Mémoire d'actuariat

Une modélisation de la cadence des paiements en Réassurance

Par

Elie PERRET-SENECAILLE

TUTEUR : ALEXANDRE MASQUELEIN

Département Analytics

QBE RE

JUIN 2021

Résumé

L’objectif de ce mémoire est de construire un nouveau modèle de cadence des paiements dans le cadre de sinistres « long-tails » sur des traités Excédent de Sinistre. Le travail présenté a été réalisé sur un portefeuille d’assurance responsabilité civile sur de l’automobile mais le modèle développé ne semble pas propre à un type de contrat en particulier. Le modèle actuellement utilisé pour la modélisation de la cadence des paiements est basé sur un comportement moyen qui permet peut de distinction entre les sinistres, et qui commet une erreur importante par sa manière de considérer la clôture du sinistre. L’enjeu de ce mémoire est de créer un modèle ayant un pouvoir prédictif plus grand que le modèle actuel, tout en utilisant peu de paramètres et en étant facilement applicable à un autre portefeuille. Cela est rendu possible grâce à la création dans un premier temps d’un modèle de clôture, puis dans un second temps, d’un modèle de cadence des paiements sachant l’année de clôture. Ce nouveau modèle semble améliorer la précision du modèle, tout en augmentant sa robustesse. Cette approche a permis, parce que le modèle n’est pas construit sur le montant de l’Ultime, de travailler sur le paiement des réserves et donc sur l’indexation des sinistres.

Mots-clés : Réassurance, Tarification Excédent de Sinistre, Cadence de paiements, Indexation des sinistres

Abstract

The aim of this master's thesis is to build a new model of Payments Pattern in the context of long-tail claims on Excess of Loss treaties per claim. The work presented was done on an automobile liability insurance portfolio, but the model developed does not appear to be specific to any type of contract, as long as it concerns long-tail claims. The model used by QBE RE to model the Payments Pattern is based on average behaviour that does not allow for distinction between claims, and that makes a significant error in the way it considers claim closure. The purpose of this thesis is to create a model with greater predictive power than the current model, while using few parameters and being easily applicable to another portfolio. This is achieved by first creating a closing model, and then creating a model for Payments Pattern given the closing year. This new model seems to improve the accuracy of the model, while increasing its robustness. Because the model is not built on the Ultime, this approach allowed to work on the payments of reserve and thus on the indexation of claims.

Keywords: Reinsurance, Excess of Loss Tarification per claim, Payments Pattern, Claims indexation

Remerciements

Je tiens dans un premier temps à remercier Alexandre Masquelein mon tuteur au sein de QBE RE, pour le temps qu'il a consacré à mon mémoire et plus globalement à mon alternance. Sa patience, ses conseils et sa pédagogie m'ont permis de réaliser ce projet dans les meilleures conditions possibles. J'ai une pensée également pour mes autres collègues, qui malgré cette année particulière, ont été présents lorsque je les sollicitais et m'ont apporté un regard critique sur mon travail. A ce titre, il est important pour moi de remercier Stijn Desmedt, qui a suivi mon travail pendant une partie de mon alternance.

Je remercie mon tuteur de l'ISFA, Stéphane Loisel, pour l'encadrement de ce mémoire et son suivi tout au long de l'année. Par la même occasion, je remercie tous ceux qui, au sein de l'ISFA, ont participé à ces trois années de formation.

Pour finir, je souhaite remercier ma famille, qui m'a toujours encouragé et poussé dans mes projets et ma scolarité. Je remercie notamment ma maman pour la lecture de ce mémoire, et Manon pour le soutien qu'elle m'a apporté durant l'année. Enfin, je remercie mes camarades et amis de l'ISFA, Marie Bastien Simon et Jeffrey, pour leur amitié. Je suis fier du groupe que nous avons formé pendant ces 3 années, groupe qui m'a permis de m'enrichir intellectuellement et humainement, et qui a rendu ces années plus belles.

Table des matières

INTRODUCTION

Pour un réassureur couvrant des risques « Queue Longue », c'est-à-dire des contrats pour lesquels il y a un grand délai entre la date de l'accident causant le sinistre et les dates de paiements par la compagnie d'assurance, la modélisation de la cadence des paiements est très importante. La **cadence des paiements**, désigne ici à quel rythme la compagnie d'assurance va payer le sinistre. Ce délai de paiement, qui peut être de plusieurs dizaines d'années, impacte énormément le prix du sinistre à cause de l'inflation. En effet, un réassureur estimant mal les futurs paiements de la cédante commet une erreur sur son prix et met en danger sa compétitivité. Sous-estimer le prix impacte négativement les résultats alors que le surestimer rend le réassureur plus cher que la concurrence.

Diminuer l'erreur commise sur la modélisation de la cadence des paiements et, de fait, sur l'estimation du prix est un enjeu majeur pour ce type de contrat. L'ambition de ce mémoire est alors de proposer une nouvelle méthode de modélisation de la cadence des paiements. A noter que le travail a été effectué ici sur un portefeuille d'assurance responsabilité civile sur de l'automobile mais rien n'indique que le modèle ne fonctionne que sur ce type de contrat. L'un des objectifs principaux de ce sujet est de modéliser le plus fidèlement possible le comportement de la cadence des paiements, tout en ayant la possibilité de suivre le déroulement de la modélisation, (éviter au maximum un phénomène « Boite Noire », dangereux en réassurance avec le peu de données à disposition) et en limitant le nombre de paramètres du modèle.

D'abord, il est introduit les différents éléments du sujet, qui sont souvent propres au domaine de la réassurance, les définitions et les concepts qu'il est nécessaire de connaitre afin de bien comprendre le travail qui suit. Dans cette même partie, les enjeux d'un tel travail sont présentés. Pourquoi est-il nécessaire et important de modéliser le plus précisément possible la cadence des paiements. Cette question permet par la même occasion d'évoquer les difficultés rencontrées dans la création du modèle, qu'ils soient propres à la réassurance en général ou bien au cas précis de ce portefeuille. Sont également présentées les réponses à ces enjeux apportées par le modèle actuel, et quelles améliorations ou quels changements semblent envisageables. Cette première partie initiatique se conclut par une ouverture au reste du sujet en présentant dans les grandes lignes les bases de données ayant servi à l'étude, ainsi que les premières observations et lectures qu'il est possible d'en faire.

Ensuite, la deuxième partie a pour ambition de présenter tous les aspects du nouveau modèle. Des données jusqu'au modèle final, elle traite de toutes les décisions, petites comme importantes, qui ont été prises afin de construire un nouveau modèle challengeant les résultats de l'actuel. Ce travail commence à même la donnée, en nettoyant, modifiant, arrangeant l'information communiquée par la cédante. Puis, un modèle capable d'estimer au mieux l'année de clôture du sinistre, c'est-à-dire l'année à partir de laquelle il n'y a plus de paiement à effectuer pour la cédante et que cette dernière déclare le sinistre clôturé, est introduit et ses spécificités sont détaillées. Ce modèle de clôture rend possible la création d'un modèle de cadence des paiements bien particulier, adapté à chaque année de clôture sans augmenter fortement le nombre de paramètre nécessaire à sa calibration. Néanmoins, les premiers résultats n'étant pas ceux attendus, il a fallu travailler sur une façon d'extrapoler les sinistres, respectueuse du peu d'information à disposition et des particularités du contrat. C'est cet aspect-là qui est traité au sein de la dernière sous-partie.

Enfin, le modèle actuel étant introduit en première partie, et le nouveau détaillé en deuxième partie, cette troisième partie sert à la confrontation des résultats obtenus avec chacun des modèles. La confrontation a lieu sous différents critères qui mesurent des aspects diverses et variés mais qui sont tous aussi importants les uns que les autres. Le premier d'entre eux est ce qu'il a été choisi d'appeler le « Rétrocontrôle », c'est-à-dire la comparaison de l'erreur faite par le modèle sur les données empiriques. Les portefeuilles n'étant pas assez anciens pour ne se servir que de ce résultat, une autre mesure a consisté à calculer directement l'impact-prix entre les deux modèles. Concrètement, il s'agit de mesurer comment le prix du portefeuille est modifié par le passage du modèle actuel au nouveau modèle. La dernière mesure, qui est également importante, est la sensibilité du modèle. Pour ce faire, le modèle sera perturbé par l'ajout ou le retrait d'une cédante, de certains sinistres. L'objectif étant de vérifier la robustesse du modèle, si le modèle fonctionne dans notre cas précis ou s'il est envisageable de l'utiliser plus globalement. Pour finir, une ouverture sur une application possible de ce nouveau modèle est proposée. En effet, il est intéressant de discuter de ce qui est rendu possible grâce à la construction d'un tel modèle, et cette dernière sous-partie tente d'y répondre par un exemple.

I - Introduction au sujet

Cette première partie a pour objectif d'introduire le sujet du mémoire. De présenter les spécificités de la cadence des paiements et dans quel cadre il est justifié de chercher à le modéliser pour ce type de contrat. Cela passera par la présentation des éléments du sujet et des enjeux liés à ces éléments. Puis dans un deuxième temps, une explication rapide de comment fonctionne le modèle actuellement utiliser par QBE RE pour ce type de contrat, les contrats MTPL, et quels en sont les points forts et points faibles, et donc comment est-ce qu'il est possible de l'améliorer. Enfin, une analyse descriptive des données utilisées est proposée afin de se familiariser à l'information disponible et aux difficultés de modélisation qui en découlent.

I-1 Présentation des éléments du sujet

Dans un premier temps, il s'agit de définir et de présenter les éléments propres à la réassurance ou au type de contrat sur lesquels est construit le travail qui va suivre.

I-1-1 Introduction à la réassurance

Le principe de la réassurance est de prendre une part du risque que subit une compagnie d'assurance, appelée cédante dans le cadre d'un contrat de réassurance. Une compagnie de réassurance ne vend donc pas de produit d'assurance comme les compagnies d'assurance, mais rachète une part de risque sur les contrats créés par une cédante.

L'objectif pour la compagnie d'assurance est principalement d'être assurée dans le cas de la réalisation d'un scénario très défavorable pour elle. Ce scénario peut-être une forte augmentation de la fréquence de sinistre par rapport aux prévisions faites, ou bien de subir un ou plusieurs sinistres ayant une sévérité inhabituelle et donc un cout non pris en compte ou pas assez pris en compte lors du calcul du prix de son produit d'assurance. Cela lui permet de stabiliser ses comptes d'une année à l'autre et de savoir qu'elle ne dépassera pas un certain montant de perte annuel (par exemple).

Du côté du réassureur, l'enjeu est de prendre des parts sur différents risques et sur différents marchés. L'idée étant de mutualiser le risque à une échelle plus large que celle de la compagnie d'assurance. L'idée pour le réassureur est que la réalisation d'un scénario couteux sur une partie de son portefeuille sera couverte par de bons résultats sur l'autre partie de son portefeuille. De ce fait, les réassureurs couvrent en général des produits dans différents pays et surtout dans différentes zones géographiques et il est tout à fait normal pour un réassureur européen par exemple, de couvrir des compagnies d'assurances hors-Europe. Tout l'enjeu du métier de réassureur est alors d'estimer le coût probable d'un sinistre, ou plutôt la distribution du coût d'un sinistre, étant donné qu'en général, si le coût du sinistre est le coût moyen attendu, ce ne sera pas à la charge du réassureur. Cette distribution est souvent difficile à estimer puisque le réassureur travail sur des marchés très différents les uns des autres et parce qu'il est souvent confronté à une opacité d'information de la part de la cédante. En effet, les données de la cédante, les indices qu'elle utilise, les modèles de calcul du prix, les différentes marges, sont une multitude d'information que le réassureur n'a pas mais avec lesquels il doit traiter pour estimer le prix correct. De ce fait, la réassurance est souvent un terrain de simplification et d'approximation.

Le réassureur est souvent rattaché par l'imaginaire collectif aux catastrophes naturelles, et c'est tout à fait vrai que ce genre d'évènements correspond exactement dans la définition de réalisation de scénario « catastrophe » pour la cédante, provoquant une forte augmentation de la fréquence ou de la sévérité. Dans ce type de sinistres, il est facile de comprendre pourquoi la mutualisation du réassureur lui permet de subir et contenir les pertes, étant donné qu'il est implanté sur différentes zones géographiques et que le plus souvent, la catastrophe n'a pas lieu partout. Cependant, le réassureur traite tout autant de catastrophes naturelles, que de sinistres beaucoup plus classiques mais dont la fréquence et/ou sévérité peuvent varier et qui représentent un risque pour la compagnie d'assurance.

I-1-2 Traité en Excédent de sinistre XS

En réassurance, une distinction est faite entre deux grands types de contrats. D'un côté, il existe les contrats proportionnels dont le Quote-Part et l'Excédent de plein tandis que d'un autre côté sont définis les contrats non-proportionnels, comme les contrats en Excédent par sinistre ou en Excédent par évènement, ou bien encore l'Excédent de perte. Le caractère « proportionnel » signifie que le réassureur participe de manière proportionnelle aux gains et aux pertes de la cédante. Par exemple, un réassureur peut prendre 30% de toutes les primes reçues par la cédante et payer 30% du montant des sinistres de la cédante.

D'un autre côté sont définis les contrats non-proportionnels. Dans le cadre de cette étude, les contrats étudiés sont des traités en Excédent de sinistre, aussi appelés traités XS. Ce sont donc des contrats non-proportionnels où le prix du sinistre et le prix payé par le réassureur ne sont pas liés par une relation linéaire. Dans le cadre d'un traité en Excédent de sinistre, le réassureur paye, pour chaque sinistre, le montant au-dessus de la priorité qu'il a fixée, et ce jusqu'à la portée. Les contrats en excédent de sinistres sont notés :

$$Portée\ XS\ Priorité$$

Par exemple, pour un contrat $5\ XS\ 10$, sur des sinistres d'un montant de 7, 14 et 18, la part à payer par le réassureur est la suivante :

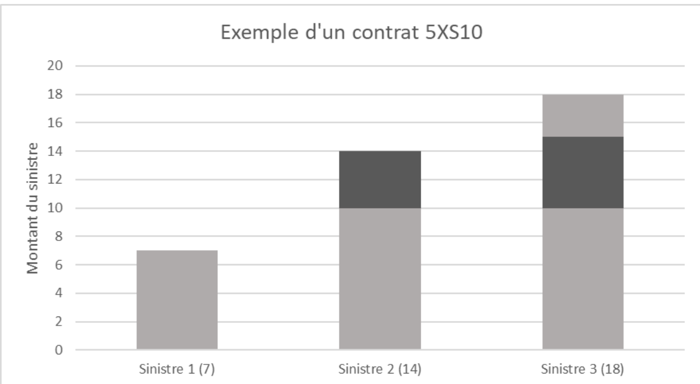


Figure 1 : Exemple de part payée par la réassurance dans un traité XS

Dans le cas présenté ci-dessus, le sinistre 1, d'un montant de 7, n'atteint pas la priorité et donc n'est pas à la charge du réassureur. Cela correspond normalement au type de sinistre prévu par l'assureur puisque le montant est entièrement à sa charge. Le sinistre 2, d'un montant de 14, atteint la priorité. La cédante paie alors 10, et le réassureur paie 4. Dans le dernier cas, celui du sinistre 3, le montant est de 18. Le sinistre dépasse à la fois la priorité et une fois la priorité dépassée, il dépasse la portée. La cédante a toujours à sa charge les 10 en-dessous de la priorité, puis le réassureur prend le montant au-dessus de la priorité jusqu'à la portée, c'est-à-dire 5 dans notre exemple, et enfin, la cédante paie également le montant au-dessus de la portée, donc 3 ici. Finalement, pour le troisième sinistre, la cédante paie 13 tandis que le réassureur paie 5.

Cet exemple montre bien que ce type de contrat ne permet pas pour la cédante de lutter contre une fréquence inhabituelle. Effectivement, avoir énormément de petits sinistres n'atteignant pas la priorité n'engendrera aucun paiement de la part du réassureur, et sera donc totalement à la charge de la cédante. Il est bien évidemment possible de se prévenir contre l'augmentation de la fréquence à l'aide de traité en Excédent, mais en travaillant sur les montants agrégés des sinistres. Ce n'est alors plus un contrat en Excédent de sinistres.

Dans les parties suivantes, il sera considéré que les traités n'ont pas de portée, donc pas de limite supérieure. Cela signifie que tout le montant au-dessus de la priorité, désigné par la suite comme montant en Excédent, sera à la charge du réassureur. Il est souvent introduit également dans le traité, un montant appelé AAL signifiant « Limite annuelle agrégée » et un montant appelé AAD pour « Déductible annuel agrégé », qui limite l'engagement du réassureur dans l'année. Cependant, ces notions ne seront pas abordées ici car non-prises en compte dans le travail effectué.

I-1-3 Contrat d'assurance MTPL

Les sinistres utilisés ici sont des sinistres de contrat MTPL, qui signifie Motor Third Party Liability, en français la responsabilité civile automobile. Ce sont des contrats qui couvrent les dommages causés à la santé et aux biens de tiers par le souscripteur du contrat d'assurance. Pour être plus précis, cela désigne les dommages causés par le souscripteur en tant que conducteur, mais également en tant que propriétaire du véhicule. Ces contrats font partie de la branche non-vie de l'assurance/réassurance. Ce type de contrat représente d'ailleurs une grosse part de l'assurance non-vie puisque selon un rapport un rapport de la Banque Mondiale, les primes de contrat MTPL représentaient en 2009 au moins 30% des primes de contrats non-vie.

Concernant les spécificités des sinistres d'un contrat MTPL, il s'agit d'un contrat qualifié de « Queue Longue ». La queue longue, opposée au « Queue fine », désigne que le règlement du sinistre n'aura pas lieu dans une courte période, très souvent d'une année, mais qu'au contraire il peut avoir lieu des années plus tard, et durer très longtemps. Sur de la responsabilité civile, cela peut correspondre à la durée du jugement par exemple. A l'occurrence d'un accident impliquant l'assuré, le sinistre est estimé, la compagnie d'assurance peut commencer à payer certains frais, puis finalement, à la suite du jugement, l'assuré est déclaré non-responsable des dommages et le dossier est clos, ou au contraire, l'assuré peut être condamné à payer un certain montant à la victime, ou aux victimes. L'assuré peut être condamné à verser une rente jusqu'à la fin de la vie de la victime. Il y a potentiellement beaucoup de cas particulier à chaque marché. En Belgique, sur l'une des bases de données utilisées pour cette étude, il existe par exemple le concept de réserve médicale. Le principe est de faire une réserve pour répondre à une aggravation potentielle de la santé de la victime. C'est notamment le cas quand la victime perd un rein. Etant donné qu'il est possible de bien vivre avec un seul rein, il n'y a pas vraiment de dédommagement et donc de paiement de la part de la cédante. Ou en tous cas les paiements n'atteignent pas des montants significatifs. Cependant, la cédante doit prendre en compte le fait que si un jour la victime a un problème à son autre rein, au rein restant donc, elle aura à payer, et sans doute pour un coût important, puisqu'il n'est pas possible de vivre sans rein. Pour ces multiples raisons, l'assureur constitue des réserves qui sont l'estimation de ce que va coûter le sinistre.

Le réassureur pour sa part n'a souvent pas toute cette information sur la victime et sur la façon de réserver. La cédante lui communique en général uniquement les paiements et le montant de la réserve, ce qui permet, en faisant la somme des deux, d'obtenir l'**Encouru**, qui désigne le montant à payer in fine selon la cédante. Le réassureur tente donc de faire des modèles pour l'estimation du prix à l'aide du peu de données à disposition.

$$Encouru(t) = \sum_{k=0}^{t} Paiement(k) + Reserve(t)$$

I-2 Enjeux liés à la tarification

I-2-1 Impact de l'inflation

Comme évoqué précédemment, dans le cadre de contrat MTPL, l'année de survenance du sinistre n'est quasiment jamais l'année de règlement, notamment à cause des procédures judiciaires. Ce retard peut avoir un impact énorme sur le montant que va devoir rembourser le réassureur à la cédante. En effet, les paiements étant indexés par la valeur d'un indicateur approprié, cet indicateur peut être l'inflation dans le pays par exemple, un paiement plus tardif va avoir une valeur supérieure au même paiement réalisé l'année du sinistre. **L'impact de l'inflation** pour un sinistre est mesurable à travers les paiements de la manière suivante :

$$Stabilité = \frac{\sum_{k=0}^{n} Paiement^{Indexé}(k)}{\sum_{k=0}^{n} Paiement^{Plat}(k)}$$

Où :

- $Stabilité$ est l'impact de l'inflation pour le sinistre.
- $Paiement^{Indexé}(k)$ désigne le paiement en année de développement k communiqué par la cédante. Il s'agit d'un paiement incrémental.
- $Paiement^{Plat}(k)$ désigne le paiement en année de développement k auquel l'impact de l'inflation de l'année k a été retiré.

Dans le cadre de ce mémoire, il est possible de distinguer trois impacts de l'inflation, l'impact de l'inflation pour l'assureur ou la cédante, l'impact de l'inflation pour le réassureur, et l'impact de l'inflation du sinistre. Ces trois impacts étant extrêmement liés. L'exemple ci-dessous permet de comprendre la différence entre chacun des trois.

<u>EXEMPLE</u>

Dans le cadre d'un contrat XL avec une priorité de 100.000, une inflation annuelle de 2% chaque année, il est envisagé deux scénarios de paiement.

Le <u>scénario 1</u> dans lequel on a un paiement rapide de la part de la cédante et donc du réassureur.

	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	Année 6
Sinistre 1	0	200.000	0	0	0	0
part Réassureur	0	100.000	0	0	0	0
Sinistre 1 inflaté	0	204.000	0	0	0	0
part Réassureur	0	104.000	0	0	0	0

Figure 2 : Scénario 1 de paiement d'un sinistre - EXEMPLE

Dans ce premier cas, pour le réassureur, l'impact de l'inflation vaut :

$$Stabilité_1^{Reas} = \frac{104.000}{100.000} = 104{,}00\%.$$

Il correspond bien à la valeur payée par le réassureur, c'est-à-dire le montant du sinistre (204.000) auquel est retranché la priorité (100.000), sur le montant qu'aurait payé le réassureur s'il n'y avait pas d'inflation, c'est-à-dire le montant du sinistre désindexé (200.000) auquel est retranche la priorité (100.000).

S'agissant de l'impact de l'inflation pour la cédante, et du sinistre, ils sont différents et ont pour valeur :

$$Stabilité_1^{Assu} = \frac{100.000}{100.000} = 100{,}00\%.$$

$$Stabilité_1^{Sinistre} = \frac{204.000}{200.000} = 102{,}00\%.$$

Le <u>scénario 2</u> quant à lui présente un sinistre pour lequel il n'y a pas de paiement les cinq premières années, puis un paiement en année 6. Les montants sans indexation sont les mêmes que dans le premier scénario.

	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	Année 6
Sinistre 2	0	0	0	0	0	200.000
part Réassureur	0	0	0	0	0	100.000
Sinistre 2 inflaté	0	0	0	0	0	220.816
part Réassureur	0	0	0	0	0	120.816

Figure 3 : Scénario 2 de paiement d'un sinistre - EXEMPLE

Dans ce second cas, pour le réassureur, l'impact de l'inflation vaut :

$$Stabilité_2^{Reas} = \frac{120.816}{100.000} = 120{,}82\%.$$

Et pour la cédante et le contrat, il prend les valeurs suivantes :

$$Stabilité_2^{Assu} = \frac{100.000}{100.000} = 100{,}00\%.$$

$$Stabilité_2^{Sinistre} = \frac{220.816}{200.000} = 110{,}41\%.$$

Du point de vue du réassureur, pour des montants de paiements désindexés égaux, la somme payée par le réassureur, et de fait l'impact de l'inflation, sont bien supérieurs dans le deuxième scénario. Pour la cédante, l'impact de l'inflation reste le même puisque la priorité est atteinte dans les deux cas, donc quel que soit le montant à payer, la cédante paye la même chose : le montant de la priorité. En ce sens, la cédante ne subit pas l'inflation. Il est intéressant de noter également que la compagnie de réassurance, dans cet exemple, subit un impact de l'inflation bien plus important que l'impact mesuré sur le sinistre, ce qui signifie que sa charge à payer augmente plus que l'augmentation « réelle » du coût du sinistre.

L'impact de l'inflation dépend également du montant de la priorité. Plus le montant de la priorité est grand et plus l'écart entre les deux impacts, entre un sinistre payé tardivement et un sinistre payé rapidement, est grand. En pratique, mesurer l'impact sur nos deux bases de données peut permettre de se rendre compte de la différence de prix que cela provoque.

	Montant de la Priorité			
	0	1.000.000	3.000.000	6.000.000
Tout contrat	112,4%	124,9%	136,1%	157,8%
Contrats clôturés	111,7%	124,6%	135,3%	177,5%

Figure 4 : Impact de l'inflation en fonction du montant de la Priorité MTPL_FR

Dans ce tableau relatif à la base de données française sont représentées les moyennes pondérées de l'impact de l'inflation pour chaque sinistre. Ce sont des moyennes pondérées par la somme des paiements déjà effectués, ce qui revient à sommer l'ensemble des paiements originaux sur l'ensemble des paiements désindexés. Dans le cas où il n'y a pas de priorité (cas où Priorité = 0) l'augmentation du montant à charge du réassureur est de 12,4% plus cher, et cela augmente encore lorsque le montant de la priorité augmente. Cela résulte d'un double effet. Le premier est que, sur un même contrat, augmenter le montant de la priorité augmente l'impact de l'inflation. Le second est que sur les bases de données utilisées, plus un sinistre est important en termes de montant à payer et plus il est payé tardivement, et donc plus l'inflation qu'il subit est forte. A noter que les résultats obtenus sur la base de données belge sont encore plus marqués que sur la base de données française puisque les sinistres belges sont développés sur 18 années.

I-2-2 Gestion de la censure sur les sinistres les plus récents

Dans le calcul précédent de l'impact de l'inflation, il peut y avoir un biais dû au manque d'information sur les sinistres avec le moins d'année de développement. En effet, les sinistres avec le moins d'année de développement n'ont pas pu subir une forte inflation et il est possible que de nombreux sinistres peu développés tirent la moyenne pondérée vers le bas.

Pour remédier à cette censure, il est possible d'aborder le calcul de l'impact de l'inflation différemment. Pour tous les sinistres, la part qu'il reste à payer va être estimée à l'aide du comportement historique des sinistres les plus développés. Grâce à cela, pour les sinistres les moins développés, il sera possible d'estimer ce qui va être payé, et comment. L'idée n'est pas de simuler la cadence des paiements du sinistre, mais uniquement de voir comment historiquement est payée la réserve. Attention tout de même, il ne s'agit pas de la réserve déclarée par la cédante, mais de la somme des paiements postérieurs observés empiriquement. Cela revient finalement à étudier la réserve payée sur des sinistres où elle a déjà été payée, pour ensuite modéliser le paiement futur des sinistres peu développés, et calculer l'impact de l'inflation dessus.

Pour utiliser ce procédé sur notre base de données, il est préférable de se limiter aux sinistres dont l'Encouru en LKS est supérieur à 500.000. LKS signifie Last Known Situation et désigne ici l'Encouru en dernière année de développement dont on a l'information. Par exemple, pour un sinistre ayant eu lieu en 2010, ayant de fait 8 années de développement en 2018, l'Encouru en LKS est l'Encouru en année 2018. Par ce moyen les sinistres les plus petits, qui sont souvent les plus volatils, sont éliminés. Un sinistre estimé à 2.000 en année n et qui atteint 20.000 en année n+1, n'est donc plus pris en compte dans les calculs.

Dans un premier temps, il est nécessaire de calculer, à l'échelle de la base de données, le pourcentage payé de la réserve chaque année de développement. C'est-à-dire pour un montant restant à payer au début de l'année n, quelle part de ce montant va être payée directement en année n. Ce pourcentage payé est calculé de la manière suivante :

$$\%_{DY}^{paid} = \frac{S_{DY}}{R_{DY}}.$$

Où :

- $\%_{DY}^{paid}$ est le pourcentage payé en année de développement DY.
- S_{DY} est la somme des paiements effectués en année de développement DY.
- R_{DY} est la somme de ce qu'il reste à payer **historiquement** en début d'année DY. Attention, ici la somme de ce qu'il reste a payé est la somme des paiements futurs jusqu'à l'année maximale. C'est donc différent de l'Encouru auquel on aurait soustrait la somme des paiements passés. R_{DY} est défini de telle manière que la somme S_{DY} ne lui a pas été soustrait.

EXEMPLE

Pour un sinistre dont le montant de l'Encouru est considéré fixé à 500.000, et dont les paiements incrémentaux pour les 3 premières années sont les suivants :

	Année 0	Année 1	Année 2	Année 3
Paiement	100.000	0	250.000	50.000

Figure 5 : Paiements incrémentaux d'un sinistre – EXEMPLE

Les valeurs des différents éléments sont, en année $DY = 0$:

$$S_0 = 100.000; \quad R_0 = 100.000 + 0 + 250.000 + 50.000 = 400.000$$

Il est bien constaté ici que $R_0 \neq Encouru$. Et finalement, la part payée en année 0 est

$$\%_0^{paid} = \frac{100.000}{400.000} = 25\%$$

Ici, les différents parts seraient d'ailleurs :

$$\%_1^{paid} = \frac{0}{300.000} = 0\%; \ \ \%_2^{paid} = \frac{250.000}{300.000} = 83\%; \ \ \%_3^{paid} = \frac{50.000}{50.000} = 100\%$$

A noter que dans cet exemple, les calculs sont effectués sur un sinistre, mais que dans le cas du travail de censure, il a été réalisé sur les montants agrégés des sinistres de la base de données complète.

A partir du pourcentage payé est calculer le pourcentage de survie en année de développement DY. C'est-à-dire, sur cette même part à payer en début d'année n, quelle part restera encore à payer après le paiement de l'année DY. Cette valeur est définie comme :

$$\%_{DY}^{survie} = 1 - \%_{DY}^{paid}.$$

Le pourcentage de survie est ensuite utilisé pour calculer le pourcentage de survie cumulé tel que présenté plus bas. Ce pourcentage correspond à la part encore à payer de la réserve initiale, et non pas de la réserve au début de l'année. C'est-à-dire que $Cumul_n^{survie}$ correspond au pourcentage encore à payer sur le montant à payer historiquement au début de l'année 0. Encore une fois, ce « montant à payer » n'est pas égal à l'Encouru (sauf si tous les paiements étaient clôturés), mais à la somme des paiements futurs.

$$Cumul_{DY}^{survie} = \begin{cases} \%_0^{survie} \ si \ DY = 0 \\ Cumul_{DY-1}^{survie} * \%_{DY}^{survie} \ sinon \end{cases}.$$

Cette valeur permet d'obtenir la part payée en fonction du montant de la réserve initiale, nommée la *Part Restante* définie comme :

$$RP_{DY} = 1 - Cumul_{DY}^{survie}.$$

La *Part Restant* est utilisée pour calculer une cadence des paiements de la réserve :

$$PP_{DY} = \begin{cases} RP_0 \; si \; DY = 0 \\ RP_{DY} - RP_{DY-1} \; sinon \end{cases}$$

A l'aide de cette cadence des paiements, il est possible d'étirer le triangle de paiements cette fois jusqu'en année de développement maximale, c'est-à-dire en année 10 pour la base de données MTPL française et 18 pour la base de données MTPL belge. Les paiements sont alors modifiés de la manière suivante.

Dans un premier temps, il est utile de calculer la somme complète des paiements par année d'accident Σ_{AY}. L'objectif derrière de ce calcul est d'avoir des montants de paiements comparables pour chaque année d'accident. C'est-à-dire que pour les années d'accident les plus récentes, la somme des paiements est inférieure à la somme des paiements d'une année d'accident ancienne, tout simplement parce que l'année d'accident plus ancienne a plus d'années de développement. Dans la somme des paiements complètes, la somme des paiements est divisée par la part restante. Si en moyenne, au bout de 3 années de développement, 30% des paiements sont effectués, alors la somme complète des paiements sera la somme des paiements effectués, qui représente 30%, et des 70% encore à effectuer. Il faut bien comprendre que cette somme complète des paiements est un montant hypothétique basé sur le comportement empirique. Cela revient à considérer que la somme complète des paiements vaut les paiements effectués sur la part restante. C'est-à-dire :

$$\Sigma_{AY} = \frac{\sum_{t=0}^{DY_{LKS}(AY)} Paiement^{AY}(t)}{RP_{DY_{LKS}(AY)}}$$

Où

- AY désigne l'année d'accident.
- Σ_{AY} désigne la somme complète des paiements pour les sinistres ayant eu lieu en AY. Cela correspond à la somme hypothétique de la ligne de triangle des paiements une fois que tous les paiements sont réalisés (jusqu'en année maximale).
- $Paiement^{AY}(t)$ désigne les paiements effectués en année de développement t pour les sinistres ayant en lieu en AY.
- $DY_{LKS}(AY)$ désigne la dernière année de développement pour un sinistre ayant eu lieu en AY. Exemple : Base de données est complète jusqu'en 2018, donc pour un sinistre avec AY=2016, la valeur vaut $DY_{LKS}(AY) = 2$.

Une fois que la somme potentielle des paiements est connue pour chaque année d'accident. La cadence des paiements calculée précédemment est utilisée pour modéliser les paiements futurs indexés jusqu'à l'année maximale. Cela permet de calculer l'impact de l'inflation sur plus d'années que celles existant déjà, et donc prendre en compte la censure des années d'accident les plus récentes.

$$\widetilde{Paiement}^{AY}(t) = \begin{cases} Paiement^{AY}(t) + \left(1 - RP_{DY_{LKS}(AY)}\right) * PP_t * \Sigma_{AY} \; si \; t \leq DY_{LKS}(AY) \\ PP_t * \Sigma_{AY} \; sinon \end{cases}$$

Chaque sinistre, quel que soit son année d'accident, est donc développé jusqu'en année maximale grâce au comportement empirique observé. Cela permet de mesurer autrement l'impact de l'inflation.

Sur la base de base de données française, les résultats obtenus sont présentés ci-dessous. Les résultats sont quasiment les mêmes entre les deux méthodes, l'extrapolation augmentant quelque peu l'impact de l'inflation. Des résultats similaires sont trouvés pour la base de données belge.

	Méthode	
	Classique	Extrapolation
Tout contrat	112,4%	115,15%
Contrats clôturés	111,7%	115,22%

Figure 6 : Comparaison de l'impact de l'inflation entre les deux méthodes MTPL_FR

Face au aussi peu de différence entre les deux méthodes et en considérant la simplicité de la première méthode, il est décidé de n'utiliser par la suite que la méthode « classique », qui est donc sans extrapolation prenant en compte la censure.

1-2-3 Utilisation d'une clause stable

Comme évoqué précédemment, en réassurance il convient de distinguer trois impacts de l'inflation : celui du sinistre, celui de l'assureur, et celui du réassureur. Dans un contrat où la priorité est fixe, seul le réassureur subit l'inflation et, à ce titre, est sujet à une augmentation brutale de l'inflation.

EXEMPLE

Dans le cas du scénario 2 déjà utilisé précédemment, avec un contrat en Excess de 100.000 et une inflation annuelle de 2%, ainsi que les flux suivants :

	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	Année 6
Sinistre 2	0	0	0	0	0	200.000
part Réassureur	0	0	0	0	0	100.000
Sinistre 2 inflaté	0	0	0	0	0	220.816
part Réassureur	0	0	0	0	0	120.816

La mesure des différents impacts de l'inflation donne la chose suivante :

$$Stabilité^{Assureur} = \frac{100.000}{100.000} = 100\%$$

$$Stabilité^{Réassureur} = \frac{120.816}{100.000} = 120{,}82\%$$

$$Stabilité^{Sinistre} = \frac{220.816}{200.000} = 110{,}41\%$$

L'exposition du réassureur est plus importante que la réelle exposition à l'inflation du contrat. L'assureur quant à lui ne subit pas le risque d'inflation dans le cas où le montant de sinistre est supérieur à la priorité. L'assureur pourrait alors payer ses sinistres tardivement, puisque cela n'a aucune répercussion sur ce qu'il paye. Il est même envisageable qu'un contrat qui n'aurait pas atteint la priorité, atteigne la priorité parce que l'assureur ne le paye pas dès les premières années.

Afin de contrer cet effet, et pour que l'inflation soit subie de manière équivalente par les deux parties, les contrats de réassurance MTPL contiennent souvent une **clause de stabilité** ou stability clause. Le principe de cette clause est de redistribuer les augmentations de coût des sinistres liées à l'inflation entre la cédante et le réassureur. C'est une clause très répandue pour les contrats non-proportionnels, principalement en Europe. Le principe est d'appliquer sur la priorité l'inflation que subit les sinistres. La priorité augmente alors d'année en année. Si le contrat contient une portée, la portée est généralement modifiée de la même manière. La priorité, et donc la portée quand il y en a une, sont multipliées par l'impact de l'inflation. A ce titre, on ne parle généralement plus d'impact de l'inflation du contrat mais de facteur de stabilité du contrat. On distingue alors $Priorité = Priorité(0)$ qui correspond à la priorité sans clause stable, et la $Priorité(i)$ qui est la priorité en année i après application de la clause stable. On a la relation suivante :

$$Clause = Stabilité^{Contrat} = \frac{\sum_{k=0}^{i} Paiement^{Indexé}(k)}{\sum_{k=0}^{i} Paiement^{Plat}(k)} = \frac{\sum_{k=0}^{i} Paiement^{Indexé}(k)}{\sum_{k=0}^{i} Paiement^{Indexé}(k) * \frac{Index(0)}{Index(k)}}$$

Où

- $Index(k)$ désigne l'indice de l'année k. Il est différent de l'inflation. L'inflation combiné entre l'année 0 et l'année k est alors égale au ratio $\frac{Index(k)}{Index(0)}$.
- $Clause$ est la clause stable appliquée à la priorité.

Grâce à la clause, on a l'expression de la priorité en i telle que :

$$Priorité(i) = Priorité * Clause$$

Qui est équivalent à

$$Priorité(i) = Priorité * \frac{\sum_{k=0}^{i} Paiement^{Indexé}(k)}{\sum_{k=0}^{i} Paiement^{Plat}(k) * \frac{Index(0)}{Index(k)}}$$

<u>EXEMPLE</u>

En reprenant l'exemple précédent, la priorité est recalculée pour chaque année de développement avec l'inflation annuelle de 2%. La part de la réassurance sera alors dans ce cas de :

	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	Année 6
Sinistre 2 inflaté	0	0	0	0	0	220.816
Priorité	100.000	102.000	104.040	106.121	108.243	110.408
part Réassureur	0	0	0	0	0	110.408

Figure 7 : Scénario 2 en incluant une clause stable au traité

Les facteurs de stabilité du sinistre, de la cédante, et du réassureur sont égaux :

$$\frac{220.816}{200.000} = \frac{110.408}{100.000} = \frac{220.816 - 110.408}{200.000 - 100.000}$$

Le poids de l'inflation est le même pour les deux acteurs du contrat de réassurance. Le risque est équitablement réparti. Cela permet également de ne prendre en compte que les sinistres qui dans un monde sans inflation, aurait été au-dessus de la priorité. A noter également que finalement, assureur comme réassureur subissent l'impact de l'inflation calculé au niveau du sinistre.

Cette clause de stabilité a un impact important sur le prix en baissant fortement le coût pour le réassureur. A titre d'exemple, il est possible de mesurer l'impact sur la base de données française en calculant, pour les paiements ayant déjà eu lieu, le montant en excess pour différente priorité. Cela signifie que ce ne sont pas réellement les prix qui sont comparés ici, mais simplement les sommes de paiements ayant déjà eu lieu.

Priorité	Sans Clause de Stabilité			Avec Clause de Stabilité			Diff Somme
	Somme	Sin. > Priorité	Stability	Somme	Sin. > Priorité	Stability	
1.000.000	1.866.330.962	962	124,9%	1.737.908.796	872	116,3%	6,9%
3.000.000	873.844.877	254	136,1%	755.852.361	215	117,8%	13,5%
6.000.000	389.632.894	103	157,8%	294.091.750	78	119,1%	24,5%

Figure 8 : Mesure de l'effet d'une clause stable sur la base de données MTPL_FR

« Somme » désigne ici la somme en excédent, « Sin. > Priorité » désigne le nombre de sinistres ayant atteint la priorité, et « Stability » fait référence au facteur de stabilité. Enfin, « Diff Somme» est la différence relative à la somme sans clause de stabilité entre la somme sans clause et la somme avec clause.

La clause de Stabilité permet de ne prendre en compte que les sinistres qui auraient dépassé le montant de la priorité dans un monde plat d'inflation. « Plat d'inflation » signifie qu'il n'y a pas d'inflation, ou que l'inflation annuelle est de 0% chaque année. Les sinistres sont également moins coûteux pour le réassureur, surtout en augmentant le montant de la priorité. Il est intéressant ici de noter que la clause de stabilité permet de garder une certaine constance dans le facteur de stabilité lorsqu'on augmente le montant de la priorité, ce qui n'est pas du tout le cas sans clause de stabilité.

Dans la pratique, les paiements futurs ne sont pas connus, et dépendent de nombreux facteurs (décision juridique, choix stratégique de la compagnie d'assurance, aggravation de la santé d'une victime de l'accident...). Le réassureur, même s'il a connaissance de l'estimation du coût que fait la cédante, que l'on nomme l'*Encouru*, n'a pas la capacité de mesurer combien le sinistre va réellement lui coûter. Pour combler à ça, l'estimation de la cadence de paiements, ou *Payments Pattern*, est primordiale.

1-3 Modèle actuel

1-3-1 Introduction à la cadence des paiements – Payments Pattern

Le **Payments Pattern**, ou cadence des paiements désigne le rythme utilisé par la cédante pour payer le sinistre. Pour un sinistre payé à 50% de l'Encouru en année de développement 0, auquel vient s'ajouter un second paiement d'un montant égal à 30% de l'Encouru en année de développement 1, puis un dernier de 20% de l'Encouru en année de développement 2, on aura donc $PP(0) = 50\%$, $PP(1) = 30\%$, et $PP(0) = 20\%$. Pour un sinistre clôturé en $DY_{Clôture}$, on a alors forcément :

$$\sum_{i=0}^{DY_{clôture}} PP(i) = 1$$

Et on a la relation, toujours pour un sinistre clôturé :

$$\sum_{i=0}^{DY_{clôture}} PP(i) * Ultime = \sum_{i=0}^{DY_{clôture}} Paiement(i) = Ultime.$$

Cependant, tant que le sinistre est ouvert, une même cadence des paiements peut varier d'une année à l'autre puisqu'il dépend du montant de l'Ultime potentiel.

EXEMPLE

Pour un sinistre dont on estime en année 1 l'Ultime à 100.000, et ayant reçu un paiement de 30.000 en année 1, le Payments Pattern en année 1 est :

$$PP(1) = \frac{Paiement(1)}{Ultime} = \frac{30.000}{100.000} = 30\%.$$

Cependant, si en année 2, le jugement est défavorable à l'assuré et que le sinistre est maintenant estimé avec un Ultime de 200.000, alors ce Payments Pattern vaut :

$$PP'(1) = \frac{Paiement(1)}{Ultime'} = \frac{30.000}{200.000} = 15\%.$$

Tant que le sinistre n'est pas clôturé, il n'est pas possible d'obtenir la cadence des paiements définitives puisque l'Ultime n'est qu'une estimation.

La cadence des paiements est utile au calcul et à l'estimation du prix d'un sinistre pour le réassureur puisque pour un contrat clôturé, il existe la relation suivante qui lie le montant en excédent et la cadence des paiements :

$$Excess = \max(0, Ultime - Priorité * Clause).$$

Or

$$Clause(i) = \frac{\sum_{k=0}^{i} Paiement^{Indexé}(k)}{\sum_{k=0}^{i} Paiement^{Indexé}(k) * \frac{Index(0)}{Index(k)}}.$$

Et ainsi :

$$Clause = Clause(DY_{clôture}) = \frac{Ultime}{\sum_{k=0}^{\infty} Ultime * PP(k) * \frac{Index(0)}{Index(k)}}.$$

Ce qui finalement revient à :

$$Excess = \max\left(0, Ultime - Priorité * \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} PP(k) * \frac{Index(0)}{Index(k)}}\right).$$

Il est alors possible de calculer le montant en excédent, et donc le prix pour le réassureur à partir de la cadence des paiements et de l'Ultime.

I-3-2 Modèle actuel

I-3-2-a Calcul de l'Ultime

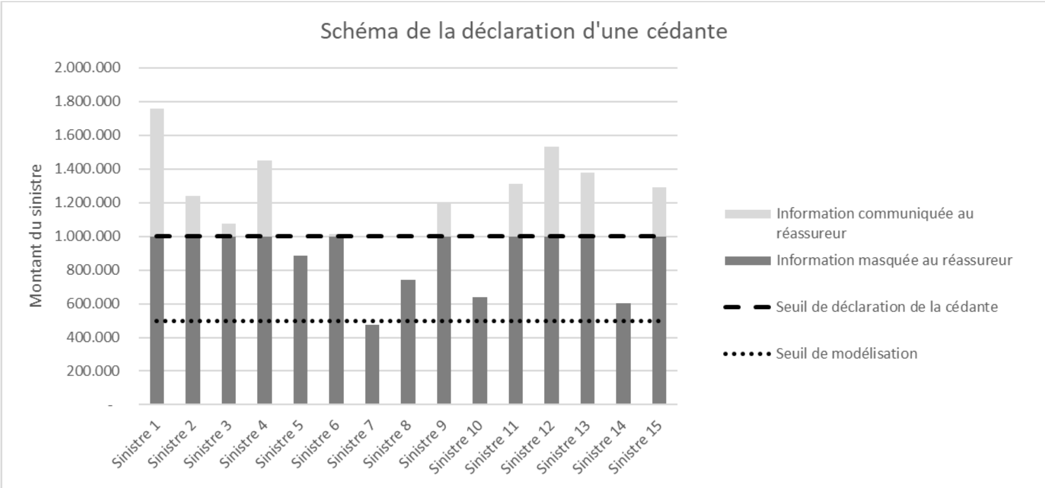
Dans le modèle actuel, et pour le calcul du prix, les sinistres sont considérés comme clôturés en année maximale de développement, c'est-à-dire l'année 10 en France et l'année 18 en Belgique. Les sinistres sont séparés en tranche en fonction du montant de leur Encouru, c'est-à-dire l'estimation du prix qu'en fait la cédante, et il est calculé le développement de l'Encouru jusqu'en année maximale grâce à la méthode de Chain-Ladder. Cela permet de prendre en compte l'effet IBNER, soit Incurred But Not Enough Reported, qui désigne l'augmentation faite en guise de provision couvrant l'insuffisance potentielle de provisionnement des sinistres survenus. C'est-à-dire qu'on estime que la cédante n'a pas estimé correctement le montant du sinistre et qu'il risque d'augmenter. La méthode de Chain-Ladder basée sur les données historiques du marché permet alors de calculer pour chaque année de développement et chaque tranche l'effet IBNER à prendre en compte, et finalement, permet d'obtenir la valeur de l'Ultime potentiel.

I-3-2-b Modèle sur la cadence des paiements

Pour la cadence des paiements, le modèle actuel considère les sinistres suivent tous une cadence des paiements moyenne par classe d'Ultime. Pour être plus précis, il distingue trois classes de sinistres. Les sinistres « Bas », qui sont ceux avec l'Ultime le plus faible, les sinistres « Moyens » et les sinistres « Hauts ». Ces trois classes de sinistres, sont des classes fixées par le réassureur et propres à chaque marche afin de bien correspondre à l'information obtenue par le réassureur. L'un des enjeux de la réassurance est de faire des modèles avec le manque d'information et la censure de la cédante et ces classes permettent de traiter avec cette censure.

EXEMPLE

En effet, une cédante ayant les sinistres ci-dessous présentés, et ne déclarant les sinistres qu'au-dessus de 1.000.000 transmettra l'information en gris clair au réassureur.



Ici, utiliser l'information de cette cédante pour modéliser les sinistres à partir de 500.000 provoquerait une erreur puisque tous les sinistres entre le seuil de modélisation de 500.000 et le seuil de déclaration de la cédante de 1.000.000 sont inconnus du réassureur et donc non pris en compte dans le modèle.

Les différentes classes servent à bien prendre en compte ce biais. La tranche la plus haute est la tranche pour laquelle le réassureur est sûr de détenir toute l'information. La limite inférieure de la tranche la plus basse est la valeur à partir de laquelle il est intéressant de pouvoir modéliser, donc généralement proche de la priorité la plus faible. La valeur pivot entre la tranche deux et la tranche permet de séparer grossièrement la tranche une et deux en deux tranches égales.

Le modèle classe les sinistres en fonction du montant de leur Ultime, calculé précédemment grâce au modèle sur les Ultime, puis calcule leur montant en excédent à l'aide de la formule expliquée dans la sous-partie précédente, en considérant qu'ils sont clôturés en année maximale et qu'ils suivent la cadence des paiements moyenne de la tranche. Le facteur de stabilité calculé par le modèle actuel pour un sinistre S appartenant à la classe C est le suivant :

$$Stabilité^{actuel}(S) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{DY_{max}} PP_C(k) * \frac{Index(0)}{Index(k)}}.$$

1-3-3 Piste d'amélioration du modèle

Le modèle actuel a le bénéfice d'être très simple, avec quasiment aucun paramètre, mais ne rend pas bien compte de la réalité de la cadence des paiements. En effet, la cadence des paiements varie énormément d'un sinistre à l'autre, et finalement les sinistres ont des cadences de paiement assez éloignées de la moyenne. Par exemple, le modèle considère que tous les sinistres sont clôturés en année 10, alors que dans les données, pour les contrats ayant atteint l'année de développement 10, seul 74% d'entre eux ont été clôturés. D'autant plus que parmi les 26% de contrat encore ouverts en année de développement 10, la moyenne de la cadence des paiements est de 50,31%. Ce qui signifie qu'en dernière année de développement, que le modèle actuel considère comme l'année de clôture de tous les sinistres, plus d'un quart des sinistres ne sont pas clôturés, et qu'en plus en moyenne pour ce quart, à peine la moitié des paiements ont été effectué. Sachant que les sinistres les plus longs à clôturer sont souvent les plus lourds en termes de montant, cela signifie que la clause stable calculée par le modèle va être bien plus faible qu'elle devrait l'être, et de fait, la priorité va être trop basse et le réassureur va payer bien plus qu'il ne devrait. D'un autre côté, 21% des sinistres ayant atteint l'année 2 sont déjà payés entièrement (mais ne sont pas forcément considérés comme clôturés par la cédante). Pour ceux-là, principalement des petits sinistres, la clause de stabilité calculée avec la cadence de paiement moyenne est bien trop grande et l'assureur subira bien plus l'inflation que le réassureur.

Un autre problème rencontré cette fois lorsque la cadence des paiements moyenne est fait au niveau d'une cédante est qu'il est possible de rencontrer une cadence de paiements décroissante. En effet, à cause du changement d'échantillon utilisé pour calculer la cadence des paiements, cette dernière peut devenir décroissante. C'est notamment le cas sur la cédante 2005-12 de la base de données française donc la cadence des paiements est représentée ci-dessous.

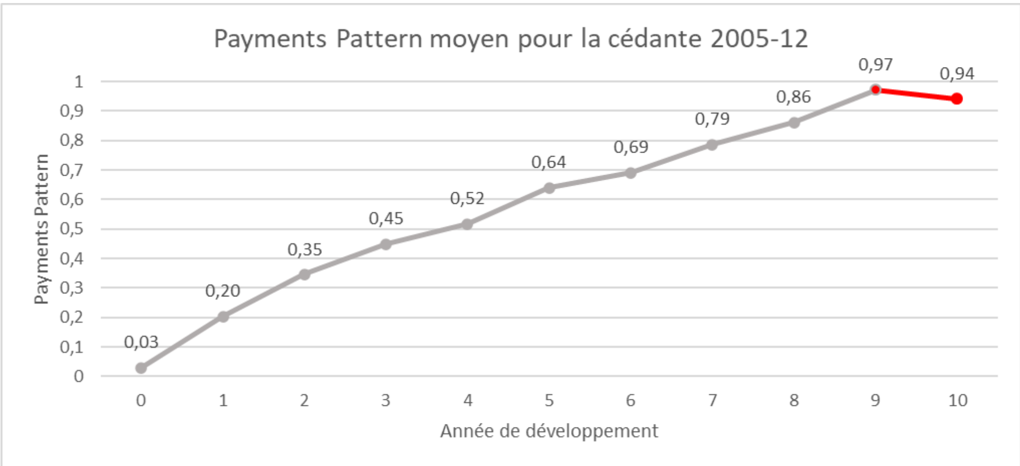


Figure 9 : Cadence des paiements moyenne décroissante dans le cas du modèle actuel

EXEMPLE

Dans le but de bien comprendre cet effet, il est possible de représenter un échantillon de trois sinistres sur lequel serait utiliser le modèle actuel. Ces trois sinistres n'ont pas la même année d'accident, le premier sinistre possède 6 années d'information, tandis que les deux autres sont assez récents n'ont donc que 2 et 3 années de développement.

Leur cadence de paiement respective est représentée dans le tableau ci-dessous

	Année 0	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	Année 6
Sinistre 1	20%	35%	45%	50%	55%	55%	65%
Sinistre 2	30%	30%	80%	90%			
Sinistre 3	15%	30%	80%				

Figure 10 : Exemple de cadence de paiements

Dans le but de calculer la cadence des paiements moyenne, la moyenne est faite sur trois sinistres jusqu'en année 2, puis sur deux sinistres en année 3, et enfin sur un seul sinistre de l'année 4 à l'année 6. La cadence des paiements moyenne pour cet échantillon, utilisé dans le modèle actuel, est le suivant :

	Année 0	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	Année 6
Payments Pattern moyen	22%	32%	68%	70%	55%	55%	65%

Figure 11 : Cadence des paiements moyenne de l'exemple

La cadence des paiements est décroissante lors du passage de l'année 3 à 4 à cause du changement d'échantillon.

Evidemment, cet effet est plus marqué sur des échantillons très petits, mais, comme il a été montré dans l'exemple du sinistre 2005-12 de la base de données française, c'est un effet qui existe et est même assez récurent lorsque la cadence des paiements moyenne est calculée par cédante.

Enfin, le dernier gros problème de cette modélisation est la clôture en dernière année d'information. Il a déjà été évoqué le fait que cette approximation est assez loin d'être réaliste sur les bases de données utilisées, mais il est également important de saisir que cette clôture en dernière année est assez brutale, à la fois au niveau de la cadence des paiements moyenne, puisqu'il est considéré que 60% du sinistre est payé en dernière année pour les sinistres dont l'Ultime est supérieur à 600.000, mais également au niveau des cédantes. En effet, certaines cédantes ayant majoritairement des gros sinistres, donc des sinistres qui se clôturent tard, leur cadence de paiements moyenne est parfois très faible jusqu'en année 9, autour de 20 à 30%. L'obligation de clôturer la cadence des paiements en année 10 entraine donc un paiement de plus de 70% du sinistre en année 10. Ce qui est très irréaliste en vue des données empiriques.

Finalement, le modèle actuel fonctionne assez bien en moyenne, mais il est clair qu'un modèle plus précis qui séparerait les sinistres selon un critère clivant, permettrait sans doute d'améliorer la précision individuelle du modèle et permettrait alors in fine d'avoir une estimation plus correcte du prix final d'un sinistre. Il est alors intéressant de se pencher sur les données et essayer de repérer quels paramètres pourraient permettre de faire un modèle plus précis.

1-4 Analyse Descriptive

1-4-1 Présentation des données

Dans le cadre de ce mémoire, deux bases de données sont étudiées. La première est la base de données MTPL_FR, qui est composée de 9990 sinistres ayant eu lieu entre 2008 et 2017. **Ces sinistres sont communiqués par la cédante au premier euro comptant.** En comptant l'année d'accident comme l'année 0, les sinistres ont au plus 10 années de développement. La deuxième base de données est également une base de données de responsabilité civile automobile puisqu'il s'agit de la base de données MTPL_Belgium, composée pour sa part de 5382 sinistres survenus entre l'année 2000 et 2018. Les sinistres ont au plus 19 années de développement, même si on a vu auparavant que le modèle actuel considérait les sinistres clôturés lors de la 18ème année de développement.

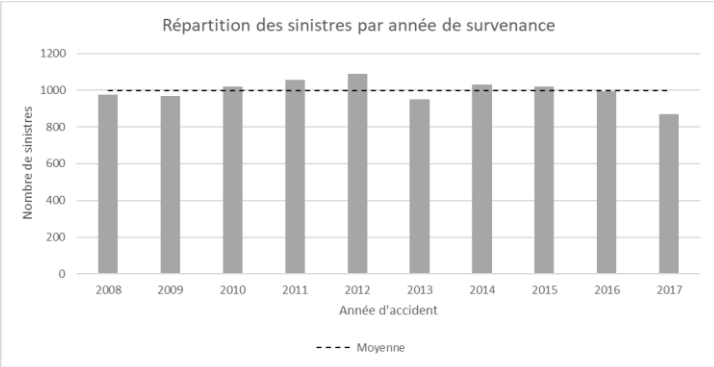


Figure 12 : Histogramme représentant le nombre de sinistres survenus par année FRANCE

Pour la France, les sinistres sont survenus de manière uniforme chaque année, avec un léger décrochage en dernière année. Pour la Belgique les résultats, présentés ci-dessous, sont légèrement différents puisqu'en dernière année d'information, c'est-à-dire en année 2018, il y a une vraie chute du nombre de sinistres survenus. Cela vient évidemment du fait que l'information n'est pas encore complète pour cette année.

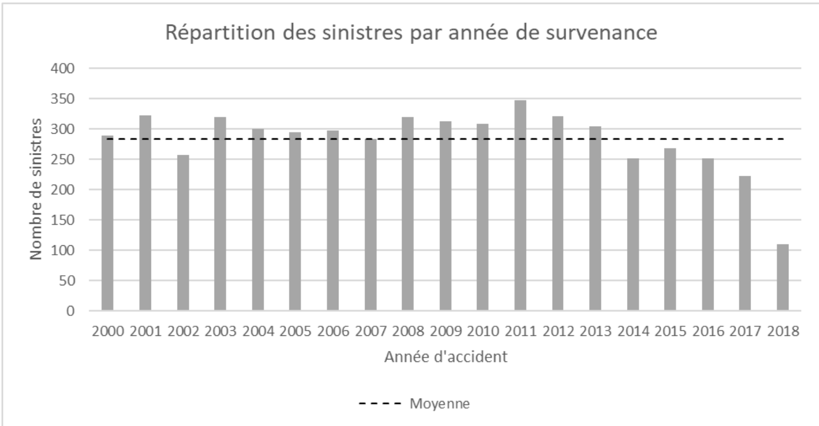


Figure 13 : Histogramme représentant le nombre de sinistres survenus par année BELGIQUE

Pour la base de données française, 46,87% des sinistres sont clôturés, mais 89% de ces sinistres sont des sinistres ayant un Ultime de moins de 600.000, donc des sinistres qui n'atteignent pas la priorité associée au sinistre. Les sinistres clôturés français ont la répartition suivante :

Groupe	Intervalle d'Ultimate
Groupe 1	[0;600.000]
Groupe 2	[600.000;1.000.000]
Groupe 3	[1.000.000;3.000.000]
Groupe 4	[3.000.000;6.000.000]
Groupe 5	[6.000.000;10.000.000]
Groupe 6	[10.000.000;15.000.000]

Figure 15 : Répartition des sinistres par tranche

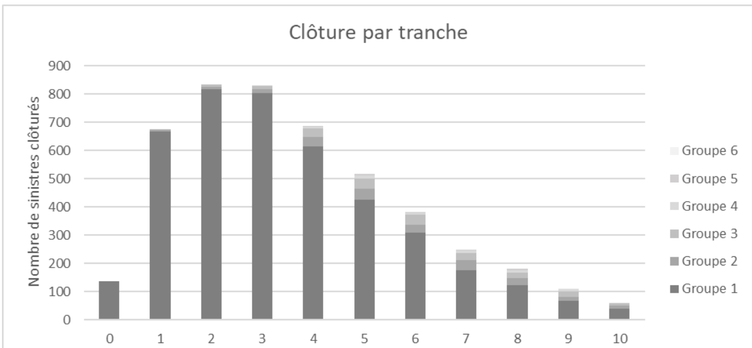


Figure 14 : Répartition de la clôture pour les sinistres clôturés FRANCE

Le Groupe 1 est omniprésent, les sinistres de ce groupe sont clôturés très tôt, mais ce groupe n'est pas vraiment intéressant pour la construction d'un modèle de réassurance, il est donc masqué du graphe ci-dessous :

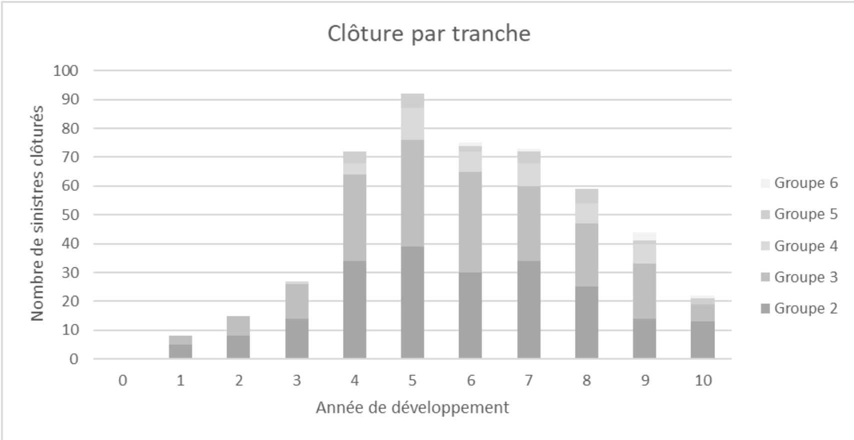


Figure 16 : Répartition de la clôture pour les sinistres clôturés FRANCE (sans Groupe 1)

Comme évoqué auparavant, il semble que considérer que la clôture survient en année 10 est une erreur car de nombreux sinistres ne sont plus ouverts avant cette date, notamment dès les années de développement 4 et 5. Attention tout de même ici à ne pas mal interpréter l'histogramme : il y a sans doute plus de clôture en année 10 qu'en année 5 mais dans la base de données, peu de sinistres ont atteint l'année de développement 10 alors qu'une bonne moitié a atteint l'année de développement 5.

Pour la base de données belge, seul 35,56% des sinistres sont clôturés. Les conclusions sont les mêmes que pour la France. Les clôtures sont composées d'une majorité de petits sinistres qui sont réglés dès les premières années de développement. Aucun sinistre ayant un Ultime estimé à plus de 6.500.000 après inflation n'est pour le moment clôturé alors que la base de données en contient 3%, il y a donc un manque d'information sur les sinistres les plus lourds pour le réassureur.

1-4-2 Recherche de variables explicatives sur la cadence des paiements

1-4-2-a Cadence des paiements générale

Dans cette partie, l'objectif est de trouver quelle(s) variable(s) semble avoir un impact sur la cadence des paiements ou sur le facteur de stabilité. Le travail présenté se concentre sur la base de données MTPL_FR car, bien que les valeurs numériques ne soient pas les mêmes, les observations et les conclusions sur la base de données belge sont les mêmes que celles présentées ci-dessous.

Dans un premier temps, il est intéressant d'observer la cadence des paiements moyenne sur toute la base de données, ainsi que la cadence des paiements moyenne des sinistres clôturés et des sinistres ouverts. Le premier constat fait est que considérer que tous les sinistres sont clôturés en année 10 constitue une erreur notable. La courbe de la cadence des paiements moyenne est assez linéaire, comme c'est également le cas pour la courbe des sinistres ouverts, cependant, la courbe des sinistres clôturés est concave et le changement de coefficient direct est très marqué en année 5, 7 et potentiellement 9. Cela peut correspondre à deux hypothèses, la première est qu'un nombre conséquent de sinistres aient le même comportement ces années-là à savoir que les cédantes effectuent un gros paiement, ou bien, et c'est la seconde hypothèse, qu'un nombre conséquent de sinistres soient clôturés en année 5, 7 ou 9 à l'aide d'un paiement important. Il apparait une distinction très claire entre le comportement d'un sinistre encore ouvert et le comportement d'un sinistre clôturé.

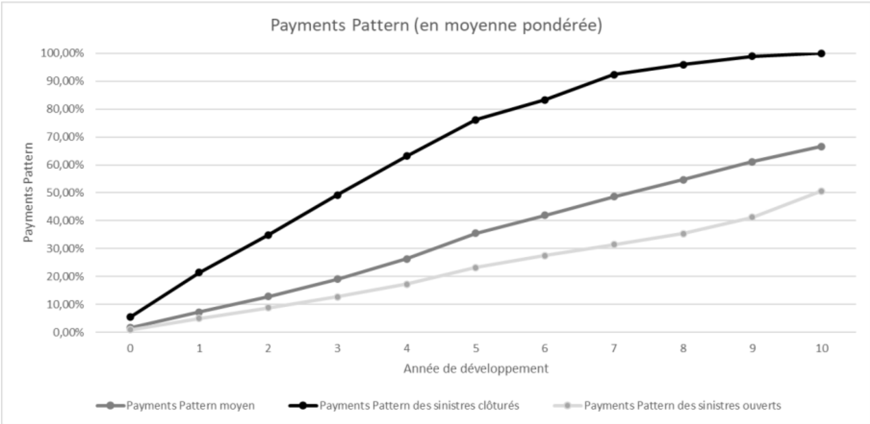


Figure 17 : Courbes représentant les différentes cadences des paiements pour la base de données française

1-4-2-b Cadence des paiements par classe

Dans l'intérêt de trouver des variables significatives sur la cadence des paiements qui pourraient être utilisées pour le modèle, il est commun de comparer la cadence des paiements moyenne pour chacune des classes de ces variables. Cela permet, en fonction des graphiques, de mettre en évidence une ou plusieurs variables pour lesquelles une différence de classe change énormément la cadence moyenne. Ces variables sont alors potentiellement significatives et, de fait, sélectionnables pour le modèle. Dans le cadre des bases de données utilisées pour notre étude, l'information sur les sinistres est très faible, et par conséquence, les variables candidates à la significativité sont peu nombreuses.

La première variable étudiée est l'année de survenance du sinistre. Dans le cas des bases de données étudiées, l'avantage de cette variable et que chaque modalité est représentée dans les mêmes proportions. L'inconvénient cependant et que la cadence des paiements n'est pas complète pour les sinistres les plus récents, et qu'il est compliqué de comparer une cadence des paiements de onze années de développement pour un sinistre ayant eu lieu en 2008 et une cadence des paiements de 2 années pour un sinistre ayant eu lieu en 2017. Néanmoins, il est possible de tirer quelques conclusions avec la partie observable ci-dessous.

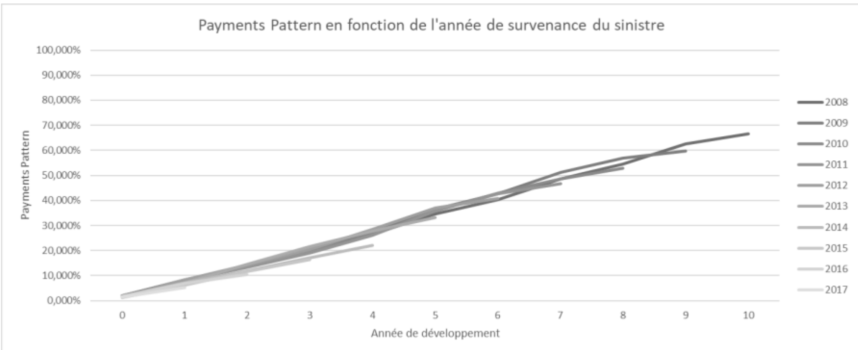


Figure 18 : Courbe représentant le comportement moyen (en moyenne pondérée) en fonction de l'année de survenance

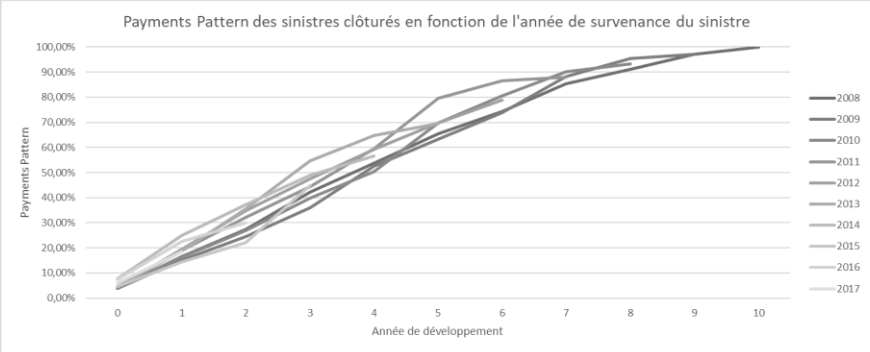


Figure 19 : Courbe représentant le comportement moyen (en moyenne pondérée) en fonction de l'année de survenance pour les sinistres clôturés

La première figure représente la cadence des paiements moyenne, pondérée par la valeur hypothétique du sinistre, en fonction de l’année de survenance de l’accident. Sur ce premier graphique, les courbes ont presque strictement la même allure, à l’exception peut-être des sinistres ayant eu lieu de 2014 à 2017 bornes comprises, qui semble avoir une cadence de paiements plus faible, mais pour lesquels il y a trop peu d’années de développement. A première vue, la variable de l’année de survenance du sinistre ne semble pas avoir d’impact sur la façon de régler le sinistre. La deuxième figure quant à elle représente la cadence de paiements moyenne, pondérée par l’Ultime encore une fois, mais uniquement sur les sinistres clôturés. Comme il ne paraissait pas pertinent de travailler sur le graphe « brut », qui ne permettait pas de comparer les courbes entre elles, les cadences des paiements ont été ici modifiées. Pour l’année 2010 par exemple, qui est développée sur huit années, la cadence des paiements a été multipliée par la moyenne des cadences de paiements en année de développement 8 pour les sinistres d’année de survenance 2008 et 2009. Il s’agit ici de moyenne arithmétique entre les années. Sur ce graphe non plus il ne semble pas être pertinent de distinguer une modalité en particulier. L’année de survenance ne semble pas être un critère à retenir.

La deuxième variable observée est le montant de l’Ultime. Ce montant est une valeur probable pour les sinistres non clôturés puisqu’il correspond à l’Encouru développé grâce à Chain-Ladder pour correspondre à l’effet IBNER. Les sinistres sont classés par tranches arbitrairement choisies. La courbe obtenue ci-dessous permet de noter une réelle différence entre chaque tranche, et il semble évident que le montant de l’Ultime a un impact sur la façon de payer le sinistre. Il semble que plus le sinistre est important, et plus le paiement est lent, et qu’au contraire, tous les petits sinistres, qui n’atteignent pas nécessairement la priorité et donc que le réassureur n’a pas à payer, sont payés dès les premières années de développement. Ce résultat parait cohérent.

Tranche	Intervalle
Tranche 1	[0;500.000[
Tranche 2	[500.000;1.000.000[
Tranche 3	[1.000.000;3.000.000[
Tranche 4	[3.000.000;6.000.000[
Tranche 5	[6.000.000;10.000.000[
Tranche 6	10.000.000;15.000.000
Tranche 7	>15.000.000

Figure 20 : Tranche de sinistres par Ultime

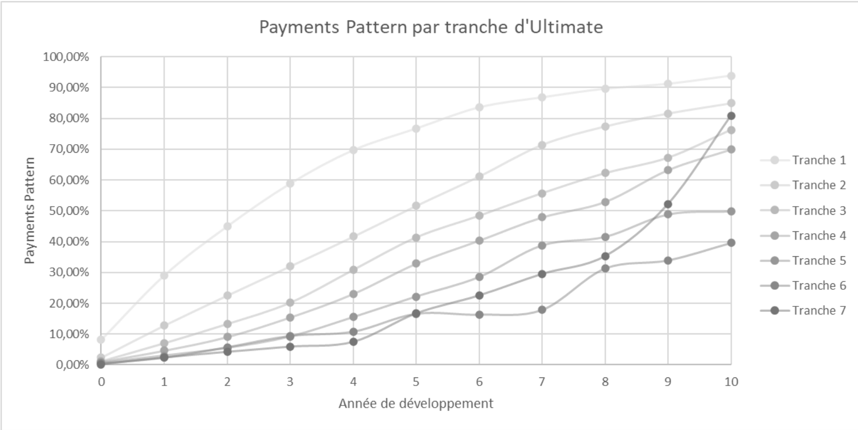


Figure 21 : Cadence de paiements par tranche d'Ultime MTPL_FR

La dernière variable communiquée dans la base de données est l'année de clôture. Pour ce graphe, les sinistres utilisés sont moins nombreux puisqu'on se limite aux sinistres clôturés. Les cadence de paiements ont été modifiés pour mieux correspondre à l'observation voulue avec la méthode que celle utilisée pour les courbes de la cadence de paiements des sinistres clôturés en fonction de l'année de survenance de sinistres.

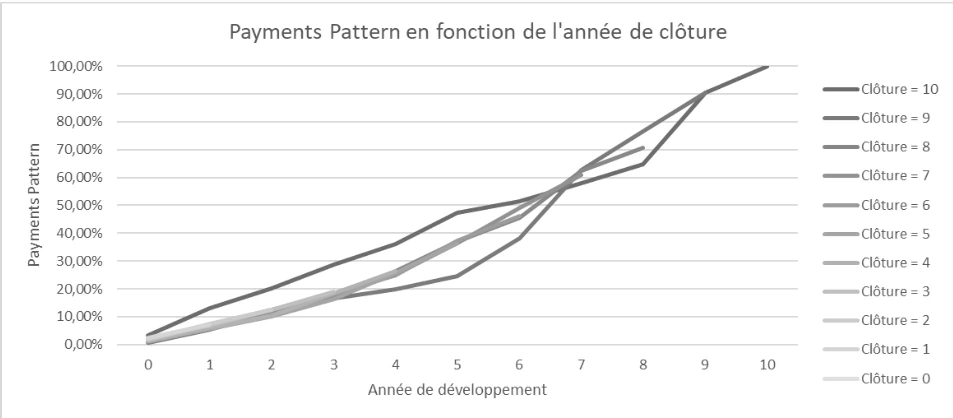


Figure 22 : Courbe représentant la cadence de paiements en fonction de l'année de clôture

Il est intéressant de comparer les différentes courbes présentées ici à la cadence des paiements moyenne des sinistres clôturés. En effet, décomposer année par année permet d'observer que les courbes n'ont pas vraiment une forme arrondie concave comme observée dans le graphe moyen, mais plutôt une forme en « S », signifiant que des premiers paiements sont effectués, suivis d'une phase de stagnation, avant de nouveaux paiements qui viennent clôturer le paiement. Ce graphe présente une autre particularité notable, puisqu'on observe qu'à l'exception des clôtures en année 10 et 9, les autres années de clôture présentent une cadence de paiements très similaire. Une propriété qui s'avèrera utile dans la création du modèle.

1-4-3 Difficultés à utiliser les modèles classiques de l'assurance

Après avoir observé les différents graphes des variables de la base de données, il est évident que les modèles classiques utilisés actuellement en assurance ne pourront pas être utilisés dans le modèle de la cadence de paiements. En effet, la base de données comporte peu de variables, et ces variables ne semblent pas ou assez peu significatives. Cela correspond à un des enjeux majeurs du réassureur, qui doit souvent travailler avec peu d'information fournie par la cédante, et une information qui peut être incorrecte. Le détail de cette information est également très faible, ou l'information est simplement parfois incorrecte, comme ça peut être le cas lorsqu'un sinistre n'a pas encore atteint la priorité et que de fait, la cédante ne le déclare pas au réassureur. Etant donné tout cela, il est également primordial de pouvoir garder une bonne mesure de la sensibilité du modèle, et donc d'éviter tous les modèles « Boite noire » souvent utilisés en assurance, comme les modèles de Science de la donnée, c'est-à-dire en autres, les modèles basés sur des forêts aléatoires, des Réseau de neurones ou d'augmentation de Gradient.

II - Nouveau modèle de cadence de paiements

Une fois toutes les bases présentées, cette deuxième partie se concentre maintenant sur le nouveau modèle créé afin de modéliser la cadence des paiements et, dans l'idéal, faire mieux que le modèle actuel. Ce modèle doit donc être plus précis que le modèle actuel, tout en restant maigre en paramètres utilisés, et en étant facilement traçable. Cette partie traite dans un premier temps du travail préliminaire de nettoyage des données, qui, même s'il parait facile, est nécessaire. Puis, le modèle repose sur la création d'une cadence des paiements par année de clôture, il est donc nécessaire d'évoquer dans un premier temps le modèle de clôture utilisé pour ensuite présenter le modèle de cadence des paiements a priori. Enfin, un travail sur l'extrapolation du modèle est présenté. Les résultats seront ensuite présentés dans la partie suivante.

II-1 Traitements de la base de données

<u>II-1-1 Lissage des paiements négatifs</u>

Même si les cadences de paiements présentées précédemment étaient tous croissant, à l'échelle d'un sinistre ou d'une cédante, il est possible d'observer une décroissance. Cela s'explique par la présence d'un paiement incrémental négatif dans la base de données. Un paiement négatif peut correspondre à un sinistre payé par le réassureur, et qui, par suite du jugement, n'avait pas à être payé à l'assuré. Dans le cadre du modèle, il n'est pas intéressant de garder l'information d'un paiement négatif et il est préférable de n'avoir qu'une cadence des paiements croissante ou nulle. Le paiement négatif est alors lissé sur les années précédentes. Le paiement incrémental négatif est considéré comme nul et la valeur est soustraite au paiement suivant, ou sur les paiements suivants si le paiement suivant ne suffit pas. Si la somme des paiements ne suffit pas à lisser le paiement négatif, alors le sinistre est considéré comme nul. Grâce à ce procédé, la somme des paiements ne change pas avec le lissage et les paiements cumulés sont bien strictement croissants.

<u>EXEMPLE</u>

Dans l'exemple ci-dessous, le paiement négatif en année 3 est rendu nul, puis soustrait à l'année 2. Cependant, l'année 2 ne suffisant pas, il faut soustraire la partie restante à l'année 1.

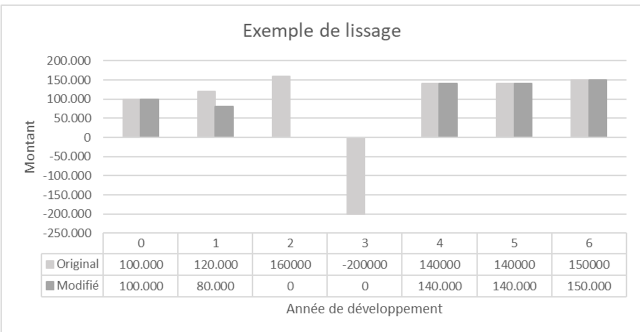


Figure 23 : Exemple de lissage sur un paiement négatif

II-1-2 Suppression de l’année en cours

Il est important que chacune des années de la base de données soient complètes. Pour cette raison, il est important de supprimer la dernière année d’information pour chacun des sinistres, sauf si celle-ci est complète. Pour la base de données belge, il s’agit de supprimer toute la dernière diagonale, et donc de fait l’année de développement 19. Pour la France, il est inutile de supprimer une année de développement mais certains sinistres ont été mis à jour et d’autre non. Il s’agit de supprimer toutes les informations données en dernière année pour avoir la même information pour chaque sinistre.

II-1-3 Calcul de l’Ultime – Effet IBNER

Pour le Calcul de l’Ultime, présenté dans la partie précédente consacrée au modèle actuel, tous les sinistres sans distinction servent au calcul du coefficient. Or, comme les montants sont communiqués au premier euro comptant, les sinistres les plus petits ont tendance lors des premières années à voir le montant de leur Encouru multiplié par 10, voire bien plus. Cependant, en termes d’augmentation absolue, cela représente assez peu et à l’échelle de tout le portefeuille cela n’est pas significatif. D’autant plus qu’il s’agit de sinistre qui ne dépasse pas la priorité donc que le réassureur ne va pas payer. Pour pallier ça, il est préférable de ne prendre que l’évolution des sinistres au-dessus de 600.000 pour l’année n et l’année n+1. Les coefficients sont donc plus faibles les premières années. L’autre effet des petits sinistres est qu’il n’évolue plus après leur clôture dans les premières années, et qu’ils plombent vers le bas les coefficients des années les plus développées.

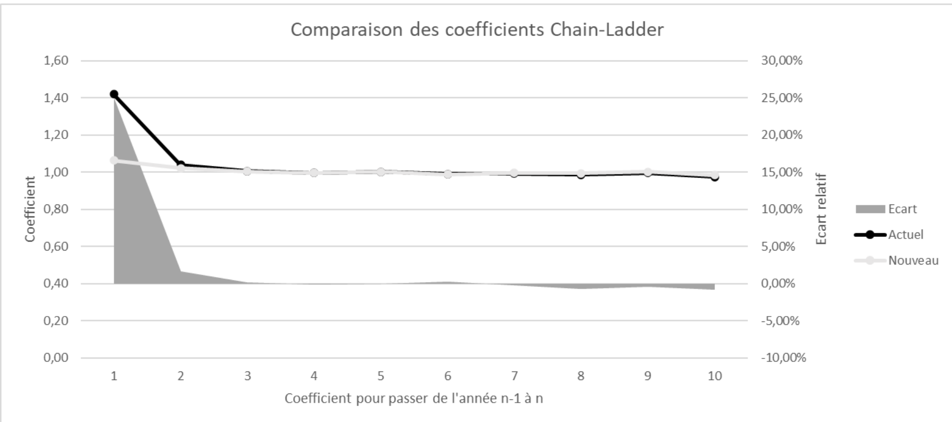


Figure 24 : Coefficients utilisés dans chaque modèle pour le calcul de l'Ultime MTPL_FR

L’écart relatif sur ce graphe désigne la différence entre le coefficient du modèle actuel auquel on divise le coefficient du nouveau modèle, le tout sur le coefficient du modèle actuel. « Actuel » désigne les coefficients calculés avec l’ensemble des sinistres et utilisés dans le modèle actuel. Les coefficients obtenus présentent le résultat attendu, avec des coefficients plus élevés les premières années, puis qui deviennent plus faibles à partir de l’année 7. Cela a un impact non négligeable sur le prix puisque cela correspond, sur la base de données française, à une augmentation de la valeur agrégée des Ultime de 2% pour une priorité de 1.000.000.

II-1-4 Nouvelle définition de la clôture

Pour le moment, dans le modèle actuel, la clôture n'est pas une information prise en compte. Dans la base de données, l'information de la clôture est une information fournit par la cédante et ne correspond pas systématiquement aux sinistres payés entièrement. On note notamment 11 sinistres payés à 100% et considérés comme encore ouverts par la cédante et donc par le réassureur pour la base de données française. Dans la mesure où, concernant la cadence des paiements et donc le facteur de stabilité, le sinistre n'évoluera plus puisqu'il est déjà entièrement payé, il peut être cohérent de considérer ces sinistres clôturés l'année où ils atteignent 100%. Les sinistres doivent être considérés comme clôturer uniquement pour la mesure de la cadence des paiements. En effet, il est totalement probable qu'un sinistre soit considéré comme payé à 100% mais qu'un nouvel élément non prévu par la cédante fasse augmenter l'Encouru, et donc nécessite d'autres paiements. Cette situation correspond à une erreur de provisionnement de la cédante. Mais dans le cas de la cadence des paiements, l'erreur de provisionnement n'est pas considérée et le montant de l'Encouru est considéré comme correct, moyennant l'effet IBNER. Il parait alors cohérent de considérer un sinistre payé à 100% comme clôturé.

En allant plus loin, si l'on s'intéresse à la cadence des paiements par sinistre pour les sinistres clôturés une certaine année, il est possible d'observer un comportement particulier et qui est très intéressant dans la modélisation de la cadence des paiements.

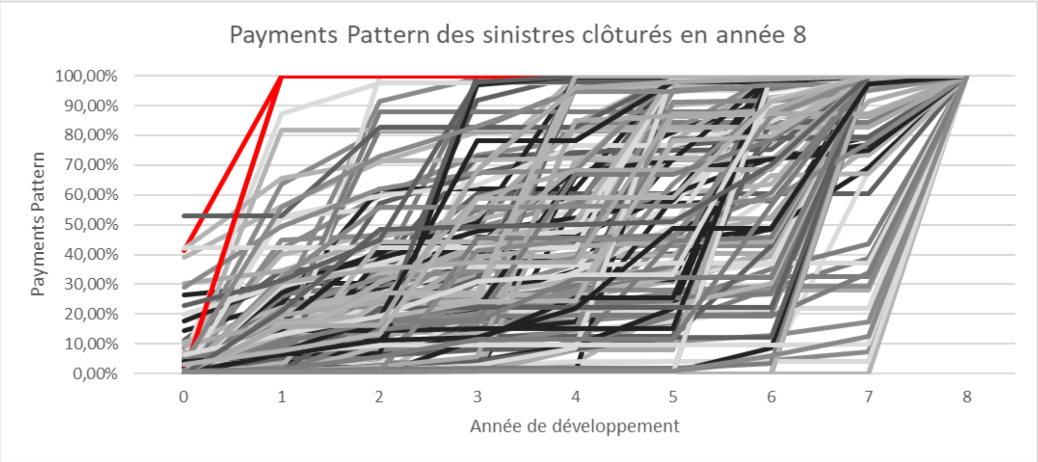


Figure 25 : Représentation graphique de la cadence des paiements des sinistres clôturés en année 8 MTPL_FR

Sur ce graphique est représenté la cadence des paiements de tous les sinistres clôturés en année 8. Les sinistres considérés clôturés en année 8 par la cédante comprennent certains sinistres, comme ceux en rouge sur la figure ci-dessus, qui finalement pourraient être considérés comme clôturés bien avant l'année 8. Ces sinistres ne sont pas nécessairement encore payés à 100% mais sont très proches de l'être, et, finalement, le dernier paiement aura un impact assez négligeable sur le facteur de stabilité. Il est préférable pour le nouveau modèle de considérer les sinistres clôturés l'année durant laquelle ils approchent de 100%. Pour les sinistres en rouge, cela correspond à l'année 1. Cet effet va diminuer le nombre de sinistres clôturé en année 8, mais peut dans le même temps l'augmenter, comme dans l'exemple proposé ci-dessous. Le nombre de sinistres clôturés en année 5 sera diminuer de 2, puisque les deux sinistres en rouge seront maintenant considérés clôturés en année 3, mais sera également augmenter d'un car le sinistre en vert, précédemment clôturé en année 8, est maintenant rattaché à l'année de clôture 5.

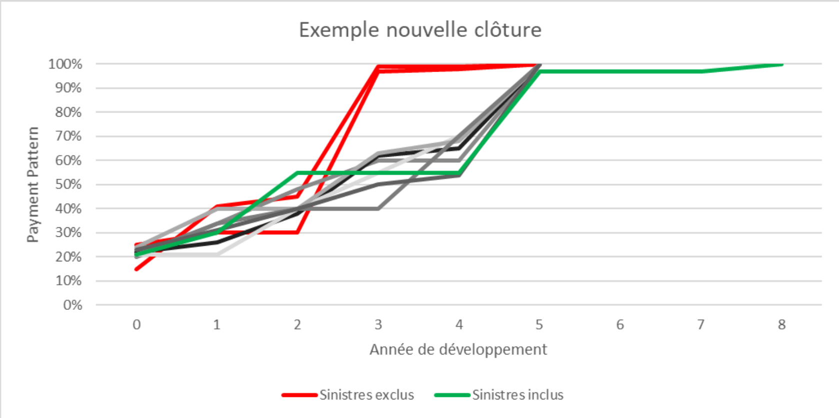


Figure 26 : Graphique présentant la définition de la nouvelle clôture

Il s'agit dorénavant de déterminer à quel seuil il faut considérer qu'un sinistre est clôturé. Pour cela, il est nécessaire de choisir la valeur d'erreur à minimiser, et la méthode a utilisé pour la minimiser. Pour le choix de l'erreur, il est choisi de minimiser la racine de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) en moyenne pondérée sur le facteur de stabilité. C'est-à-dire minimiser l'écart entre le facteur de stabilité du sinistre et le facteur de stabilité moyen de l'année de clôture à laquelle le sinistre est rattachée. Plus précisément, il s'agit de minimiser :

$$Erreur = \sqrt{\frac{1}{\sum_{k=0}^{DY_{max}} \sum_{i=1}^{N_k} Ultime(S_{k,i})}} * \sqrt{\sum_{k=0}^{DY_{max}} \sum_{i=1}^{N_k} \left(Stabilité(S_{k,i}) - Stabilité(S_k)\right)^2 * Ultime(S_{k,i})}$$

Où :

- DY_{max} est l'année de développement maximale considérée donc 10 en France et 18 en Belgique.
- N_k est le nombre de sinistres clôturés en année k selon le seuil de clôture.
- $S_{k,i}$ est le $i^{ème}$ sinistre clôturé en année k.
- $S_k$est le sinistre moyen (pondéré) clôturé en année k. Il suit le Payments Pattern moyen des sinistres clôturés en année k.

L'intérêt d'une telle erreur est de donner plus de poids aux plus gros sinistres de la base de données. En faisant varier le seuil de clôture, les sinistres passent d'une année de clôture à l'autre.

Pour le choix de la méthode, il a été choisi de déterminer le seuil optimal de clôture commun à toutes les années, c'est-à-dire la valeur à partir de laquelle les sinistres allaient être considérés comme clôturés. Pour la France, ce seuil est de 97,0%. Pour la Belgique, il est de 97,1%. Cette valeur est obtenue à l'aide d'un processus itératif testant toutes les valeurs possibles dans l'intervalle donné (ici [50% ;100%]). Le processus est expliqué en détail en ANNEXE 1. Une fois la valeur optimale obtenue, elle est fixée comme valeur de seuil pour chaque année, puis, année par année, un nouveau processus itératif fait varier le seuil uniquement pour l'année concernée. Le processus boucle plusieurs fois et s'arrête lorsque la valeur du seuil est constante et donc que le seuil permet une erreur minimale. Il s'agit au moins d'un minimum local.

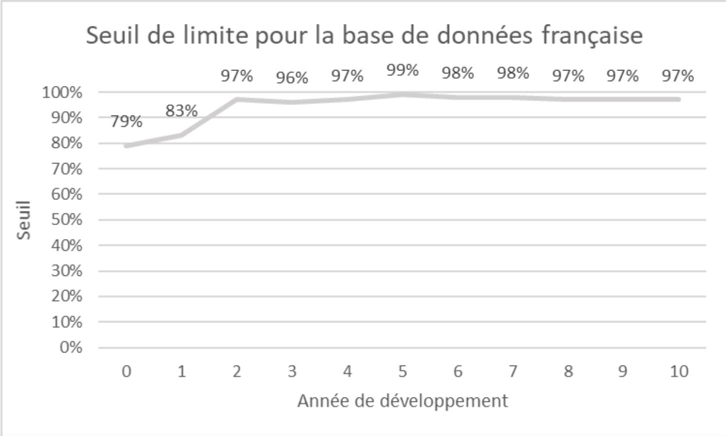


Figure 27 : Limite optimale MTPL_FR

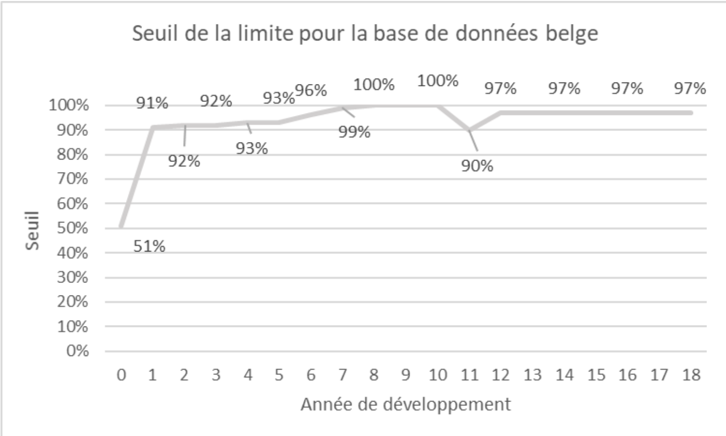


Figure 28 : Limite optimale MTPL_BE

Pour les deux bases de données, le seuil de la limite est assez bas les premières années, atteignant même les 51% en année 0 pour la base de données belge, ce qui signifie que si plus de la moitié du sinistre est payé en année 0, il est considéré comme clôturé. Il est intéressant de noter que pour la base de données belge, le seuil de clôture est à 100% pendant 3 années de développement, de l'année 8 à l'année 10, ce qui signifie que seuls les sinistres totalement payés seront considérés comme payés. Cette période à 100% est suivie d'une année beaucoup moins restrictive avec un seuil à 90%. Dans le cas d'un sinistre ayant dépassé le seuil de clôture pour une certaine année de développement, et qui pour une année plus développée, n'est pas au-dessus du seuil, comme ça peut être le cas en Belgique, il est considéré que le sinistre est tout de même clôturé lors de la première année de dépassement de seuil. Par exemple, pour un sinistre belge, payé à 95% en année 11, le sinistre est au-dessus du seuil de 90%, et est considéré comme payé. Si en année 12, alors que le seuil est maintenant de 97%, le sinistre est toujours payé qu'à 95%, on le considère toujours comme clôturé.

En comparant la répartition de la clôture, présentée dans les graphes ci-dessous, il apparait que le nombre de clôture augmentera pour les premières années, mais que pour les dernières au contraire ce nombre diminuera. Il est intéressant de noter qu'assez peu de sinistres qui n'étaient pas auparavant considérés comme clôturés le sont maintenant. Pour la France, il y en 343 (+7,5%), et pour la Belgique, ce nombre est de 128 (+7,0%).

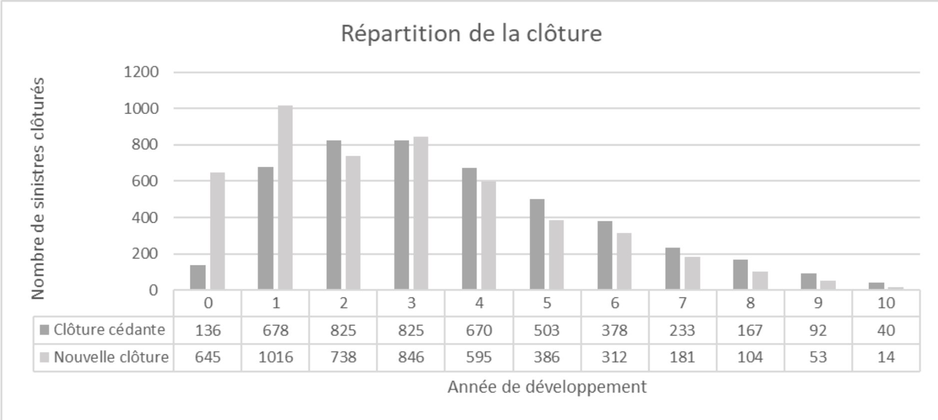


Figure 29 : Répartition de la clôture pour la base de données française

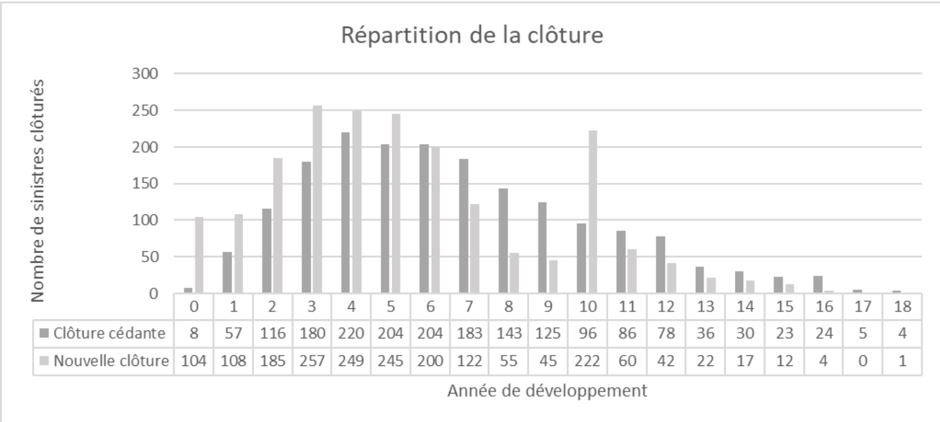


Figure 30 : Répartition de la clôture pour la base de données belge

Sur la base de données belge, la nouvelle définition de la clôture provoque beaucoup de clôtures en année 10, qui sont dues aux trois années précédentes très « strictes » (seuil à 100%) et a une condition beaucoup plus large en année 10 (seuil à 90%). Ce changement « brutal » sur la condition de clôture peut être expliqué par le fait qu'en Belgique le jugement pour un sinistre met en moyenne dix années à être prononcé, et qu'à l'issue de ce jugement, une rente est versée.

Cette nouvelle définition de la clôture permet de supprimer les cadences de paiements atteignant quasiment 100% rapidement mais qui sont clôturés plus tard. Cela va permettre de modéliser une cadence des paiements moyenne par année de clôture plus proche du comportement des sinistres, et cela réduit l'erreur quadratique moyenne en moyenne pondérée d'un peu plus de 4%. Cependant pour cela, avant de modéliser la cadence des paiements par année de clôture, il est nécessaire de pouvoir modéliser la clôture.

II-2 Modèle de clôture

A partir de maintenant, et principalement dans cette sous-partie, lorsque la clôture est abordée, il s'agit de la clôture présentée dans la sous-partie précédente. C'est-à-dire la clôture définie comme le dépassement d'un seuil dépendant de l'année.

II-2-1 Utilisation d'un modèle de Poisson

Afin de modéliser l'année clôture, il est commun d'utiliser une loi de Poisson défini de la manière suivante :

$$\mathbb{P}[DY_{Clôture} = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\lambda \in]0; +\infty]$$

Où :

- e est la base de l'exponentielle.
- k! Désigne la factorielle de k.

La loi de Poisson correspond bien ici à la volonté d'avoir peu de paramètres, puisqu'elle n'en comporte qu'un seul, λ, qui respecte la propriété suivante :

$$\lambda = \mathbb{E}[DY_{Clôture}] = \mathbb{V}[DY_{Clôture}].$$

Cela permet d'obtenir la valeur du paramètre très facilement grâce à la moyenne de la clôture sur la base de données. La fonction de répartition d'une loi de Poisson correspond bien aux graphes de répartition de la clôture des bases de données belge et française présentées dans la sous-partie précédente.

Cependant, observer les sinistres clôturés par année, comme effectué ci-dessous grâce au graphique d'aires empilées, permet de remarquer que les sinistres clôturés lors des premières années sont les sinistres les plus petits en termes d'Ultime, tandis que pour les années de développement les plus avancées, la part de sinistre plus important est plus grande. Ce résultat correspond bien à l'analyse faite auparavant.

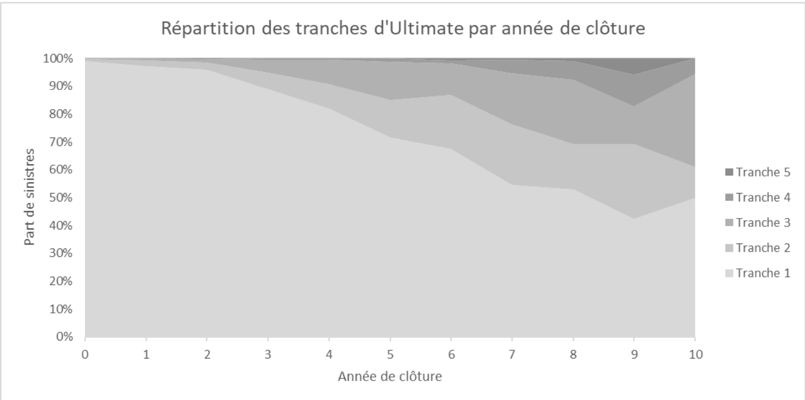


Figure 31 : Répartition des sinistres par année de clôture

Tranche	Intervalle
Tranche 1	<500.000
Tranche 2	[500.000;1.000.000[
Tranche 3	[1.000.000;5.000.000[
Tranche 4	[5.000.000;10.000.000[
Tranche 5	>10.000.000

Figure 32 : Tranche de sinistre par Ultimate

Utiliser une loi de poisson sans distinction sur la taille de sinistres provoquerait une erreur qui pourrait se révéler assez grave puisque les gros sinistres, donc ceux qui en général sont clôturés plus tardivement, seraient modélisés à l'aide d'une loi de poisson dont la moyenne est fortement tirée vers les premières années de développement par les nombreux petits sinistres. Cela pousserait à minimiser la clause stable pour la priorité et de fait pousserait à augmenter le montant payé par le réassureur. Il y aurait une erreur de tarification dans le sens de la surestimation du montant à payer. Pour éviter cela, il pourrait être intéressant de pondérer l'année de clôture par le montant de l'Ultime pour avoir un paramètre λ moins influencé par la faible proportion de gros sinistres, ou alors simplement d'exclure les plus petits sinistres comme ça a déjà été le cas pour ce modèle lors du calcul de l'Ultime. Cependant, même au sein des sinistres les plus gros, il y a une disparité au niveau de la clôture, ce qui a influencé le choix de faire un modèle plus complexe d'un simple Poisson, tout en se restreignant pour garder le modèle assez simple.

II-2-2 Poisson par classe

Plutôt que d'utilise une loi de Poisson simple sur toute la base de données, qui provoquerait une erreur dans le prix estimé du sinistre, il est préférable de faire un modèle par classe d'Ultime, ou par tranche d'Ultime. Les sinistres les plus petits seront ainsi modélisés par un modèle de Poisson différent de celui des sinistres les plus importants. L'enjeu est de déterminer quel est le nombre de classe et les classes nécessaires pour modéliser au mieux l'année de clôture, tout en conservant un modèle avec peu de paramètres pour garder un modèle simple. Pour ce faire, le critère BIC défini comme suit est un bon outil :

$$BIC = -2 * \ln(L) + k * \ln(N)$$

Où :

- L est la vraisemblance du modèle de clôture
- N est le nombre d'observations dans l'échantillon. Dans le cas du modèle, tous les sinistres clôturés sont gardés donc N est une constante. Dans ce cas de figure, choisir un modèle AIC aurait été tout autant adapté.
- N est le nombre de paramètres libres du modèle.

Avec :

$$N = N_{Classe} + N_{Poisson}$$

Avec N_{Classe} le nombre de pivots nécessaires à la définition des classes et $N_{Poisson}$ le nombre total de paramètres nécessaires pour définir les lois. Finalement, comme il est nécessaire d'avoir n-1 pivots pour définir n classes, et que chaque classe nécessite un paramètre pour la loi de Poisson qui lui est associée, alors pour n classe, $N = 2n - 1$.

Concernant la log-vraisemblance, la formule est la suivante :

$$\ln(L) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{a \in C_n} \ln \left(\mathbb{P}(DY_{Clôture} = DY_{Clôture}(a), \lambda_{C_n})\right)$$

Où :

- C_n est la classe d'Ultime numéro n.
- $DY_{Clôture}(a)$ est l'année de clôture du sinistre a.
- λ_{C_n} est le paramètre de la loi de Poisson de la classe C_n.

Pour chaque nombre de classes potentiel n est effectué le calcul du modèle $M_{n,BIC}$, c'est-à-dire du modèle qui minimise le critère BIC :

$$M_{n,BIC} = arg \min_{M_n} BIC(M_n).$$

Puis, le modèle optimal est le modèle qui minimise le BIC parmi les différents modèles optimaux :

$$M_{BIC} = arg \min_{M_{n,BIC}} BIC(M_{n,BIC}).$$

Pour chacun des modèles, il est imposé que le premier pivot soit la valeur 500.000, puisqu'il est considéré que c'est la priorité minimale du portefeuille et que donc aucun sinistre inférieur à 500.000 ne sera pris à charge par le réassureur.

Après optimisation du nombre de classes et détermination des paramètres des lois de Poisson, le modèle n'est pas totalement satisfaisant. En effet, en Belgique, l'optimisation permet de savoir que quatre classes est le nombre optimal de classe, mais pour la dernière classe, qui contient les sinistres les plus gros, le paramètre de la loi de Poisson est faible, comme il est possible de le voir sur le graphe suivant :

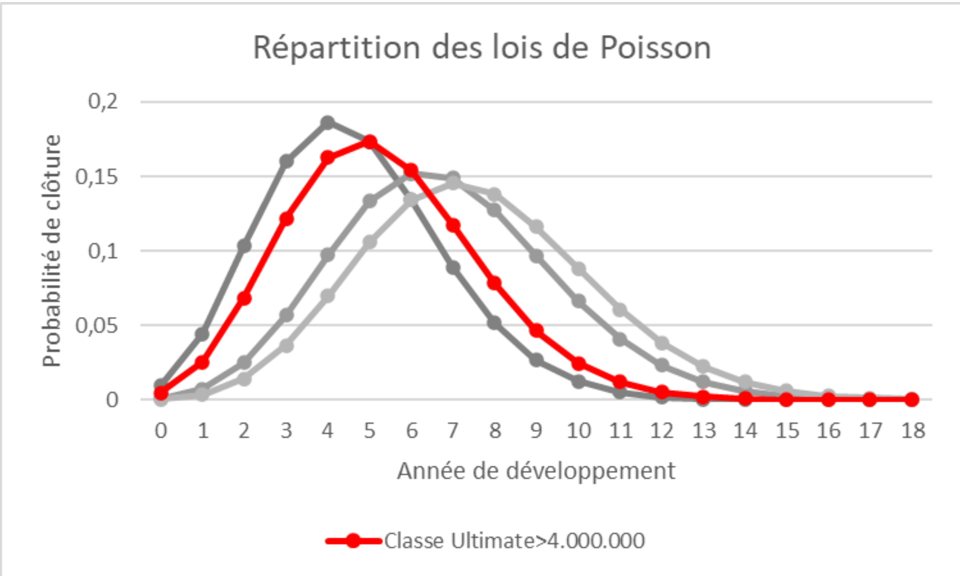


Figure 33 : Courbe des différentes fonctions de répartition MTPL_BE

Cela s'explique par le manque d'information à disposition. Les sinistres dans la tranche supérieure à 4.000.000 sont peu nombreux, et la plupart ne sont pas beaucoup développés. A cause de cela, seule une dizaine de sinistres sont clôturés et principalement dans les années les plus récentes. Cependant, on sait, parce qu'une majorité de sinistres de cette tranche sont encore ouverts dans les années après l'année 5 (la moyenne de la Poisson), que si tous les sinistres étaient clôturés, et que l'on avait une information complète, la moyenne de la clôture serait bien plus grande que l'année 5. Ce phénomène est particulièrement marqué pour la classe des plus grands sinistres, mais a lieu dans chaque tranche. Il est nécessaire de le prendre en compte.

II-2-3 Extrapolation des sinistres ouverts

Afin de contrôler cet effet, une solution peut être d'extrapoler les sinistres encore ouverts pour les considérer comme fermés et utiliser l'information de leur fermeture pour la mesure du paramètre λ. Pour cela, il faut complexifier légèrement la méthode de détermination du nombre de seuil et de pivots présentée précédemment.

Dans un premier temps, il est considéré la chose suivante : si un sinistre est clôturé, au sens défini auparavant, c'est-à-dire que sa cadence des paiements se trouve au-dessus du seuil, alors le sinistre est clôturé et l'année de dépassement du seuil est gardée comme année de clôture. Si un sinistre est ouvert en LKS (Last Known Situation), alors sa dernière année de développement, c'est-à-dire DY_{LKS} est considérée comme son année de clôture. La valeur de son Ultime reste celle calculée grâce à Chain-Ladder lors de la préparation des données. Il est accepté que pour un sinistre ouvert :

$$\sum_{i=0}^{DY_{LKS}} Payment_i \neq Incurred_{DY_{LKS}} \neq Ultimate$$

Pour chaque combinaison de classe et de pivot, le paramètre de la loi de Poisson est calculé de la manière suivante :

$$\lambda_{prior} = \frac{1}{N_A} * \sum_{a \in A} DY_{Clôture}(a).$$

Où :

- A est l'ensemble des N_A sinistres de la classe A.
- $DY_{Clôture}(a)$ désigne l'année de clôture du sinistre a.

A l'aide de ces distributions a priori, il est possible de recalculer l'année de clôture des sinistres ouverts. L'année de clôture $DY_{Clôture}$ prend alors pour valeur :

$$DY_{Clôture} = \begin{cases} DY_{Clôture} \text{ } si \text{ } le \text{ } sinistre \text{ } est \text{ } clôturé \text{ } (critère \text{ } Seuil) \\ \mathbb{E}[DY_{Clôture} | DY_{Clôture} > LDY, \lambda_{prior}] \end{cases}$$

Dans le cas où le sinistre n'est pas clôturé, l'année de clôture devient l'année de clôture espérée sachant que le sinistre est ouvert en DY_{LKS}. La nouvelle année de clôture sera alors supérieure à l'année de clôture précédemment considérée.

À la suite de cela, il est possible de recalculer la moyenne des années de clôture par classe pour obtenir $\lambda_{posterior}$. Le processus est alors réitéré en prenant $\lambda_{prior} = \lambda_{posterior}$, jusqu'à ce que l'itération ne diminue plus le critère BIC. Cela consiste alors en un processus d'**espérance maximisation.** Une fois que les paramètres $(\lambda_c)_{c \in [\![1;n]\!]}$ optimaux obtenus pour chaque combinaison de pivot et de nombre de classe. La valeur du BIC de chacune des combinaisons sont comparées et le modèle retient encore une fois le BIC minimal. Ainsi, à l'issue de ce processus, le modèle permet d'avoir le nombre de classe, l'intervalle de valeur d'Ultime de chaque classe, et les valeurs du paramètre de Poisson de chaque classe.

Sans Extrapolation			Avec Extrapolation		
Classe	Intervalle	Moyenne	Classe	Intervalle	Moyenne
Classe 1	<500.000	4,65	Classe 1	<500.000	7,07
Classe 2	[500.000;1.100.000[	6,84	Classe 2	[500.000;800.000[	9,36
Classe 3	[1.100.000;4.000.000[	7,59	Classe 3	[800.000;1.700.000[	11,8
Classe 4	>4.000.000	5,33	Classe 4	>1.700.000	15,61

Figure 34 : Evolution du modèle de clôture avec/sans extrapolation MTPL_BE

Pour la base de données belge comme pour la base de données française, l'extrapolation ne change pas le nombre de classe optimal, cependant, comme précisé dans le tableau récapitulatif ci-dessus, les intervalles et les moyennes (donc les paramètres des lois de Poisson) changent largement. Cette nouvelle modélisation correspond plus aux échéances de clôture attendues pour chaque contrat.

II-2-4 Résultats et robustesse du modèle de clôture

Pour la base de données belge, les résultats sont présentés dans le tableau précédent. En France, le modèle de clôture optimal est un modèle à deux classes. Confronter les données historiques à la fonction de répartition de la clôture obtenue avec le modèle, comme c'est le cas dans la figure ci-dessous, permet de rendre compte de l'effet de l'extrapolation. En effet, la courbe du modèle ne suit pas strictement les clôtures mais a un léger retard, de deux à trois années, qui correspond à la prise en compte des sinistres encore ouverts qui vont se clôturer. Le même résultat est obtenu pour la Belgique. Il est également notable de constater que pour la deuxième classe du modèle, la probabilité de clôture après l'année 10 est assez importante : un sinistre de cette tranche a 31,36% de chance de se clôturer après l'année 10.

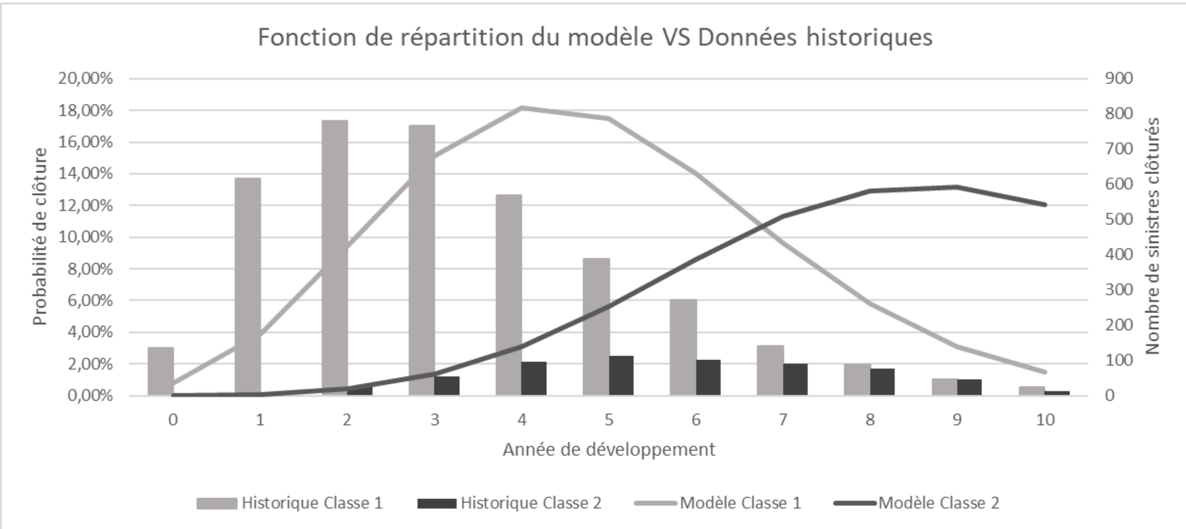


Figure 35 : Comparaison du modèle de clôture et de la clôture historique MTPL_FR

Ce graphique est obtenu avec le modèle de clôture suivant :

Classe	Intervalle	Moyenne
Classe 1	<600.000	4,81
Classe 2	>600.000	9,16

Figure 36 : Modèle de clôture MTPL_FR

Une fois les modèles paramétrés, il est intéressant de vérifier la robustesse du modèle, c'est-à-dire à quel point le modèle est sensible à l'ajout ou au retrait de sinistres dans la base de données. L'idéal ici est de disposer d'un modèle assez robuste pour ne pas avoir à recalculer les paramètres à chaque ajout.

II-2-4-a Restriction à une cédante

Pour tester la robustesse, les 4 plus grosses cédantes, en termes de montant d'Ultime, vont être isolées puis retirées tour à tour de la base de données. Le même procédé d'optimisation, en minimisant le critère BIC, va être appliqué aux sinistres. La seule contrainte imposée est le nombre de classes, qui est maintenu fixé à deux pour la France et quatre pour la Belgique. Les pivots et les paramètres peuvent potentiellement changer, même si en France, comme un pivot à 600.000 est fixé, seuls les paramètres des deux lois de Poisson peuvent changer. Pour la France, les quatre cédantes retenues sont les quatre cédantes ayant la plus grosse part dans la somme des Ultime dans la base de données.

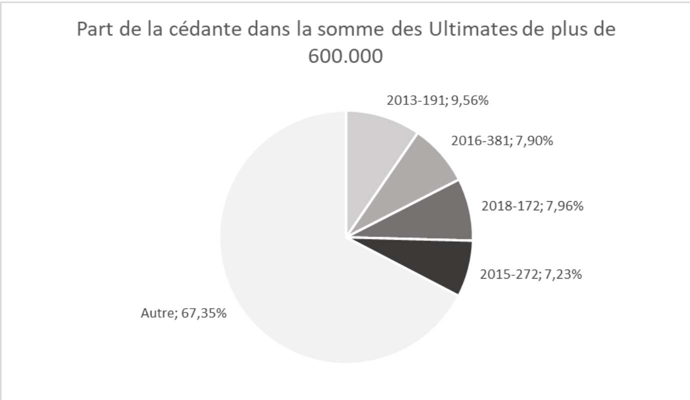


Figure 37 : Cédantes retenues pour tester la Robustesse

Dans un premier temps, le processus d'optimisation est utilisé pour ne créer le modèle qu'avec les informations de la cédante. C'est-à-dire qu'au lieu de calculer avec toute la base de données, le modèle n'utilise que la petite centaine de sinistres de la cédante. Les probabilités de clôture des deux classes sont représentées ci-dessous. La courbe en pointillé représente la distribution de la clôture pour la classe 1 et la courbe pleine celle de la classe 2.

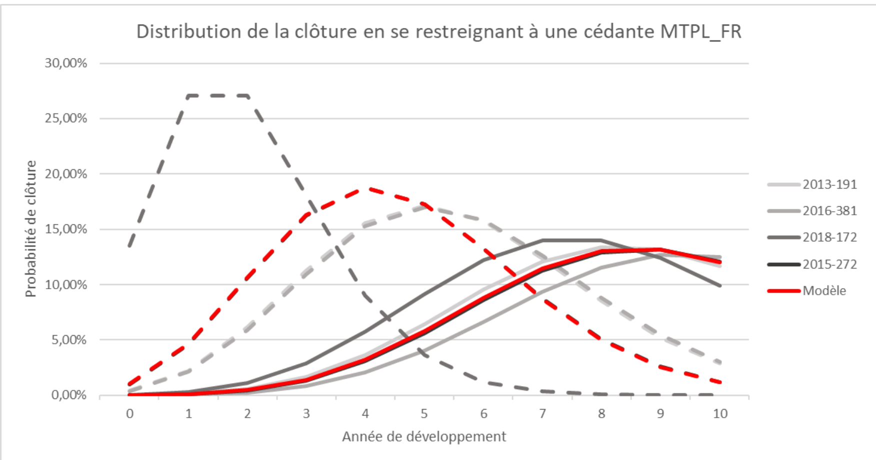


Figure 38 : Optimisation sur une seule cédante

Sur les courbes pleines, qui représentent la classe significative pour le réassureur, on note que les modèles créés à l'aide d'une cédante sont tous assez proches de la courbe rouge « Modèle » qui représente la distribution de la clôture sans restriction sur les cédantes.

II-2-4-b Exclusion d'une cédante

Dans un second temps, le même travail est effectué en travaillant sur l'exclusion de la cédante et en calculant les paramètres sur le reste de la base de données. Les résultats sont les suivants :

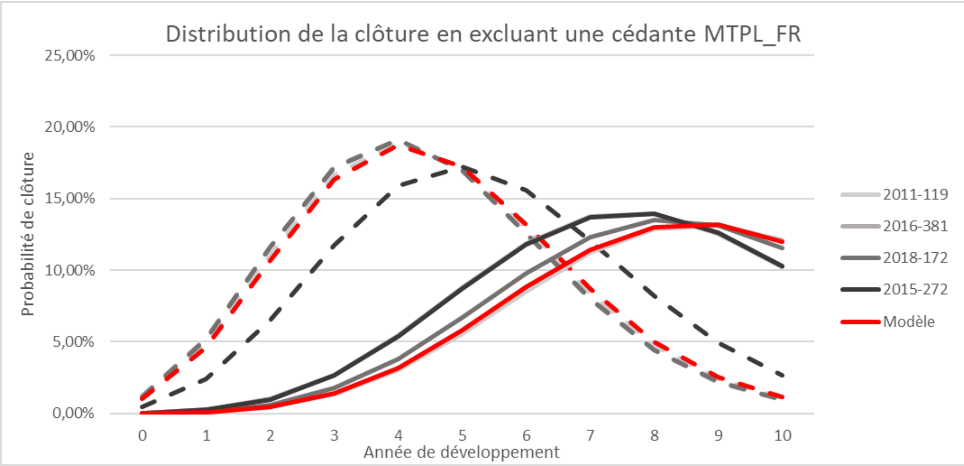


Figure 39 : Optimisation en excluant une cédante

Que ce soit en exclusion ou en restriction, le modèle sur la clôture est très stable pour la deuxième classe, qui est la classe intéressante pour le réassureur. Sur la première classe, on note un peu plus de volatilité. Mais qui ne reste jamais bien loin du modèle. Il faut bien comprendre qu'en se restreignant à une cédante, dans le cadre du sinistre 2018-172 par exemple qui présente une fonction de répartition assez différente pour la première classe, la première classe n'est calculée qu'à partir d'un sinistre. Le même travail a été effectué sur la base de données belge et les résultats sont les mêmes : des distributions stables pour les classes 2,3 et 4. Cela va dans le sens de l'utilisation du modèle puisqu'il ne semble pas varier beaucoup avec le retrait ou l'ajout d'une grosse cédante, et il semble également que du point de vue d'une cédante, il ne fait pas de très grosse erreur de prédiction. Du moins sur les plus grosses cédantes, donc celle pour lesquelles il est le plus dommageable de commettre une erreur importante.

II-2-4-c Exclusion d'un sinistre

Une autre mesure de la robustesse du modèle a été faite, le principe est le même mais au niveau non plus de la cédante mais du sinistre. Pour ce faire, 4 cédantes d'une trentaine de sinistres ont été choisies arbitrairement. Une cédante d'une trentaine de sinistres étant une cédante de taille moyenne dans les bases de données utilisées. Puis pour chacune des cédantes, il s'agit d'un côté d'optimiser le modèle avec tous les sinistres, et d'un autre d'optimiser le modèle en excluant les trois plus gros sinistres.

Dans le graphique ci-dessous, qui représente une cédante de la base de données française de 33 sinistres, et pour laquelle 2 sinistres ont été retirés (2 sinistres qui représentent 33,96% de la somme des Ultime), est représenté la distribution de la clôture des deux classes pour les deux échantillons. Comme il est possible de le remarquer, il s'agit d'une cédante payant en moyenne plus tardivement la classe 1 par rapport à la moyenne de la base de données complète. Le retrait des deux plus gros sinistres, n'impacte quasiment pas la distribution de la clôture. Des résultats similaires sont observés pour les autres cédantes testées sur la base de données française, ainsi que sur la base de données belge.

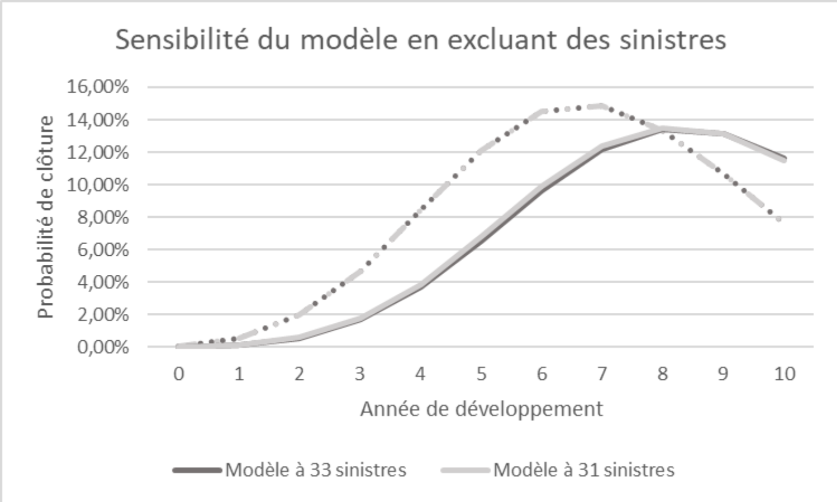


Figure 40 : Sensibilité du modèle au retrait de sinistres importants MTPL_FR

Le modèle de clôture est très peu sensible et stable que ce soit au niveau d'une cédante ou des sinistres. Il a en plus le mérite d'être assez léger en paramètre et assez simple à comprendre. Il est tout à fait adapté aux contraintes fixées et peut être utilisé pour notre modèle de cadence de paiements dépendant de l'année de clôture.

II-3 Modèle de cadence des paiements sachant l'année de clôture

Maintenant que la clôture est modélisée grâce au modèle de clôture, il est possible de faire un modèle de cadence des paiements sachant la clôture. Comme observé lors de l'analyse descriptive, l'année de développement de clôture est l'une des seules variables, avec le montant de l'Ultime, à avoir un impact sur la cadence de paiements du sinistre. Cela avait été particulièrement notable lorsque la cadence des paiements avait été « normalisée » afin de correspondre à la moyenne des cadences des paiements des années de clôture supérieures. C'est une propriété particulièrement intéressante car elle laisse penser qu'il est peut-être envisageable de faire un modèle par année de clôture mais qui serait en fait tous basés sur le même modèle général.

Dans cette partie, l'objectif est donc de créer un modèle de cadence de paiements utilisant le modèle sur la clôture créé précédemment, pour ensuite utiliser les deux à la fois en les combinant. Etant donné que le modèle de clôture nécessite un certain nombre de paramètres, il est d'autant plus nécessaire que le modèle de cadence de paiements en utilise très peu.

II-3-1 Présentation du modèle

II-3-1-a La fonction Log-Logistique

Afin de modéliser la cadence des paiements d'un sinistre clôturé, il a été choisi d'utiliser la fonction de répartition d'une loi log-logistique. La fonction est définie de la manière suivante :

$$F(x) = \frac{x^{\beta}}{\alpha^{\beta} + x^{\beta}}$$

Avec

$$x \in]0; +\infty[$$

$$\alpha > 0$$

$$\beta > 0$$

α est le paramètre d'échelle tandis que β est le paramètre de forme.

Etant une fonction de répartition, cette fonction est comprise entre 0 et 1, ce qui correspond à la cadence des paiements. Le choix a également été motivé par la forme en « S » observé précédemment pour la cadence de paiements des sinistres clôturés, que l'on retrouve bien pour la fonction de répartition de cette loi (voir ci-dessous).

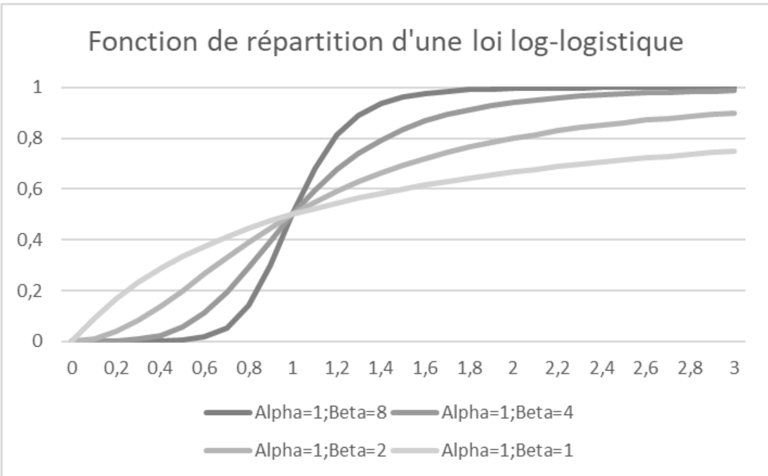


Figure 41 : Fonction de répartition d'une loi log-logistique avec différent beta

II-3-2-b Troncature

Cependant, il n'est pas possible de faire une fonction par année de clôture pour plusieurs raisons. La première est que l'on ne dispose pas assez de données par année de clôture pour obtenir un résultat fiable. La deuxième, et la principale, est que cela nécessiterait le calcul de bien trop de paramètres, ce qui va à l'encontre des contraintes imposées. Pour pallier ça, il est possible d'utiliser un procédé reposant sur une observation faite au préalable. Lors de l'observation de la cadence des paiements par année de clôture, remultiplié pour correspondre à la clôture à la moyenne des cadences des paiements encore ouvertes, comme dans ce graphe tiré de la base de données française et déjà introduit dans la partie 1-4-2, il est observable que les différentes courbes sont sensiblement superposées.

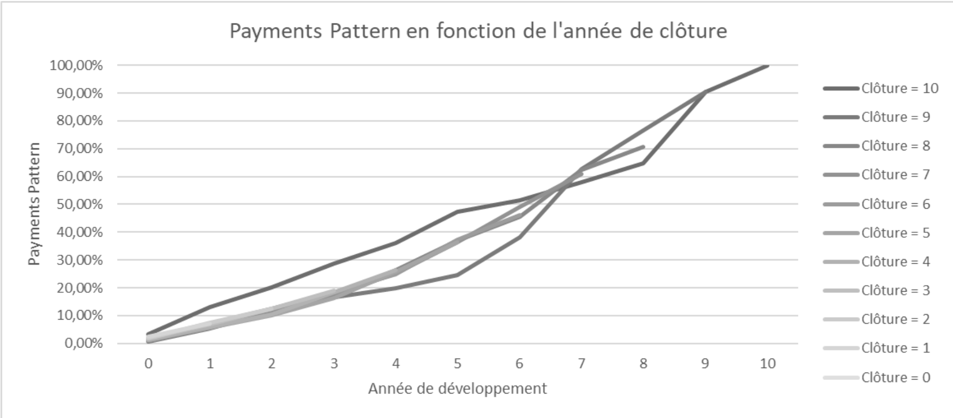


Figure 42 : Courbes représentant les différentes cadences de paiements par année de clôture MTPL_FR

Cette particularité est intéressante car elle permet de modéliser la cadence de paiements d'une année de clôture comme la troncature d'une cadence de paiements générale. Ce modèle n'utilise et ne nécessite que deux paramètres, α et β et permet de modéliser les 10 années de développement pour la France, et les 18 années de développement pour la Belgique.

Il est défini que la cadence de paiements générale cumulée de l'année i $\widetilde{PP^{gen}}(\imath)$ vaut

$$\widetilde{PP^{gen}}(\imath) = \frac{i^\beta}{\alpha^\beta + i^\beta}, i \in [\![1; +\infty[\![.$$

Puis pour chaque année de clôture, la cadence de paiements $PP^{DY_{Clôture}=x}$ vaut

$$\widetilde{PP^{DY_{clôture}=x}}(i) = \frac{\widetilde{PP^{gen}}(i)}{\widetilde{PP^{gen}}(x)}, i \in [\![1; x]\!].$$

Ou plus généralement, il est possible d'écrire :

$$\widetilde{PP^{DY_{clôture}=x}}(i) = \min\left(\frac{\widetilde{PP^{gen}}(\imath)}{\widetilde{PP^{gen}}(x)}, 1\right), i \in [\![1; +\infty[\![.$$

II-3-1-c Décalage en 0

Néanmoins, le modèle doit être défini en 0 puisque la base de données et les cadences de paiements sont définies à partir de l'année 0. Le modèle est de fait translater arbitrairement d'une demi-année. Le modèle de cadence de paiements général devient alors :

$$\overline{PP^{gen}(\imath)} = \widetilde{PP^{gen}}(i + 0{,}5).$$

C’est-à-dire :

$$\overline{PP^{gen}(\iota)} = \frac{(i+0,5)^{\beta}}{\alpha^{\beta} + (i+0,5)^{\beta}}$$

Pour $i \in [\![0; +\infty[$.

Dorénavant, et à partir de cette sous-partie, le modèle général avec le décalage en 0 sera noté $\widetilde{PP^{gen}}(\iota)$.

II-3-2 Paramétrisation du modèle

Pour paramétriser le modèle, il a été décidé de minimiser l’erreur quadratique moyenne en moyenne pondérée sur le facteur de stabilité comme il a déjà pu être fait au préalable. Il est nécessaire également de prendre le maximum d’information à disposition. Dans ce but, on va considérer les sinistres encore ouverts, qui devraient normalement être exclus ici puisque dans cette partie on ne modélise que la cadence de paiements. Il est alors décidé de considérer la dernière année de développement comme l’année de clôture du sinistre, et la somme des paiements à la clôture comme la valeur de l’Ultime. Tous les sinistres sont donc payés à 100% dans notre base de données. Pour les sinistres normalement ouverts, on ne prend pas en compte la clôture avec le seuil comme défini auparavant, mais uniquement la clôture en dernière année.

Il est intéressant de noter ici que notre modèle de cadence des paiements sachant la clôture ne dépend plus de l’Ultime mais seulement de la somme des paiements. L’Ultime est néanmoins toujours utilisé pour le modèle sur la clôture nécessaire au modèle complet.

Pour obtenir la valeur des paramètres, il est utilisé un processus récursif. Initialement, les valeurs de α et β sont initialisées grâce à l’optimisation faite grâce au Solveur d’Excel. Puis, une variable est fixée, et l’autre varie dans un intervalle de plus en plus restreint en cherchant à minimiser l’erreur quadratique moyenne en moyenne pondérée.

II-3-3 Sensibilité du modèle de cadence des paiements

Enfin, comme pour le modèle sur la clôture, une analyse sur la sensibilité du modèle est effectuée. Là-encore, l’objectif est de voir à quel point le modèle est affecté par quelques sinistres ou cédantes. Et est-ce qu’un modèle construit sur une seule grosse cédante présente des résultats similaires que le modèle global.

II-3-3-a Exclusion d’une cédante

Dans un premier temps, il est observé comment le modèle général supporte le retrait d’une cédante important. Pour cela, il a été retiré une par une les 4 plus grosses cédantes de la base de données. Pour la France, il s’agit des mêmes cédantes que dans le test de robustesse du modèle de clôture. En guise de rappel, la part de ces cédantes sur la somme des Ultime des sinistres au-dessus de 600.000 est le suivant :

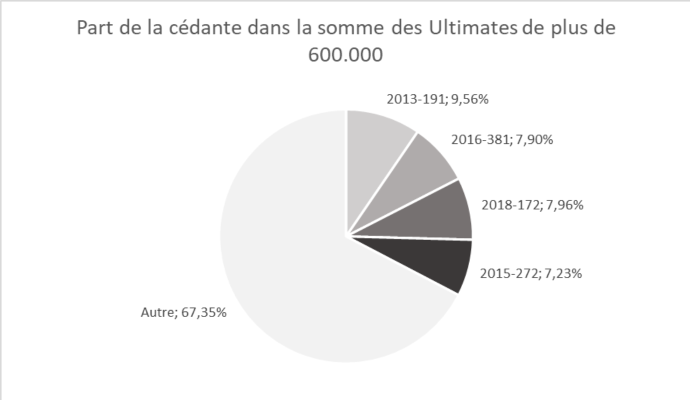


Figure 43 : Part des cédantes utilisées pour le test de sensibilité

Pour chaque cédante, le modèle a de nouveau été optimisé sans la cédante en cherchant à minimiser l’erreur quadratique moyenne en moyenne pondérée sur le facteur de stabilité. Pour la représentation graphique, et pour que cela soit plus parlant, il a été choisi de représenter les différents modèles par leur cadence de paiements tronquée à l’année 10. Cela correspond donc à un modèle clôturé la dixième année. Comme il est possible de le noter dans le graphe ci-dessous, le modèle est extrêmement stable au retrait d’un sinistre de la base de données. Les cadences de paiements sont les cinq superposées les unes sur les autres et la différence est très mince.

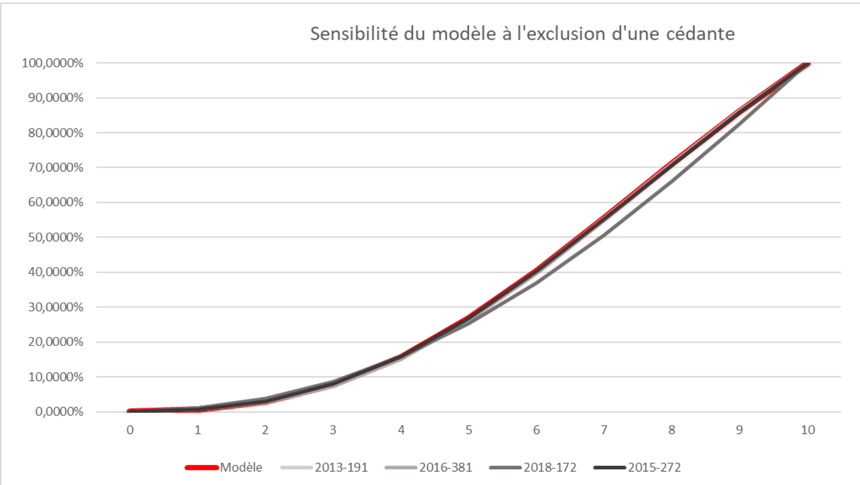


Figure 44 : Représentation des différentes cadences de paiements tronquées en année 10 MTPL_FR

II-3-3-b Restriction à une cédante

Dans un deuxième temps, il faut tester si un modèle construit uniquement sur une cédante donne des résultats très différents du modèle sur la base de données. Les mêmes cédantes seront utilisées que précédemment. Evidemment, cela représente les quatre cédantes les plus importantes de la base de données, et le même test avec une autre cédante, avec moins de sinistres, aurait sans doute un résultat moins bon. Cependant, ces cédantes qui certes ont beaucoup de sinistres, pèsent aussi le plus lourd dans le poids total donc il est important que leur modélisation soit proche de celle du modèle global. Par modèle global il est entendu modèle optimisé sur toute la base de données. Le même procédé d'optimisation est effectué sur les sinistres d'une seule cédante, puis la cadence des paiements tronquée en année 10 de chaque modèle est tracé et représenté ci-dessous.

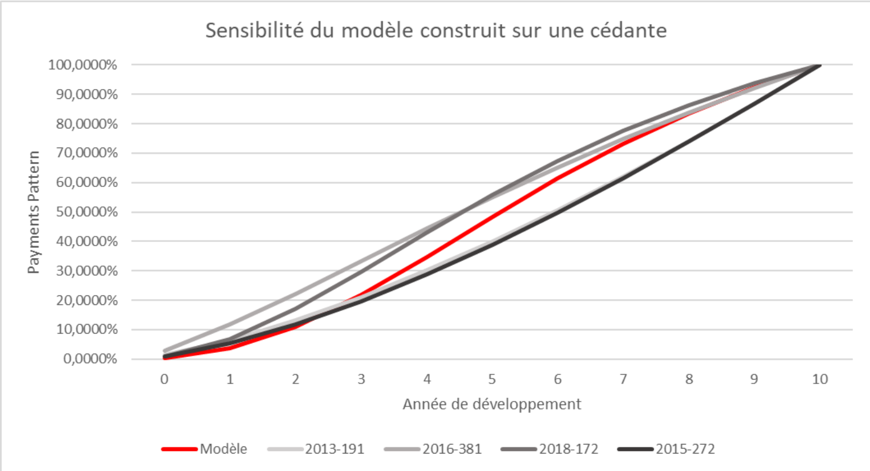


Figure 45 : : Représentation des différentes cadences de paiement sur une cédante tronqués en année 10 MTPL_FR

Bien évidemment, dans cette situation, les cadences de paiements ne sont pas rigoureusement les mêmes. Cependant, le comportement global du modèle est le même et une grosse erreur n'est pas commise en utilisant le modèle global pour modéliser la cadence de paiements de la cédante. Les mêmes résultats ont été observés sur la base de données belge. Le modèle de cadence de paiements est très robuste dans les deux cas.

Maintenant que tous les tests sur la cadence des paiements ont été effectués, il s'agit de le lier au modèle sur la clôture de la partie précédente.

II-4 Extrapolation

Une fois le modèle de clôture et le modèle de cadence des paiements paramétrés, les deux modèles sont combinés. Dans un premier temps, pour chaque sinistre est modélisé la probabilité de clôture année par année jusqu'en année maximale, puis pour chaque année, le sinistre est considéré comme clôturé et une cadence des paiements est calculée. Le prix du sinistre est alors le prix calculé pour chaque année de développement par le modèle de cadence des paiements pondérée par la probabilité de clôture l'année de développement concerné.

Cependant, la probabilité de clôture après l'année maximale n'est pas nulle, loin de là puisque pour les sinistres de la classe la plus élevée, le paramètre de la loi de Poisson est souvent très proche de l'année maximale de clôture. Bien évidemment, il est possible de considérer la probabilité de clôture sachant que la clôture intervient avant l'année maximale, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}'[DY_{Clôture} = k] = \frac{\mathbb{P}[DY_{Clôture} = k]}{\mathbb{P}[DY_{Clôture} \leq DY_{max}]}.$$

Ou alors de considérer que tous les sinistres clôturés après l'année de développement maximale étaient clôturés en année DY_{max}, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}'[DY_{Clôture} = DY_{max}] = 1 - \sum_{i=0}^{DY_{max}-1} \mathbb{P}[DY_{Clôture} = i].$$

Mais finalement en faisant ça, on considère à nouveau que les sinistres sont forcément clôturés avant l'année maximale, ce qui est faux.

Plutôt que de faire ça, il a été choisi de considérer une nouvelle année $DY_{max}^{extrapolation}$ qui correspond grossièrement à l'année de développement à partir de laquelle, dans le modèle de clôture, chaque classe a une probabilité d'être clôturée de plus de 99%. Pour la France, cette année $DY_{max}^{extrapolation}$ est l'année de développement 20 et pour la Belgique, il s'agit de l'année de développement 35. En année de développement maximale, on considère que la probabilité de clôture est égale à la probabilité de se clôturer après l'année maximale. C'est-à-dire :

$$\mathbb{P}\left[DY_{Clôture} = DY_{max}^{extrapolation}\right] = 1 - \sum_{i=0}^{DY_{max}^{extrapolation}-1} \mathbb{P}[DY_{Clôture} = i].$$

Cependant, la particularité est que notre modèle ne considèrera pas de paiements après l'année de développement maximale (10 pour la France, 18 pour la Belgique). En effet, il est préférable, pour les paiements, de ne pas modéliser de paiements pour lesquels il n'y a aucune information. Il n'est pas possible de savoir si après l'année maximale, la méthode de paiements change radicalement. Cela pourrait par exemple n'être que des rentes, et là le modèle de cadence des paiements ferait une très grosse erreur. En effet, en imaginant par exemple que le jugement de plupart des gros sinistres prend fin au bout de 12 années, et qu'à l'issue de ce jugement, la plupart des sinistres sont réglés sous forme d'une rente annuelle. La cadence des paiements suivrait alors une tendance différente de celle modélisée par le modèle. Or la base de données est censurée à l'année 10 donc il n'est pas possible de prendre en compte ce genre de phénomène. Le cas des rentes ne constitue qu'un exemple de phénomène probable mais caché par la censure. L'essentiel est de comprendre qu'il ne parait pas raisonnable de faire une hypothèse sur le futur rythme de paiements après l'année maximale. C'est donc pour cela que l'extrapolation du modèle de cadence des paiements va être utile uniquement pour tronquer le modèle. C'est-à-dire que le modèle sera :

$$PP^{DY_{\widetilde{Clôture}}=x}(\iota) = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{PP^{gen}}(i)}{\widetilde{PP^{gen}}(x)} \; si \; i < DY_{max} \\ 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{DY_{max}} \dfrac{\widetilde{PP^{gen}}(k)}{\widetilde{PP^{gen}}(x)} \; si \; i = DY_{max} \end{cases}.$$

Pour récapituler, le modèle de clôture est utilisé pour modéliser les probabilités de clôture jusqu'en année $DY_{max}^{extrapolation}$. Pour les années de clôture jusqu'en année DY_{max}, cela ne change rien, la cadence des paiements est calculée de manière « classique » expliquée dans le modèle. Pour les années de clôture de l'année $DY_{max}+1$ à l'année $DY_{max}^{extrapolation}$, on modélise la cadence des paiements tronquée à l'année de clôture mais défini jusqu'en année DY_{max}. Le tableau suivant récapitule l'ensemble du fonctionnement.

Année de clôture	Modèle Clôture	Modèle de Payments Pattern sachant la clôture							
		0	1	...	DY_{max}	DY_{max}+1	...	DY_{max}^{extra}	...
0	$\mathbb{P}[DY_{Clôture}=0]$	$PP^0(0)$							
1	$\mathbb{P}[DY_{Clôture}=1]$	$PP^1(0)$	$PP^1(1)$						
...	...	...	...	...					
DY_{max}	$\mathbb{P}[DY_{Clôture}=DY_{max}]$	$PP^{DY_{max}}(0)$	$PP^{DY_{max}}(1)$	...	$PP^{DY_{max}}(DY_{max})$				
DY_{max}+1	$\mathbb{P}[DY_{Clôture}=DY_{max}+1]$	$PP^{DY_{max}+1}(0)$	$PP^{DY_{max}+1}(1)$	...	$1-\Sigma(\mathrm{DY_{max}}+1)$				
...	...	...	...	...	...				
DY_{max}^{extra}	$\mathbb{P}[DY_{Clôture}=DY_{max}^{extra}]$	$PP^{DY_{max}^{extra}}(0)$	$PP^{DY_{max}^{extra}}(1)$	...	$1-\Sigma(DY_{max}^{extra})$				
...	0								

Figure 46 : Tableau récapitulatif du fonctionnement

Dans le tableau $DY_{max}^{extra} = DY_{max}^{extrapolation}$ et $\Sigma(k) = \sum_{i=0}^{DY_{max}} PP^k(i)$.

Pour passer d'un paiement cumulé $\widetilde{PP}$ à un paiement incrémental PP, il suffit de faire :

$$PP^k(i) = \widetilde{PP^k}(i) - \widetilde{PP^k}(i-1).$$

Finalement, le facteur de stabilité final d'un sinistre dans le modèle $Stabilité^{modèle}(S)$ est

$$Stabilité^{modèle}(S) = \sum_{k=0}^{DY_{max}^{extrapolation}} \mathbb{P}(DY_{clôture}=k) * \frac{1}{\sum_{i=0}^{k} PP^k(i) * \frac{Index(0)}{Index(i)}}$$

III - Résultats et applications

Cette dernière partie est consacrée dans un premier temps à l'évaluation de la précision du modèle et de son impact sur le prix. La démarche consistera toujours à le comparer au modèle actuel, qui a été introduit dans la première partie. Contrairement à la partie précédente où généralement une seule des deux bases de données était traitée en détail, il s'agit ici de bien présenter les résultats pour les deux bases de données, puisqu'ils ne sont pas totalement les mêmes et les conclusions faites sont différentes. Dans un second temps, il est présenté une utilisation du nouveau modèle, rendue possible grâce à la particularité de ce dernier à ne pas dépendre du montant de l'Ultime. Cette utilisation concerne les réserves de la cédante, sur lesquelles une erreur assez importante est acceptée parce qu'il est difficile de vraiment faire un modèle pour tout le portefeuille mais il semble qu'une amélioration soit possible grâce au nouveau modèle de cadence des paiements.

III-1 Rétrocontrôle

III-1-1 Erreur sur l'ensemble des sinistres clôturés

Le Rétrocontrôle consiste à la comparaison, sur les sinistres clôturés, du pouvoir prédictif des deux modèles. L'idée est de se servir uniquement de l'Ultime du sinistre pour mesurer l'impact de l'inflation, à l'aide du modèle actuel et du nouveau modèle, puis de comparer l'impact de l'inflation avec les résultats empiriques

Dans cette partie, il est important de ne se servir **que des sinistres clôturés.** En effet, il est nécessaire d'avoir uniquement les sinistres pour lesquels l'information est complète, et c'est donc le cas uniquement pour les sinistres clôturés. On note $\Omega_{Empirique}$ l'ensemble des sinistres clôturés selon la cédante. Ici c'est bien le critère de clôture de la cédante qui est utilisé et non pas selon le critère de seuil du modèle.

La procédure du Rétrocontrôle est la suivante : pour obtenir l'impact de l'inflation historique d'un sinistre, la cadence de paiements empirique du sinistre est divisée par l'inflation sur les années concernées, et le ratio entre la somme de la cadence des paiements avec inflation et la somme de la cadence des paiements sans inflation est le facteur de stabilité empirique. Pour les modèles, la seule information relative au prix utilisée ici est le montant des Encouru. Les coefficients des différentes méthodes de Chain-Ladder peuvent alors être utilisées et il est possible d'avoir le montant de l'Ultime. Toute information concernant un paiement déjà effectué est supprimée. Le Rétrocontrôle consiste alors à calculer l'erreur-prix commise par le modèle.

L'erreur individuelle commise par le modèle pour un sinistre S est :

$$Erreur(S) = \mathbb{E}\left[Excess^{empirique}(Priorité, S)\right] - \mathbb{E}\left[Excess^{modèle}(Priorité, S)\right]$$

Ce qui permet de calculer l'erreur prix de tout le modèle de la manière suivante :

$$Erreur - Prix = \frac{\sum_{S\epsilon\Omega_{Empirique}} Erreur(S)}{\sum_{S\epsilon\Omega\ Empirique} \mathbb{E}[Excess^{empirique}(Priorité, S)]}$$

Avec :

$$Excess^{empirique}(Priorité, S) = \max\left(0, Ultimate(S) - Priorité * Stability^{empirique}(S)\right).$$

La formule étant bien évidemment la même pour $Excess^{modèle}$ l'excèdent du modèle créé et $Excess^{actuel}$ l'excèdent du modèle actuel. L'Erreur-prix correspond donc à la différence relative de la somme des montants en Excédent de la priorité.

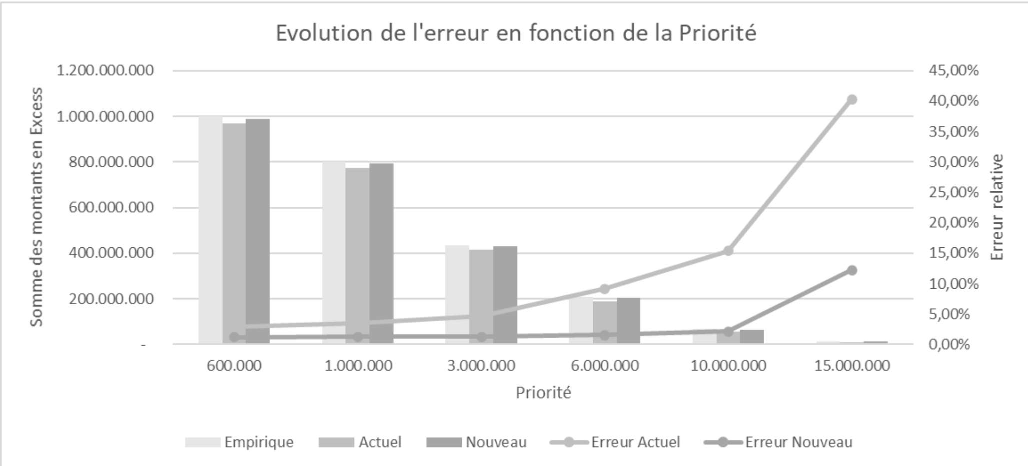


Figure 47 : Evolution de l'erreur MTPL_FR

Pour la France, les résultats sont présentés ci-dessus. Dans le cas des deux modèles, le montant en excédent de la priorité est sous-estimé par rapport au montant empirique. Ce qui peut s'expliquer puisqu'ici ne sont pris en compte que les sinistres clôturés, et une majorité sont clôturés et payés dès les premières années, et donc ont forcément un facteur de stabilité assez faible. Les modèles, qui sont paramétrés sur l'ensemble des sinistres, et non seulement ceux qui sont clôturés, modélisent forcément un facteur de stabilité plus important. Donc ce n'est pas spécialement l'erreur en elle-même qui est intéressante ici, mais plutôt de voir que le nouveau modèle permet de diminuer l'erreur pour les sinistres clôturés. L'erreur-prix est assez stable, autour de 1,25%, pour les priorités inférieures à 10.000.000.

Attention ici, il ne faut pas mal interpréter l'histogramme. Ce ne sont pas spécialement les sinistres les plus importants sur lesquels il y a une grande erreur, ce qu'il est possible de croire puisqu'augmenter la priorité, et donc sélectionner les sinistres les plus grands, augmente l'erreur. Cependant, en décomposant la somme des montants par classe d'Encouru, et en testant l'erreur précédemment introduite pour différente priorité, il est possible de se rendre compte que l'explication n’est pas une erreur sur les plus gros sinistres, mais que cela dépend d’un autre effet. Comme il est possible de l’observer dans le graphe qui suit.

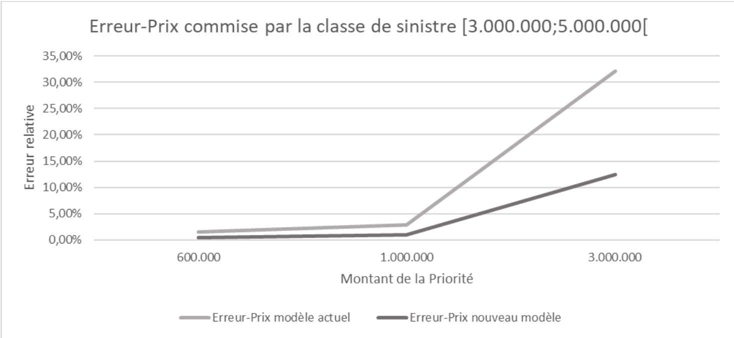


Figure 48 : Exemple d'évolution d'une classe de sinistre MTPL_FR

Le graphe ci-dessus représente l’évolution de l’erreur-prix pour une classe précise de montant d’Encouru. La tranche [3.000.000 ;5.000.000[a été choisie arbitrairement ici mais des résultats similaires sont constatés sur chaque classe. Il apparait que pour la même classe, l’erreur relative augmente en fonction de la priorité. Ce qui est normal, puisque plus la priorité est grande, plus le montant en excédent est faible, et donc plus la différence est grande relativement au montant en excédent.

Pour le même graphe sur la tranche [10.000.000 ;15.000.000[, le même phénomène apparait. Cela confirme bien l’hypothèse selon laquelle les modèles ne font pas spécialement plus d’erreur sur les sinistres les plus lourds. A noter que pour le nouveau modèle, une erreur sur les sinistres les plus lourds ne devrait normalement pas être possible puisque l’erreur qui sert à paramétrer le modèle est pondérée par le poids du sinistre dans le portefeuille.

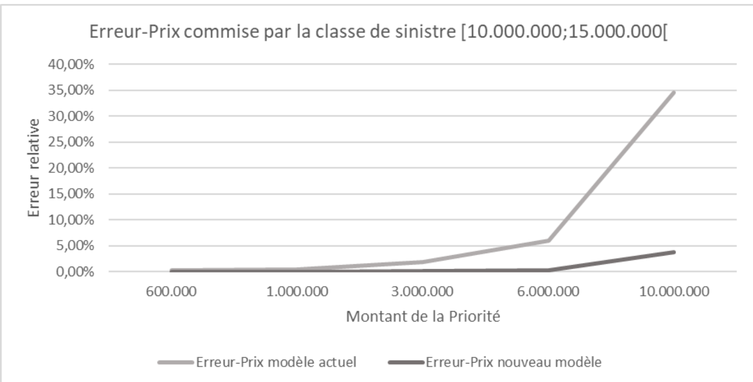


Figure 49 : Exemple d'évolution d'une autre classe de sinistre MTPL_FR

Pour la base de données belge maintenant, la même mesure de l’erreur-prix est faite, et les résultats sont présentés ci-dessous. Le même phénomène que présenté précédemment existe également en Belgique. L’erreur-prix est plus importante qu’en France, en partie parce qu’il y a plus d’années de développement dans le modèle. Il n’est pas possible d’avoir le montant en excédent pour des priorités supérieures à 5.000.000 puisqu’aucun sinistre clôturé n’est supérieur à cette valeur pour le moment.

Même pour la priorité de 5.000.000, le modèle actuel ne calcule aucun montant en excédent de la priorité, ce qui explique l'erreur-prix de 1 pour cette priorité. L'erreur-prix par classe ne sera pas développée pour la Belgique mais il s'agit du même phénomène qu'en France.

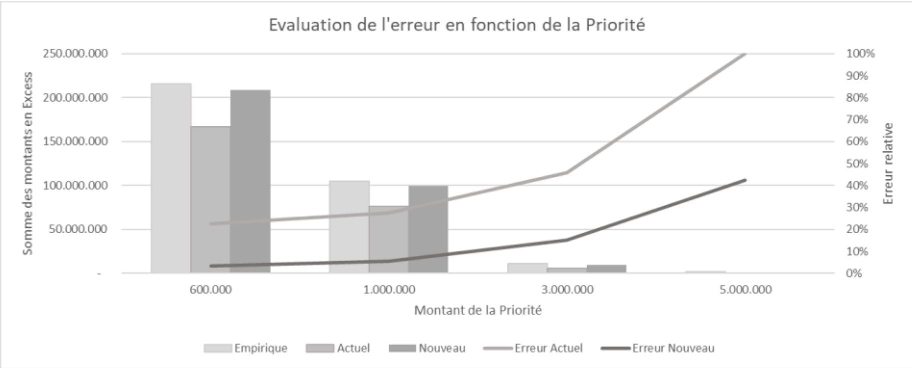


Figure 50 : Evolution de l'erreur MTPL_BE

En Belgique comme en France, l'erreur-prix est plus faible pour le nouveau modèle, ce qui signifie que, sur les sinistres clôturés, le nouveau modèle modélise plus précisément le montant qui sera à la charge du réassureur. Pour les deux portefeuilles, les modèles ont une tendance à sous-estimer le prix, qui s'explique principalement par la restriction aux sinistres clôturés. S'il avait été choisi de paramétrer le nouveau modèle sur les sinistres clôturés uniquement, l'erreur aurait été plus faible encore, mais ce n'est pas l'objectif ici.

III-1-2 Erreur par sinistre sur les sinistres clôturés

Une deuxième approche permet également de mesurer la précision des modèles, mais cette fois centrée sur l'erreur faite pour chaque sinistre. Cela doit permettre de voir si le nouveau modèle est meilleur selon les graphes précédents parce qu'il fait moins d'erreur sur les gros sinistres, qui pèsent plus dans la balance lors du calcul de l'erreur, ou bien s'il est meilleur parce qu'il prédit plus précisément chaque sinistre, petit comme gros.

Afin de mesurer cela, on calcule le ratio suivant, pour un sinistre S :

$$Ratio(S) = \frac{Stabilité^{empirique}(S) - Stabilité^{modèle}(S)}{Stabilité^{empirique}(S)}$$

Un ratio négatif signifie donc une surestimation par le modèle du facteur de stabilité et donc in fine une sous-estimation du prix.

Les résultats pour chaque sinistre et les deux modèles sont présentés ci-dessous. Il a été choisi dans les graphes suivants de présenter ce ratio en fonction de l'Ultime du sinistre.

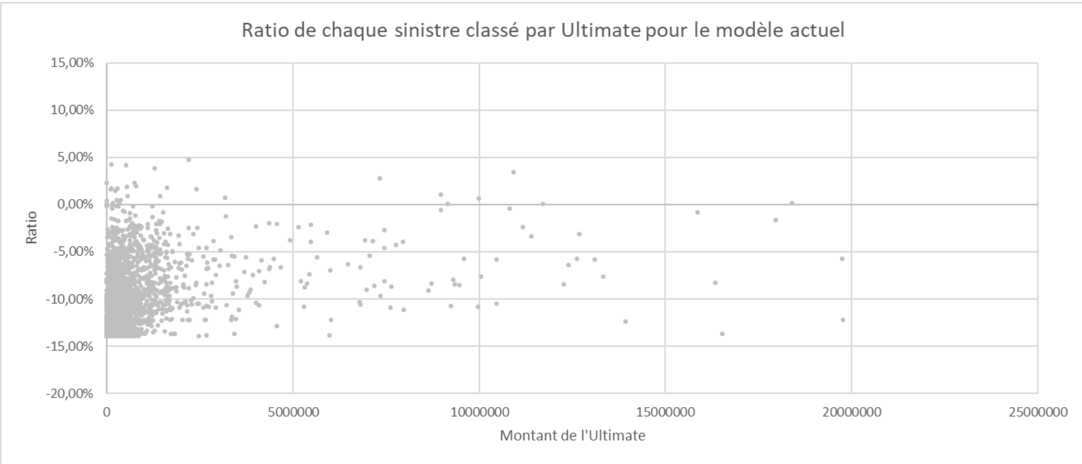


Figure 51 : Nuage de points représentant le ratio du facteur de stabilité pour le modèle actuel MTPL_FR

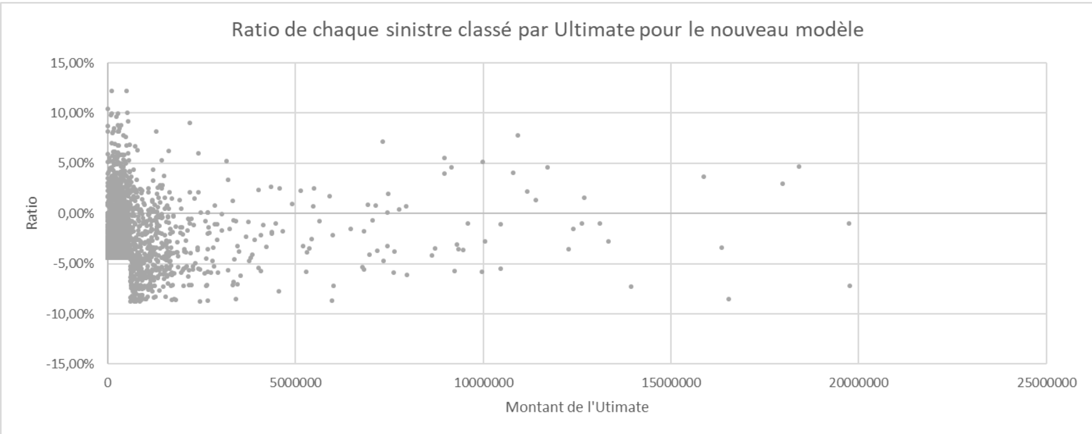


Figure 52 : Nuage de points représentant le ratio du facteur de stabilité pour le nouveau modèle MTPL_FR

Le nouveau modèle semble plus symétrique que le modèle actuel, c'est-à-dire qu'il a moins tendance à sous-estimer le montant à payer. Le modèle actuel lui est très déséquilibré et très peu de sinistres sont finalement surestimer, on en compte seulement 29, pour 4424 sinistres sous-estimés. Sur le graphe du nouveau modèle, le seuil de 600.000 à partir duquel la distribution de la clôture change dans le modèle de clôture est très visible. L'intérêt de séparer la base de données en fonction du montant de l'Ultime est palpable ici puisque cet intervalle de l'échantillon est bien mieux modélisé par le nouveau modèle que le modèle actuel. Il s'agit en plus de l'intervalle sur lequel il est possible de se dire que les sinistres clôturés sont représentatifs de tous les sinistres. En effet, comme évoqué de nombreuses fois auparavant, les plus petits sinistres étant généralement les sinistres se clôturant le plus rapidement, ils sont pour la majorité déjà clôturés. Sur le graphique, il est possible d'observer ce phénomène à l'aide de la cassure à -5%.

Il faut également souligner le fait que sur les plus gros sinistres, c'est-à-dire les points les plus à droite du graphique, le modèle actuel sous-estime quasi chaque sinistre, ce qui peut être dangereux, même si sur cette intervalle, l'échantillon des clôturés est moins représentatif du comportement de la base de données. Pour le nouveau modèle, il n'y a de tendance ni dans le sens de la sous-estimation ni dans celui de la surestimation sur les gros sinistres. Pour la Belgique, les graphiques ne seront pas présentés ici mais sont les mêmes que pour la France.

Pour conclure le Rétrocontrôle, il semble clair que sur l'échantillon des sinistres clôturés, le nouveau modèle est plus précis que le modèle actuel. Quel que soit la priorité ou la classe de sinistres observée, l'erreur-prix, qui est pondérée en fonction de l'Ultime, est moins importante avec le nouveau modèle, et on note que cette amélioration est due à la fois à une meilleure modélisation des petits sinistres qui composent la majorité de la base de données, et des très gros sinistres.

III-2 Impact du nouveau modèle sur le prix

Dans un deuxième temps, il est utile de mesurer quel impact sur le prix découlerait d'un changement de modèle. Pour cela, deux comparaisons entre le modèle actuel et le nouveau modèle sont effectuées.

III-2-1 Impact-Prix dans le cas du « Semi-Tarification »

La première des deux comparaisons est appelée le semi-Tarification, elle correspondrait au passage d'un modèle à l'autre pour les bases de données. C'est-à-dire que l'information sur la clôture ou non est à disposition, et que l'objectif est de donner le nouveau prix du sinistre. Il est utile de se concentrer uniquement sur les sinistres encore ouverts. Pour le nouveau modèle, l'information utilisée est la non-clôture du sinistre. Il faut alors recalculer les probabilités de clôture. La nouvelle probabilité de clôture est la suivante :

$$\mathbb{P}'(DY_{Clôture} = k) = \begin{cases} 0 \; si \; k < DY_{LKS} \; et \; k \neq DY_{Clôture}^{historique} \\ 1 \; si \; k = DY_{Clôture}^{historique} \\ \dfrac{\mathbb{P}(DY_{Clôture} = k)}{1 - \sum_{i=0}^{DY_{LKS}} \mathbb{P}(DY_{Clôture} = i)} \; si \; k \geq DY_{LKS} \; et \; DY_{Clôture}^{historique} = N.A \end{cases}$$

Où :

- $\mathbb{P}$ est la probabilité utilisée dans le modèle de clôture.
- $\mathbb{P}'$ est la probabilité sachant l'information sur la clôture jusqu'en DY_{LKS}.
- $DY_{Clôture}^{historique}$ est l'année de clôture historique du sinistre, si le sinistre est clôturé. S'il n'est pas clôturé, il est noté $DY_{Clôture}^{historique} = N.A.$

Pour le modèle actuel, la clôture ne sert pas, donc rien ne change (si ce n'est que l'on exclut les sinistres clôturés). On mesure ensuite la somme des différences de chaque sinistre de la manière suivante :

$$Diff(S) = \mathbb{E}[Excess^{actuel}(Priorité, S)] - \mathbb{E}[Excess^{nouveau}(Priorité, S)]$$

Ce qui permet de calculer la différence-prix entre les modèles de la manière suivante :

$$Différence - Prix = \frac{\sum_{S\epsilon\Omega_{Ouvert}} Diff(S)}{\sum_{S\epsilon\Omega_{\ Ouvert}} \mathbb{E}[Excess^{actuel}(Priorité, S)]}$$

Où Ω_{Ouvert} est l'ensemble des sinistres encore ouverts au moment du calcul du prix.

Sur la base de données française, les résultats sont présentés dans l'histogramme ci-dessous. Une différence-prix négative signifie que le nouveau modèle est plus cher au global sur les sinistres encore ouverts. C'est le cas quel que soit la priorité en France. Plus la priorité est élevée et plus la différence de prix est importante.

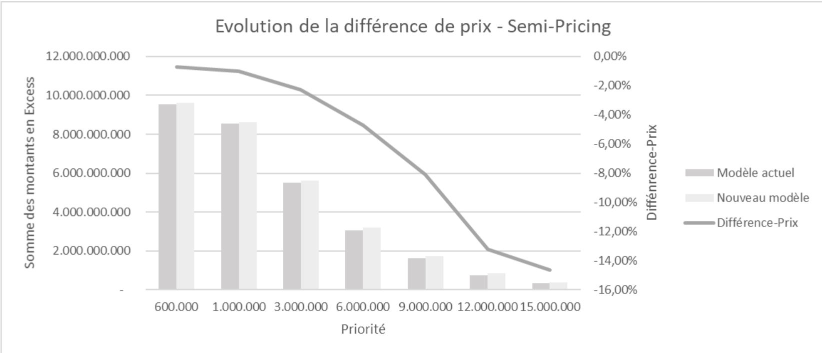


Figure 53 : Différence-Prix lors du Semi-Tarification MTPL_FR

Comme pour le Rétrocontrôle précédent, ce ne sont pas les derniers sinistres qui sont spécialement plus chers, mais lorsque la priorité augmente, la différence de prix relative augmente. Pour chaque priorité, il y a donc une différence prix importante pour les sinistres dont l'Ultime est proche du montante de la priorité.

En Belgique, les résultats sont très similaires. La différence de prix augmente avec la priorité. Cette différence de prix est bien plus importante que pour le modèle français, allant jusqu'à une augmentation du prix de près de 90% en excédent de 9.000.000. Il faut quand même rappeler qu'il y a très peu de sinistres atteignant la tranche de 9.000.000 en Belgique donc la différence-prix se fait sur très peu de points (54 sinistres).

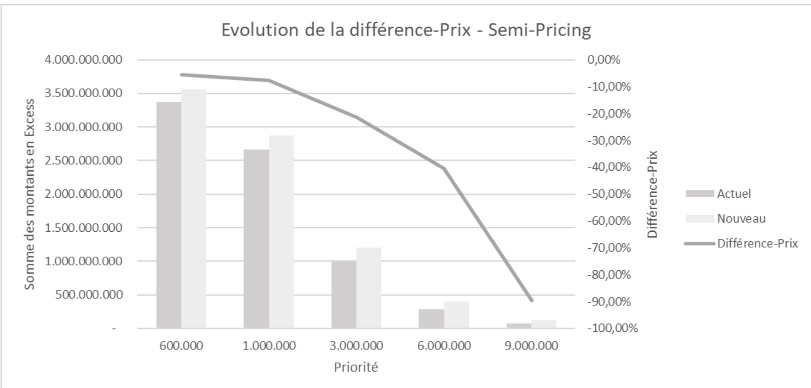


Figure 54 : Différence-Prix lors du Semi-Tarification MTPL_BE

III-2-2 Impact-Prix lors d'un « Tarification Complet »

La seconde comparaison effectuée pour mesurer l'impact sur le prix est une tarification complète. Contrairement au semi-Tarification explicité dans la partie précédente, aucune information n'est gardée cette fois à l'exception du montant des Encouru afin de calculer l'Ultime de chaque modèle. L'idée ici est de voir la différence de prix brut entre le nouveau modèle et le modèle actuel. Le même ratio que précédemment (la différence-prix) est alors calculée entre les deux modèles. Dans ce cas-là, il n'est pas nécessaire de se retreindre aux sinistres ouverts, tous les sinistres sont considérés. Pour la France, les résultats sont les suivants :

Priorité	Actuel	Nouveau	Différence-Prix	Nombre de sinistres
600.000	10.503.548.255	10.600.429.772	-0,922%	3358
1.000.000	9.317.602.671	9.435.548.561	-1,266%	2429
3.000.000	5.915.506.795	6.079.877.335	-2,779%	1159
6.000.000	3.249.661.935	3.437.963.343	-5,794%	670
9.000.000	1.692.203.601	1.859.761.098	-9,902%	424
12.000.000	773.075.385	898.620.313	-16,240%	273
15.000.000	344.955.633	410.889.131	-19,114%	135
18.000.000	178.212.626	208.960.604	-17,254%	59

Figure 55 : Tableau récapitulatif du Tarification MPTL_FR

Ces résultats peuvent être exprimés sous forme d'histogramme et de courbe :

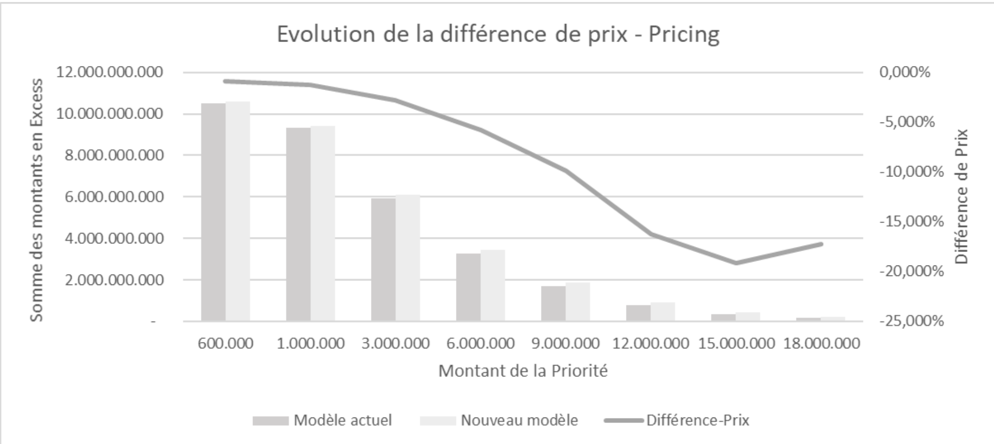


Figure 56 : Différence-Prix lors du Tarification MTPL_FR

Comme dans le cas du semi-Tarification, la somme des montants en excédent de la priorité du nouveau modèle est toujours supérieure à celle du modèle actuel. Dans le cas de la tarification complète, la différence-prix est encore plus importante que dans le cas du semi-Tarification qui a été présenté précédemment. Le tableau a été donné ici pour se rendre compte de combien de sinistres sont en jeu pour chaque priorité. Cela permet de se rendre compte que pour une priorité de 600.000, il est nécessaire, selon le nouveau modèle, d'augmenter le prix du portefeuille de 100.000.000. A cause de cela, il est possible que le réassureur soit moins compétitif en termes de prix par rapport à ces concurrents, mais ses prévisions seront sans doute meilleures. C'est d'autant plus le cas lorsqu'on augmente la priorité bien évidemment puisqu'on augmente la différence de prix.

Encore une fois, l'erreur n'augmente pas sur les priorités les plus élevées à cause d'une mauvaise tarification des sinistres les plus lourds. Dans le graphique ci-dessous, qui représente la différence-prix par classe, pour les différentes priorités, la différence-prix augmente fortement lorsque la priorité est proche de la classe. Ce qui est tout à fait normal puisque la différence relative entre les deux modèles devient très importante. Par exemple, les facteurs de stabilité du modèle actuel étant majoritairement plus grands que ceux du nouveau modèle, il est courant que pour une priorité à 6.000.000, un sinistre dont l'Ultime vaut 6.500.000 ne dépasse pas la priorité (avec clause de stabilité) dans le cas du modèle actuel et dépasse cette même priorité dans le cas du nouveau modèle. Pour les priorités les plus faibles, où la différence-prix est la plus faible, cet effet existe aussi mais le poids des gros sinistres, qui eux ont peu de différence pour les petites priorités, pèse trop lourd dans la balance pour que l'effet est un impact sur la différence-prix globale.

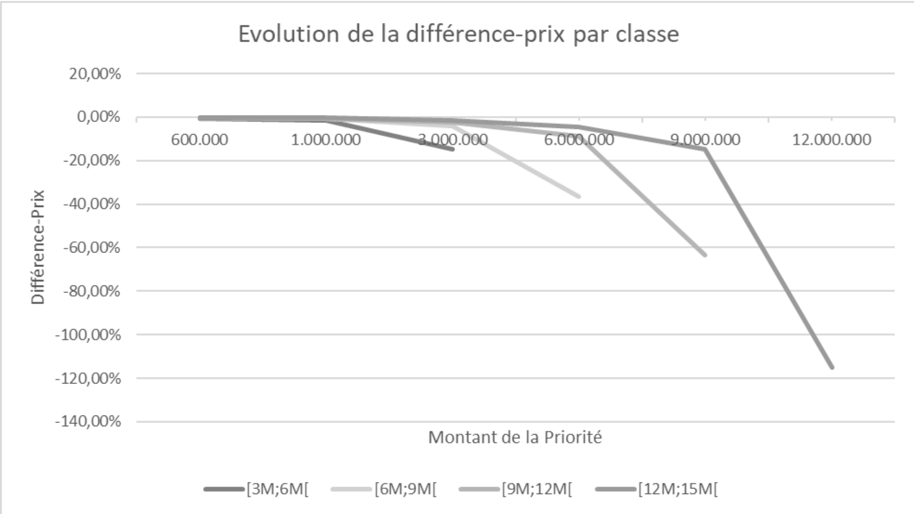


Figure 57 : Evolution de la différence-prix par classe MTPL_FR

S'agissant de la Belgique, la différence-prix est similaire quoique plus marquée pour certaines priorités. C'est le cas notamment pour une priorité de 9.000.000 comme indiqué dans le tableau récapitulatif ci-dessous.

Priorité	Actuel	Nouveau	Différence-prix	Nombre de sinistres
600.000	3.535.639.284	3.775.837.050	-6,79%	2294
1.000.000	2.743.311.803	2.981.228.776	-8,67%	1558
3.000.000	997.012.503	1.222.338.872	-22,60%	517
6.000.000	286.844.363	407.848.239	-42,18%	164
9.000.000	67.806.106	132.693.531	-95,70%	72
12.000.000	31.926.297	39.944.680	-25,12%	26
15.000.000	22.803.387	28.727.496	-25,98%	3

Figure 58 : Tableau récapitulatif du Tarification MTPL_BE

En effet, il faudrait quasiment doubler le prix pour les sinistres en Excédent de 9M. Cela découle en fait d'une particularité du modèle actuel et de la base de données. Dans un premier temps, le modèle actuel considère que pour les sinistres ayant un Ultime de plus de 4.000.000, comme c'est le cas pour les sinistres dépassant une priorité de 9.000.000, 60% des paiement sont effectués en année 18. Ce qui provoque un facteur de stabilité assez énorme, de 1,36 pour ces sinistres. Pour le nouveau modèle, le facteur de stabilité maximum, obtenu pour un sinistre clôturé en année 18, est de 1,20. Dans la base de données belge, pour les sinistres de plus de 9.000.000, une grosse majorité (47 sur 72) est compris entre 9.000.000 et 12.240.000. Sachant que l'on a :

$$9.000.000 * 1{,}36 = 12.240.000$$

Cela signifie que parmi les 72 sinistres atteignant la priorité de 9.000.000 dans le nouveau modèle, 47 d'entre eux n'atteignent pas le modèle actuel. C'est la raison de cette différence-prix énorme pour les priorités 6.000.000 et 9.000.000. Si la différence-prix est mesurée uniquement sur les sinistres atteignant la priorité avec le modèle actuel, elle devient de -36,7% au lieu de -42,2% pour les sinistres en excédent de 6.000.000 et de -64.6% pour les sinistres en excess de 6.000.000. Le reste de la différence s'expliquant par la cadence de paiements utilisée dans le modèle actuel et par la proximité de la priorité et de la valeur de l'Ultime.

Pour les priorités de 12.000.000 et 15.000.000, la différence chute parce que les sinistres restants sont peu nombreux et qu'il reste de très lourds, notamment un sinistre de 41.000.000. Ce gros sinistre, combiné au fait qu'il ne reste peu de données, stabilise l'erreur aux alentours de -25%. Si on exclut ce sinistre, la différence-prix continue de croître, avec -83.1% pour une priorité de 12.000.000. Le chiffre de -83.1% est obtenu sans exclure les sinistres qui n'atteignent pas la priorité dans le modèle actuel. La différence étant de -68.4% si cet effet est pris en compte.

Pour les deux bases de données, le nouveau modèle calcule un prix supérieur à celui du modèle actuel. Cette augmentation du prix n'est pas très importante pour des priorités assez faibles, mais provoquera une variation du prix très brutale sur les priorités les plus élevées. Cela se révèle surtout vrai sur la base de données belge, où le modèle actuel semble commettre une erreur importante en surestimant la clause stable à cause de la clôture du sinistre en année 18. Il est intéressant de voir que cela est évité par notre modèle en partie grâce à l'extrapolation jusqu'en année 35. L'effet est sans doute le même en France, en considérant la clôture en année 10, mais l'impact est moins visible car le facteur de stabilité pour un sinistre développé sur 10 ans est bien moins volatil.

III-3 Sensibilité

Le principe de l'analyse de la sensibilité ou de la robustesse d'un modèle a déjà été abordé précédemment lors du calcul de la sensibilité du modèle de clôture et du modèle de cadence des paiements sachant la clôture. Ces parties étaient jusqu'alors indépendantes. Il s'agit maintenant de tester la sensibilité du nouveau modèle complet, et surtout le confronter à la robustesse du modèle actuel.

Le but du test de sensibilité est d'analyser la robustesse du modèle sur des cédantes avec peu de sinistres. De mesurer à quel point l'ajout ou le retrait d'un sinistre fait varier le prix calculer pour la cédante. Pour cela, deux tarifications pour chaque modèle sont faites. Les deux tarifications sont effectuées sur l'ensemble des sinistres de la cédante cependant la paramétrisation du modèle est quant à elle effectuée une première fois sur l'ensemble des sinistres de la cédante, puis une seconde fois sur l'ensemble des sinistres privé de deux ou trois sinistres. Dans le cas du modèle actuel, deux cadences de paiements moyennes sont calculées par cédante. Comme il y a peu de sinistres, la cadence des paiements n'est pas toujours croissante, il est alors décidé de la lisser manuellement pour suivre la tendance de la courbe. La correction effectuée est toujours à la hausse de la cadence des paiements.

Généralement, la moyenne entre la valeur de l'année n-1 et de l'année n+1 est donnée à la cadence de paiements corrigée en année n.

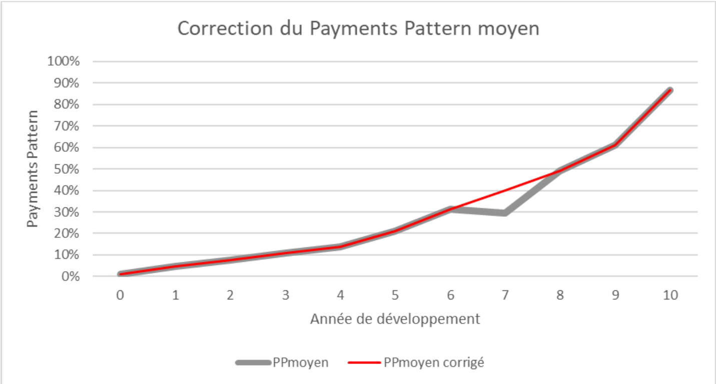


Figure 59 : Exemple de correction sur la cadence des paiements moyenne.

Concernant le nouveau modèle, et toujours par cédante, deux modèles de clôture et deux modèles de cadence de paiements sachant la clôture sont calculés. Pour les deux bases de données, les tests ont été effectués sur 4 cédantes d'une trentaine voire d'une quarantaine de sinistres. Les sinistres retirés sont à chaque fois les deux plus lourds de la base de données en termes d'Ultime, qui représentent entre 12,5% et 34,0% de la somme des Ultimed de la cédante en France, et de 8,1% à 16,4% pour la Belgique. Le détail de la répartition par cédante est proposé en annexe 2. Pour comparer la sensibilité, le ratio suivant est calculé :

$$Variation\ relative = \frac{\sum_{S\in\Omega_C} Excess_C^{complet}(Priorité, S) - \sum_{S\in\Omega_C} Excess_C^{restreint}(Priorité, S)}{\sum_{S\in\Omega_C} Excess_C^{complet}(Priorité, S)}$$

Où :

- Ω_C désigne l'ensemble des sinistres de la cédante C
- $Excess_C^{complet}(Priorité, S)$ désigne le montant en excédent calculé à l'aide du modèle paramétré sur tous les sinistres de la cédante C.
- $Excess_C^{restreint}(Priorité, S)$ désigne le montant en excédent calculé à l'aide du modèle paramétré sur les sinistres de la cédante C privés des deux plus gros sinistres de la cédante.

Cette variation relative est calculée pour le modèle actuel et le nouveau modèle et les résultats sont présentés ci-dessous :

Figure 60 : Analyse de la sensibilité sur 4 cédantes MTPL_FR

Pour chacune des cédantes, la courbe foncée, qui représente la variation relative du nouveau modèle, est plus proche de 0 que la courbe claire, représentant la variation relative du modèle actuel. Sur les cédantes testées, cela signifie qu'à chaque fois, et quel que soit le montant de la priorité, le nouveau modèle est moins sensible à l'ajout ou au retrait d'un sinistre. De ce point de vue, il est facile de conclure que le nouveau modèle est plus robuste.

III-4 Applications

Cette dernière sous-partie se concentrera sur une application rendue possible par le nouveau modèle. Elle se concentre sur l'indexation des réserves. Il n'y a pas de manière universelle de réserver un sinistre pour le réassureur puisque chaque cédante réserve d'une manière qui lui est propre, parfois simplement sur base d'un montant forfaitaire, ou d'une vraie estimation. Mais le réassureur n'a pas cette information donc il doit recalculer les réserves. L'un des problèmes est qu'un sinistre ayant été correctement réservé par la cédante ne l'est plus nécessairement une fois l'indexation faite par le réassureur. Et inversement, il est possible qu'un sinistre soit stable après l'indexation alors qu'en réalité, avant indexation, la réservation du sinistre était mal faite.

EXEMPLE

Le sinistre suivant, qui commence à être payé en année 2010, est considéré :

	Année 0	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	Année 6
Paid	0	100	300	300	500	700	700
Réserve	1000	900	700	700	500	300	300
Incurred	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

Figure 61 : Sinistre exemple en année de référence 2010

Il s'agit ici de paiements cumulés. Le sinistre est correctement réservé, l'Encouru ne varie pas d'une année à l'autre malgré les paiements. Maintenant, si ce même sinistre est utilisé dans une base de données dont l'année de référence (ou année 0) est l'année 2021. L'indexation est supposée être aléatoire entre +1% et +4% d'une année à l'autre. Il sera expliqué plus tard en quoi il est important que l'inflation ne soit pas stable pour voir l'effet désiré. Les paiements et les réserves sont indexés de manière classique c'est-à-dire

$$Paiement'(i) = Paiement(i) * \frac{Index(2021 + i)}{Index(2010 + i)}$$

$$Reserve'(i) = Reserve(i) * \frac{Index(2021 + i)}{Index(2010 + i)}$$

Et finalement

$$Encouru'(i) = Paiement'(i) + Reserve'(i)$$

Le sinistre, en paiements cumulés, et ramenés en 2021, est alors payé de la manière suivante :

	Année 0	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	Année 6
Paid	0	134	403	403	669	936	936
Réserve	1318	1210	941	941	666	399	395
Incurred	1318	1344	1344	1344	1335	1335	1331

Figure 62 : Sinistre exemple en année de référence 2021

Le sinistre qui est à la base bien réservé, ne l'est plus du tout. L'Encouru augmente puis diminue alors que la cédante avait bien calculé et communiqué son sinistre. Ce qui pose un souci. L'objectif dans cette sous-partie sera donc de proposer un nouveau moyen de calculer l'Encouru, basé sur le modèle présenté plus tôt, qui permet de garder une bonne réservation de la part de la cédante, et donc in fine de changer les coefficients IBNER utilisés pour estimer la valeur finale du sinistre.

III-4-1 Modèle actuel de calcul de l'Encouru et améliorations possibles

Etant donné la difficulté à connaitre la façon de gérer les réserves par la cédante, le modèle actuel considère que les réserves sont entièrement payées l'année suivant la dernière année d'information DY_{LKS}. Il s'agit donc du paiement en année $DY_{LKS}+1$, qui clôture le sinistre puisque l'intégralité des réserves est payée cette année-là. L'Encouru prend alors naturellement pour valeur :

$$Encouru(DY_{LKS}) = \sum_{k=0}^{DY_{LKS}} Paiement(k) * \frac{Index(k)}{Index(0)} + Reserve(DY_{LKS}) * \frac{Index(DY_{LKS}+1)}{Index(0)}.$$

La formule peut facilement être généralisée à n'importe quelle année de développement i en remplacement DY_{LKS} par i.

En pratique, l'approximation du paiement complet l'année suivante est assez grossière. Le modèle présenté dans ce mémoire permet de proposer une autre approche. En effet, comme le modèle de cadence des paiements est paramétré sur la somme des paiements et non plus sur l'Ultime, il n'est pas nécessaire de déjà connaitre l'Encouru, et donc par extension l'Ultime, pour modéliser la cadence des paiements. L'idée est de considérer une cadence des paiements de la réserve, calculée en partie grâce au modèle de cadence des paiements, pour calculer l'Encouru plus précisément de la manière suivante :

$$Encouru(DY_{LKS}) = \sum_{k=0}^{DY_{LKS}} Paiement_k * \frac{Index(k)}{Index(0)} + \sum_{k=DY_{LKS}+1}^{DY_{max}^{extrapolation}} Reserve_{DY_{LKS}} * PP_k^{Reserve} * \frac{Index(k)}{Index(0)}$$

L'enjeu dorénavant est de déterminer la valeur de $PP_k^{Reserve}$.

III-4-2 Cadence des paiements de la réserve

Le modèle de cadence des paiements présenté précédemment sert à calculer la cadence des paiements des réserves. Pour pouvoir l'utiliser, il faut dans un premier temps calculer la somme des paiements indexés, ce qui est assez trivial, puis à partir de la somme des paiements indexés, on trace la cadence des paiements. La cadence modélisée est la somme pondérée par la probabilité d'occurrence de la cadence de paiements de chaque année de clôture. C'est-à-dire que d'abord, il est nécessaire de calculer la probabilité de clôture année par année, sachant que le sinistre n'est pas clôturé en année DY_{LKS}, qui est égale à :

$$\mathbb{P}[DY_{Clôture} = k | DY_{Clôture} > DY_{KS}] = \begin{cases} 0 \ si \ k \leq DY_{LKS} \\ \dfrac{\mathbb{P}[DY_{Clôture} = k]}{1 - \sum_{i=0}^{DY_{LKS}} \mathbb{P}[DY_{Clôture} = i]} \ sinon \end{cases}.$$

Puis pour chaque année de développement, la cadence des paiements « meilleure estimation » est :

$$PP^{Meilleur}(i) = \sum_{k=0}^{DY_{max}^{extrapolation}} PP^k(i) * \mathbb{P}[DY_{Clôture} = k | DY_{Clôture} > DY_{LKS}]$$

Où :

- $PP^{Meilleur}(i)$ est la valeur de la cadence de paiements « meilleure estimation » en année i.
- $PP^k(i)$ désigne toujours la valeur de la cadence des paiements pour un sinistre clôturé en année k.

Etant donné que la somme des probabilités de clôture vaut 1 et que les cadences de paiements sont des cadences de paiements de sinistres considérés clôturés (donc somme atteignant 100%), la somme des cadences de paiements « meilleur estimation » est de 100%.

Une fois la cadence des paiements obtenues, l'inflation est enlevée, et la nouvelle cadence sans inflation (cadence de paiements « plat ») est normalisée pour atteindre 100%. Dans l'exemple ci-dessous, l'année $DY_{max}^{extrapolation} = 15$, mais dans les modèles il s'agit toujours de l'année 35 en Belgique et 20 pour la France. On appelle dorénavant $PP^{Meilleur}$ la cadence des paiements « plat » normalisée qui servira pour la suite du modèle.

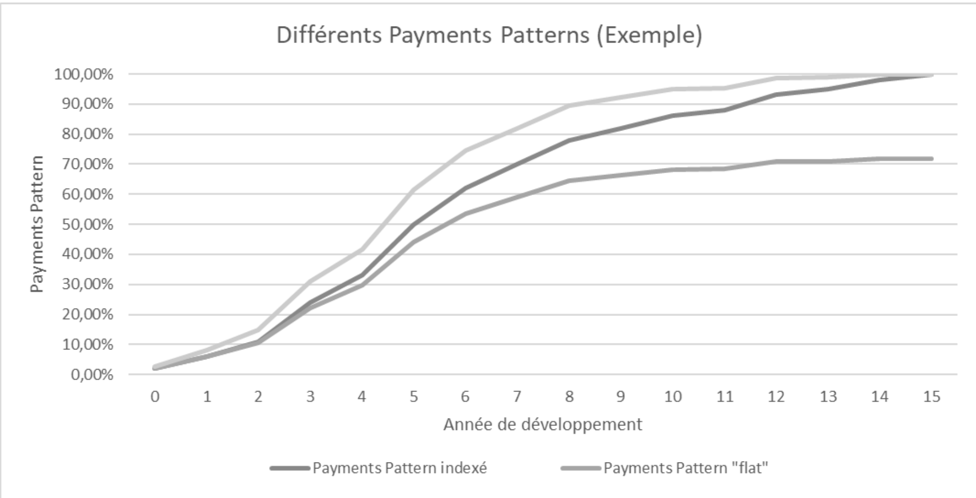


Figure 63 : Exemple de normalisation de la cadence des paiements

Ensuite, il s'agit de combiner la cadence des paiements historique et la cadence modélisée. Pour les années de développement antérieurs à DY_{LKS}, la cadence de paiements cumulée est simplement la somme des paiements sur l'Encouru, tandis que pour les paiements postérieurs à DY_{LKS}. Il s'agit d'appliquer la cadence de paiements du modèle aux réserves.

Pour les années après DY_{LKS}, on applique la cadence de paiements aux réserves historiques, ce qui revient à la formule suivante :

$$PP^{mix}(i) = \begin{cases} \dfrac{Paiement(i)}{Encouru(DY_{LKS})} \; si\; i \leq DY_{LKS} \\ \dfrac{PP^{Meilleur}(i)}{\Lambda_{DY_{LKS}}} * \dfrac{Reserve(DY_{LKS})}{Encouru(DY_{LKS})} \; si\; i > DY_{LKS} \end{cases}.$$

Avec :

$$\Lambda_{DY_{LKS}} = \sum_{k=DY_{LKS}+1}^{DY_{max}^{extrapolation}} PP^{Best}(k).$$

Cela permet d'avoir une cadence de paiements complète pour le sinistre et de modéliser le paiement de la réserve. Pour la même cadence modèle que précédemment, et pour un sinistre quelconque avec $DY_{LKS} = 8$, cette méthode permet d'avoir la cadence des paiements suivante :

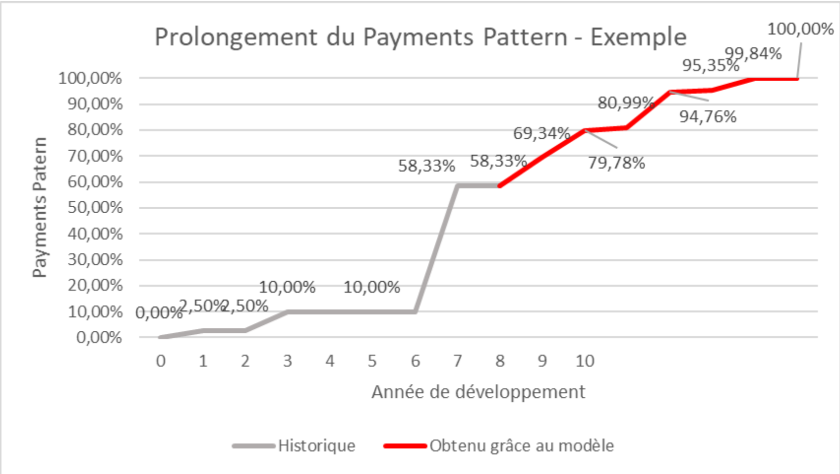


Figure 64 : Exemple de prolongement de la cadence des paiements pour une information jusqu'en année 5

Enfin, à partir de la cadence des paiements, il est possible de calculer la cadence des paiements des réserves, telle que :

$$PP_{DY_{LKS}}^{reserve}(i) = \begin{cases} \dfrac{PP^{mix}(i)}{\sum_{k=DY_{LKS}+1}^{DY_{max}^{extrapolation}} PP^{mix}(k)} \; si\; DY_{LKS} < i \leq DY_{max}^{extrapolation} \\ 0\; sinon \end{cases}.$$

Cela permet d'avoir le paiement potentiel de la réserve, ce qui permet d'avoir une vision plus construite que simplement tout clôturer en année DY_{LKS}. A partir de la cadence des réserves, il est possible de modéliser les paiements futurs. La formule ci-dessus est appliquée pour calculer le montant de l'Encouru en DY_{LKS}, ce qui est souvent l'information recherchée, mais il est tout à fait possible de calculer cette valeur pour n'importe quelle année de développement inférieure à DY_{LKS}. L'idée étant toujours la même : calculer la somme des paiements empiriques jusqu'en année de développement souhaitée, puis, calculer la cadence de la réserve afin d'avoir une meilleure idée de l'indexation. En

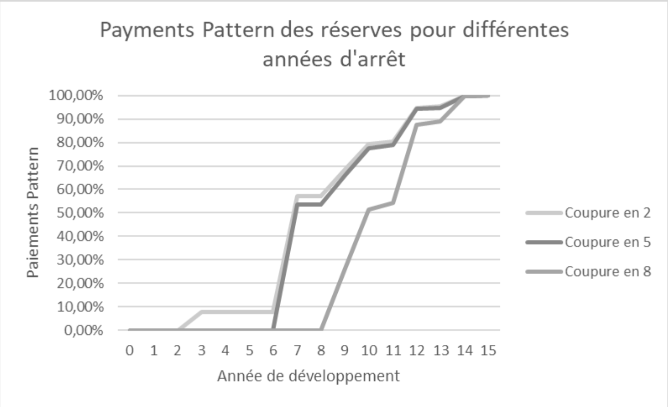


Figure 66 : Cadence des réserves (EXEMPLE)

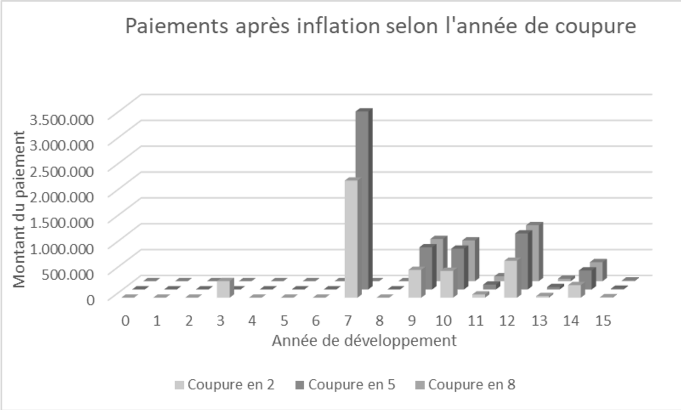


Figure 65 : Paiement de la réserve (EXEMPLE)

gardant le même exemple que précédemment mais en coupant respectivement en année de développement 8, 5 et 3, les cadences de paiements pour les réserves obtenues et les paiements sont présentés ci-dessous.

Grâce à ce procédé, l'Encouru indexé est stable si l'Encouru non-indexé l'est. Cela permet de garder les sinistres qui sont bien réservés. Il est d'ailleurs possible d'observer cela en faisant le calcul de l'Encouru indexé selon cette méthode pour chaque année de développement. Dans l'exemple utilisé jusqu'ici, il est possible de calculer le montant de l'Encouru indexé selon la nouvelle méthode et de le comparer à la méthode actuelle. Dans cet exemple, l'Encouru original, sans indexation, est considéré comme constant entre l'année de développement 5 et 8 mais l'Encouru augmente entre l'année 3 et 5. L'information complète concernant le sinistre observé (paiements et Encouru par année, indexation ...) est consultable en annexe 3. Il est alors attendu d'avoir un Encouru indexé qui augmente entre 3 et 5 et qui reste stable entre l'année 5 et 8.

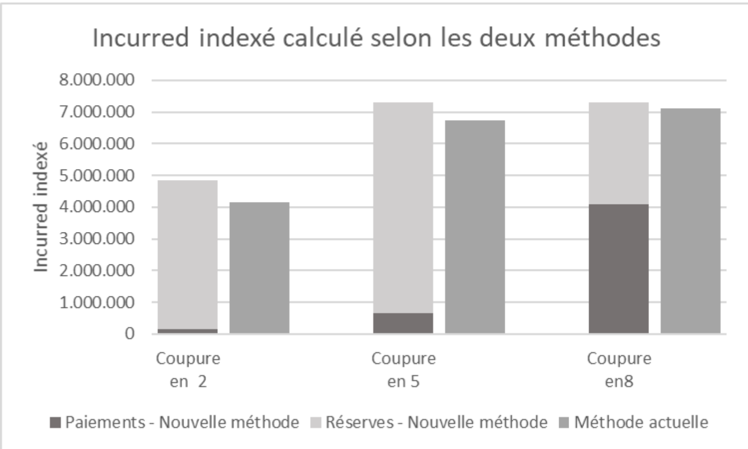


Figure 67 : Comparaison des méthodes de calcul de l'Encouru indexé (EXEMPLE)

III-4-3 Alternative au modèle

Une autre façon de calculer la réserve a été envisagée ici. Cette méthode est une méthode qui peut être qualifier d'intermédiaire. C'est-à-dire qu'elle est plus complète que le modèle de base, puisqu'elle va considérer un développement des réserves, mais qu'elle est plus simple que le modèle présenté ci-dessus dans la façon de lier la cadence de paiements empirique et la cadence de paiements du modèle.

Jusqu'à la liaison des deux cadences, la méthode est strictement la même que celle présentée auparavant. Une cadence de paiements « meilleure estimation » est calculée grâce au modèle. Cependant, c'est une règle de maximum qui est utilisée ici pour faire la jointure entre les deux cadences. Ce qui était appelé PP^{mix} vaut maintenant la chose suivante :

$$\widetilde{PP^{mix}}(i) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{k=0}^{i} Paiement(k)}{Encouru_{DY_{LKS}}} \; si \; i \leq DY_{LKS} \\ \max\left(\dfrac{\sum_{k=0}^{DY_{LKS}} Paiement(k)}{Encouru_{DY_{LKS}}}, \widetilde{PP^{meilleur}}(i)\right) sinon \end{cases}$$

Pour rappel : $\widetilde{PP}(i)$ désigne la cadence de paiements cumulée et $PP(i) = \widetilde{PP}(i) - \widetilde{PP}(i-1)$.

Si l'Encouru change lorsqu'une nouvelle année de développement est communiquée par la cédante, il est alors nécessaire de recalculer tout le $\widetilde{PP^{mix}}(i)$ à l'aide de la nouvelle valeur de l'Encouru communiquée. Cela permet d'éviter la décroissance de la cadence des paiements qui pourrait être provoquée dans le cas suivant par exemple :

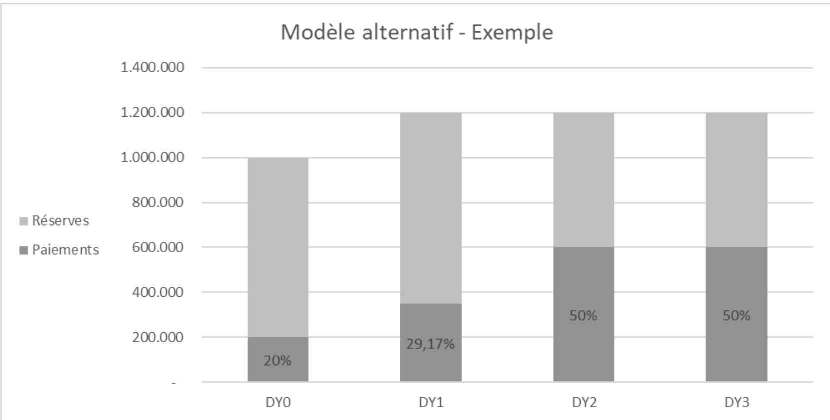


Figure 68 : Modèle alternatif - Exemple

	DY0	DY1	DY2	DY3
Paiements (cumulés)	200.000	350.000	600.000	600.000
Réserves	800.000	850.000	600.000	600.000
Incurred	1.000.000	1.200.000	1.200.000	1.200.000
% Paiement	20,00%	29,17%	50,00%	50,00%
PP avec LKS = DY3	16,67%	29,17%	50,00%	50,00%

Figure 69 : Modèle alternatif - Tableau exemple LKS = DY3

Ici la cadence historique vaut 50% en année de développement 3. Cependant, si la réserve augmente fortement lors de l'année de développement 4, alors la cadence des paiements pour l'année de développement 4 sera inférieure à 50% sans que cela ne correspond à un mouvement réel des paiements. Il faut alors recalculer toute la cadence historique à l'aide de la nouvelle valeur de l'Encouru. Dans le tableau présenté ci-dessous, la cadence des paiements en année de développement 3 vaut 30% lorsque la Dernière Situation Connue est l'année 4.

	DY0	DY1	DY2	DY3	DY4
Paiements (cumulés)	200.000	350.000	600.000	600.000	600.000
Réserves	800.000	850.000	600.000	600.000	1.400.000
Incurred	1.000.000	1.200.000	1.200.000	1.200.000	2.000.000
% Paiement	20,00%	29,17%	50,00%	50,00%	30,00%
PP avec LKS = DY3	16,67%	29,17%	50,00%	50,00%	
PP avec LKS = DY4	10,00%	17,50%	30,00%	30,00%	30,00%

Figure 70 : Modèle alternatif - Tableau exemple LKS = DY4

Cela signifie qu'il est important de changer la valeur de l'Encouru « plat » en LKS lorsqu'on vérifie la stabilité de l'Encouru indexé à l'aide des différentes Dernières Situations Connues historiques. C'est-à-dire lorsqu'on supprime une année de développement pour recalculer le montant de l'Encouru indexé avec ce modèle, on ne peut pas juste prendre la valeur de la cadence de paiements précédemment calculée, puisqu'elle est calculée sur un Encouru en Dernière Situation Connue qui appartient à une diagonale supprimée.

L'utilisation du maximum permet de conserver la propriété de stabilité de l'Encouru indexé. Pour rappel, cela signifie que si l'Encouru « plat » est constant d'une année à l'autre, alors la valeur de l'Encouru calculé par le modèle reste identique à l'année précédente.

La stabilité de l'Encouru est une propriété très intéressante dans ce modèle puisqu'elle permet de garder un effet IBNER stable. Lorsqu'un sinistre est correctement estimé par la cédante, et donc que son Encouru est stable d'une année à l'autre, son Encouru devient croissant après indexation avec la méthode actuelle. Cela signifie que lorsque l'effet IBNER va être calculé, l'indexation va entrainer un effet IBNER qui n'existe en fait pas. Avec la stabilité de l'Encouru, les coefficients IBNER sont déchargés de cette erreur et valent 1 en cas d'Encouru flat constant.

Rappel : le coefficient IBNER d'une année n est défini comme l'Encouru en année n divisé par l'Encouru en année n-1. Ce coefficient est calculé à l'échelle du portefeuille.

III-4-4 Résultats et analyses

Cette sous-partie sert à mesurer en quoi ce changement dans le calcul de l'Encouru a un impact dans le prix final. Encore une fois, il est utilisé ici le calcul au-dessus d'un montant en Excess, présenté plusieurs fois dans le modèle sur le Payments Pattern. Pour un souci de bonne compréhension, les trois modèles sont désignés de la manière suivante : le modèle « Actuel » est le modèle qui considère la réserve comme un paiement en année $DY_{LKS} + 1$, le modèle « Reserve » est le premier modèle présenté ici, et enfin, le modèle « Max » est le modèle présenté comme une alternative et utilisant la fonction maximum. Il a également été choisi de considérer la priorité sans clause stable, principalement pour simplifier les calculs et la compréhension.

III-4-4-a Résultats sur l'Encouru

Dans un premier temps, l'effet IBNER ne sera pas pris en compte. L'Encouru calculé est considéré comme l'Ultime du sinistre, sa valeur finale. L'hypothèse faite est donc que la cédante a correctement réservé son sinistre, que l'Encouru ne variera pas, et donc que l'Encouru en DY_{LKS}

correspond à l'Encouru en $DY_{Clôture}$ et donc à l'Ultime. Les modèles Reserve et Max sont confrontés au modèle actuel à l'aide du calcul du ratio ci-dessous. Un ratio négatif signifie donc que le prix calculé par le modèle Reserve ou Max est supérieur au prix actuel.

$$Ratio = \frac{\sum_S Excess^{Actuel}(Priorité, S) - \sum_S Excess^{Modèle}(Priorité, S)}{\sum_S Excess^{Actuel}(Priorité, S)}$$

Le ratio prend en compte tous les sinistres S de la base de données.

Pour la base de données française, les résultats suivants sont obtenus :

Priorité	Actuel	Réserve	Max	Ratio Réserve	Ratio Max
600.000	10.008.837.277	10.183.637.691	10.112.079.979	-1,75%	-1,03%
1.000.000	8.893.861.353	9.061.938.405	8.992.076.129	-1,89%	-1,10%
2.000.000	7.008.123.358	7.164.792.942	7.098.594.865	-2,24%	-1,29%
3.000.000	5.702.640.933	5.848.024.818	5.785.938.437	-2,55%	-1,46%
6.000.000	3.216.640.062	3.336.065.213	3.283.877.391	-3,71%	-2,09%
9.000.000	1.719.600.273	1.808.893.414	1.768.184.207	-5,19%	-2,83%
12.000.000	861.491.236	924.019.160	894.699.119	-7,26%	-3,85%
15.000.000	406.713.742	443.804.882	425.130.383	-9,12%	-4,53%
18.000.000	208.027.312	226.584.120	216.508.926	-8,92%	-4,08%

Figure 71 : Comparaison des différents modèles MTPL_FR

Ces résultats sont ensuite présentés sous forme de courbes dans le graphique suivant :

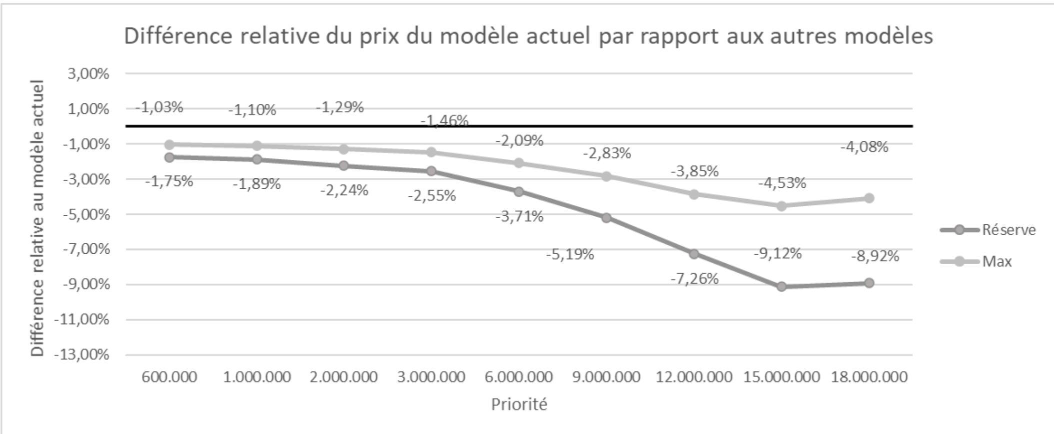


Figure 72 : Ratio en fonction du modèle MTPL_FR

Les deux modèles sont plus chers que le modèle actuel, ce qui parait logique puisque considérer que la réserve est payée en année $DY_{LKS} + 1$ implique un impact de l'inflation généralement assez faible, dans tous les cas il est plus faible que si la réserve est payée non pas l'année qui suit mais dans les années qui suivent, comme c'est le cas pour les deux nouvelles méthodes. Le modèle Max est également moins cher quel que soit la priorité pour les données françaises.

En Belgique maintenant, les résultats, présentés ci-dessous, sont globalement les mêmes donc il n'est pas nécessaire de s'attarder dessus. Il est néanmoins intéressant de noter que, malgré plus d'années de développement possibles jusqu'en année $DY_{max}^{extrapolation}$, et de fait un impact potentiellement plus important du retard de paiement des réserves avec les nouvelles méthodes, la différence de prix entre les modèles est plus faible pour la Belgique.

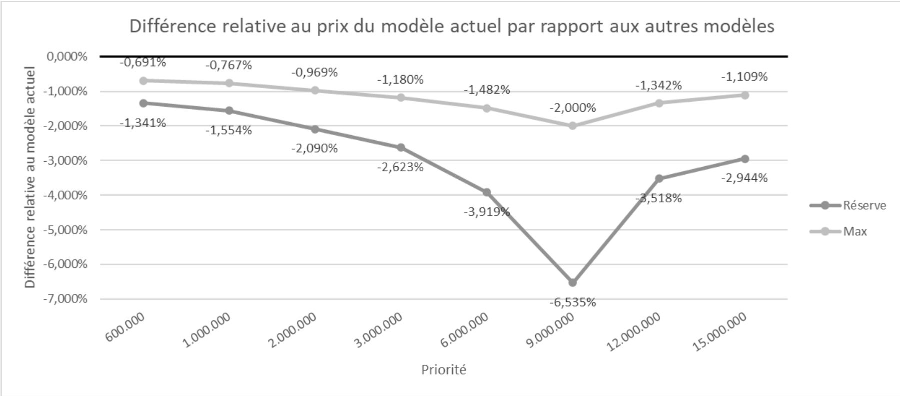


Figure 73 : Ratio en fonction du modèle MTPL_BE

III-4-4-b Explication de l'écart de prix

Afin de comprendre et d'expliquer pour la différence de prix est plus faible en Belgique qu'en France, alors que l'inverse serait plutôt attendu, il est intéressant d'appliquer l'indice français au calcul du prix en Belgique, et inversement l'indice belge pour le calcul du prix en France. L'observation est effectuée uniquement pour le modèle Réserve et en France ici mais les conclusions sont exactement les mêmes pour le modèle Max et en Belgique.

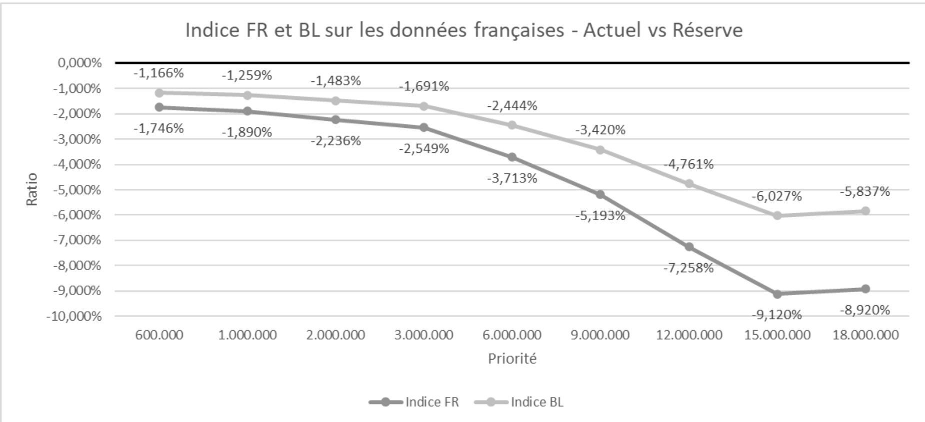


Figure 74 : Ratio en fonction de l'indice utilisé pour l'inflation

Dans le graphe ci-dessus, qui présente le ratio utilisé dans la sous-partie précédente pour les résultats mais calculé à l'aide de l'indice pour l'inflation en France et en Belgique sur les mêmes données (les données françaises). Il est facile de voir qu'appliquer l'indice utilisé pour l'inflation en Belgique sur les données françaises diminue la différence de prix avec le modèle actuel. L'explication se trouve à ce niveau-là.

Cette différence s'explique dans la convexité ou concavité de la courbe d'inflation. Dans le cas des données belges et françaises, la courbe d'inflation est convexe. Plus la convexité de la courbe augmente rapidement, et plus la différence avec le prix du modèle actuel va être importante. En effet en observant l'évolution des indices, il est possible de s'apercevoir que la convexité de l'indice français « augmente plus rapidement » que celle de l'indice belge.

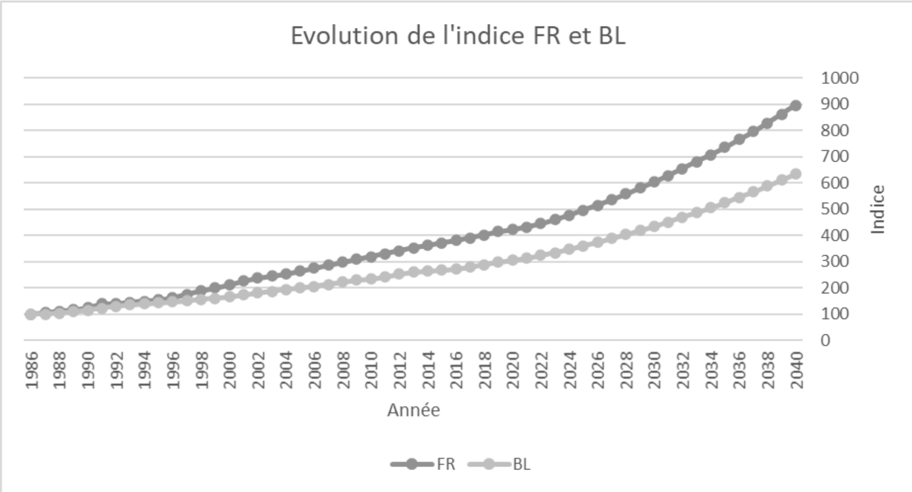


Figure 75 : Evolution de l'indice permettant de prendre en compte l'inflation en France et en Belgique

Plus précisément, et toujours à l'aide d'un exemple graphique, ce qui déterminera à quel point il y a un écart entre le modèle actuel et le modèle Reserve est la différence entre le rapport des points rouges, et du rapport entre les 6 premiers points gris et le deuxième point rouge (2028) et les 5 points gris restants dans l'exemple ci-dessous. Cet exemple concerne la base de données française mais le fonctionnement est globalement le même en Belgique.

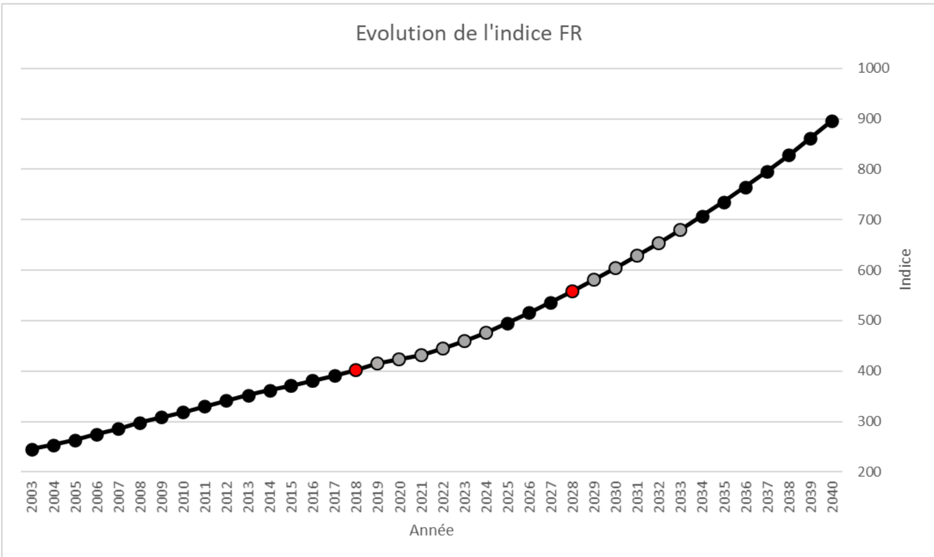


Figure 76 : Exemple sur l'évolution de l'indice expliquant l'écart

Plus concrètement, il est possible de prouver que cet écart est plus grand dans les conditions énoncées en calculant la différence des deux Encouru, obtenus grâce au modèle Actuel et au modèle Réserve. C'est parce que la priorité est une constante qu'expliquer un écart de prix revient à expliquer un écart d'Encouru, même si le maximum utilisé pour calculer le montant en excess ne permet pas de mesurer exactement quel sera l'écart prix grâce à l'écart entre les Encouru.

L'écart de prix est négatif lorsque

$$Encouru_{Actuel} < Encouru_{Réserve}.$$

C'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{DY_{LKS}} Paiement(k) * \frac{Index(k)}{Index(0)} + Réserve_{DY_{LKS}} * \frac{Index(DY_{LKS}+1)}{Index(0)} < \sum_{k=0}^{DY_{LKS}} Paiement(k) * \frac{Index(k)}{Index(0)} + Réserve_{DY_{LKS}} * \sum_{k=1}^{DY_{max}^{extrapolation}-DY_{LKS}} PP^{mix}(k+DY_{LKS}) * \frac{Index(DY_{LKS}+k)}{Index(0)}.$$

Ou plus simplement, en retirant les paiements qui sont similaires pour les deux méthodes :

$$\frac{Index(DY_{LKS}+1)}{Index(0)} < \sum_{k=1}^{DY_{max}^{extrapolation}-DY_{LKS}} PP^{mix}(k+DY_{LKS}) * \frac{Index(DY_{LKS}+k)}{Index(0)}.$$

Entre deux indices d'inflation $Index^A$ et $Index^B$, l'indice A aura un plus grand écart de prix sur la même base de données que l'indice B à conditions d'avoir :

$$1 - \frac{Encouru_{Réserve}(Index^A)}{Encouru_{Actuel}(Index^A)} > 1 - \frac{Encouru_{Réserve}(Index^B)}{Encouru_{Actuel}(Index^B)}.$$

Ce qui correspond finalement à :

$$\frac{\sum_{k=1}^{DY_{max}^{extrapolation}-DY_{LKS}} PP^{mix}(k+DY_{LKS}) * \frac{Index^A(DY_{LKS}+k)}{Index^A(0)}}{\frac{Index^A(DY_{LKS}+1)}{Index^A(0)}} < \frac{\sum_{k=1}^{DY_{max}^{extrapolation}-DY_{LKS}} PP^{mix}(k+DY_{LKS}) * \frac{Index^B(DY_{LKS}+k)}{Index^B(0)}}{\frac{Index^B(DY_{LKS}+1)}{Index^B(0)}}.$$

Cela correspond à l'explication graphique faite auparavant, et explique en partie la plus grande différence observée sur la base de données française.

III-4-4-c Résultats sur l'Ultime

Plutôt que de comparer l'Encouru entre les deux modèles, il peut être également intéressant de comparer l'Ultime. En effet, l'Ultime étant calculé avec les coefficients IBNER, et étant donné que dans le cas du modèle Réserve, l'Encouru indexé est constant lorsque l'Encouru Original est constant, alors les coefficients IBNER devraient être plus petits, et donc l'Ultime plus faible. Le calcul du même ratio que précédemment est effectué entre le modèle Actuel et le modèle Réserve et les résultats sont les suivants :

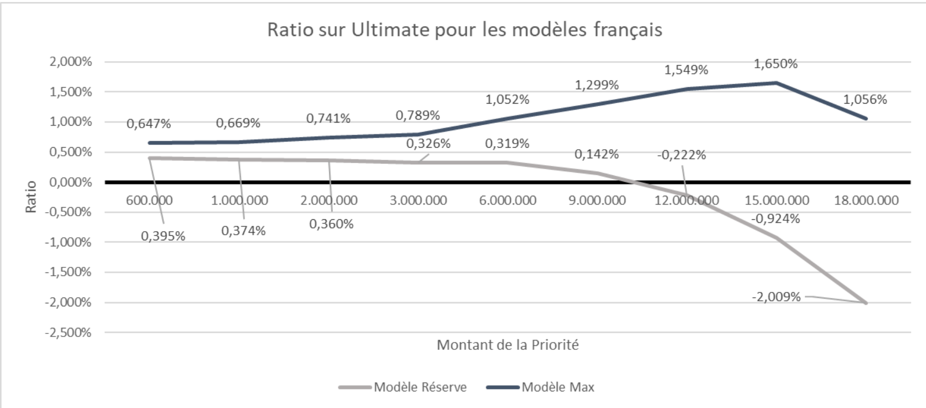


Figure 77 : Ratio sur l'Ultime MTPL_FR

En France, en prenant en compte l'effet IBNER, la nouvelle façon de calculer l'Encouru s'avère finalement moins chère jusqu'à une priorité de 9.000.000 que la méthode actuelle étant donné que le ratio est positif. Pour les priorités supérieures à 9.000.000, la nouvelle méthode devient plus chère que la méthode actuelle mais l'augmentation de prix reste très raisonnable. Avec le modèle Max, le prix obtenu est également moins important dans le cas du nouveau modèle. L'explication est la même puisque les coefficient IBNER sont plus faibles avec ce nouveau modèle. Il faut néanmoins noter qu'une priorité plus haute entraine un plus grand écart de prix, mais cette fois-ci, toujours dans le sens d'un nouveau modèle moins cher. Il est également possible grâce à ce graphe de noter que le modèle Max est toujours moins cher en France que le modèle Réserve, quel que soit le montant de la priorité.

Concernant la Belgique, où seul le modèle Réserve a été testé, le ratio est toujours positif. L'évolution en fonction de la priorité est présentée ci-dessous. Cela signifie que la nouvelle méthode est moins chère que la méthode actuelle. Plus la priorité augmente et plus l'écart de prix semble s'accroitre.

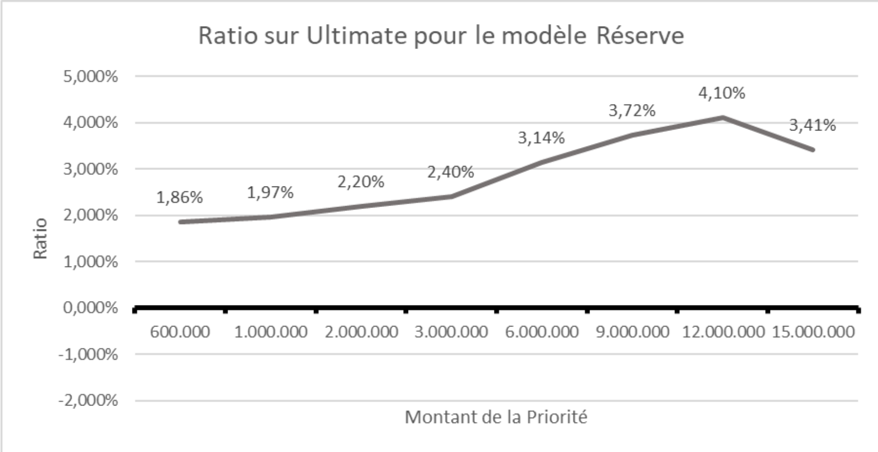


Figure 78 : Ratio sur l'Ultime MTPL_BE

Dans tous les cas, ce qui semble notable et intéressant, est que cette nouvelle manière de calculer les prix semble permettre de garder des prix similaires à la méthode actuelle, voire de les baisser un petit peu, tout en « gagnant » la propriété de stabilité de l'Encouru indexé et donc des sinistres bien réservés.

III-4-4-d Utilisabilité de la méthode

Comme évoqué brièvement, cette méthode de calcul de l'Encouru est rendue possible car le modèle sur la cadence des paiements sachant la clôture ne nécessite pas de connaitre l'Ultime, ce qui était le cas avec le modèle de cadence des paiements actuel. Cependant, pour que le modèle de cadence de paiements fonctionne complètement, il est nécessaire d'avoir l'Ultime pour calculer les probabilités de clôture. Pour la France, cela ne pose pas de souci car finalement à partir du moment où le montant du sinistre dépasse la priorité minimale, de 600.000, elle appartient à la deuxième classe du modèle de clôture. Pour la Belgique, la question est plus complexe, puisque le modèle de clôture est plus lourd en classe (pour rappel, le modèle contient 4 classes de sinistres, donc réellement 3 au-dessus de la priorité minimale).

Dans ce cas-là, revenir à un modèle à 2 classes pour la clôture est envisageable pour la Belgique, évidemment le modèle perd légèrement en précision, mais cela permet de garder la propriété de stabilité sur l'Encouru indexé, et le ratio représenté dans le graphique ci-dessous présente un prix inférieur pour un modèle à 2 classes en Belgique.

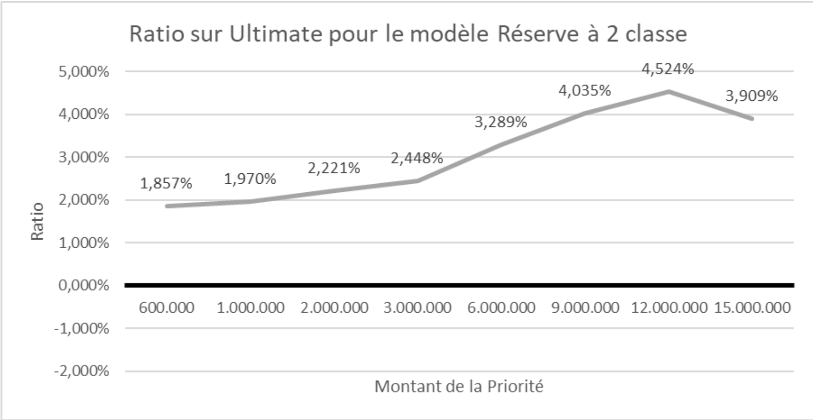


Figure 79 : Ratio sur l'Ultime MTPL_BE (2 classes)

La nouvelle méthode semble également adaptée au calcul en Belgique.

Conclusion

La nécessité de créer un nouveau modèle de cadence des paiements née de l'approximation faite par le modèle actuel, qui se base uniquement sur un comportement moyen par catégorie d'Ultime. Il semblait tout à fait acceptable de penser pouvoir faire mieux pour avoir un comportement plus proche du sinistre, ou au moins qui modélisait plusieurs comportements possibles, plusieurs scénarios pour un sinistre. Après une brève introduction au sujet et une présentation du modèle actuel, il a été observé pendant l'analyse descriptive que les modèles classiquement utilisés ne paraissaient pas adaptés ici. La carence en données, le manque de significativité des variables, la consigne d'avoir peu de paramètres ou l'ambition de créer un modèle traçable étaient des freins à la mise en place de ses modèles. Cependant, une propriété intéressant de la cadence des paiements par année de clôture, à savoir la superposition des graphes lorsqu'ils sont « normalisés », indique qu'une modélisation grâce à une troncature est possible, et c'est là-dessus que le nouveau modèle s'appuie.

Pour créer le nouveau modèle, un premier nettoyage des données a été effectué, afin de supprimer année en cours et paiements incrémentaux négatifs. Lors de la préparation des données, le comportement individuel des sinistres a été observé. Classés par année de clôture, certains d'entre eux semblaient finalement pouvoir être rattachés à une année de clôture antérieure, puisqu'ils étaient quasiment intégralement payés mais considérés comme non-clôturés. Il a alors été décidé de redéfinir la clôture comme étant le dépassement d'un seuil, qu'il a fallu trouver pour chaque année de développement. Ce choix a permis d'avoir finalement des cadences de paiements individuelles plus proches du comportement moyen. Une fois la clôture mieux définie, et toujours avec l'ambition de faire un modèle tronqué par année de clôture, il a été nécessaire de créer un modèle pour la clôture. Pour cela, le choix classique d'un modèle de Poisson a été fait avec néanmoins le besoin de séparer des comportements de clôture très différents entre les plus petits sinistres et les autres. Cela a mené à créer un modèle de Poisson par classe. Un travail d'extrapolation de la clôture en travaillant sur des distributions a priori a été mis en place afin de couvrir le manque l'information des plus gros sinistres, principalement en Belgique. Une fois le modèle de clôture créé et testé, le modèle de cadence des paiements sachant l'année de clôture s'est révélé assez bon en utilisant la fonction de répartition d'une loi log-logistique, tronquée donc par l'année de clôture. La forme en « S » qui peut être obtenue avec certains paramètres de la loi et qui correspond au comportement da la cadence des paiements par année de clôture a été la principale motivation. Enfin, un travail sur l'extrapolation des sinistres après l'année maximale, afin d'atteindre une année de développement qui a été appelée $DY_{max}^{extrapolation}$ a permis une modélisation en prenant en compte plus de scénarios, notamment celui de la clôture après l'année de développement maximale.

Enfin, le modèle étant créé, une confrontation au modèle actuel a été réalisée. Dans un premier temps à travers le rétrocontrôle, basé sur la comparaison aux données empiriques sur les sinistres déjà clôturés, puis dans un deuxième temps à travers l'impact sur le prix, où le nouveau modèle est apparu plus cher que le modèle actuel, ce qui risque dans un premier temps de constituer un frein à sa mise en place. Le dernier grand moment de la confrontation au modèle actuel a été l'analyse de la sensibilité du modèle à l'ajout et au retrait d'une cédante ou d'un sinistre. Sur ce point-là, le nouveau modèle s'est révélé très satisfaisant car plus robuste que le modèle actuel. Pour finir, une utilisation de ce nouveau modèle a été proposée. Dans le nouveau modèle, le montant de l'Ultime n'est pas utilisé dans certain cas, comme en France, ou est utilisé mais peut-être remplacé par un modèle presque aussi performant mais ne l'utilisant pas. Cela permet alors de travailler sur les réserves, afin d'obtenir un montant d'Encouru indexé stable en cas d'Encouru flat stable. Une alternative avec une règle du maximum a aussi été proposée. Cette nouvelle méthode de calcul de l'Encouru permet, après application de l'effet IBNER, d'avoir un prix inférieur à la méthode actuelle d'indexation des réserves.

ANNEXES

ANNEXE 1 – Méthode utilisée pour déterminer le seuil de clôture

Deux étapes ont été nécessaire pour déterminer le seuil de clôture optimal, une première durant laquelle le seuil était commun à toutes les années de développement, puis une seconde où, en utilisant la valeur obtenue grâce à la première étape comme valeur initiale, il était cherché, année par année, quel était le seuil de clôture optimal.

Etape 1 : Seuil de clôture commun

La première étape est réalisée de manière itérative, en testant toutes les valeurs possibles dans l'intervalle choisi. Dans le cas du travail réalisé ici, il s'agit de l'intervalle [50% ;100%] avec une précision d'une décimale. Pour chaque valeur du seuil, la valeur de l'erreur est calculée de la manière suivante :

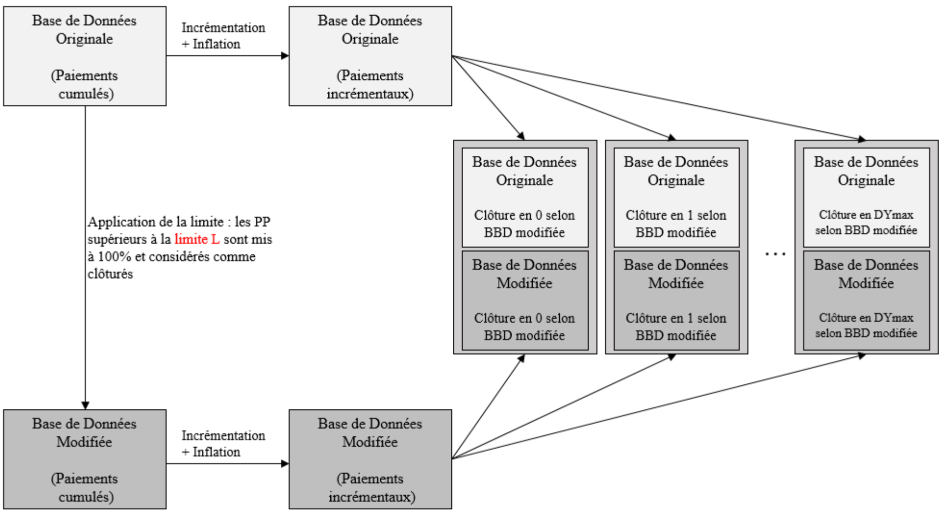


Figure 80 : Schéma de la classification par année de clôture selon le modèle

Le nouveau seuil est appliqué aux données initiales, et les sinistres ayant atteint le seuil sont donc considérés comme clôturés et leur cadence de paiements cumulés est placée à 100%. Suite à cette séparation, il y a donc deux bases de données, la base de données originale et celle dans laquelle les cadences de paiements sont modifiées. Les bases de données sont recalculées en cadence de paiements incrémentaux, puis, les données sont séparées par classe d'année de clôture selon l'année de clôture dans la base de données modifiée. Cela signifie que pour la base de données originale, la classe « Clôture en 0 » contient en fait des sinistres qui, à l'origine, sont clôturés en une année différente, ou pas du tout clôturés.

Pour chaque classe, l'erreur est calculée de la manière suivante : sur la base de données modifiée est calculée la cadence des paiements moyenne par année de clôture, et donc le facteur de stabilité moyen par année de clôture. Puis, pour chaque sinistre clôturé selon le critère du seuil, l'erreur sur le facteur de stabilité est calculée. Ici c'est l'erreur quadratique qui est utilisée. Le facteur de stabilité du sinistre est comparé au facteur de stabilité moyen de l'année de clôture auquel il est associé dans la base de données modifiée. L’erreur est pondérée par l’Ultime du sinistre. Cela permet de commettre moins d’erreur sur les plus gros sinistres et ne pas être trop influencé par les très nombreux petits sinistres. L’erreur sur chaque sinistre est ensuite agrégée, et il est important de diviser par la somme des montants des Ultime des sinistres clôturés. Si ce n’est pas fait, cela incite à avoir le moins de sinistres clôturés possibles, et donc à avoir une limite à 100%.

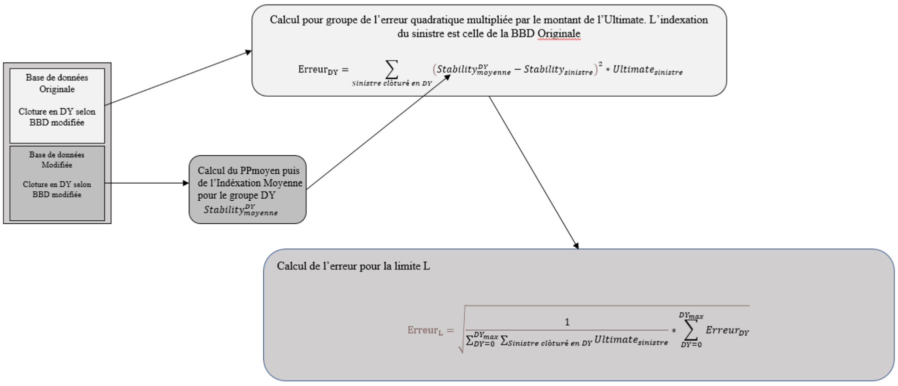


Figure 81 : Calcul de l'erreur par limite L

L’erreur pour chaque limite est calculée ainsi, et est retenu la limite L pour laquelle l’erreur est minimale.

Etape 2 : Seuil de clôture par année de développement

Une fois le seuil de clôture optimal commun obtenu, il est utilisé pour trouver le seuil de clôture optimal par année. Pour une année de développement donnée n, les seuils de clôture de toutes les autres années sont fixés, et l’erreur présentée plus haut est calculée pour chaque valeur candidate au seuil de clôture de l’année n. Initialement, toutes les années de développement ont pour seuil le seuil trouvé dans la partie précédente (seuil optimal commun). L’optimisation consiste à passer année par année, en commençant de la première année, et de trouver à chaque fois la valeur du seuil qui minimise l’erreur. Le seuil pour cette année devient alors cette valeur qui minimise, et l’optimisation a lieu sur l’année suivante. L’idée est de boucler jusqu’à ce que le seuil reste égal, ou assez proche que celui déjà obtenu lors de la boucle précédente, et ce pour chaque année de développement. La convergence n’est pas prouvée ici, mais dans le cas des deux bases de données étudiées, elle avait bien lieu.

ANNEXE 2 – Sensibilité du modèle complet

Code Cédante	Nombres sinistres	Sinistres retirés	Part retirée
2011-215	33	2	34,0%
2017-192	35	2	20,6%
2013-121	33	2	12,6%
2011-119	35	2	26,8%

Figure 82 : Part de la cédante retirée MPTL_FR

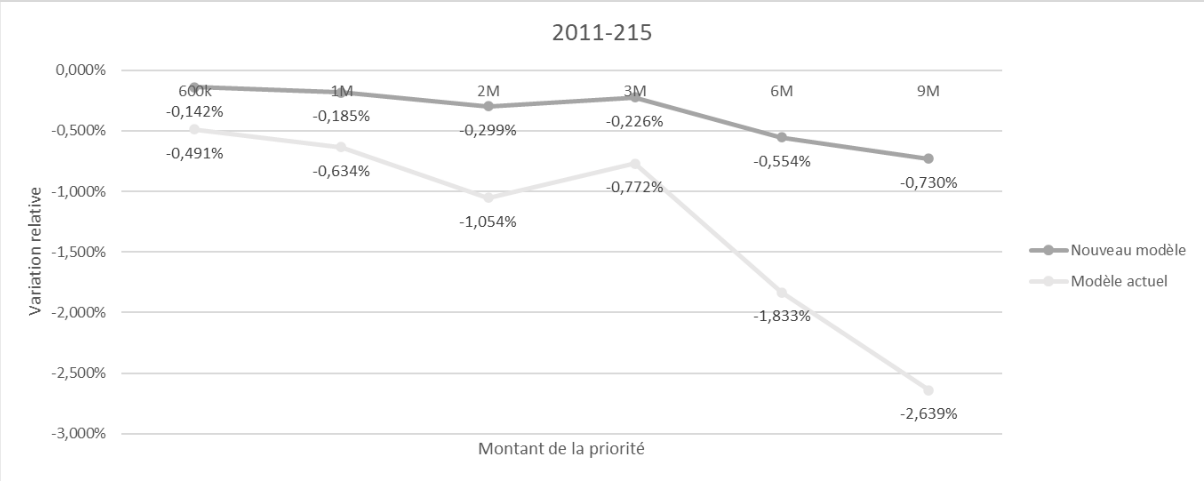


Figure 83 : Variation relative pour la cédante 2011-215

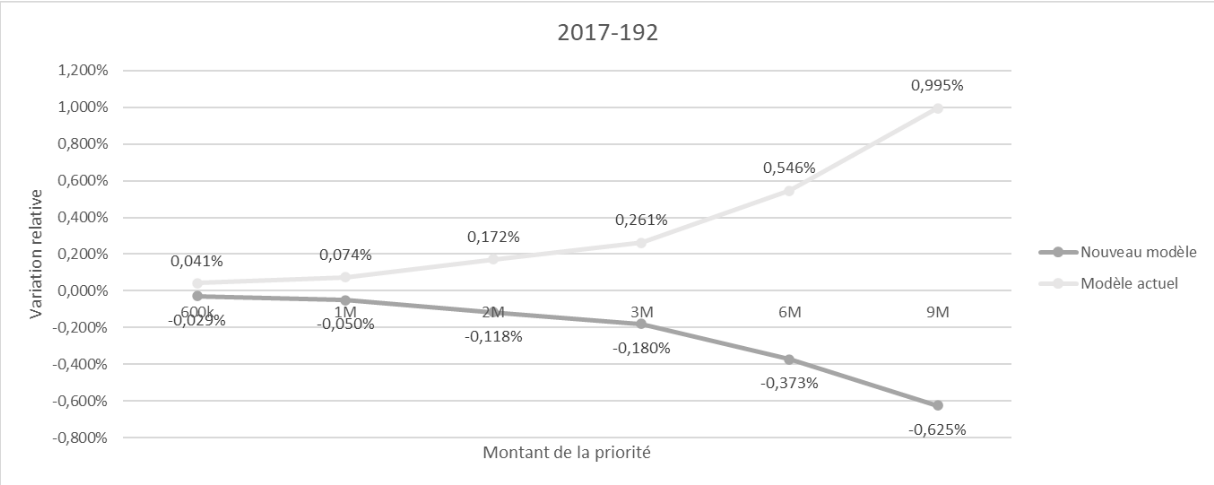


Figure 84 : Variation relative pour la cédante 2017-192

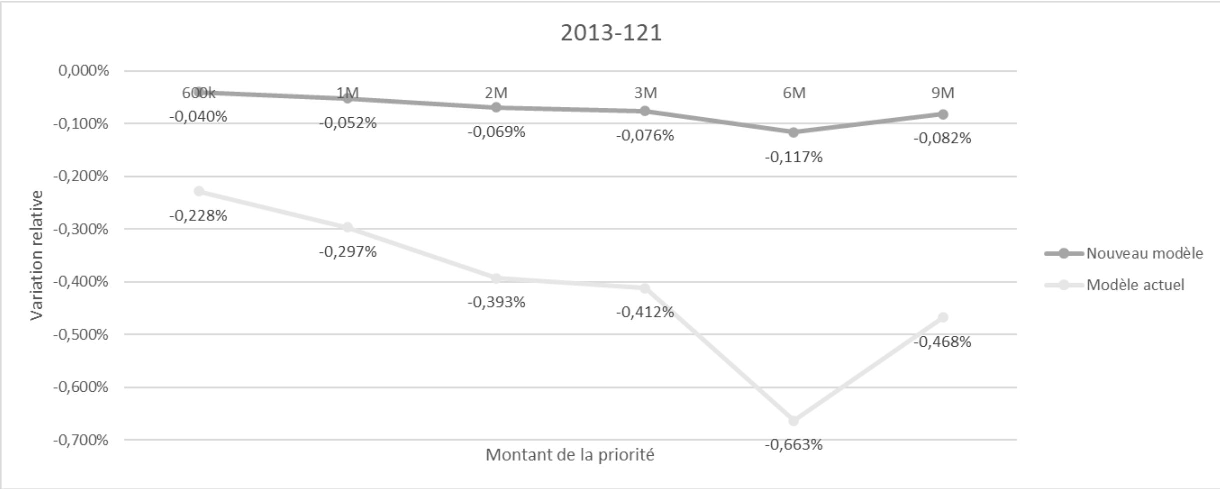


Figure 85 : Variation relative pour la cédante 2013-121

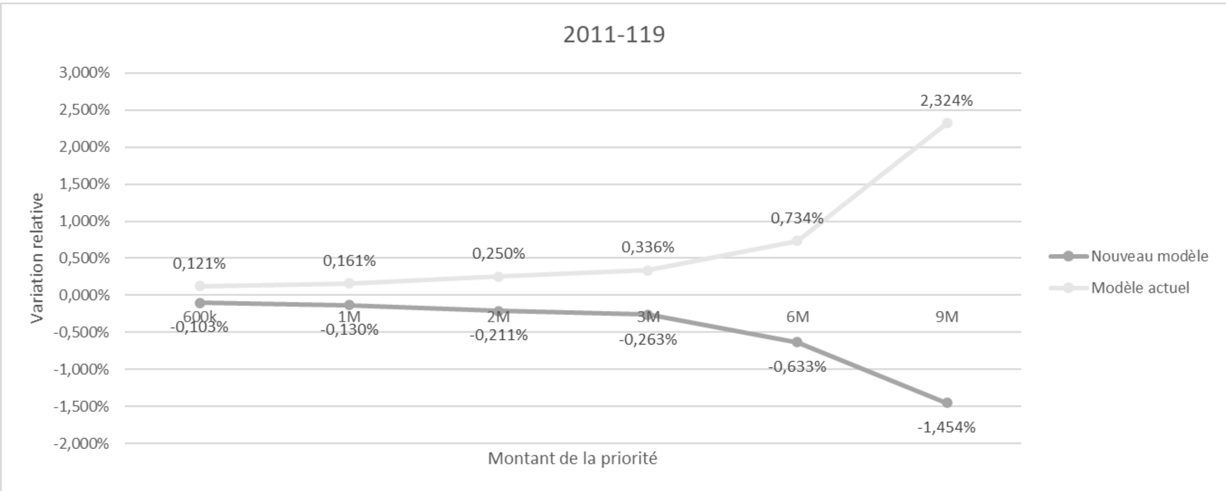


Figure 86 : Variation relative pour la cédante 2011-119

Code Cédante	Nombres sinistres	Sinistres retirés	Part retirée
2014-131	37	2	8,1%
2014-318	33	2	16,4%
2003-270	32	2	15,0%
2010-263	42	2	16,4%

Figure 87 : Part de la cédante retirée MTPL_BE

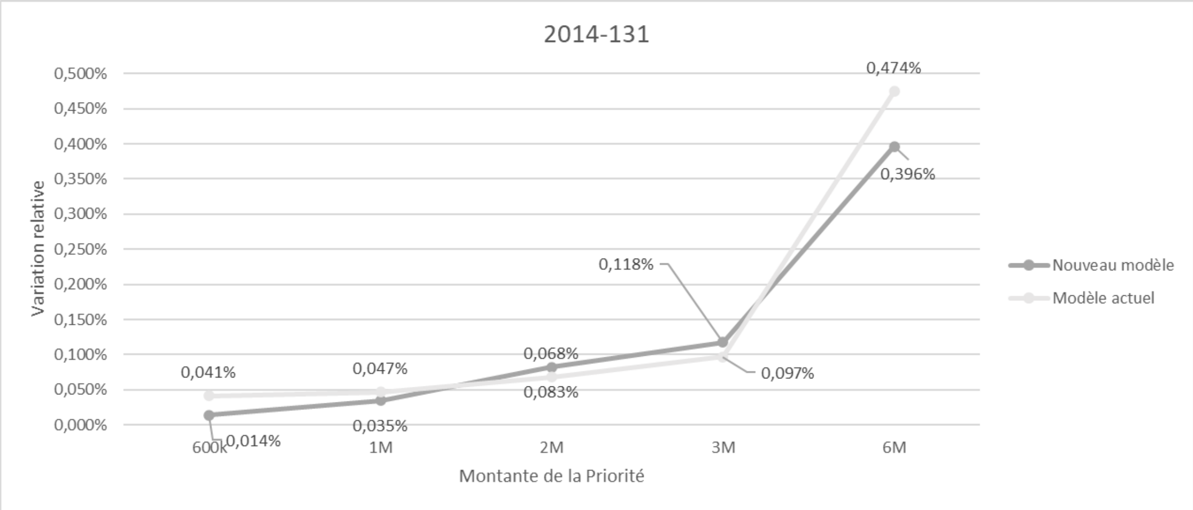


Figure 88 : Variation relative pour la cédante 2014-131

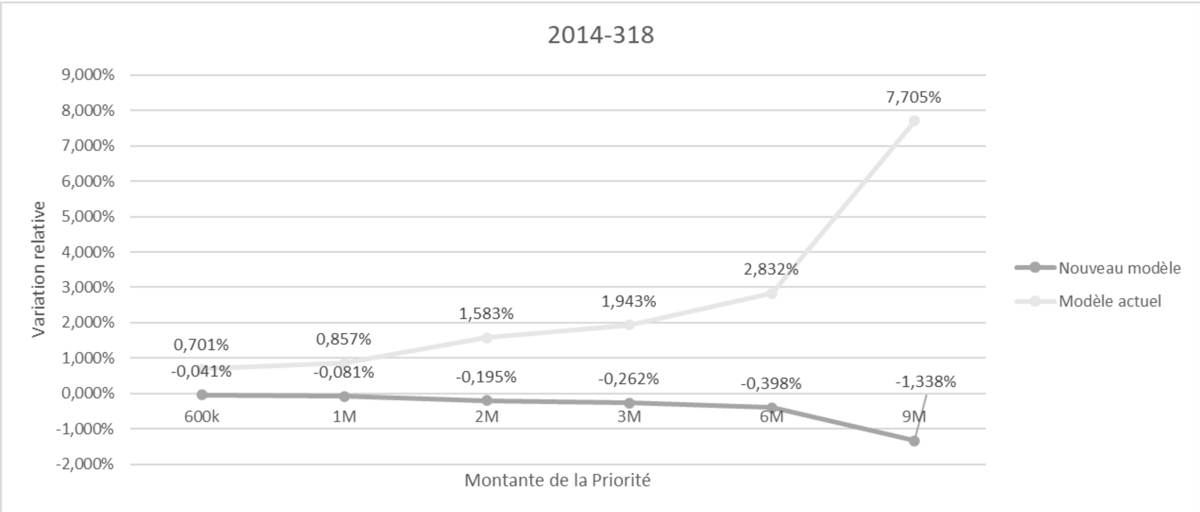


Figure 89 : Variation relative pour la cédante 2014-131

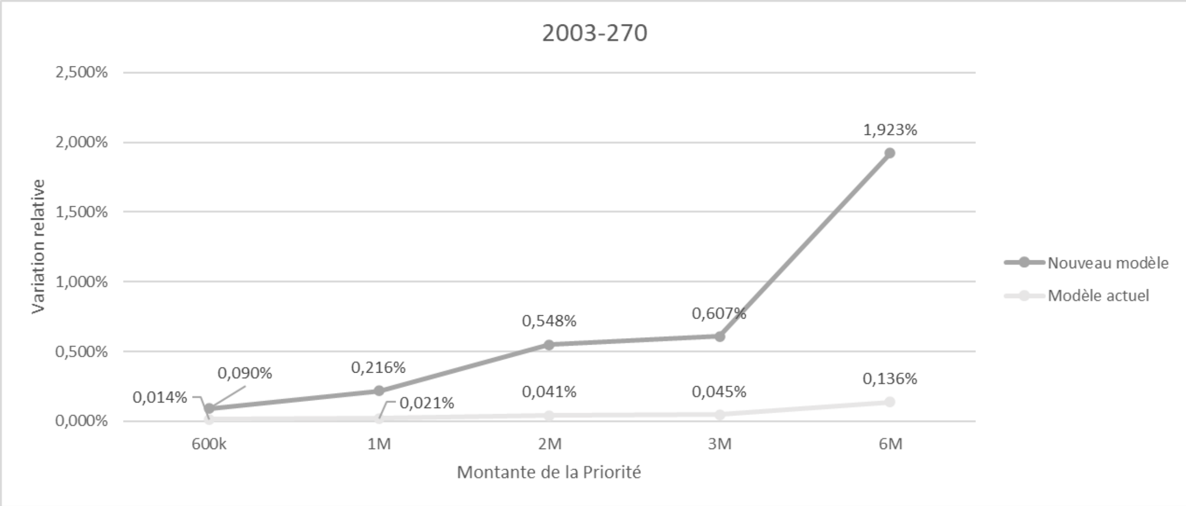


Figure 90 : Variation relative pour la cédante 2003-270

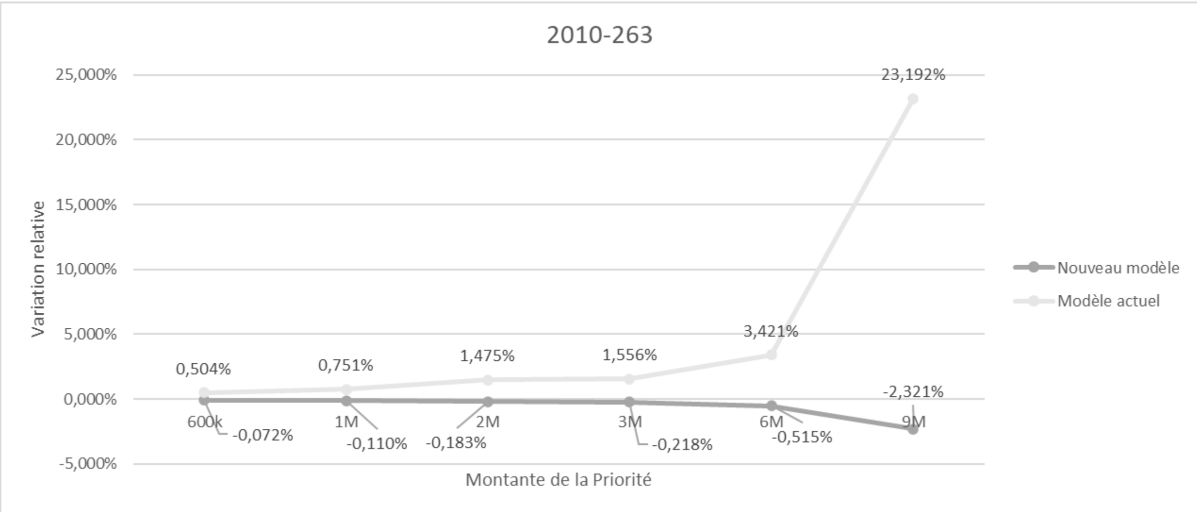


Figure 91 : Variation relative pour la cédante 2010-263

ANNEXE 3 – Exemple utilisé pour la cadence des réserves

L'exemple est basé sur un sinistre construit de toute pièce dont les paiements cumulés, la réserve, et donc l'Encouru valent la chose suivante :

	Année 0	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	Année 6	Année 7	Année 8
Payments Original	-	150.000	150.000	600.000	600.000	600.000	600.000	3.500.000	3.500.000
Réserve Oririnal	4.000.000	3.850.000	3.850.000	3.400.000	5.400.000	5.400.000	5.400.000	2.500.000	2.500.000
Incurred Original	4.000.000	4.000.000	4.000.000	4.000.000	6.000.000	6.000.000	6.000.000	6.000.000	6.000.000

Figure 92 : Information Original

Le sinistre est développé jusqu'en année 8, il est supposé ici que le sinistre appartient à une base de données dont l'année maximale est l'année 10 et l'année maximale après extrapolation est l'année 15. L'inflation utilisée pour indexée les sinistres est la suivante :

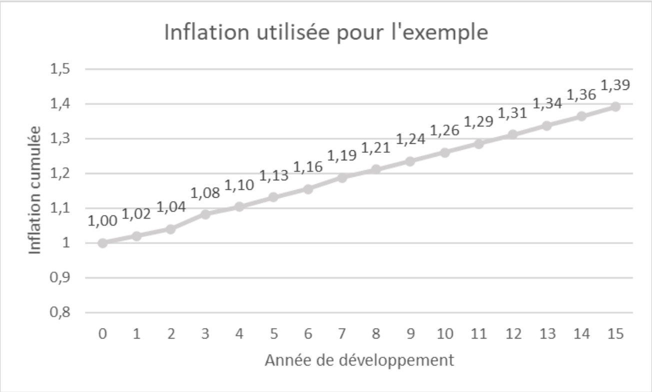


Figure 93 : Inflation fictive utilisée pour l'exemple

La méthode actuelle calcule la réserve comme payée l'année suivante, donc une fois indexés, les paiements, les réserves, et l'Encouru auraient la valeur suivante. La Réserve en année 0 subit également l'inflation, ce qui peut paraitre contre intuitif car l'inflation sert de base pour cette année. Mais comme le modèle actuel consiste à considérer la réserve payée en n+1, alors la réserve en année 0 est indexée avec l'indice de l'année 1.

	Année 0	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	Année 6	Année 7	Année 8
Payments Indexé	0	153.000	153.000	639.907	639.907	639.907	639.907	4.083.205	4.083.205
Réserve Indexé	4.080.000	4.005.540	4.165.762	3.752.431	6.108.738	6.237.021	6.411.658	3.027.727	3.088.282
Incurred Indexé	4.080.000	4.158.540	4.318.762	4.392.339	6.748.645	6.876.928	7.051.565	7.110.932	7.171.487

Figure 94 : Méthode actuel de calcul de l'Encouru

Dans le nouveau modèle, le modèle de cadence des paiements et celui sur la clôture servent à faire une cadence indexée « meilleure estimation », auquel l'inflation est retirée, puis qui est normalisé. Il s'agit du graphe déjà présenté dans le mémoire et replacé ci-dessous :

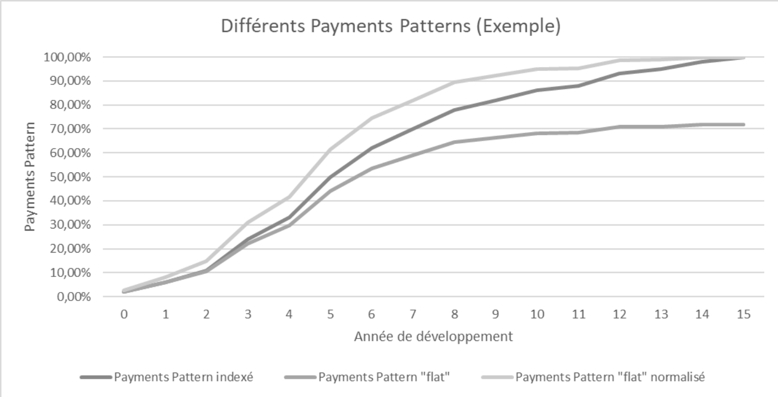


Figure 95 : Travail sur la cadence des paiements "meilleure estimation"

Cette cadence des paiements est ensuite « raccrochée » à la cadence de paiements du sinistre, c'est-à-dire que pour les 8 premières années pour lesquelles la cadence empirique est connue, les données historiques sont utilisées, tandis que pour les 7 dernières, c'est le modèle qui sert de cadence de paiements.

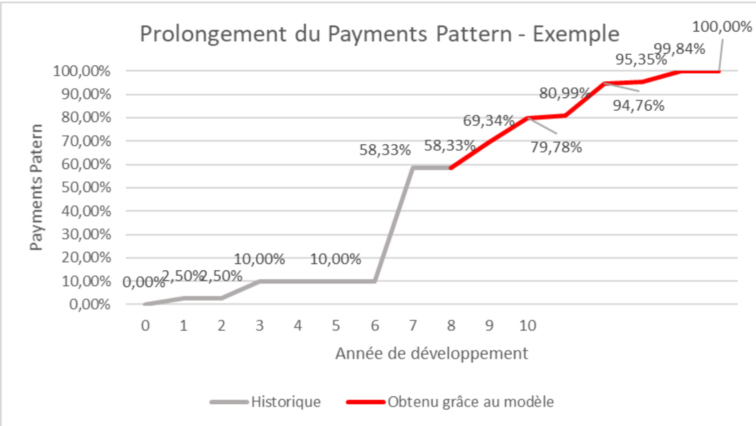


Figure 96 : Prolongement de la cadence des paiements

En pratique, ce travail permettrait de calculer l'Encouru en année 8, néanmoins ici l'objectif est de démontrer la stabilité de l'Encouru indexé. Il est donc possible de calculer la cadence des réserves pour plusieurs années de développement. Ici il a été choisi de le faire pour l'année 3, l'année 5 et l'année 8. Là encore, les différentes cadences de paiements et paiements sont exprimés dans le mémoire :

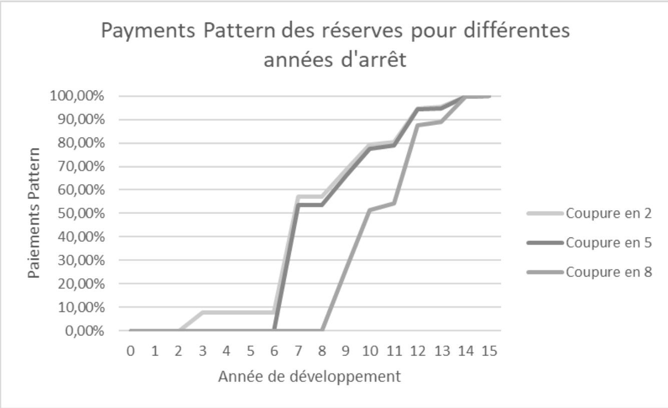


Figure 98 : Payments Pattern de la réserve

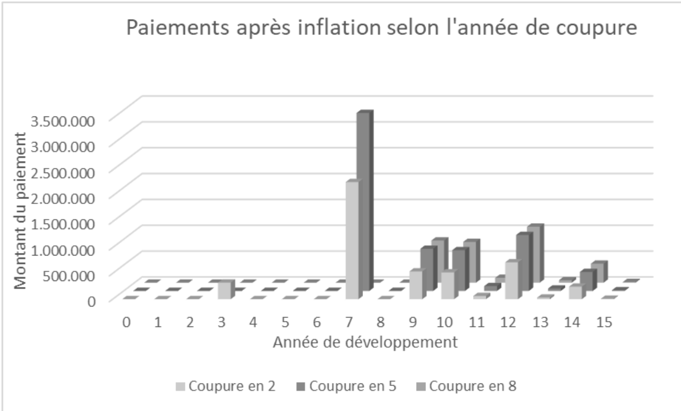


Figure 97 : Paiement de la réserve

Cela permet d'avoir le montant de l'Encouru indexé selon le nouveau modèle, qui est comparé dans le tableau qui suit à l'Encouru indexé du modèle actuel. Le nouveau modèle permet bien la stabilité de l'Encouru :

Dernière année	Incurred "Flat"	Payments Nouveau	Réserve Nouveau	Incurred Nouveau	Payments Actuel	Réserve Actuel	Incurred Actuel
Coupure = 2	4000000	153.000	4.698.845	4.851.845	153.000	4.165.762	4.318.762
Coupure = 5	6000000	639.907	6.652.896	7.292.804	639.907	6.237.021	6.876.928
Coupure = 8	6000000	4.083.205	3.209.599	7.292.804	4.083.205	3.088.282	7.171.487

Figure 99 : Encouru selon modèle utilisé