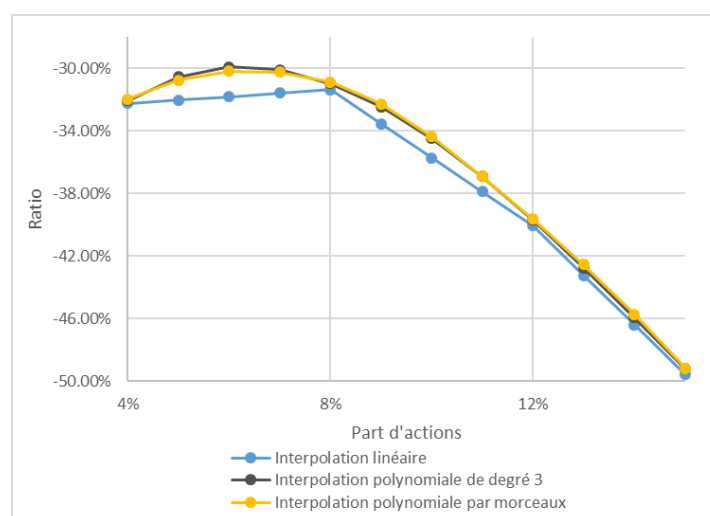


Figure 23 – Comparaison des interpolations polynomiales pour 10% d'actions

3.1.2. Régression

L'interpolation permet de trouver une fonction f telle que $y = f(x)$ avec une contrainte forte sur cette fonction pour que pour tout point (x_S, y_S) appartenant au semis, $y_S = f(x_S)$ exactement. Réaliser une régression à la place d'une interpolation permet de réduire cette contrainte et ainsi de pouvoir choisir la forme de la fonction f . La nouvelle contrainte consistera à chercher la fonction f qui minimise l'écart sur les points du semis, c'est-à-dire avec la méthode des moindres carrés :

$$f = \underset{g}{\text{Argmin}} \sum_{i=1}^{\text{Card}(S)} (y_i - g(x_i))^2$$

On aura donc $y_S = f(x_S) + \varepsilon$, c'est-à-dire une erreur même sur l'estimation des allocations du semis mais plus de libertés sur la forme de f .

Différents modèles de régression sont testés afin de trouver la fonction f qui s'ajuste au mieux à notre semis. Pour cela, des régressions linéaires généralisées (GLM) sont réalisées. Notons x le vecteur des variables explicatives, et Y la loi représentative de la variable à expliquer, ici le ratio. Dans un GLM, trois hypothèses sont nécessaires au calibrage du modèle :

- Choix de la loi de $Y|X = x$. Différentes familles sont testées : Gaussienne, inverse Gaussienne, Poisson ou Gamma
- Choix de la fonction de lien g telle que $g(E[Y|X = x]) = x' \cdot \beta$. Différentes fonctions de lien dépendant du choix de la distribution de $Y|X = x$ sont testées : l'identité, le logarithme ou l'inverse
- Choix du vecteur x de variables explicatives. Les trois composantes nécessaires sont la constante, la part action x_A et la part d'immobilier x_I . Mais à ces trois variables explicatives, il est possible d'ajouter leurs interactions $x_A \cdot x_I$ et leurs effets quadratiques x_A^2 et x_I^2 soit au total six variables explicatives. Seules les variables explicatives de p-valeur inférieure à 5% seront conservées.

L'ensemble de définition de la variable à expliquer a un impact sur le choix de la loi de $Y|X = x$ et de la fonction de lien. Pour ne pas perdre en généralité, la variable à expliquer correspond au ratio de solvabilité non retraité, c'est-à-dire à des valeurs positives (pour rappel, les valeurs affichées dans les matrices du Tableau 13 ont été translatées d'une valeur arbitraire).

Le Tableau 21 ci-dessous reprend les résultats obtenus sur Python en fonction des différentes hypothèses.

Modèle		Variables				Résultats	
loi de $Y X = x$	Fonction de lien	$1, x_A, x_I$	$x_A \cdot x_I$	x_A^2	x_I^2	Somme des écarts au carré	Ecart max
Poisson	identité	X	X	X	X	0,0033	0,0318
Poisson	logarithme	X				0,0791	0,1600
Poisson	logarithme	X	X			0,0432	0,1131
Poisson	logarithme	X	X	X		0,0178	0,0624
Poisson	logarithme	X	X	X	X	0,0021	0,0231
Gaussienne	identité	X				0,0806	0,1606
Gaussienne	identité	X	X			0,0213	0,0820
Gaussienne	identité	X	X	X		0,0166	0,0621
Gaussienne	identité	X	X	X	X	0,0033	0,0288
Gaussienne	logarithme	X	X	X	X	0,0020	0,0208
Gaussienne	inverse	X	X	X	X	0,0019	0,0192
Inverse Gaussienne	identité	X	X	X	X	0,0034	0,0239
Inverse Gaussienne	logarithme	X	X	X	X	0,0024	0,0275
Inverse Gaussienne	inverse	X	X	X	X	0,0023	0,0238
Gamma	identité	X	X	X	X	0,0035	0,0348
Gamma	logarithme	X	X	X	X	0,0022	0,0254
Gamma	inverse	X	X	X	X	0,0021	0,0224

Tableau 21 – Synthèse des résultats des régressions GLM

Le modèle s’ajustant le mieux à nos données correspond à celui utilisant la loi Gaussienne, la fonction de lien inverse et l’ensemble des variables explicatives. Pour plus de détails sur les résultats, voir annexe VI.

La prédiction à l’aide de ce modèle est alors la suivante (Tableau 22) :

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	23,2	15,5	6,8	-2,6	-12,6	-22,8	-33,0	-43,2	-53,2	-62,9	-72,1	-81,0
	5%	22,6	15,3	7,0	-2,2	-11,9	-21,9	-32,0	-42,1	-52,0	-61,6	-70,9	-79,7
	6%	21,3	14,4	6,4	-2,4	-11,8	-21,5	-31,5	-41,4	-51,2	-60,8	-70,0	-78,8
	7%	19,1	12,7	5,2	-3,2	-12,3	-21,8	-31,5	-41,2	-50,8	-60,3	-69,4	-78,1
	8%	16,2	10,3	3,2	-4,7	-13,4	-22,5	-31,9	-41,4	-50,8	-60,1	-69,1	-77,7
	9%	12,6	7,2	0,6	-6,9	-15,1	-23,8	-32,9	-42,1	-51,3	-60,3	-69,1	-77,6
	10%	8,4	3,5	-2,6	-9,6	-17,3	-25,7	-34,3	-43,2	-52,1	-60,9	-69,5	-77,8
	11%	3,7	-0,8	-6,3	-12,8	-20,1	-28,0	-36,2	-44,7	-53,3	-61,8	-70,2	-78,3
	12%	-1,6	-5,5	-10,5	-16,5	-23,3	-30,7	-38,6	-46,6	-54,8	-63,1	-71,1	-79,1
	13%	-7,2	-10,7	-15,2	-20,7	-27,0	-33,9	-41,3	-48,9	-56,8	-64,6	-72,4	-80,1
	14%	-13,2	-16,2	-20,2	-25,2	-31,0	-37,4	-44,3	-51,6	-59,0	-66,5	-74,0	-81,4
	15%	-19,4	-22,0	-25,6	-30,1	-35,4	-41,3	-47,7	-54,5	-61,6	-68,7	-75,9	-82,9

Tableau 22 – Matrice complétée par régression GLM (loi gaussienne et fdl inverse)

3.1.3. Factorisation

La problématique de complétion de matrice a déjà été rencontrée dans de nombreux domaines, avec des tailles de matrices et quantités d'informations bien plus importantes que dans notre étude. Celle de la recommandation de film est sans doute la plus célèbre car elle a été popularisée par Netflix qui créa un concours pour améliorer la prédiction des goûts cinématographiques de ses utilisateurs. Une large documentation technique sur la résolution de cette problématique est disponible, dont (Y. Koren, 2009) qui explicite des méthodes de factorisation de matrice pour des systèmes de recommandation. Cette méthodologie, plus précisément de la méthode des facteurs latents, a inspiré ce mémoire pour répondre au problème de recherche des matrices U et V telles que $U \times V = M$, avec M la matrice des ratios à compléter.

Réduction de l'espace du problème

Etant donnée la forme de notre matrice et le semis réalisé, nous pouvons dans un premier temps réduire le problème à la matrice m de taille 4×4 et chercher ainsi les matrices u et v telles que $u \times v = m$. La méthode des facteurs latents requiert en préambule de fixer le nombre de facteurs latents k , c'est-à-dire la dimension exacte des matrices u et v de tailles respectives $4 \times k$ et $k \times 4$.

Après les premiers tests, il s'avère impossible de trouver de bonnes matrices u et v de tailles respectives 4×1 et 1×4 . En effet, factoriser la matrice m par des vecteurs implique trop de contraintes qui empêcheront d'obtenir des solutions correctes de u et v . Leur produit sera trop éloigné de m . Choisir $k \geq 3$ signifie un plus grand nombre de paramètres que de données de calibrage. Cela engendrerait un trop grand nombre de solutions possibles nécessitant un tri conséquent par rapport aux formes de nappes obtenues. Le bon compromis pour une telle étude est de fixer $k = 2$ donc considérer u et v de tailles respectives 4×2 et 2×4 . Cela représente 16 paramètres à calculer à partir de 16 données de calibrage.

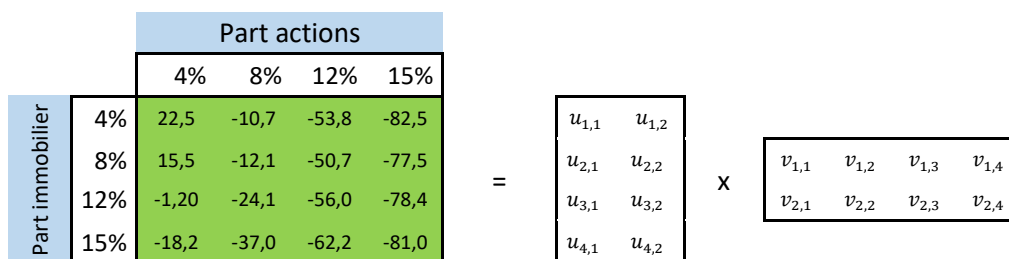


Figure 24 – Illustration de la factorisation de $m = u \times v$

Résolution du problème

Le produit de matrices présenté en Figure 24 correspond à un système de 16 équations à résoudre :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; 4 \rrbracket^2 : m_{i,j} = u_{i,1} \cdot v_{1,j} + u_{i,2} \cdot v_{2,j}$$

Pour simplifier l'écriture, en notant $u_i = (u_{i,1}; u_{i,2})$ et $v_j = (v_{1,j}; v_{2,j})$ pour $i, j \in \llbracket 1; 4 \rrbracket^2$, on a :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; 4 \rrbracket^2 : m_{i,j} = u_i \cdot v_j$$

L'approche utilisée ici est inspirée des méthodes de factorisation de matrice pour des systèmes de recommandation qui sont appliquées sur des matrices de bien plus grande taille comportant des valeurs manquantes. Celle-ci est ramenée au problème d'optimisation suivant :

$$\min_{u,v} \sum_{i,j} \left[L(m_{i,j}; u_i \cdot v_j) + \gamma_u \|u_i\|_1 + \gamma_v \|v_j\|_1 + \lambda_u \|u_i\|_2 + \lambda_v \|v_j\|_2 \right]$$

Avec :

- $L(\cdot)$ une fonction de coût représentant la distance entre $m_{i,j}$ et $u_i \cdot v_j$.
- $\|\cdot\|_1$ est la norme-1 : $\|u_i\|_1 = |u_{i,1}| + |u_{i,2}|$
- $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne : $\|u_i\|_2 = \sqrt{u_{i,1}^2 + u_{i,2}^2}$
- γ_* et λ_* sont des paramètres de régularisation aux normes respectives L_1 et L_2 , permettant de réduire le surapprentissage.

Cependant, dans notre cas, la matrice à factoriser est complète et de faible dimension. Les paramètres de régularisation peuvent donc être supprimés. Ainsi, le problème d'optimisation devient :

$$\min_{u,v} \sum_{i,j} L(m_{i,j}; u_i \cdot v_j)$$

En utilisant l'écart quadratique comme fonction de coût, le problème d'optimisation devient :

$$\min_{u,v} \sum_{i,j} (m_{i,j} - u_i \cdot v_j)^2$$

Pour résoudre ce problème de minimisation de fonction différentiable, une approche itérative de descente de gradient sera utilisée (J. Lafond, 2017). Le principe de cet algorithme, très utilisé en machine learning, est de chercher par itération la variable minimisant une fonction objectif. Pour cela, il se base sur le fait que le gradient d'une fonction indique la croissance maximale à partir d'un point. Ainsi, en prenant la direction de descente à l'opposé du gradient de la fonction, on converge vers un minimum, potentiellement local. Le taux d'apprentissage η permet de calibrer la distance parcourue à chaque itération, également liée à la valeur du gradient. Soit une fonction F dont on cherche la valeur x où le minimum est atteint, le schéma d'itération est le suivant :

$$x_{t+1} = x_t - \eta \nabla F(x_t)$$

Pour notre problématique, posons $F(u, v) = \sum_{i,j} (m_{i,j} - u_i \cdot v_j)^2 = \sum_{i,j} (m_{i,j} - u_{i,1} \cdot v_{1,j} - u_{i,2} \cdot v_{2,j})^2$.
Alors :

$$\forall i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket : \begin{cases} \nabla F(u_{i,1}) = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u_{i,1}} = - \sum_{j=1}^4 2 \cdot v_{1,j} (m_{i,j} - u_{i,1} \cdot v_{1,j} - u_{i,2} \cdot v_{2,j}) \\ \nabla F(u_{i,2}) = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u_{i,2}} = - \sum_{j=1}^4 2 \cdot v_{2,j} (m_{i,j} - u_{i,1} \cdot v_{1,j} - u_{i,2} \cdot v_{2,j}) \end{cases}$$

Et

$$\forall j \in \llbracket 1; 4 \rrbracket : \begin{cases} \nabla F(v_{1,j}) = \frac{\partial F(u, v)}{\partial v_{1,j}} = - \sum_{i=1}^4 2 \cdot u_{i,1} (m_{i,j} - u_{i,1} \cdot v_{1,j} - u_{i,2} \cdot v_{2,j}) \\ \nabla F(v_{2,j}) = \frac{\partial F(u, v)}{\partial v_{2,j}} = - \sum_{i=1}^4 2 \cdot u_{i,2} (m_{i,j} - u_{i,1} \cdot v_{1,j} - u_{i,2} \cdot v_{2,j}) \end{cases}$$

L'algorithme de descente de gradient, développé sur Python, permettant de trouver les deux matrices u et v est alors le suivant :

Initialisation de u et v soit les 16 variables : $u_{1,1}^0, u_{1,2}^0, \dots, v_{1,4}^0$ et $v_{2,4}^0 \in]0; 1[$

n fois :

Pour $i = 1$ à 4 :

$$u_{i,1}^{t+1} = u_{i,1}^t - \eta \frac{\partial F(u^t, v^t)}{\partial u_{i,1}^t}$$

$$u_{i,2}^{t+1} = u_{i,2}^t - \eta \frac{\partial F(u^t, v^t)}{\partial u_{i,2}^t}$$

Pour $j = 1$ à 4 :

$$v_{1,j}^{t+1} = v_{1,j}^t - \eta \frac{\partial F(u^t, v^t)}{\partial v_{1,j}^t}$$

$$v_{2,j}^{t+1} = v_{2,j}^t - \eta \frac{\partial F(u^t, v^t)}{\partial v_{2,j}^t}$$

Fin

La valeur du taux d'apprentissage doit être correctement fixée. Une valeur trop faible entrainerait une convergence trop lente. A l'inverse, choisir un taux d'apprentissage trop élevé risquerait de ne pas converger vers le minimum et de passer systématiquement à côté, voire de ne pas converger. Sur notre jeu de données, le taux d'apprentissage η a été fixé à 0,1. Dans la suite de ce mémoire, nous montrerons que ce taux permet la convergence. De plus, l'initialisation a un impact sur le résultat final dans le cas où il existerait des minimums locaux. C'est pourquoi, l'algorithme est lancé sur un nombre N d'initialisations différentes. Ce nombre de tirages N fixé à 500 permet d'étudier la vitesse de convergence de l'algorithme, dans le but de fixer le nombre d'itérations n adéquat ainsi que le nombre de résultats différents. La Figure 25 ci-dessous représente la vitesse de convergence de l'écart quadratique entre m et $u \times v$ (appelé par la suite SCE et correspondant à $\sum_{i,j} (m_{i,j} - u_i \cdot v_j)^2$) à partir de la 100^{ème} itération. Le Tableau 23 reprend ces mêmes valeurs à différents moments de l'algorithme pour les quantiles remarquables.

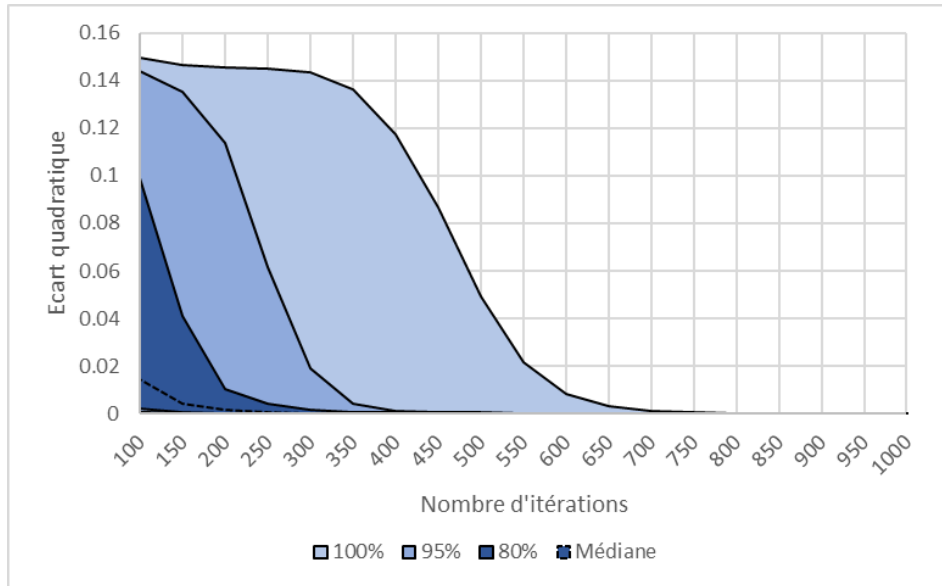


Figure 25 – Vitesse de convergence du SCE

		Nombre d'itérations (n)						
		0	50	100	250	500	750	1000
Classement des tirages	Maximum	16,39	1,44111	0,149362	0,144837	0,049103	0,000506	0,000153
	Q 97,5%	14,91	0,18893	0,144097	0,061538	0,000409	0,000160	0,000141
	Q 90%	13,23	0,15647	0,098897	0,003960	0,000211	0,000141	0,000139
	Médiane	10,52	0,05902	0,014468	0,000532	0,000140	0,000139	0,000139
	Q 10%	7,70	0,01223	0,002366	0,000171	0,000139	0,000139	0,000139
	Q 2,5%	6,66	0,00544	0,000811	0,000151	0,000139	0,000139	0,000139
	Minimum	5,15	0,00128	0,000444	0,000140	0,000139	0,000139	0,000139

Tableau 23 – Valeur du SCE pour différents quantiles ($N=500$) à certains moment de l'algorithme

La moitié des tirages (soit 250) a convergé vers le minimum global en moins de 500 itérations. Il faut 750 itérations pour que 90% des tirages ait convergé vers ce minimum. Enfin, pour que 97,5% des tirages ait convergé, alors $n = 1000$ itérations sont nécessaires. Dans ce cas, le tirage le plus éloigné du minimum global, donc n'ayant pas encore convergé, possède un SCE supérieur de seulement 0,000014 du SCE optimal. Cet écart n'est pas significatif. Concrètement, le SCE optimal représente un écart moyen des ratios estimés par $u \times v$ par rapport à m de 0,30% contre 0,31% pour l'écart le plus élevé à la 1000^{ème} itération. En conclusion, $n = 1000$ itérations pour $\eta = 0,1$ permet de converger presque systématiquement.

Avec $N = 500$ tirages, $n = 1000$ itérations et un taux d'apprentissage $\eta = 0,1$, le SCE optimal est de 0,000139 donc faible mais reste supérieur à 0. Cela signifie que l'algorithme ne trouve pas de matrices u et v dont le produit est exactement égal à m . Dès lors, la solution optimale est-elle unique ou bien existe-t-il un ensemble de matrices u et v permettant de se rapprocher de la matrice m à ce niveau ? Sur les 500 tirages, nous observons qu'il n'existe pas deux matrices u identiques, ce qui prouve qu'il existe une infinité de solutions. La Figure 26 illustre la répartition des valeurs du terme $u_{1,1}$, toutes différentes et comprises entre -0,753 et 1,020.

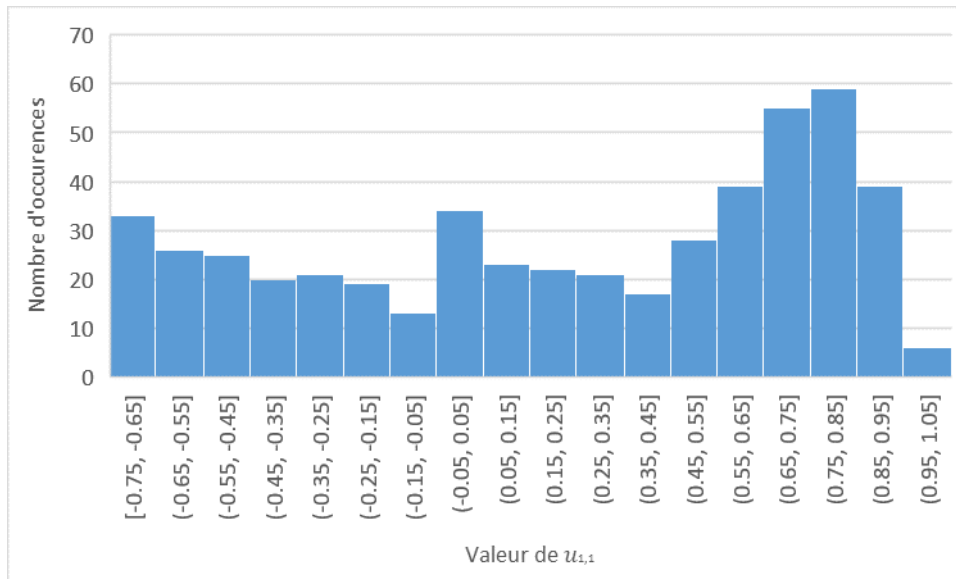


Figure 26 – Répartition des valeurs obtenues de $u_{1,1}$

Bien que les matrices u et v obtenues par l'algorithme de descente de gradient dépendent du tirage réalisé (c'est-à-dire de l'initialisation), l'écart quadratique à la matrice m de leur produit est presque systématiquement identique comme vu dans le Tableau 23. Pourtant, bien qu'ils soient à égales distances (dans le sens distance quadratique) de m , les 500 produits $u \times v$ sont également tous différents. La Figure 27 ci-dessous représente la répartition des valeurs estimées de $m_{1,1}$: $\hat{m}_{1,1} = u_{1,1} \cdot v_{1,1} + u_{1,2} \cdot v_{2,1}$ qui s'échelonnent entre 21,98% et 22,14% (Pour rappel, $m_{1,1} = 22,47\%$). Bien que toutes inférieures à $m_{1,1}$, l'écart-type de cette distribution est très faible ($< 0,009\%$).

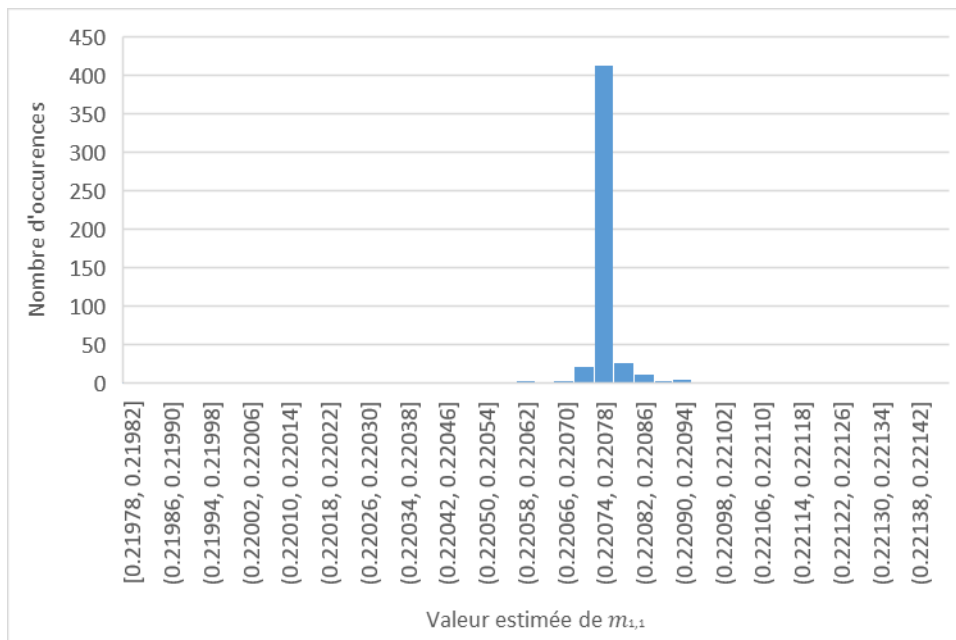


Figure 27 - Répartition des estimations de $m_{1,1}$

Le nombre de matrices estimées $\hat{m} = u \times v$ obtenu est égal au nombre de tirages effectués soit 500 dans notre cas. Il est donc nécessaire de construire des critères afin de sélectionner l'estimation la plus adaptée à notre problème.

Le premier critère choisi est de ne conserver que les matrices u et v constituées de quatre vecteurs $(u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}, u_{4,1})$, $(u_{1,2}, u_{2,2}, u_{3,2}, u_{4,2})$, $(v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{1,4})$ et $(v_{2,1}, v_{2,2}, v_{2,3}, v_{2,4})$ monotones. L'idée derrière ce critère est de limiter les points d'inflexion (ou changement de variations) sur la nappe finale obtenue par $u \times v$.

Le second critère consiste à discriminer les résultats en fonction de l'écart quadratique (SCE) par rapport à la matrice m . Sur notre jeu de données, comme vu dans le Tableau 23, cela ne permet pas une forte discrimination étant donné que la quasi-totalité des résultats possèdent un SCE identique.

Enfin, le dernier critère est lié au point suivant et dépend de la méthode employée afin de revenir à la dimension initiale, c'est-à-dire de repasser de u et v à U et V . S'il s'agit d'une méthode de régression, alors le dernier critère correspondra à la qualité de l'ajustement à u et v .

Retour à la dimension initiale

Les matrices U et V doivent maintenant être complétées à partir des valeurs obtenues issues de u et v , comme illustré sur la Figure 28 suivante.

		Part actions														
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%			
Part immobilier	4%	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$													
	5%	?	?													
	6%	?	?													
	7%	?	?													
	8%	$u_{2,1}$	$u_{2,2}$													
	9%	?	?													
	10%	?	?													
	11%	?	?													
	12%	$u_{3,1}$	$u_{3,2}$													
	13%	?	?													
	14%	?	?													
	15%	$u_{4,1}$	$u_{4,2}$													
			$v_{1,1}$	$v_{1,2}$	$v_{1,3}$	$v_{1,4}$	$v_{2,1}$	$v_{2,2}$	$v_{2,3}$	$v_{2,4}$						
		4%	?	?	?											
		5%														
	6%															
	7%															
	8%															
	9%															
	10%															
	11%															
	12%															
	13%															
	14%															
	15%															

Figure 28 – Matrices U et V à compléter à partir de u et v

La complétion de ces quatre vecteurs se fait indépendamment et peut être réalisée au choix par une interpolation (interpolation linéaire, polynomiale d'ordre 3 ou polynomiale par morceaux) ou bien par une régression (GLM, régression polynomiale). Ces différentes techniques ont déjà été explicitées en détail dans les parties 3.1.1 et 3.1.2. A noter que l'utilisation d'une régression engendre un écart d'ajustement par rapport aux $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$, ce qui viendra augmenter le SCE final après régression par rapport aux données du semis, comme le montre le Tableau 24 des résultats ci-dessous :

Modèle de régression	Avant régression		Après régression	
	SCE	Ecart max de l'estimation	SCE	Ecart max de l'estimation
Régression polynomiale d'ordre 3	0,000139	0,50%	0,002866	2,62%
GLM (Gaussienne, fdl identité)			0,002866	2,62%
GLM (Gaussienne, fdl inverse) ⁹			0,195791	25,26%
GLM (Gaussienne inverse, fdl identité)			0,006359	3,34%
GLM (Gamma, fdl identité)			0,002968	2,62%

Tableau 24 – Impact sur le SCE de l'utilisation d'une régression suite à factorisation

Les matrices U et V complétées, leur produit permet d'obtenir une estimation de la matrice M . Les Tableau 25, Tableau 26 et Tableau 27 correspondent aux matrices obtenues par factorisation suivies respectivement d'une interpolation linéaire, d'une régression polynomiale d'ordre 3 et d'une régression linéaire généralisée (famille gamma et fonction de lien identité).

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	22,1	14,0	5,9	-2,1	-10,2	-21,0	-31,9	-42,7	-53,5	-63,3	-73,0	-82,8
	5%	20,5	12,7	4,9	-3,0	-10,8	-21,3	-31,8	-42,4	-52,9	-62,4	-71,9	-81,4
	6%	19,0	11,4	3,8	-3,8	-11,4	-21,6	-31,8	-42,0	-52,3	-61,5	-70,7	-80,0
	7%	17,5	10,1	2,7	-4,6	-12,0	-21,9	-31,8	-41,7	-51,6	-60,6	-69,6	-78,5
	8%	15,9	8,8	1,7	-5,5	-12,6	-22,2	-31,8	-41,4	-51,0	-59,7	-68,4	-77,1
	9%	11,7	4,9	-1,9	-8,7	-15,5	-24,7	-33,9	-43,1	-52,2	-60,6	-69,0	-77,4
	10%	7,4	1,0	-5,5	-12,0	-18,5	-27,2	-36,0	-44,7	-53,5	-61,6	-69,7	-77,7
	11%	3,2	-3,0	-9,1	-15,3	-21,4	-29,7	-38,1	-46,4	-54,8	-62,5	-70,3	-78,1
	12%	-1,0	-6,9	-12,7	-18,5	-24,3	-32,3	-40,2	-48,1	-56,0	-63,5	-70,9	-78,4
	13%	-6,8	-12,2	-17,7	-23,1	-28,5	-35,9	-43,3	-50,7	-58,1	-65,1	-72,2	-79,3
	14%	-12,6	-17,6	-22,6	-27,6	-32,6	-39,5	-46,4	-53,3	-60,1	-66,8	-73,5	-80,2
	15%	-18,4	-23,0	-27,6	-32,2	-36,8	-43,1	-49,5	-55,8	-62,2	-68,5	-74,8	-81,1

Tableau 25 – Matrice complétée par factorisation issue d'une interpolation linéaire

⁹ Cette régression n'est pas adaptée aux données de notre problème car ne permet pas d'obtenir de vecteur composé de termes de signes différents.

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	22,8	14,6	6,0	-2,8	-11,9	-21,3	-31,0	-40,9	-51,2	-61,7	-72,5	-83,6
	5%	22,0	13,9	5,6	-3,0	-11,9	-21,1	-30,5	-40,2	-50,2	-60,5	-71,0	-81,8
	6%	20,6	12,7	4,6	-3,7	-12,4	-21,3	-30,4	-39,9	-49,6	-59,6	-69,8	-80,3
	7%	18,6	11,0	3,2	-4,9	-13,3	-21,9	-30,8	-40,0	-49,4	-59,1	-69,0	-79,2
	8%	16,0	8,7	1,2	-6,6	-14,7	-23,0	-31,6	-40,4	-49,5	-58,9	-68,5	-78,4
	9%	12,8	5,9	-1,4	-8,8	-16,6	-24,6	-32,8	-41,3	-50,1	-59,1	-68,4	-77,9
	10%	9,1	2,5	-4,4	-11,5	-18,9	-26,6	-34,5	-42,6	-51,0	-59,7	-68,6	-77,8
	11%	4,8	-1,5	-8,0	-14,7	-21,8	-29,0	-36,5	-44,3	-52,3	-60,6	-69,1	-77,9
	12%	-0,1	-6,0	-12,1	-18,5	-25,1	-31,9	-39,0	-46,4	-54,0	-61,9	-70,0	-78,4
	13%	-5,6	-11,0	-16,7	-22,7	-28,8	-35,3	-42,0	-48,9	-56,1	-63,5	-71,2	-79,2
	14%	-11,7	-16,7	-21,9	-27,4	-33,1	-39,1	-45,3	-51,8	-58,6	-65,6	-72,8	-80,3
	15%	-18,3	-22,8	-27,6	-32,6	-37,8	-43,4	-49,1	-55,1	-61,4	-67,9	-74,7	-81,7

Tableau 26 – Matrice complétée par factorisation issue d'une régression polynomiale d'ordre 3

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	23,5	15,1	6,5	-2,4	-11,6	-21,1	-30,8	-40,9	-51,2	-61,8	-72,7	-83,9
	5%	22,4	14,3	5,9	-2,8	-11,7	-20,9	-30,5	-40,2	-50,3	-60,6	-71,3	-82,2
	6%	20,8	12,9	4,8	-3,6	-12,3	-21,2	-30,5	-40,0	-49,8	-59,8	-70,1	-80,8
	7%	18,6	11,0	3,2	-4,9	-13,3	-21,9	-30,9	-40,1	-49,6	-59,3	-69,4	-79,7
	8%	15,9	8,6	1,1	-6,7	-14,7	-23,1	-31,7	-40,6	-49,7	-59,2	-68,9	-78,9
	9%	12,6	5,7	-1,4	-8,9	-16,6	-24,6	-32,9	-41,4	-50,3	-59,4	-68,8	-78,5
	10%	8,8	2,3	-4,5	-11,6	-18,9	-26,5	-34,5	-42,7	-51,2	-59,9	-69,0	-78,3
	11%	4,4	-1,7	-8,0	-14,7	-21,7	-28,9	-36,4	-44,3	-52,4	-60,8	-69,5	-78,5
	12%	-0,5	-6,1	-12,1	-18,3	-24,8	-31,7	-38,8	-46,3	-54,0	-62,0	-70,4	-79,0
	13%	-6,0	-11,1	-16,6	-22,4	-28,5	-34,9	-41,6	-48,6	-56,0	-63,6	-71,6	-79,8
	14%	-12,0	-16,6	-21,6	-26,9	-32,5	-38,5	-44,8	-51,4	-58,3	-65,5	-73,1	-81,0
	15%	-18,6	-22,7	-27,1	-31,9	-37,0	-42,5	-48,3	-54,5	-61,0	-67,8	-75,0	-82,5

Tableau 27 - Matrice complétée par factorisation issue d'une régression linéaire généralisée (famille gamma et fdl identité)

3.1.4. Critères de comparaison

Les parties 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.3 ont permis de présenter différentes méthodes de complétion de matrice, respectivement à partir d'interpolations, de régression et de factorisation. Cette partie tente de présenter celle qui est la plus adaptée à nos données selon différents critères. A noter que la méthode optimale pourra varier selon les données utilisées et les critères privilégiés. Ci-dessous sont détaillés les différents critères pris en compte afin d'évaluer la pertinence des méthodes employées.

Ecart quadratique

L'écart quadratique a été évoqué à plusieurs reprises dans ce mémoire car il correspond au critère privilégié pour le calibrage des méthodes. Il correspond à la somme des écarts au carré entre les valeurs obtenues sur la matrice \hat{M} estimée et les valeurs du semis calculées :

$$Crit_1 = \sum_{(i,j) \in S} (M_{i,j} - \hat{M}_{i,j})^2$$

Il permet d'évaluer la qualité de l'ajustement de la matrice \hat{M} estimée aux données initiales. Plus l'écart sera faible, meilleure est la méthode.

Ecart maximal

L'écart quadratique ne fournit qu'une vision moyennée de l'ajustement, même s'il permet de pénaliser davantage les valeurs extrêmes. Une vision de la qualité de l'ajustement complémentaire consiste à regarder l'écart maximal obtenu, en valeur absolue par rapport aux valeurs d'ajustement qu'est le semis :

$$Crit_2 = \max_{(i,j) \in S} |M_{i,j} - \hat{M}_{i,j}|$$

Il permet de se rendre compte directement de la quantité maximale de l'indicateur étudié perdue lors de la complétion de matrice.

Backtest

Les deux critères précédents évaluent la qualité de l'ajustement aux données de calibrage, le semis. Le *backtest* permet d'évaluer la qualité de l'ajustement à de nouvelles données, non utilisées pour le calibrage, et pouvant donc être calculées a posteriori. Notons B l'ensemble des ratios calculés et n'appartenant pas au semis.

$$Crit_3 = \sum_{(i,j) \in B} (M_{i,j} - \hat{M}_{i,j})^2$$

Niveau de lissage

L'idée de ce critère est que la nappe obtenue à partir de la matrice estimée devrait être continue et dérivable en tout point. On choisira alors la nappe la plus « lisse » possible, c'est-à-dire qui présente les variations de pente les plus faibles. Pour cela, on calcule pour chaque ligne et chaque colonne la variation de pente la plus grande puis le critère correspond à la moyenne de ces valeurs. Soit une matrice estimée \hat{M} de taille $I \times J$:

$$\begin{aligned}
Crit_4 &= \frac{1}{I+J} \left(\sum_{i=1}^I \max_j |(\widehat{M}_{i,j+2} - \widehat{M}_{i,j+1}) - (\widehat{M}_{i,j+1} - \widehat{M}_{i,j})| + \sum_{j=1}^J \max_i |(\widehat{M}_{i+2,j} - \widehat{M}_{i+1,j}) - (\widehat{M}_{i+1,j} - \widehat{M}_{i,j})| \right) \\
&= \frac{1}{I+J} \left(\sum_{i=1}^I \max_j |\widehat{M}_{i,j+2} - 2\widehat{M}_{i,j+1} + \widehat{M}_{i,j}| + \sum_{j=1}^J \max_i |\widehat{M}_{i+2,j} - 2\widehat{M}_{i+1,j} + \widehat{M}_{i,j}| \right)
\end{aligned}$$

Ce critère est discutable selon l'indicateur regardé. En effet, si un indicateur présente un effet de seuil, alors la présence d'un changement de pente significatif sur la nappe peut se justifier et ce critère n'est plus viable pour sélectionner la meilleure méthode. Cela peut être le cas du ratio de solvabilité dont le caractère « lisse » de la nappe n'est pas démontré.

Synthèse des critères

La Tableau 28 ci-dessous synthétise l'ensemble des méthodes de complétion vues jusqu'ici et pour lesquelles ont été calculés les différents critères présentés ci-dessus. Pour le critère n°3, le *backtest* est réalisé à partir des quatre ratios calculés a posteriori suivants : $M_{3,3} = 6,29\%$, $M_{10,3} = -20,31\%$, $M_{3,10} = -65,52\%$ et $M_{7,7} = -38,88\%$.

Modèle de complétion	Critère 1 SCE sur semis	Critère 2 Ecart max sur semis	Critère 3 SCE sur backtest	Critère 4 Niveau de lissage
Interpolations :				
Interpolation linéaire	0	0	0,004112	3,14%
Interpolation par pondération	0	0	0,001840	5,60%
Interpolation par pondération alternative	0	0	0,001649	6,18%
Interpolation polynomiale d'ordre 3	0	0	0,006481	1,04%
Interpolation polynomiale par morceaux	0	0	0,005963	0,80%
Régressions :				
GLM (Gaussienne, fdl identité)	0,003286	2,88%	0,007351	0,35%
GLM (Gaussienne, fdl inverse)	0,001943	1,92%	0,006924	0,84%
Factorisation, U et V obtenus par :				
Interpolation linéaire	0,000139	0,50%	0,003789	2,27%
Régression polynomiale d'ordre 3	0,002682	2,62%	0,007053	0,35%
GLM (Gamma, fdl identité)	0,002968	2,62%	0,006813	3,56%

Tableau 28 – Comparaison des différentes méthodes de complétion

Les méthodes d'interpolation présentent l'avantage de s'ajuster parfaitement au semis contrairement aux autres méthodes qui s'en écartent. Concernant la pertinence de la méthode, un compromis entre les différents critères doit être fait afin d'en sélectionner une particulière. Sur les données utilisées lors de cette étude correspondant au ratio de solvabilité, aucune méthode n'est optimale sur chacun des quatre critères. Un meilleur ajustement sur les données de *backtest* entraîne une nappe moins lisse. Une méthode optimale ne ressort pas de cette étude mais incitons l'utilisateur à tester différentes méthodes et à s'interroger sur celle qui est la plus pertinente en fonction de son étude. D'autres résultats réalisés sur un autre jeu de données sont présentés à la section 3.4.

3.2. Réduction du nombre de scénarios

Les méthodes présentées dans la partie 3.1 sont axées sur l'optimisation du nombre d'allocations à calculer afin d'obtenir un gain opérationnel. Pour cela, des méthodes de complétion de matrice sont appliquées à partir d'indicateurs calculés sur certaines allocations afin d'estimer ceux des autres allocations. Les différents indicateurs présentés dans la partie 2 sont obtenus à partir de simulations de Monte-Carlo, faisant donc intervenir un grand nombre de scénarios. Bien que quelques techniques sont présentées afin de limiter l'impact du Monte-Carlo comme le choix du générateur de scénario économique (2.1.1) ou la modélisation de la provision pour dépréciation durable (2.1.3), l'optimisation du nombre de scénarios, ou de manière analogue la réduction de la variance du résultat, est un axe complémentaire d'optimisation opérationnelle. La partie suivante de ce mémoire s'attache à ce deuxième axe et tente de présenter et appliquer de telles méthodes de réduction de variance.

La réduction de la variance sur un échantillon de Monte-Carlo est une problématique primordiale dans le monde de la finance et donc également dans le monde de l'assurance. En effet, les calculs tarifaires nécessitent l'emploi d'un générateur de scénarios économique et la précision du résultat pour un nombre de scénario fixé est recherchée. En assurance-vie, la variance de la VIF (*Value of In-Force*, correspondant à la valeur actuelle des profits futurs) a fait l'objet de recherche d'optimisation (F. Borel-Mathurin, 2019) dans un objectif de calcul des SCR. Pour cela, deux méthodes peuvent être employées. La première est déjà très utilisée dans le monde de l'assurance. Il s'agit de l'utilisation de variables antithétiques. La seconde, l'utilisation d'une variable de contrôle, est moins fréquente.

Le ratio de solvabilité, choisi comme donnée d'étude pour la partie 3.1, ne peut pas être décomposé directement comme la moyenne des résultats de différents scénarios. Son dénominateur, le SCR est la consolidation de plusieurs SCR eux-mêmes obtenus par différence entre deux simulations de Monte-Carlo. Les résultats de ces simulations sont obtenus par la moyenne d'un grand nombre de scénarios. S'agissant là de l'axe d'optimisation recherché, nous ne pouvons plus travailler par la suite sur l'obtention directement du ratio de solvabilité, mais sur une matrice de *Best estimate* obtenue sur une situation choquée ou non, et qui permettra, avec d'autres matrices semblables, de construire dans un second temps les ratios de solvabilité.

3.2.1. Variables antithétiques

L'approche par les variables antithétiques est la plus connue des méthodes de réduction de variance grâce à sa simplicité d'application. Elle est très employée en finance (S. Paskov, 1995).

Sans perdre en généralité, en tarification et provisionnement, l'objectif est de déterminer l'espérance d'une variable aléatoire (tarif, provision) à partir d'un générateur de scénarios économique en entrée d'un modèle. Soit X la situation économique utilisée en entrée, quelles que soient les lois utilisées pour modéliser X et soit h la fonction correspondant au modèle utilisé et générant la variable aléatoire, provision ou tarif. Nous cherchons donc l'espérance mathématique $E[h(X)]$. Etant donnée la complexité des modèles utilisés, il n'existe pas d'expression directe de l'espérance. Ceci explique l'utilisation de la méthode de Monte Carlo qui consiste à simuler n variables (bien souvent multivariées pour modéliser taux, indices, ...), c'est-à-dire n scénarios $X_i \sim X$ et estimer l'espérance par la moyenne empirique :

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) \quad (3.2.1)$$

Plus le nombre de scénarios n sera important, plus l'estimateur $\hat{\theta}_n$ sera précis. En effet, la variance $Var(\hat{\theta}_n)$ converge vers 0 et avec des scénarios indépendants. La convergence est justifiée par l'égalité :

$$Var(\hat{\theta}_n) = \frac{Var(h(X))}{n}$$

L'objectif d'une méthode de réduction de variance est de trouver un autre estimateur, qui converge toujours vers l'espérance, mais à une vitesse supérieure. De cette manière, pour un même nombre de scénarios n , on obtient une variance inférieure et donc un intervalle de confiance plus petit. Ou bien, pour une même variance, donc une incertitude équivalente, un plus petit nombre de scénarios $n' < n$ suffit.

La technique des variables antithétiques consiste à choisir la variable aléatoire générant les variables économiques X symétrique en $a \in \mathbb{R}$ ($X = a - X$).

Ainsi, en posant un nouvel estimateur de l'espérance :

$$\hat{\theta}_n^{VA} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} h(X_i) + h(a - X_i) \quad (3.2.2)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} Var(\hat{\theta}_n^{VA}) &= \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} h(X_i) + h(a - X_i)\right) \\ &= \frac{1}{2n} Var(h(X) + h(a - X)) \\ &= \frac{1}{2n} (Var(h(X)) + Var(h(a - X)) + 2Cov(h(X); h(a - X))) \\ &= \frac{1}{n} Var(h(X)) + \frac{1}{n} Cov(h(X); h(a - X)) \end{aligned}$$

Ainsi, $Var(\hat{\theta}_n^{VA}) \leq Var(\hat{\theta}_n)$ ssi $Cov(h(X); h(a - X)) \leq 0$. Une condition suffisante pour vérifier que la covariance est négative est la monotonie de la fonction h . En effet, dans ce cas, avec X et Y deux variables aléatoires identiques et indépendantes, nous avons :

$$(h(X) - h(Y))(h(a - X) - h(a - Y)) \leq 0$$

Puis en passant à l'espérance et en développant, cela donne

$$E[h(X)h(a - X) + h(Y)h(a - Y) - h(X)h(a - Y) - h(Y)h(a - X)] \leq 0$$

$$2E[h(X)h(a - X)] - 2E[h(X)]E[h(a - X)] \leq 0$$

Dans ce cas, la variance de l'estimateur obtenu de cette manière est inférieure à celle obtenue par Monte Carlo avec des variables toutes indépendantes pour un nombre d'estimations identique et égal à n .

Opérationnellement, $n/2$ variables aléatoires multivariées X_i indépendantes et identiquement distribuées modélisant la projection de la situation économique future sont construites puis les $n/2$ autres variables aléatoires sont obtenues par la relation $X_{i+n/2} = a - X_i$. Nous avons vu dans la partie 2.1.1 sur la construction d'un générateur de scénarios économiques qu'elles pouvaient être construites à partir d'un ensemble de variables aléatoires uniformes sur $[0; 1]$. Ainsi, une manière de construire les variables antithétiques est de prendre $X_{i+n/2} = 1 - X_i$ avec $X_i \sim U_{[0;1]}$. Ou bien en raisonnant directement à partir des lois normales correspondant aux aléas des processus stochastiques, les variables antithétiques sont obtenues à partir de la relation $X_{i+n/2} = -X_i$ avec $X_i \sim N(0; 1)$. Cependant, dans notre cas pratique, la monotonie de h n'est pas prouvée mais les tests réalisés montreront que malgré l'absence de monotonie, le gain de variance est réel.

La réduction de variance engendrée par cette méthode est testée sur des données réelles de valeur actuelle probable des flux de trésorerie pour un modèle ALM donné. Leur moyenne permet ainsi d'obtenir une estimation du *Best estimate*. Afin de comparer l'efficacité de la réduction de variance par les variables antithétiques, nous utiliserons un premier jeu de données composé des résultats obtenus sur 1 000 scénarios indépendants puis un second jeu composé de 500 scénarios indépendants et de leurs 500 scénarios antithétiques. Ces montants ont été modifiés par réduction et translation et leur distribution obtenue sur 1 000 scénarios est décrite sur le Tableau 29 suivant. La moitié des scénarios de ces deux échantillons étant différente, la distribution diffère légèrement, notamment la moyenne. En reprenant les notations précédentes, il s'agit de la distribution de $h(X)$ et c'est la raison pour laquelle l'écart-type (ou la variance) sont très proches, quelle que soient la méthode de construction de l'échantillon. Il ne s'agit pas ici de la variance des estimateurs qui seront explicitées ci-après.

	Distribution sur 1 000 variables iid	Distribution sur 500 variables iid + 500 variables antithétiques
Moyenne	58,16	58,62
Ecart-type	21,70	21,97
Minimum	5,14	5,14
1 ^{er} quartile	46,04	46,47
Médiane	56,33	56,57
3 ^{ème} quartile	68,77	68,48
Maximum	399,88	399,88

Tableau 29 - Distribution des valeurs actuelles probables des flux de trésorerie sur 1 000 scénarios indépendants

Les variances des estimateurs $\hat{\theta}_n$ et $\hat{\theta}_n^{VA}$ sont estimées à partir de la variance empirique :

$$\widehat{Var}(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\hat{\theta}_n(j) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\theta}_n(i) \right)^2 \quad (3.2.3)$$

Où $\hat{\theta}_n(j)$ est la $j^{\text{ème}}$ moyenne empirique calculée sur n scénarios d'après la formule (3.2.1) : $\hat{\theta}_n(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i^{(j)})$.

Ce calcul de variance empirique nécessite donc de disposer de $N \times n$ scénarios ($X_1^{(1)}, \dots, X_n^{(1)}, \dots, X_1^{(N)}, \dots, X_n^{(N)}$) sur lesquels le modèle ALM est appliqué pour ressortir la valeur actuelle probable des flux de trésorerie $h(X_i^{(j)})$. Pour limiter le nombre de calculs, la technique du bootstrap est utilisée sur l'échantillon à disposition de 1 000 scénarios. Concrètement, chacun des N calculs de moyenne empirique (3.2.1) est effectué à partir d'un tirage aléatoire sans remise de n scénarios sur les 1 000 de l'échantillon total. Puis, la variance est calculée à partir des N valeurs de $\hat{\theta}_n(j)$ ainsi obtenues selon (3.2.3). Il est fait de même pour le calcul de l'estimateur $\hat{\theta}_n^{VA}$ (3.2.2), en conservant les mêmes tirages aléatoires sur les $n/2$ premiers scénarios. Les $n/2$ autres scénarios utilisés dans la construction de $\hat{\theta}_n^{VA}$ sont les scénarios antithétiques.

La Figure 29 montre l'impact sur la vitesse de convergence pour $n = 10$. Elle représente la comparaison des courbes $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{\theta}_n(j)$ (courbe bleue) et $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{\theta}_n^{VA}(j)$ (courbe orange).

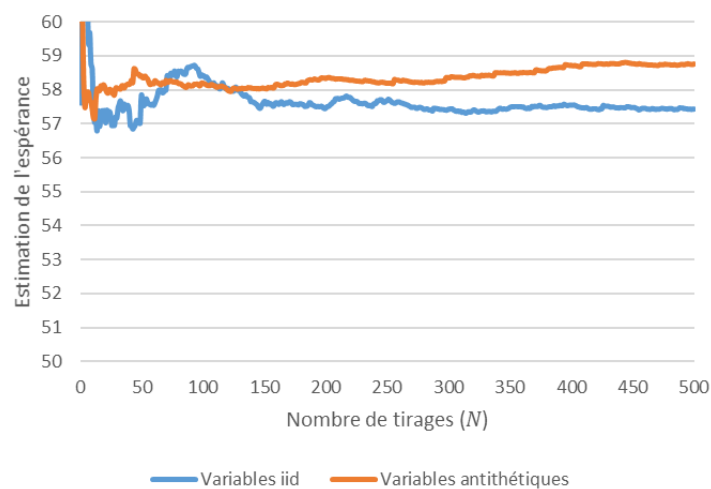


Figure 29 - Vitesse de convergence de l'estimateur des variables antithétiques pour $n = 10$

Le gain de vitesse de convergence se matérialise par une réduction de la variance. Les résultats obtenus des variances empiriques pour $N = 500$ et selon les valeurs de n sont reprises dans le Tableau 30 et la Figure 30. Pour un même nombre de scénarios simulés n , l'utilisation de variables antithétiques permet une division de la variance comprise entre 2 et 3.

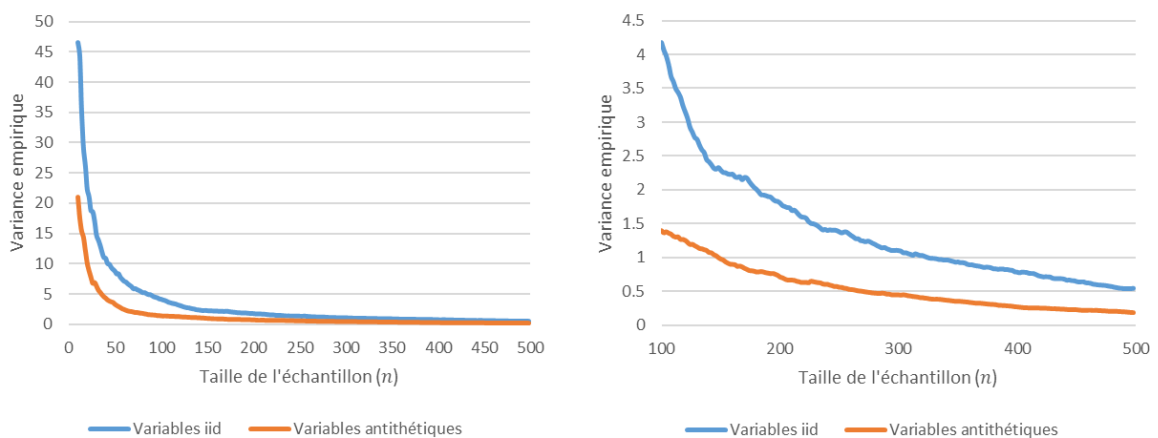


Figure 30 - Courbe de Variance empirique en fonction du nombre de scénarios avec méthode des variables antithétiques

Taille du tirage (n)	Variance estimée avec variables iid	Variance estimée pour variables antithétiques	Rapport
10	46,53	21,04	2,21
20	22,36	10,14	2,21
50	8,81	3,32	2,65
100	4,17	1,40	2,98
200	1,80	0,71	2,53
500	0,54	0,19	2,91

Tableau 30 – Gain de variance empirique par la méthode des variables antithétiques

3.2.2. Variable de contrôle

La méthode de la variable de contrôle est beaucoup moins employée que les variables antithétiques pour une problématique de réduction de variance. Pourtant, nous verrons que dans un cadre très précis tel que celui de l'allocation stratégique ou plus généralement de la construction d'une nappe de sensibilité, cette méthode génère de bien meilleurs résultats.

Soit X la situation économique utilisée en entrée et h la fonction correspondant au modèle utilisé pour une allocation donnée et ayant pour image la valeur actuelle probable des flux de trésorerie de manière à obtenir le *Best estimate* par $E[h(X)]$. L'estimateur de la moyenne empirique $\hat{\theta}_n$, en raison de sa faible vitesse de convergence, nécessite un nombre important de scénarios afin de réduire l'intervalle de confiance de l'estimation. L'utilisation de variables antithétiques permet d'accélérer cette convergence, c'est-à-dire réduire la variance de l'estimateur $\widehat{Var}(\hat{\theta}_n^{VA}) < \widehat{Var}(\hat{\theta}_n)$.

Le principe de cette méthode est d'utiliser l'information connue d'une variable aléatoire corrélée avec $h(X)$ et dont l'espérance est connue. Cette variable aléatoire est appelée variable de contrôle. La première étape consiste donc à la choisir. Celle-ci doit être construite à partir des mêmes situations économiques X et corrélée à $h(X)$. Un candidat naturel est $h'(X)$ avec h' la fonction correspondant au modèle utilisé pour une autre allocation que celle que nous recherchons. De cette manière, en posant :

$$Y = h(X) + k \cdot (h'(X) - E[h'(X)]) \quad (3.2.4)$$

on vérifie :

$$\begin{cases} E[Y] = E[h(X)] \\ Var(Y) = Var(\hat{\theta}_n) + k^2 \cdot Var(h'(X)) + 2 \cdot k \cdot Cov(h(X); h'(X)) \end{cases}$$

La variance sera minimale pour $k = \frac{-Cov(h(X); h'(X))}{Var(h'(X))}$ et de cette manière, $Var(Y) = Var(\hat{\theta}_n) - \frac{Cov(h(X); h'(X))^2}{Var(h'(X))}$ sera inférieur à $Var(\hat{\theta}_n)$ si $Cov(h(X); h'(X)) \geq 0$. L'estimation de l'espérance de Y permet ainsi d'obtenir celle de $h(X)$ mais avec une variance moindre.

Cependant, la construction de Y (3.2.4) nécessite de connaître l'espérance de $h'(X)$. Celle-ci peut être estimée à partir de la moyenne empirique et d'un grand nombre de scénarios. Il s'agit du « coût » de cette méthode. Ce coût est la raison pour laquelle cette méthode est inadaptée si l'objectif est de connaître l'espérance d'une seule allocation mais son intérêt augmente avec le nombre d'allocations pour lesquelles l'estimation du *Best estimate* est recherchée. Cette méthode prend tout son sens pour le calcul d'une nappe entière d'allocations ou de sensibilités.

Ainsi, en prenant $E[h'(X)] \approx \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} h'(X_i)$ on estime $E[Y]$ par la moyenne empirique de Y notée $\hat{\theta}_n^{VC}$:

$$\hat{\theta}_n^{VC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) + k \cdot \left(h'(X_i) - \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} h'(X_i) \right)$$

La valeur de k optimale afin de réduire au maximum la variance est $\frac{-Cov(h(X); h'(X))}{Var(h'(X))}$. Or, la bonne estimation de cette grandeur nécessite un nombre suffisant d'observations de $h(X_i)$ et $h'(X_i)$, potentiellement plus important que le nombre n d'observations de $h(X_i)$ disponible, et que l'on

cherche à limiter. Cependant, de par leur construction, $h(X)$ et $h'(X)$ sont très fortement corrélés et pour la suite des travaux, nous poserons $k = -1$. Cette forte corrélation est vérifiée dans l'exemple ci-après.

Afin de comparer la méthode de la variable de contrôle à celle des variables antithétiques, nous nous plaçons sur le même jeu de données (distribution décrite dans Tableau 29) correspondant aux valeurs actuelles probables des flux de trésorerie pour un modèle ALM donné (allocation de 8% d'actions et 8% d'immobilier). L'objectif est d'estimer leur espérance correspondant au *Best estimate* à l'aide d'un minimum de scénarios. La variable de contrôle utilisée dans l'estimateur ici correspond aux résultats obtenus sur l'allocation voisine de 9% d'actions et 9% d'immobilier. La grandeur $\frac{-Cov(h(X);h'(X))}{Var(h'(X))}$ calculée à partir de l'ensemble des données sur cet exemple est de $-0,95$, ce qui justifie l'utilisation de $k = -1$. La Figure 31 illustre ainsi que malgré le faible nombre de scénarios simulés ($n = 10$), moins de $N = 50$ tirages suffisent pour que $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{\theta}_{10}^{VC}$ converge graphiquement vers $E[h(X)] \approx \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} h(X_i) = 58,16$.

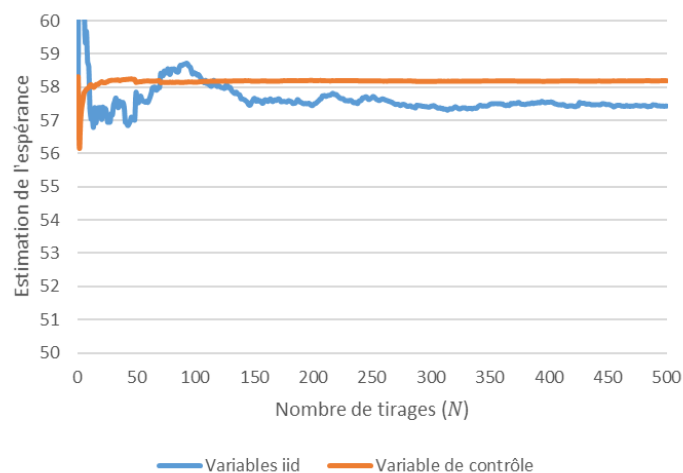


Figure 31 - Vitesse de convergence de l'estimateur de la variable de contrôle pour $n = 10$

Cependant, ce graphique ne permet pas à lui seul de justifier l'efficacité de la méthode. Plus précisément, le calcul de la variance empirique à partir de $N = 500$ tirages en fonction du nombre de scénarios simulés n (Figure 32 et Tableau 31) montre une réduction d'un facteur près de 150 de celle-ci. Ce gain de variance est très supérieur à celui obtenu par l'utilisation de variables antithétiques, mais possède également un coût fixe supérieur avec le calcul préalable de $E[h'(X)]$. Attention toutefois, la qualité de la réduction de variance est liée au fait que l'allocation testée (8% d'actions et 8% d'immobilier) est très proche de celle de la variable de contrôle (9% d'actions et 9% d'immobilier). Les résultats sur l'ensemble des allocations dans la section 3.4 relativisera l'efficacité globale de la méthode.

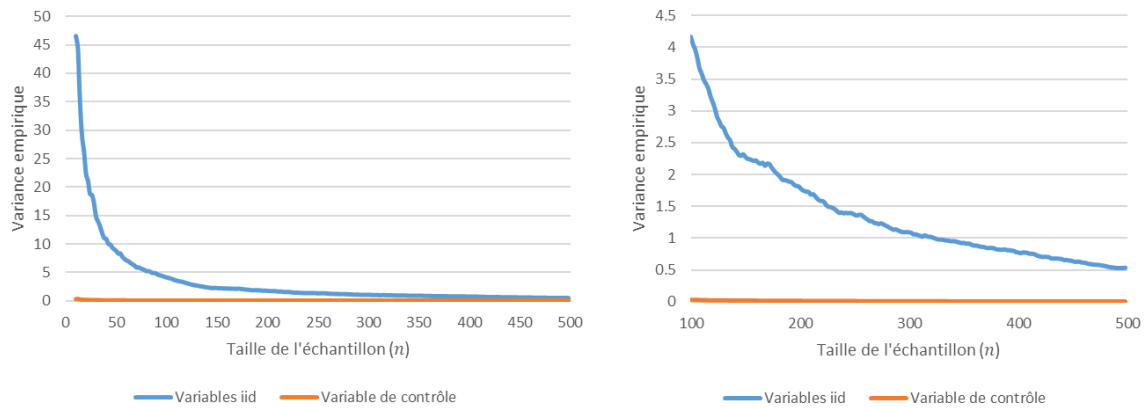


Figure 32 - Courbe de Variance empirique en fonction du nombre de scénarios avec méthode de la variable de contrôle

Taille du tirage (n)	Variance estimée avec variables iid	Variance estimée avec variable de contrôle	Rapport
10	46,53	0,32	146,67
20	22,36	0,15	148,00
50	8,81	0,06	149,79
100	4,17	0,03	143,49
200	1,80	0,01	133,71
500	0,54	0,00	155,00

Tableau 31 - Gain de variance empirique par la méthode de la variable de contrôle

3.3. Optimisation combinée

La partie 3.1 tentait de réduire le nombre de sensibilités, ou d’allocations dans le cas de notre étude, à l’aide de différentes méthodes de complétion de matrice. La partie 3.2 présentait différentes méthodes de réduction de variance utilisées afin de réduire, pour un calcul donné, le nombre de scénarios. La partie suivante tente de combiner ces deux axes d’optimisation afin de réduire le temps de calcul de la matrice de sensibilité totale.

Les méthodes de complétion de matrice ont pour inconvénient de ne disposer d’aucune information sur la grande majorité des allocations et celle-ci doit donc être entièrement déterminée à partir de l’information détenue par les allocations pour lesquelles les calculs ont été réalisés, le semis. C’est pourquoi, le semis doit être fiable et nécessite d’être calculé de manière la plus exacte possible, avec le plus grand nombre de scénarios possible. Aussi, selon la forme de la nappe, et les différents effets de seuil possibles, les techniques de complétions pourront générer des résultats plus ou moins fiables. Les méthodes de réduction de variance permettent de réduire le nombre de scénarios pour une allocation donnée. Mais pour construire la matrice de sensibilité entière, il est nécessaire de procéder aux calculs, certes moins lourds, sur chacune des allocations, de manière indépendante. Cette technique basée sur un calcul unique n’utilise donc pas l’information selon laquelle deux allocations voisines auront des résultats proches. C’est pour pallier aux limites de ces deux visions, que nous proposons de construire une technique permettant d’obtenir la matrice à l’aide d’un certain nombre de scénarios simulés sur l’ensemble des allocations puis en complétant les matrices scénario par scénario. Nous appellerons cette méthode « optimisation combinée ». Ces différentes visions sont schématisées dans la Figure 33.

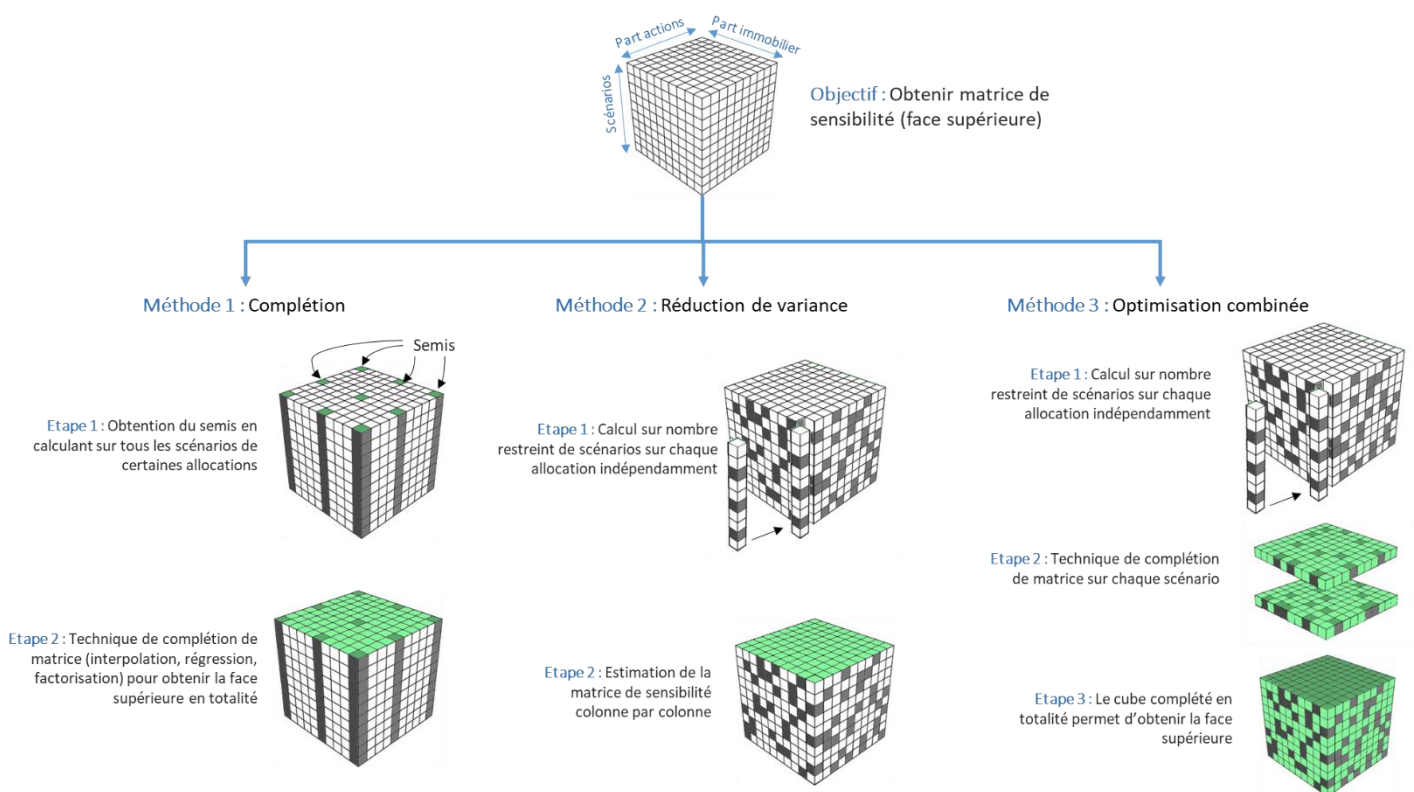


Figure 33 - Schéma des différentes méthodes d'obtention de la matrice de sensibilités

La démarche préliminaire à cette méthode consiste à générer aléatoirement un nombre n de tirages sur chacune des allocations. Soit M le nombre d'allocations testées, il y a ainsi $n \times M$ tirages réalisés.

Ensuite, pour chaque scénario, une technique de complétion de matrice est appliquée afin d'obtenir une estimation de l'ensemble des valeurs du scénario. En raison du caractère aléatoire du nombre de tirages du semis et de leur position, il n'est pas possible d'utiliser des techniques de complétion par interpolation. La technique de complétion utilisée est la régression linéaire à deux paramètres : les paramètres de sensibilité (la part d'actions et la part d'immobilier dans notre étude). Ainsi, les valeurs inconnues sont estimées pour chaque scénario à l'aide d'un plan linéaire. L'estimation de ce plan linéaire n'est possible que si au moins trois observations (semis du scénario) sont disponibles dans le scénario. Il est possible de calibrer une contrainte plus forte de nombre de points du semis nécessaires. Si cette contrainte n'est pas respectée pour un scénario donné, alors seuls les tirages réalisés sont conservés, s'il y en a, et aucune estimation des autres points n'est réalisée. Certaines autres estimations réalisées sont exclues dans le cas où la nappe estimée présenterait une forme aberrante. C'est le cas par exemple si le semis est composé de trois points alignés. Dans ce cas, une contrainte sur l'écart entre la valeur estimée minimale et la valeur estimée maximale permet de ne pas prendre en compte cette estimation.

Une fois les nappes par scénario complétées lorsque cela est possible, le *Best estimate* de chaque allocation est obtenu par la moyenne empirique de tous les scénarios connus et estimés. Cette méthode a été implémentée sur Python.

La Figure 34 montre que pour $n = 10$, la convergence de cette méthode semble lente, et génère un faible gain en terme de réduction de variance. Cependant, en augmentant n , la réduction de variance est très importante comme le montre le Tableau 32. La variance est divisée seulement par 2,5 pour $n = 10$ mais elle est très proche de celle obtenue par la variable de contrôle pour $n = 50$ et enfin elle est quasiment nulle pour $n > 100$.

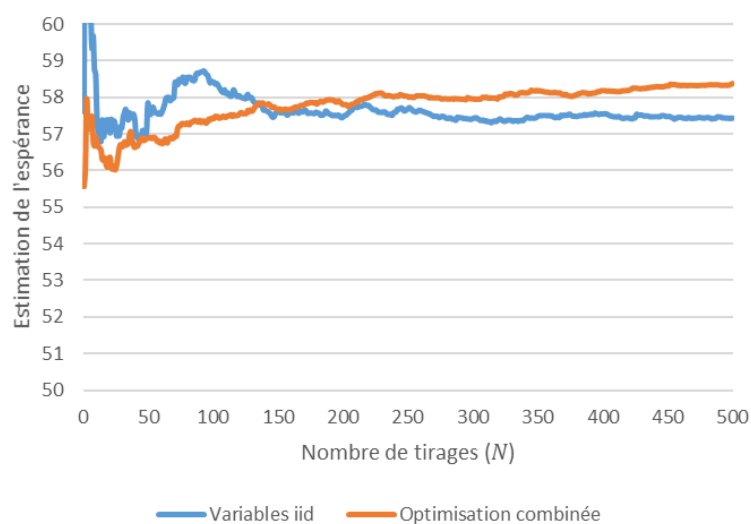


Figure 34 - Vitesse de convergence de l'estimateur de l'optimisation combinée pour $n = 10$

Taille du tirage (n)	Variance estimée avec variables iid	Variance estimée avec optimisation combinée	Rapport
10	46,53	18,81	2,47
20	22,36	2,23	10,02
50	8,81	0,09	95,14
100	4,17	0,00	1 307,94
200	1,80	0,00	170 012,94
500	0,54	0,00	

Tableau 32 - Gain de variance empirique par la méthode de l'optimisation combinée

La méthode de complétion choisie utilise deux facteurs : la part d'actions et la part d'immobilier, ce qui permet de tracer un plan sur chaque scénario. Il est également possible d'utiliser une méthode de complétion à 3 ou 5 facteurs, en ajoutant comme facteurs le produit des deux facteurs et leurs carrés. Les nappes ainsi créées pour chaque scénario comportent des formes plus arrondies, épousant un plus grand nombre de points. Ces deux méthodes annexes de complétion seront testées dans la section 3.4 suivante.

3.4. Synthèse des méthodes

Différentes solutions ont été proposées au cours de ce mémoire afin de rendre les études d'allocation stratégique et plus généralement de sensibilité possibles. Les axes d'optimisation concernent le nombre de sensibilités calculées par les méthodes de complétion de matrice (section 3.1), le nombre de scénarios simulés par les méthodes de réduction de la variance (section 3.2) et la combinaison des deux par l'optimisation combinée (section 3.3). Il convient maintenant de comparer l'efficacité de ces méthodes en les appliquant sur un même jeu de données correspondant à une matrice de *Best estimates* obtenus à partir de 1000 scénarios indépendants pour chaque allocation (Tableau 33). Afin de tester les méthodes faisant intervenir les variables antithétiques, les *Best estimate* sont obtenus à partir de 500 scénarios indépendants et 500 scénarios antithétiques, produisant une matrice légèrement différente.

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	56.88	57.14	57.42	57.71	58.04	58.42	58.82	59.25	59.69	60.16	60.66	61.17
	5%	56.95	57.20	57.46	57.73	58.05	58.41	58.80	59.20	59.64	60.09	60.57	61.06
	6%	57.00	57.25	57.50	57.76	58.07	58.42	58.78	59.18	59.60	60.04	60.50	60.99
	7%	57.06	57.30	57.55	57.81	58.11	58.45	58.79	59.18	59.59	60.01	60.46	60.95
	8%	57.13	57.36	57.61	57.86	58.16	58.48	58.82	59.19	59.59	60.01	60.46	60.93
	9%	57.20	57.43	57.67	57.92	58.21	58.54	58.87	59.22	59.61	60.03	60.47	60.92
	10%	57.27	57.51	57.75	57.99	58.28	58.59	58.91	59.27	59.66	60.06	60.48	60.92
	11%	57.34	57.58	57.82	58.06	58.35	58.65	58.98	59.34	59.70	60.10	60.50	60.94
	12%	57.43	57.66	57.90	58.13	58.41	58.72	59.05	59.39	59.75	60.13	60.54	60.96
	13%	57.51	57.74	57.97	58.19	58.49	58.80	59.12	59.45	59.80	60.18	60.57	60.98
	14%	57.60	57.82	58.04	58.27	58.58	58.88	59.19	59.51	59.85	60.22	60.60	61.00
	15%	57.69	57.90	58.12	58.36	58.66	58.95	59.24	59.56	59.90	60.26	60.63	61.02

Tableau 33 – Matrice des Best estimates à estimer

Cette matrice complétée permet de comparer l'efficacité des différentes méthodes selon plusieurs critères. $\forall i, j \in \llbracket 1; 12 \rrbracket$, notons $\hat{\theta}_{i,j}^{(n)}$ l'estimateur du *Best estimate* $E[h_{i,j}(X)]$ selon une méthode citée ci-dessus nécessitant n scénarios simulés au total sur l'ensemble des allocations. Pour les méthodes de réduction de variance et d'optimisation combinée, une seule estimation ne permet pas de juger la qualité de celles-ci, c'est pourquoi sont calculées N estimations, correspondant à N tirages distincts de scénarios. La $k^{\text{ème}}$ estimation est notée $\hat{\theta}_{i,j}^{(n)}(k)$. Les différents critères de comparaison à minimiser sont les suivants :

- Critère n°1 : Coût opérationnel de la méthode. Il s'agit du nombre de scénarios simulés.

$$Crit1 = n$$

Pour une allocation donnée, l'erreur quadratique correspond à l'espérance de l'écart quadratique entre l'estimateur et son objectif, le *Best estimate* :

$$E \left[\left(\hat{\theta}_{i,j}^{(n)} - E[h_{i,j}(X)] \right)^2 \right]$$

Elle peut être décomposée par le biais et la variance d'un estimateur et son optimisation correspond donc à la recherche du meilleur compromis. En effet, on a :

$$E \left[\left(\hat{\theta}_{i,j}^{(n)} - E[h_{i,j}(X)] \right)^2 \right] = Var \left(\hat{\theta}_{i,j}^{(n)} \right) + \left(E \left[\hat{\theta}_{i,j}^{(n)} \right] - E[h_{i,j}(X)] \right)^2$$

Cette décomposition amène la construction des deux critères suivants, qui additionnés, permettront de retrouver l'erreur quadratique.

- Critère n°2 : Biais de l'estimateur. Pour une allocation donnée, il est égal à $E[\hat{\theta}_{i,j}^{(n)}] - E[h_{i,j}(X)]$ et peut être estimé de manière empirique à partir de N tirages (hors méthodes de complétion) :

$$\hat{B}(\hat{\theta}_{i,j}^{(n)}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_{i,j}^{(n)}(k) - E[h_{i,j}(X)]$$

Le critère n°2 correspond alors à la moyenne sur toutes les allocations des biais au carré :

$$Crit2 = \frac{1}{12 \times 12} \sum_{i,j \in \llbracket 1;12 \rrbracket} \left(\hat{B}(\hat{\theta}_{i,j}^{(n)}) \right)^2$$

- Critère n°3 : Variance de l'estimateur. Elle est estimée de manière empirique pour chaque allocation, sur les mêmes N tirages (nulle pour les méthodes de complétion):

$$\widehat{Var}(\hat{\theta}_{i,j}^{(n)}) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \left(\hat{\theta}_{i,j}^{(n)}(l) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\theta}_{i,j}^{(n)}(k) \right)^2$$

Le critère n°3 est ensuite défini à partir de la moyenne des variances de toutes les allocations.

$$Crit3 = \frac{1}{12 \times 12} \sum_{i,j \in \llbracket 1;12 \rrbracket} \widehat{Var}(\hat{\theta}_{i,j}^{(n)})$$

Ainsi, $Crit2 + Crit3$ correspond à l'erreur quadratique que l'on cherchera à minimiser. Attention, le nombre N de tirages a un impact sur les estimations du biais et de la variance. L'estimation du biais sera d'autant plus erronée que la variance est importante. Plus N sera grand, plus les critères seront robustes.

Le Tableau 34 synthétise les résultats des différentes méthodes pour un nombre de scénario $n = 16000$, soit l'équivalent de 16 simulations de 1000 scénarios. Il s'agit du nombre nécessaire de simulations pour appliquer les méthodes de complétion. Pour les estimations du biais et de la variance, $N = 200$ tirages sont réalisés.

Pour le calcul d'un ratio de solvabilité, il sera nécessaire d'estimer un nombre de matrices égal au nombre de calculs de SCR plus un. De même, pour l'allocation stratégique qui nécessite plusieurs études, plusieurs indicateurs devront être estimés. C'est la raison pour laquelle l'utilisateur peut souhaiter réduire le nombre n de simulation pour estimer chaque matrice. Le Tableau 35 fournit les résultats des différentes méthodes avec un nombre de simulations fixé à $n = 5\,000$. Ce nombre de simulations ne permet pas d'utiliser les méthodes de complétion de matrice. $N = 200$ tirages sont toujours réalisés.

La qualité de l'estimateur est liée à sa variance. Sur nos données, celle-ci doit être inférieure à 0,0025 pour que la taille de l'intervalle de confiance à 95% soit inférieure à 0,2 soit l'équivalent de 20M€ pour les *Best estimates* évalués. Le Tableau 36 détermine pour chaque estimateur le nombre de simulations n nécessaire pour atteindre ce niveau de précision. La variance est calculée toujours à partir de $N = 200$ tirages.

Méthode	Répartition des $n = 16\ 000$ scénarios	Critère 2 : Biais	Critère 3 : Variance
Référence			
Moyenne par allocation ¹⁰	111 scénarios choisis aléatoirement sur chaque allocation	0,0310	4,775
Complétion¹¹			
Interpolation linéaire	1 000 scénarios sur chacune des allocations extrêmes et équi-réparties sur la matrice : $i, j \in \{1 ; 5 ; 9 ; 12\}$ (voir Tableau 13)	0,0013	0
Interpolation par pondération		0,0064	
Interpolation par pondération alternative		0,0075	
Interpolation polynomiale d'ordre 3		0,0001	
Interpolation polynomiale par morceaux		0,0001	
Régression GLM (Gaussienne, fdl inverse)		0,0010	
Factorisation via interpolation linéaire ¹²		0,0014	0,0003
Factorisation via régression polynomiale d'ordre 3		0,0004	0,0002
Réduction de variance			
Variabes antithétiques	55 scénarios choisis aléatoirement sur chaque allocation et leurs 55 scénarios antithétiques	0,0105	2,5140
Variable de contrôle	1000 scénarios sur allocation 9% actions et 9% immobilier (variable de contrôle) et 104 scénarios choisis aléatoirement sur les autres allocations	0,0018	0,3483
Variabes antithétiques + variable de contrôle	1000 scénarios sur allocation 9% actions et 9% immobilier (variable de contrôle), 52 scénarios choisis aléatoirement sur les autres allocations et leurs 52 scénarios antithétiques	0,0015	0,3383
Optimisation combinée			
Complétion par plan linéaire (2 facteurs)	111 scénarios choisis aléatoirement sur chaque allocation	0,0255	0,0050
Complétion par nappe à 3 facteurs		0,0185	0,0034
Complétion par nappe à 5 facteurs		0,0009	0,0009

Tableau 34 – Synthèse des résultats pour $n = 16\ 000$ scénarios simulés au total et $N = 200$ tirages pour évaluer le biais et la variance de l'estimateur

¹⁰ Pour $N = 10\ 000$ (possible à réaliser uniquement sur cette méthode), le biais au carré (critère 2) passe à 0,0004. Cela montre qu'il s'agit bien d'un estimateur sans biais mais que le niveau de sa variance nécessite un grand nombre de tirages pour l'estimer correctement.

¹¹ Les méthodes de complétion (à l'exception de la factorisation) ne présentent pas d'aléa donc un résultat certain. La variance des résultats est donc nulle.

¹² Bien que les $n = 16\ 000$ scénarios sont déterminés de manière certaine, il existe un aléa dans l'initialisation des matrices u et v avant utilisation de la méthode de descente de gradient permettant d'obtenir leur optimal. Pour un tirage donné, celui-ci conserve le meilleur résultat à partir de 100 initialisations différentes. Deux tirages de 100 initialisations différentes n'aboutiront pas aux mêmes matrices optimales, c'est pourquoi on peut évaluer en effectuant $N = 200$ tirages l'écart d'estimation moyen et la précision de l'estimation à partir de la variance empirique.

Méthode		Répartition des $n = 5\ 000$ scénarios	Critère 2 : Biais	Critère 3 : Variance
Référence				
Moyenne par allocation		34 scénarios choisis aléatoirement sur chaque allocation	0,0772	16,6829
Réduction de variance				
Variables antithétiques		17 scénarios choisis aléatoirement sur chaque allocation et leurs 17 scénarios antithétiques	0,0340	8,8169
Variable de contrôle		1000 scénarios sur allocation 9% actions et 9% immobilier (variable de contrôle) et 28 scénarios choisis aléatoirement sur les autres allocations	0,0077	1,3865
Variables antithétiques + variable de contrôle		1000 scénarios sur allocation 9% actions et 9% immobilier (variable de contrôle), 14 scénarios choisis aléatoirement sur les autres allocations et leurs 14 scénarios antithétiques	0,0061	1,3716
Optimisation combinée				
Complétion par plan linéaire (2 facteurs)	Si 3+ valeurs sur scénario	34 scénarios choisis aléatoirement sur chaque allocation	0,0355	0,1107
	Si 5+ valeurs sur scénario		0,0271	0,4678
Complétion par nappe à 3 facteurs			0,0385	0,4773
Complétion par nappe à 5 facteurs			0,0129	0,4695

Tableau 35 – Synthèse des résultats pour $n = 5\ 000$ scénarios simulés au total et $N = 200$ tirages pour évaluer le biais et la variance de l'estimateur

Méthode	Répartition des n scénarios	Critère 1 : nombre de simulations	Critère 2 : Biais
Référence			
Moyenne par allocation	996 scénarios choisis aléatoirement sur chaque allocation	143 424	0,0000
Complétion			
Interpolation linéaire	1 000 scénarios sur chacune des allocations extrêmes et équi-réparties sur la matrice : $i, j \in \{1 ; 5 ; 9 ; 12\}$ (voir Tableau 13)	16 000	0,0013
Interpolation par pondération			0,0064
Interpolation par pondération alternative			0,0075
Interpolation polynomiale d'ordre 3			0,0001
Interpolation polynomiale par morceaux			0,0001
Régression GLM (Gaussienne, fdl inverse)			0,0010
Factorisation via interpolation linéaire			0,0014
Factorisation via régression polynomiale d'ordre 3			0,0004
Réduction de variance			
Variables antithétiques	496 scénarios choisis aléatoirement sur chaque allocation et leurs 496 scénarios antithétiques	142 848	0,0000
Variable de contrôle	1000 scénarios sur allocation 9% actions et 9% immobilier (variable de contrôle) et 940 scénarios choisis aléatoirement sur les autres allocations	135 420	0,0000
Variables antithétiques + variable de contrôle	1000 scénarios sur allocation 9% actions et 9% immobilier (variable de contrôle), 470 scénarios choisis aléatoirement sur les autres allocations et leurs 470 scénarios antithétiques	135 420	0,0000
Optimisation combinée			
Complétion par plan linéaire (2 facteurs)	160 scénarios choisis aléatoirement sur chaque allocation	23 040	0,0254
Complétion par nappe à 3 facteurs	147 scénarios choisis aléatoirement sur chaque allocation	21 168	0,0181
Complétion par nappe à 5 facteurs	99 scénarios choisis aléatoirement sur chaque allocation	14 256	0,0010

Tableau 36 – Cout opérationnel minimum pour obtenir une variance inférieure à 0,0025

Le Tableau 34 montre une vision moyenne sur l'ensemble des allocations du biais et de la variance. Cependant, selon la méthode employée, ces critères peuvent présenter de fortes disparités entre les allocations.

Ainsi, la variance obtenue par l'utilisation de la variable de contrôle et de variables antithétiques augmente avec l'éloignement de l'allocation utilisée comme variable de contrôle. Cela s'explique par la diminution de la corrélation avec l'éloignement des hypothèses de modélisation que sont les allocations. Le Tableau 37 illustre cette disparité. La précision de cette méthode est très fortement liée à la taille de la matrice de sensibilité. Si la matrice de sensibilité souhaitée est de taille trop importante, il est possible de choisir plusieurs variables de contrôles de manière à ce que chaque allocation soit suffisamment proche, donc corrélée avec une variable de contrôle. Cette disparité explique la difficulté, en moyenne sur l'ensemble de la matrice, d'obtenir une variance faible et donc pourquoi il est nécessaire de simuler la quasi-totalité des scénarios afin d'obtenir une variance inférieure à 0,0025 en moyenne.

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	0.61	0.38	0.18	0.09	0.03	0.01	0.04	0.13	0.39	0.50	0.83	1.48
	5%	0.62	0.50	0.20	0.09	0.03	0.00	0.03	0.11	0.33	0.51	0.87	1.09
	6%	0.64	0.40	0.24	0.10	0.03	0.00	0.03	0.12	0.29	0.42	0.97	1.01
	7%	0.57	0.41	0.26	0.12	0.02	0.00	0.03	0.13	0.25	0.44	0.88	1.26
	8%	0.62	0.46	0.17	0.12	0.02	0.00	0.03	0.13	0.31	0.41	0.59	1.38
	9%	0.67	0.40	0.33	0.10	0.03	0.00	0.02	0.10	0.30	0.43	0.75	0.92
	10%	0.65	0.39	0.28	0.09	0.03	0.00	0.03	0.09	0.19	0.46	0.62	1.08
	11%	0.95	0.46	0.18	0.10	0.03	0.00	0.03	0.09	0.25	0.41	0.68	0.75
	12%	0.66	0.36	0.23	0.13	0.03	0.00	0.02	0.09	0.25	0.43	0.68	0.63
	13%	0.67	0.41	0.24	0.10	0.04	0.00	0.03	0.10	0.22	0.47	0.71	0.93
	14%	0.56	0.45	0.22	0.11	0.03	0.01	0.02	0.10	0.20	0.46	0.70	0.96
	15%	0.61	0.47	0.23	0.09	0.03	0.01	0.03	0.11	0.18	0.36	0.63	0.92

Tableau 37 - Variance empirique pour N=200 avec utilisation d'une variable de contrôle (9% / 9%) et variables antithétiques avec n=16 000 simulations

Aussi, l'utilisation de l'optimisation combinée fait apparaître un biais d'autant plus important que le nombre de facteurs utilisés pour la complétion des nappes par scénario est faible. L'utilisation d'un plan linéaire, c'est-à-dire des seules parts actions et immobiliers comme facteurs, ne permet pas de s'ajuster parfaitement aux formes de nappes. Comme l'illustre le Tableau 38, ce biais apparaît sur les extrémités de la nappe, là où la linéarité par rapport aux autres allocations est moins évidente. L'utilisation d'un plus grand nombre de facteurs (3 ou 5) permet de réduire ce biais sur les allocations extrêmes. La contrepartie est qu'elles nécessitent un plus grand nombre de scénarios afin que la complétion soit de bonne qualité. Le gain de biais et de variance avec le nombre de facteurs est vérifié pour $n = 16\ 000$ (Tableau 34) mais cela ne l'est plus pour $n = 5\ 000$ (Tableau 35).

		Part actions											
		4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
Part immobilier	4%	0.01	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.00	0.01	0.03	0.10	0.22	0.40
	5%	0.01	0.00	0.00	0.02	0.02	0.02	0.01	0.00	0.01	0.04	0.11	0.24
	6%	0.01	0.00	0.00	0.02	0.03	0.02	0.02	0.01	0.00	0.01	0.05	0.15
	7%	0.02	0.00	0.00	0.02	0.03	0.03	0.03	0.01	0.00	0.00	0.02	0.09
	8%	0.03	0.00	0.00	0.02	0.03	0.03	0.03	0.02	0.01	0.00	0.01	0.06
	9%	0.04	0.01	0.00	0.01	0.02	0.03	0.03	0.02	0.01	0.00	0.01	0.04
	10%	0.05	0.01	0.00	0.01	0.02	0.02	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00	0.02
	11%	0.06	0.02	0.00	0.00	0.01	0.02	0.02	0.02	0.01	0.00	0.00	0.01
	12%	0.09	0.04	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.01
	13%	0.11	0.05	0.01	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.01
	14%	0.15	0.07	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
	15%	0.19	0.09	0.03	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tableau 38 – Biais au carré pour N=200 avec utilisation de l'optimisation combinée par complétion par plan linéaire (2 facteurs) avec n=16 000 simulations

Les Tableau 34, Tableau 35 et Tableau 36 permettent de ressortir les avantages et inconvénients des différentes méthodes, captés sur une nappe de 144 résultats à estimer et résumés dans le Tableau 39. Les conclusions portées ici sont basées sur les résultats obtenus dans ce mémoire, sur un jeu de données particulier. Ainsi, selon le jeu de données, les conclusions peuvent s'avérer différentes.

De ce tableau, il n'est pas possible d'isoler une méthode qui générerait systématiquement de meilleurs résultats. Le choix de la méthode à employer dépendra de plusieurs critères propres à chaque étude. Parmi ceux-ci figurent la taille de la matrice de sensibilité, le nombre de scénarios n que l'utilisateur souhaite simuler, la précision du résultat souhaitée (peut être traduit en termes de biais et de variance) ou encore la forme de la nappe.

Les techniques de complétion, simples à mettre en place (hormis la factorisation) et faisant fi de toute problématique de variance, présentent beaucoup de qualités justifiant aisément leur utilisation. Cependant, elles ne pourront être utilisées que pour des nappes de sensibilité pour lesquelles il est possible de simuler l'ensemble des scénarios sur un nombre d'allocations suffisamment important pour réduire au maximum les biais. Sur une nappe de 144 points comme dans notre jeu de données, il est par exemple difficilement envisageable d'appliquer ces méthodes sur un semis composé de moins de 16 points. Cela représente un coût minimal opérationnel non négligeable, qui n'est pas forcément applicable à toutes les études. Aussi, ces méthodes s'adapteront plus ou moins bien selon la forme des nappes, donc les données à estimer. La forme de la nappe des ratios de solvabilité par exemple (section 3.1), moins lisse que celle des *Best estimates* (section 3.4) s'adaptait moins bien à ce type de méthode.

L'optimisation combinée est plus complexe à mettre en place. En effet, elle nécessite de pouvoir simuler des scénarios (même un petit nombre) sur l'ensemble des allocations de la nappe contrairement aux techniques de complétion. Selon le niveau d'automatisation des modèles et logiciels utilisés, cette tâche peut s'avérer opérationnellement complexe (par exemple si mise à jour manuelle du logiciel nécessaire pour chaque allocation). De plus, cette méthode nécessite un calibrage adapté de la technique de complétion employée. Une fois ces écueils passés, les résultats obtenus sont

très prometteurs. Ils permettent ainsi d'obtenir des résultats très précis avec un faible nombre de scénarios.

Les techniques de réduction de variance présentent le même inconvénient opérationnel que l'optimisation combinée, c'est-à-dire la capacité à produire des simulations sur l'ensemble des allocations. En termes de résultats obtenus, il convient de distinguer les deux techniques étudiées. Les variables antithétiques réduisent effectivement la variance des résultats mais ce gain est très insuffisant. Elle ne peut suffire pour répondre à notre problématique de complétion de nombreuses matrices de sensibilité. L'utilisation d'une variable de contrôle apporte quant à elle des résultats nuancés. En effet, les résultats obtenus sont très bons pour les allocations situées à proximité de l'allocation utilisée comme variable de contrôle. Ces résultats prometteurs sont par contre dilués par des résultats très médiocres sur les allocations plus éloignées. Ainsi, sur une nappe de plus petite taille, cette méthode peut s'avérer être la plus efficace. Pour une plus grande nappe, l'utilisation de plusieurs variables de contrôle, correspondant à des allocations réparties sur la nappe peut être également une piste à étudier.

Méthode	Complexité de mise œuvre	Nombre de simulations	Biais	Variance des résultats
Complétion par interpolation	Faible	Modéré <i>Nécessite tous les scénarios sur un nombre d'allocations permettant de quadriller la matrice.</i>	Modéré <i>Car absence totale d'information sur les allocations à compléter. Dépend donc de la forme de la nappe.</i>	Nulle <i>Résultat unique et certain.</i>
Complétion par régression	Faible <i>Mais nécessite calibrage du modèle.</i>	Modéré <i>Nécessite tous les scénarios sur un nombre d'allocations permettant de quadriller la matrice.</i>	Modéré <i>Car absence totale d'information sur les allocations à compléter. Dépend donc de la forme de la nappe mais supérieur à la complétion par interpolation.</i>	Nulle <i>Résultat unique et certain.</i>
Complétion par factorisation	Complexe <i>Avec calibrage des paramètres de descente de gradient.</i>	Modéré <i>Nécessite tous les scénarios sur un nombre d'allocations permettant de quadriller la matrice.</i>	Modéré <i>Car absence totale d'information sur les allocations à compléter. Dépend donc de la forme de la nappe.</i>	Faible <i>Liée à l'initialisation de l'algorithme de descente de gradient qui peut aboutir à des résultats légèrement différents.</i>
Variables antithétiques	Modérée <i>Mais nécessite de retravailler le GSE.</i>	Elevé <i>La réduction de la variance est limitée et le nombre de simulations pour atteindre un niveau de précision demeure très élevé.</i>	Modéré <i>Biais réduit mais toujours présent.</i>	Elevée <i>Le gain de variance n'est pas suffisant.</i>
Variable de contrôle	Modérée <i>Avec léger paramétrage (choix variable de contrôle et paramètre k).</i>	Faible à Elevé <i>Varie énormément selon la proximité à l'allocation utilisée comme variable de contrôle.</i>	Faible <i>Biais fortement réduit, même avec peu de scénarios.</i>	Faible à Elevé <i>Varie énormément selon la proximité à l'allocation utilisée comme variable de contrôle.</i>
Optimisation combinée	Modérée/Complexe <i>Nécessite choix et calibrage du modèle de complétion.</i>	Faible <i>Fournit les meilleurs résultats lorsque l'on dispose de peu de scénarios.</i>	Faible/Modéré <i>Biais possible sur allocations situées sur les extrémités de la nappe, selon méthode de complétion choisie.</i>	Faible <i>Gain très important de variance.</i>

Tableau 39 – Synthèse des avantages et inconvénients des méthode

Conclusion

Pour des raisons liées au contexte économique et au contexte réglementaire, l'allocation stratégique revêt une importance accrue ces dernières années pour les sociétés d'assurance. Elle doit pouvoir apporter une réponse adaptée et consolidée aux différents besoins de la société, tout en contenant les différents risques.

Pas moins de trois axes d'analyse de l'allocation stratégique permettent une bonne prise en compte de ces différentes exigences. Le premier axe, centré sur les risques liés aux actifs, a été construit avec deux objectifs précis. Le premier est la prise en compte des risques qui ne l'étaient pas par les autres axes d'analyse. C'est le cas de la provision pour dépréciation durable dont la granularité temporaire et celle des actifs ne permet pas un calcul de manière exacte dans un modèle stochastique. Une vision probabiliste est présentée ici en détail rendant possible, sous certaines hypothèses, sa modélisation. Cependant, d'une telle modélisation n'est conservée que la vision moyenne matérialisée par l'espérance, ce qui masque une grande partie du risque réel. Le second objectif poursuivi par ce premier axe d'analyse est de rendre possible les calculs sur l'ensemble des allocations que l'on souhaite tester. Pour cela, un générateur de scénarios économique simplifié est construit et les actifs sont modélisés de manière agrégée.

Le second axe d'analyse prend en considération les risques inhérents aux interactions entre l'actif et le passif, nombreux pour un contrat d'épargne en euros. Pour cela, un modèle ALM complet est utilisé, dont le générateur de scénarios économiques en probabilité historique projette des trajectoires futures à partir de celles passées. La mesure de risques agrégés de cet axe d'analyse considère le niveau de fonds propres, analogue à une probabilité de ruine.

Le troisième et dernier axe considère les risques sous une vision réglementaire. Il s'agit du ratio de solvabilité obtenu pour chaque allocation.

Ces trois axes d'analyse fournissent des indicateurs de différentes natures et aboutissant à des choix d'allocations différents. Leur consolidation est permise par l'intermédiaire d'une uniformisation matérialisée par des scores, par la suite additionnés. Cette étape de construction de scores est primordiale pour la cohérence globale de l'allocation stratégique dans son ensemble et chaque point de score attribué devra correspondre à un gain équivalent, qu'il s'agisse d'un gain de performance ou une réduction du risque. Pour ce faire, différentes méthodes arithmétiques d'attribution des scores sont envisageables. L'utilisateur devra choisir soigneusement les scores minimaux et maximaux ainsi que les valeurs correspondantes des indicateurs puis la technique d'interpolation entre ces extrêmes. Cela permet une souplesse quant à l'importance attribuée à chaque étude et permet également de minimiser une éventuelle redondance entre les études, comme cela peut être le cas pour certains risques évalués dans chacun des deux premiers axes d'analyse.

Enfin, le score final obtenu permet d'obtenir l'allocation stratégique optimale ou limite. Là encore, plusieurs méthodes différentes sont possibles mais au-delà du choix de la méthode, l'utilisateur devra s'attacher à conserver une méthodologie constante entre les différentes études et dans le temps par soucis de comparabilité. Il est ainsi possible de choisir un score final minimal au-dessus duquel l'allocation est conservée, ou bien un score individuel minimal sur chaque axe d'analyse indépendamment ou encore un nombre d'allocations fixe.

Toutes ces étapes de consolidation sont possibles dès lors que tous les indicateurs sont obtenus sur un ensemble d'allocations. Or, à l'inverse du premier axe qui a été construit dans cette optique, les

deux autres axes n'ont pas été développés de manière à rendre possible les calculs sur un grand nombre d'allocations. En considérant des évaluations de 2 000 scénarios (nombre souvent observé pour une bonne convergence du *Best estimate*), en raison des calculs des différents SCR, un ratio de solvabilité par exemple nécessite la simulation de 30 000 projections environ sur plusieurs dizaines d'années d'un modèle ALM complexe. Opérationnellement, le temps de calcul nécessaire rend difficile l'obtention de cet indicateur pour un grand nombre d'allocations. Cette problématique peut être ramenée à la construction de nappes de sensibilité. Plusieurs méthodes de différentes natures sont exposées dans ce mémoire afin de répondre à cette problématique opérationnelle, l'objectif étant de compléter une nappe entière à partir d'une vision partielle des résultats.

La première idée consiste à simuler les résultats pour un nombre restreint d'allocations judicieusement réparties sur la nappe et à estimer les autres résultats à l'aide de méthodes de complétion. Trois grandes catégories de complétions sont testées : l'interpolation, la régression et la factorisation. Dans le cas où il est possible opérationnellement de produire les résultats d'un nombre d'allocations suffisant et que la nappe finale ne présente pas une forme atypique, ces méthodes génèrent des résultats très satisfaisants. De plus, ils ont l'avantage de la simplicité de mise en œuvre. Cependant, le côté atypique de la nappe ne peut souvent pas être anticipé ou vérifié par la suite.

La seconde idée est empruntée aux techniques déjà employées dans la finance et consiste à réduire le nombre de scénarios indépendamment pour chaque allocation. Il s'agit de techniques de réduction de variance. Parmi celles-ci, l'utilisation de variables antithétiques est la plus couramment utilisée mais son efficacité sur nos données est bien insuffisante pour répondre seule à notre problématique. La seconde technique présentée et moins courante est l'utilisation d'une variable de contrôle correspondant aux résultats obtenus sur une allocation particulière. Elle permet quant à elle une réduction significative de la variance donc du nombre de scénarios à simuler dès lors que l'allocation est très corrélée à l'allocation de la variable de contrôle. Les résultats ne sont par contre pas satisfaisants pour les allocations moins corrélées, c'est-à-dire plus éloignées. Cette limite liée à la distance avec la variable de contrôle amène à réfléchir à une méthode employant plusieurs variables de contrôle, de manière à ce qu'aucune allocation ne se retrouve éloignée d'une variable de contrôle. Aussi, d'autres méthodes de réduction de variance peuvent être imaginées à l'aide de techniques de *clustering*.

Pour estimer l'indicateur d'une allocation donnée, les techniques de complétion utilisent la valeur de l'allocation en question mais pas les informations sur les scénarios qui permettent d'obtenir l'indicateur. A l'inverse, les techniques de réduction de variance optimisent l'information fournie par les scénarios afin de réduire leur nombre mais sans prendre en considération l'allocation en elle-même donc l'information que peuvent apporter les allocations voisines. C'est pourquoi, une nouvelle méthode d'optimisation combinée est présentée dans ce mémoire. Elle consiste à réduire le nombre de scénarios et pour cela, sur chaque scénario, à utiliser les informations connues des autres allocations. Elle combine ainsi réduction de variance et complétions multiples. Les résultats obtenus sont très prometteurs, notamment dans le cas où le nombre de scénarios simulés est faible, c'est-à-dire là où les méthodes de complétion ne peuvent être appliquées. Avec cette technique, de nombreuses pistes d'améliorations sont imaginables. L'optimisation combinée peut par exemple être développée à partir d'autres techniques de complétion. Il peut également être imaginé que les scénarios ne soient pas tirés de manière aléatoire mais astucieusement afin d'optimiser l'efficacité des méthodes de complétion par scénario.

Bibliographie

- F. Borel-Mathurin, J. V. (2019). *Market-consistent valuation : a step towards calculation stability*.
- F. Planchet, P.-E. T. (2009). *Simulation de trajectoires de processus continus*.
- FFA. (2020). *Assurances de personnes : données clés 2019*.
- J. Campbell, L. V. (2001). *Strategic asset allocation : portfolio choice for long-term investors*.
- J. Lafond. (2017). *Complétion de matrice : aspects statistiques et computationnels*.
- K. Armel, F. P. (2010). *Quelle structure de dépendance pour un générateur de scénarios économiques en assurance ?*
- M. Jeanblanc, T. S. (2005). *Éléments de calcul stochastique*.
- Markowitz, H. (1952). *Portfolio selection*.
- Planchet, F. (2017). *Modèles financiers en assurance et analyses dynamiques*.
- S. Paskov, J. T. (1995). *Faster valuation of financial derivatives*.
- Thérond, P.-E. (2005). *Techniques de simulation : discrétisation d'équations différentielles stochastiques*.
- Wallez-Maskay, D. (2000). *Pont brownien et actualisation liée à un temps d'arrêt*.
- Y. Koren, R. B. (2009). *Matrix factorization techniques for recommender systems*.

Annexe

Annexe I : Identification des paramètres d'un modèle de taux (Ornstein-Uhlenbeck)

Soit $r_t = \ln(R_t - d)$ le logarithme du taux d'investissement décalé de d , Ce processus est modélisé par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr_t = K(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (2,1,1)$$

Avec $(W_t)_{t \geq 0}$ un processus de Wiener standard

La solution de cette équation est la suivante :

$$r_t = r_0 e^{-Kt} + \theta(1 - e^{-Kt}) + \sigma \int_0^t e^{-K(t-s)} dW_s \quad (2,1,2)$$

Cette solution valable en temps continu peut être discrétisée, à pas annuel de la manière suivante :

$$r_{N+1} = r_N e^{-K} + \theta(1 - e^{-K}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2K}}{2K}} \varepsilon \quad (2,1,3)$$

Avec (ε_N) une suite i.i.d. de lois normales centrées réduites.

Il s'agit de l'expression d'un processus autorégressif d'ordre 1. Puis le taux d'investissement R_N est déduit de la manière suivante :

$$R_N = e^{r_N} + d$$

Pour le calibrage de ce processus, d correspond au niveau de taux minimal modélisé, Les grandeurs K , θ et σ n'étant pas observables immédiatement, il convient de trouver une expression en fonction des grandeurs économiques suivantes :

- Θ : Moyenne stationnaire long terme ($\mathbb{E}[R_t] \rightarrow \Theta$)
- E : Ecart-type stationnaire ($\mathbb{V}[R_t] \rightarrow E^2$)
- $T_{1/2}$: Temps de demi-vie, temps nécessaire pour que le processus R_t atteigne en moyenne la moitié de la distance entre R_0 et Θ , Il est le même pour le processus r_t , Par définition :

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{K}$$

D'après (2,1,2) :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[r_t | r_0] = r_0 e^{-Kt} + \theta(1 - e^{-Kt}) \\ \mathbb{V}[r_t | r_0] = \frac{\sigma^2}{2K} (1 - e^{-2Kt}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[r_t] \rightarrow \theta \\ \mathbb{V}[r_t] \rightarrow \frac{\sigma^2}{2K} \end{cases} \quad (2,1,4)$$

Et :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \mathbb{E}[R_t] = \mathbb{E}[e^{r_t} + d] \\ \mathbb{V}[R_t] = \mathbb{V}[e^{r_t} + d] \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[R_t] = \mathbb{E}[e^{r_t}] + d \\ \mathbb{V}[R_t] = \mathbb{V}[e^{r_t}] \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[R_t] = e^{\mathbb{E}[r_t] + \mathbb{V}[r_t]/2} + d \\ \mathbb{V}[R_t] = (e^{\mathbb{V}[r_t]} - 1), e^{2\mathbb{E}[r_t] + \mathbb{V}[r_t]} \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[r_t] = \ln(\mathbb{E}[R_t] - d) - 0,5, \ln(\mathbb{V}[R_t], e^{-2\ln(\mathbb{E}[R_t] - d)} + 1) \\ \mathbb{V}[r_t] = 2(\ln(\mathbb{E}[R_t] - d) - \mathbb{E}[r_t]) \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[r_t] \underset{\infty}{\rightarrow} \ln(\Theta - d) - 0,5, \ln(E^2, e^{-2\ln(\Theta - d)} + 1) \\ \mathbb{V}[r_t] \underset{\infty}{\rightarrow} 2(\ln(\Theta - d) - \theta) \end{cases} \tag{2,1,5}
\end{aligned}$$

Par identification entre (2,1,4) et (2,1,5), nous obtenons les paramètres K , θ et σ de calibrages du processus r_t à partir des paramètres Θ , E , $T_{1/2}$ et d de calibrage des taux d'investissement R_t :

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} \\
\theta &= \ln(\Theta - d) - 0,5, \ln(E^2, e^{-2\ln(\Theta - d)} + 1) \\
\sigma^2 &= 4 \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} (\ln(\Theta - d) - \theta)
\end{aligned}$$

Annexe II : Probabilité de dépréciation durable à partir d'un processus brownien géométrique si situation finale incertaine

Calcul de la probabilité que le titre soit en dépréciation durable pendant les six derniers mois de l'année, Il s'agit de la probabilité que le processus $VM(t)/PdR(0)$ soit continuellement en-dessous d'un seuil s (=80% ou 70%) entre $t = 0,5$ (correspondant au 30/06/N) et $t = 1$ (31/12/N) dans le cas d'une action modélisée à partir d'un mouvement brownien géométrique dont nous connaissons le prix de revient et la valeur de marché en situation initiale ($PdR(0)$ et $VM(0)$),

$$dVM(t) = \mu VM(t)dt + \sigma VM(t)dW_t$$

$$VM(t) = VM(0)e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}$$

- Distribution de probabilité de $VM(0,5)/PdR(0)$, connaissant $VM(0)/PdR(0)$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\frac{VM(0,5)}{PdR(0)} < a \mid VM(0)\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{VM(0)}{PdR(0)} e^{(\mu - \sigma^2/2)0,5 + \sigma W_{0,5}} < a\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\left(\mu - \sigma^2/2\right)0,5 + \sigma W_{0,5} < \ln\left(a \frac{PdR(0)}{VM(0)}\right)\right) \\ &= \mathbf{P}\left(W_{0,5} < \frac{1}{\sigma}\left(\ln\left(a \frac{PdR(0)}{VM(0)}\right) - \left(\mu - \sigma^2/2\right)0,5\right)\right) \\ &= \mathbf{P}\left(N(0; 1) < \frac{1}{\sqrt{0,5}\sigma}\left(\ln\left(a \frac{PdR(0)}{VM(0)}\right) - \left(\mu - \sigma^2/2\right)0,5\right)\right) \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0,5}\sigma}\left(\ln\left(a \frac{PdR(0)}{VM(0)}\right) - \left(\mu - \sigma^2/2\right)0,5\right)\right) \text{ avec } \Phi \text{ la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite} \end{aligned}$$

Et la probabilité pour que $\frac{VM(0,5)}{PdR(0)}$ soit proche d'une valeur a quelconque (ie $\in [a - \varepsilon ; a + \varepsilon]$), connaissant $\frac{VM(0)}{PdR(0)}$:

$$P_1(a, \varepsilon) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0,5}\sigma}\left(\ln\left((a + \varepsilon) \frac{VM(0)}{PdR(0)}\right) - \left(\mu - \sigma^2/2\right)0,5\right)\right) - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0,5}\sigma}\left(\ln\left((a - \varepsilon) \frac{VM(0)}{PdR(0)}\right) - \left(\mu - \sigma^2/2\right)0,5\right)\right)$$

Nous disposons donc de la distribution de probabilité de $\frac{VM(0,5)}{PdR(0)}$,

- Probabilité pour que, connaissant $\frac{VM(0,5)}{PdR(0)} = a < s$, $\frac{VM(t)}{VM(0)}$ soit sous un seuil s quel que soit $t \in [0,5 ; 1]$,

$$\begin{aligned} P_1'(a, s) &= \mathbf{P}\left(\frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, \forall t \in [0,5 ; 1] \mid \frac{VM(0,5)}{PdR(0)} = a\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{VM(t+0,5)}{PdR(0)} < s, \forall t \in [0 ; 0,5] \mid \frac{VM(0,5)}{PdR(0)} = a\right) \\ &= \mathbf{P}\left(a e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t} < s, \forall t \in [0 ; 0,5]\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{P}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t < \ln\left(\frac{s}{a}\right), \forall t \in [0; 0,5]\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\inf\{t > 0 \mid \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t = \ln\left(\frac{s}{a}\right)\} > 0,5\right)
\end{aligned}$$

Introduisons $T_b = \inf\{t > 0 \mid \alpha t + \beta W_t = b\}$ avec $b = \ln\left(\frac{s}{a}\right)$, $\alpha = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ et $\beta = \sigma$

$$\mathbf{P}'_1(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = 1 - \mathbf{P}(T_b < 0,5)$$

Or, T_b est le temps d'arrêt d'un brownien avec tendance (M. Jeanblanc, 2005) donc il suit une loi inverse gaussienne $IG\left(\frac{b}{\alpha}; \frac{b^2}{\beta^2}\right)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T_b < x) &= \Phi\left(\sqrt{\frac{b^2}{\beta^2}}\left(\frac{x}{\frac{b}{\alpha}} - \mathbf{1}\right)\right) + \exp\left(\frac{2\frac{b^2}{\beta^2}}{\frac{b}{\alpha}}\right)\Phi\left(-\sqrt{\frac{b^2}{\beta^2}}\left(\frac{x}{\frac{b}{\alpha}} + \mathbf{1}\right)\right) \\
&= \Phi\left(\sqrt{\frac{b^2}{x\beta^2}}\left(\frac{\alpha x}{b} - \mathbf{1}\right)\right) + \exp\left(2\frac{\alpha b}{\beta^2}\right)\Phi\left(-\sqrt{\frac{b^2}{x\beta^2}}\left(\frac{\alpha x}{b} + \mathbf{1}\right)\right) \\
&= \Phi\left(\frac{1}{\beta\sqrt{x}}(\alpha x - b)\right) + \exp\left(2\frac{\alpha b}{\beta^2}\right)\Phi\left(-\frac{1}{\beta\sqrt{x}}(\alpha x + b)\right)
\end{aligned}$$

$$\text{Et } \mathbf{P}'_1(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = 1 - \mathbf{P}(T_b < 0,5)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{0,5}}\left(\frac{\mu - \sigma^2/2}{2}0,5 - \ln\left(\frac{s}{a}\right)\right)\right) - \exp\left(2\frac{(\mu - \sigma^2/2)\ln\left(\frac{s}{a}\right)}{\sigma^2}\right)\Phi\left(-\frac{1}{\sigma\sqrt{0,5}}\left(\frac{\mu - \sigma^2/2}{2}0,5 + \ln\left(\frac{s}{a}\right)\right)\right)$$

Ainsi nous disposons de la distribution des valeurs de $\frac{VM(0,5)}{PdR(0)}$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{VM(0,5)}{PdR(0)} \in [a - \varepsilon; a + \varepsilon] \mid VM(0)\right) = \mathbf{P}'_1(\mathbf{a}, \varepsilon)$$

Et de la probabilité, connaissant $\frac{VM(0,5)}{PdR(0)}$ de rester sous un seuil s pendant 6 mois consécutifs :

$$\mathbf{P}\left(\frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, \forall t \in [0,5; 1] \mid \frac{VM(0,5)}{PdR(0)} = a\right) = \mathbf{P}'_1(\mathbf{a}, \mathbf{s})$$

- Probabilité que le processus $\frac{VM(t)}{VNC(0)}$ soit en continu en-dessous d'un seuil s entre $t = 0,5$ et $t = 1$ connaissant la situation en $t = 0$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, \forall t \in [0,5; 1] \mid \frac{VM(0)}{PdR(0)}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{P}'_1\left(\frac{(i+0,5), s}{n}, \frac{s}{n}\right) \times \mathbf{P}'_1\left(\frac{(i+0,5), s}{n}, s\right)$$

Annexe III : Probabilité de dépréciation durable à partir d'un processus brownien géométrique si situation finale connue

Calcul de la probabilité que le titre soit en dépréciation durable pendant les six derniers mois de l'année, Il s'agit de la probabilité que le processus $VM(t)/PdR(0)$ soit continuellement en-dessous d'un seuil s (=80% ou 70%) entre $t = 0,5$ (correspondant au 30/06/N) et $t = 1$ (31/12/N), en connaissant la valeur de $VM(0)$ ainsi que celle de $VM(1)$,

Plaçons-nous dans le cas d'une action modélisée à partir d'un mouvement brownien géométrique dont nous connaissons le prix de revient et la valeur de marché en situation initiale ($PdR(0)$ et $VM(0)$),

$$dVM(t) = \mu VM(t)dt + \sigma VM(t)dW_t$$

$$VM(t) = VM(0)e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}$$

- Distribution de probabilité de $VM(0,5)/PdR(0)$, connaissant $VM(0)/PdR(0)$ et $VM(1)/PdR(0)$:

$$P\left(\frac{VM(0,5)}{VM(0)} < a \mid \frac{VM(0)}{PdR(0)}, \frac{VM(1)}{PdR(0)} = A\right)$$

$$= P\left(\frac{VM(0)}{PdR(0)} e^{(\mu - \sigma^2/2)0,5 + \sigma W_{0,5}} < a \mid \frac{VM(0)}{PdR(0)} e^{(\mu - \sigma^2/2) + \sigma W_1} = A\right)$$

$$= P\left(\left(\mu - \sigma^2/2\right)0,5 + \sigma W_{0,5} < \ln\left(a \frac{PdR(0)}{VM(0)}\right) \mid \left(\mu - \sigma^2/2\right) + \sigma W_1 = \ln\left(A \frac{PdR(0)}{VM(0)}\right)\right)$$

$$= P\left(W_{0,5} < \frac{1}{\sigma}\left(\ln\left(a \frac{PdR(0)}{VM(0)}\right) - \left(\mu - \sigma^2/2\right)0,5\right) \mid W_1 = \frac{1}{\sigma}\left(\ln\left(A \frac{PdR(0)}{VM(0)}\right) - \left(\mu - \sigma^2/2\right)\right)\right)$$

Or, un pont brownien X_t défini sur $t \in [t_1; t_2]$ correspond à un processus brownien sous contrainte de connaissance des points X_{t_1} et X_{t_2} , Il suit une loi normale :

$$N\left(X_{t_1} + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}(X_{t_2} - X_{t_1}); \frac{(t_2 - t)(t - t_1)}{t_2 - t_1}\right)$$

Donc dans notre cas,

$$(W_{0,5} \mid W_0 = 0, W_1 = w_1) \sim N(0,5, w_1; (1 - 0,5) \times 0,5)$$

$$P\left(W_{0,5} < \frac{1}{\sigma}\left(\ln\left(a \frac{PdR(0)}{VM(0)}\right) - \left(\mu - \sigma^2/2\right)0,5\right) \mid W_1 = \frac{1}{\sigma}\left(\ln\left(A \frac{PdR(0)}{VM(0)}\right) - \left(\mu - \sigma^2/2\right)\right)\right)$$

$$= P\left(N(0; 1) < \frac{1}{\sqrt{0,25}\sigma}\left(\ln\left(a \frac{PdR(0)}{VM(0)}\right) - \ln\left(A \frac{PdR(0)}{VM(0)}\right)0,5\right)\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0,25}\sigma}\left(\ln\left(a \frac{PdR(0)}{VM(0)}\right) - \ln\left(A \frac{PdR(0)}{VM(0)}\right)0,5\right)\right) \text{ avec } \Phi \text{ la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite,}$$

Et la probabilité pour que $\frac{VM(0,5)}{PdR(0)}$ soit proche de a (ie $\in [a - \varepsilon; a + \varepsilon]$), connaissant $\frac{VM(0)}{PdR(0)}$ et $\frac{VM(1)}{PdR(0)}$:

$$P_2(a, \varepsilon) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0,25}\sigma}\left(\ln\left((a + \varepsilon)\frac{PdR(0)}{VM(0)}\right) - \ln\left(A\frac{PdR(0)}{VM(0)}\right), 0,5\right)\right) - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0,25}\sigma}\left(\ln\left((a - \varepsilon)\frac{PdR(0)}{VM(0)}\right) - \ln\left(A\frac{PdR(0)}{VM(0)}\right), 0,5\right)\right)$$

Nous disposons donc de la distribution de probabilité de $\frac{VM(0,5)}{PdR(0)}$,

- Calcul de la probabilité pour que, connaissant $\frac{VM(0,5)}{PdR(0)} = a < s$ et $\frac{VM(1)}{PdR(0)} = A < s$, $\frac{VM(t)}{PdR(0)}$ soit sous un seuil s quel que soit $t \in [0,5 ; 1]$,

$$\begin{aligned} P'_2(a, s) &= P\left(\frac{VM(t)}{VNC(0)} < s, \forall t \in [0,5 ; 1] \mid \frac{VM(0,5)}{VNC(0)} = a, \frac{VM(1)}{VNC(0)} = A\right) \\ &= 1 - P\left(\max_{0,5 \leq t \leq 1} \frac{VM(t)}{VNC(0)} \geq s \mid \frac{VM(0,5)}{VNC(0)} = a, \frac{VM(1)}{VNC(0)} = A\right) \\ &= 1 - \exp\left(\frac{-2 \ln\left(\frac{s}{A}\right) \ln\left(\frac{s}{a}\right)}{0,5\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

- Calcul de la probabilité que le processus $\frac{VM(t)}{VNC(0)}$ soit en continu en-dessous d'un seuil s entre $t = 0,5$ et $t = 1$ connaissant la situation en $t = 0$ et en $t = 1$:

$$P\left(\frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, \forall t \in [0,5 ; 1] \mid \frac{VM(0)}{PdR(0)}; \frac{VM(1)}{PdR(0)}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} P_2\left(\frac{(i + 0,5), s}{n}, \frac{s}{n}\right) \times P'_2\left(\frac{(i + 0,5), s}{n}, s\right)$$

Annexe IV : Probabilité de dépréciation durable à partir d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck si situation finale connue

Soient :

$$VM(t) = VM(t-1) \times (1 - Sensi \times (Tx_t - Tx_{t-1}))$$

avec $Tx_t = e^{rt} - 2\%$

$$dr_t = K(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

$$r_t = r_0 e^{-Kt} + \theta(1 - e^{-Kt}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2Kt}}{2K}} W_t$$

- Calcul de la distribution de probabilité de $VM(0,5)/PdR(0)$, connaissant $VM(0)/PdR(0)$ et $VM(1)/PdR(0)$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\frac{VM(0,5)}{VNC(0)} < a \mid \frac{VM(0)}{VNC(0)}, \frac{VM(1)}{VNC(0)} = A \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\frac{VM(0)}{VNC(0)} \times (1 - Sensi \times (Tx_{0,5} - Tx_0)) < a \mid \frac{VM(0)}{VNC(0)} \times (1 - Sensi \times (Tx_1 - Tx_0)) = A \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\frac{VM(0)}{VNC(0)} \times (1 - Sensi \times (e^{r_{0,5}} - e^{r_0})) < a \mid \frac{VM(0)}{VNC(0)} \times (1 - Sensi \times (e^{r_1} - e^{r_0})) = A \right) \\ &= \mathbf{P} \left(r_{0,5} > \ln \left(\frac{\left(1 - a \frac{VNC(0)}{VM(0)}\right)}{Sensi} + e^{r_0} \right) \mid r_1 = \ln \left(\frac{\left(1 - A \frac{VNC(0)}{VM(0)}\right)}{Sensi} + e^{r_0} \right) \right) \\ &= \mathbf{P} \left(r_0 e^{-0,5K} + \theta(1 - e^{-0,5K}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-K}}{2K}} W_{0,5} > \ln \left(\frac{\left(1 - a \frac{VNC(0)}{VM(0)}\right)}{Sensi} + e^{r_0} \right) \mid r_1 = \ln \left(\frac{\left(1 - A \frac{VNC(0)}{VM(0)}\right)}{Sensi} + e^{r_0} \right) \right) \\ &= \mathbf{P} \left(W_{0,5} > \frac{\ln \left(\frac{\left(1 - a \frac{VNC(0)}{VM(0)}\right)}{Sensi} + e^{r_0} \right) - r_0 e^{-0,5K} - \theta(1 - e^{-0,5K})}{\sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-K}}{2K}}} \mid W_1 = \frac{\ln \left(\frac{\left(1 - A \frac{VNC(0)}{VM(0)}\right)}{Sensi} + e^{r_0} \right) - r_0 e^{-K} - \theta(1 - e^{-K})}{\sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2K}}{2K}}} \right) \end{aligned}$$

Or, un pont brownien X_t défini sur $t \in [t_1; t_2]$ correspond à un processus brownien sous contrainte de connaissance des points X_{t_1} et X_{t_2} , Il suit une loi normale :

$$N \left(X_{t_1} + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} (X_{t_2} - X_{t_1}); \frac{(t_2 - t)(t - t_1)}{t_2 - t_1} \right)$$

Donc dans notre cas,

$$(W_{0,5} | W_0 = 0, W_1 = w_1) \sim N(0,5, w_1; (1 - 0,5) \times 0,5)$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left(W_{0,5} > \frac{\ln\left(\frac{(1-a)\frac{VNC(0)}{VM(0)} + e^{r_0}}{Sensit}\right) - r_0 e^{-0,5K} - \theta(1-e^{-0,5K})}{\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-K}}{2K}}} \mid W_1 = \frac{\ln\left(\frac{(1-A)\frac{VNC(0)}{VM(0)} + e^{r_0}}{Sensit}\right) - r_0 e^{-K} - \theta(1-e^{-K})}{\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2K}}{2K}}} \right) \\
&= \mathbf{P} \left(N \left(0,5 \times \frac{\ln\left(\frac{(1-A)\frac{VNC(0)}{VM(0)} + e^{r_0}}{Sensit}\right) - r_0 e^{-K} - \theta(1-e^{-K})}{\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2K}}{2K}}}; 0,25 \right) > \frac{\ln\left(\frac{(1-a)\frac{VNC(0)}{VM(0)} + e^{r_0}}{Sensit}\right) - r_0 e^{-0,5K} - \theta(1-e^{-0,5K})}{\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-K}}{2K}}} \right) \\
&= \Phi \left(-\frac{1}{\sqrt{0,25}} \left(\frac{\ln\left(\frac{(1-a)\frac{VNC(0)}{VM(0)} + e^{r_0}}{Sensit}\right) - r_0 e^{-0,5K} - \theta(1-e^{-0,5K})}{\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-K}}{2K}}} - 0,5 \times \frac{\ln\left(\frac{(1-A)\frac{VNC(0)}{VM(0)} + e^{r_0}}{Sensit}\right) - r_0 e^{-K} - \theta(1-e^{-K})}{\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2K}}{2K}}} \right) \right)
\end{aligned}$$

avec Φ la fonction de répartition d'une $N(0;1)$

Et la probabilité pour que $\frac{VM(0,5)}{VNC(0)}$ soit proche de a (ie $\in [a - \varepsilon; a + \varepsilon]$), connaissant $\frac{VM(0)}{VNC(0)}$ et $\frac{VM(1)}{VNC(0)}$:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}_3(a, \varepsilon) = \Phi \left(-\frac{1}{\sqrt{0,25}} \left(\frac{\ln\left(\frac{(1-(a+\varepsilon))\frac{VNC(0)}{VM(0)} + e^{r_0}}{Sensit}\right) - r_0 e^{-0,5K} - \theta(1-e^{-0,5K})}{\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-K}}{2K}}} - 0,5 \times \frac{\ln\left(\frac{(1-A)\frac{VNC(0)}{VM(0)} + e^{r_0}}{Sensit}\right) - r_0 e^{-K} - \theta(1-e^{-K})}{\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2K}}{2K}}} \right) \right) - \\
& \Phi \left(-\frac{1}{\sqrt{0,25}} \left(\frac{\ln\left(\frac{(1-(a-\varepsilon))\frac{VNC(0)}{VM(0)} + e^{r_0}}{Sensit}\right) - r_0 e^{-0,5K} - \theta(1-e^{-0,5K})}{\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-K}}{2K}}} - 0,5 \times \frac{\ln\left(\frac{(1-A)\frac{VNC(0)}{VM(0)} + e^{r_0}}{Sensit}\right) - r_0 e^{-K} - \theta(1-e^{-K})}{\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2K}}{2K}}} \right) \right)
\end{aligned}$$

Annexe V : Espérance de la valeur de marché en fin d'année sachant une dépréciation durable

Soit $VM(1) = VM(0,5)e^{(\mu - \sigma^2/2)0,5 + \sigma W_{0,5}}$

Ce qui implique que $\frac{VM(1)}{VM(0,5)}$ suit une loi log-Normale :

$$\ln\left(\frac{VM(1)}{VM(0,5)}\right) \sim N\left(\left(\mu - \sigma^2/2\right)0,5; 0,5\sigma^2\right)$$

Or, si $X \sim \text{logN}(\alpha; \beta^2)$:

$$\begin{aligned} E[X|X < s] &= \frac{1}{F_X(s)} \int_0^s x f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{F_X(s)} \int_0^s \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\alpha)^2}{2\beta^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{F_X(s)} \int_{-\infty}^{\frac{\ln(s)-\alpha}{\beta}} \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{\beta t + \alpha} \beta dt \\ &= \frac{1}{F_X(s)} e^{\alpha} \int_{-\infty}^{\frac{\ln(s)-\alpha}{\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\beta)^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{F_X(s)} e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln(s)-\alpha}{\beta} - \beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{1}{F_X(s)} e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} \Phi\left(\frac{\ln(s)-\alpha}{\beta} - \beta\right) \end{aligned}$$

Avec F_X la fonction de répartition de la loi log-normale X et Φ celle d'une loi normale centrée réduite,

On déduit de la loi de $\frac{VM(1)}{VM(0,5)}$:

$$E\left[\frac{VM(1)}{VM(0,5)} \mid \frac{VM(1)}{VM(0,5)} < x\right] = \frac{1}{F_{LN}(x)} e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} \Phi\left(\frac{\ln(x)-\alpha}{\beta} - \beta\right)$$

avec $\alpha = (\mu - \sigma^2/2)0,5$ et $\beta^2 = 0,5\sigma^2$

$$\begin{aligned} E\left[\frac{VM(1)}{VM(0,5)} \mid \frac{VM(1)}{VM(0,5)} < x\right] &= \frac{1}{F_{LN}(x)} e^{\mu} \Phi\left(\frac{\ln(x) - (\mu - \sigma^2/2)0,5}{\sqrt{0,5}\sigma} - \sqrt{0,5}\sigma\right) \\ &= \frac{1}{F_{LN}(x)} e^{\mu} \Phi\left(\frac{\ln(x) - (\mu + \sigma^2/2)0,5}{\sqrt{0,5}\sigma}\right) \end{aligned}$$

Avec F_{LN} la fonction de répartition de la loi log-normale $\frac{VM(1)}{VM(0,5)}$ de paramètres $\alpha = (\mu - \sigma^2/2)0,5$ et $\beta^2 = 0,5\sigma^2$,

$$\text{Or, } \frac{VM(1)}{PdR(0)} < s \Leftrightarrow \frac{VM(1)}{VM(0,5)} < \frac{s, PdR(0)}{VM(0,5)}$$

Donc en posant $x = \frac{s, PdR(0)}{VM(0,5)}$, on obtient :

$$E \left[\frac{VM(1)}{VM(0,5)} \mid \frac{VM(1)}{VM(0,5)} < \frac{s, PdR(0)}{VM(0,5)} \right] = \frac{1}{F_{LN} \left(\frac{s, PdR(0)}{VM(0,5)} \right)} e^{\mu} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{s, PdR(0)}{VM(0,5)} \right) - (\mu + \sigma^2/2) 0,5}{\sqrt{0,5} \sigma} \right)$$

Et ainsi, d'après l'approximation, nous avons :

$$E \left[VM(1) \mid \frac{VM(t)}{PdR(0)} < s, t \in [0,5; 1] \right] \approx \frac{VM(0,5)}{F_{LN} \left(\frac{s, PdR(0)}{VM(0,5)} \right)} e^{\mu} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{s, PdR(0)}{VM(0,5)} \right) - (\mu + \sigma^2/2) 0,5}{\sqrt{0,5} \sigma} \right)$$

Annexe VI : Résultats du GLM

Sortie du modèle GLM de famille gaussienne, de fonction de lien inverse et avec l'ensemble des variables explicatives :

```

Generalized Linear Model Regression Results
=====
Dep. Variable:                y      No. Observations:            16
Model:                        GLM    Df Residuals:                 10
Model Family:                  Gaussian Df Model:                      5
Link Function:                  inverse_power Scale:                        0.00019428
Method:                          IRLS  Log-Likelihood:               48.667
Date:                            Fri, 25 Dec 2020 Deviance:                      0.0019428
Time:                            23:20:53  Pearson chi2:                  0.00194
No. Iterations:                  6
Covariance Type:                nonrobust
=====
              coef      std err          z      P>|z|      [0.025      0.975]
-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----
x1              0.0031      0.001        2.119      0.034      0.000      0.006
x2             -0.0026      0.001       -1.953      0.051     -0.005     9.38e-06
const           0.3781      0.008       47.737      0.000      0.363     0.394
x3             -0.0006     6.23e-05     -9.783      0.000     -0.001     -0.000
x4              0.0014     7.84e-05     17.309      0.000      0.001      0.002
x5              0.0007     6.99e-05     9.525      0.000      0.001      0.001
=====
Somme des écarts au carré : 0.001942824183961332
Ecart max : 0.019248420418391587
Matrice des écarts : [ 0.00724031  0.00707077 -0.00386593 -0.01163383 -0.01867873 -0.01305989
 0.00778797 0.01582344 0.00596741 -0.00190918 0.01176599 0.00646793
 0.01501877 -0.00252064 -0.00613832 -0.01924842]

```

La significativité du coefficient relatif à la variable x2 (part d'immobilier) est faible (p-valeur très légèrement supérieure à 0,05), Pour conclure à l'intérêt de sa prise en considération, le même modèle est utilisé sans cette variable :

```

Generalized Linear Model Regression Results
=====
Dep. Variable:                y      No. Observations:            16
Model:                        GLM    Df Residuals:                 11
Model Family:                  Gaussian Df Model:                      4
Link Function:                  inverse_power Scale:                        0.00024405
Method:                          IRLS  Log-Likelihood:               46.342
Date:                            Fri, 25 Dec 2020 Deviance:                      0.0026845
Time:                            23:37:14  Pearson chi2:                  0.00268
No. Iterations:                  6
Covariance Type:                nonrobust
=====
              coef      std err          z      P>|z|      [0.025      0.975]
-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----
x1              0.0033      0.002        2.040      0.041      0.000      0.006
const           0.3669      0.006       60.091      0.000      0.355     0.379
x2             -0.0006     6.71e-05     -9.552      0.000     -0.001     -0.001
x3              0.0014     8.78e-05     15.483      0.000      0.001      0.002
x4              0.0005     2.89e-05     18.671      0.000      0.000      0.001
=====
Somme des écarts au carré : 0.002684532785974254
Ecart max : 0.02256423912750294
Matrice des écarts : [ 0.02069591 -0.00339215 -0.01236287 -0.0072278 -0.01143404 -0.02140379
 0.0026599 0.02256424 0.00867105 -0.0081004 0.00907342 0.01340139
 0.01569676 -0.00739686 -0.00774556 -0.01306601]

```

La déviance (somme des écarts au carré) se dégrade significativement ce qui justifie le choix de conserver l'ensemble des variables,