Mémoire présenté le :

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : ALLO Adomo Yves Alain Wilfried

Titre : Etude et implémentation automatisée du calcul des provisions techniques dans les comptes d'assurance santé pour expatriés

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☐ 1 an ☒ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires *Signature*

M. LAURENT Lionel

. . . .

. . . .

Membres présents du jury de l'ISFA

M. LOISEL Stéphane

. . . .

. . . .

Entreprise : MSH International

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : M. CHARAFI Omar

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Résumé

Afin d'être en mesure de remplir leurs obligations futures, les compagnies d'assurance doivent constituer des provisions techniques. La nouvelle norme de solvabilité II (nouvelle réglementation européenne) qui oblige les assureurs à disposer de suffisamment de capital en réserve pour faire face à presque n'importe quelle catastrophe, réglementera spécifiquement le niveau de provisionnement des compagnies d'assurance européennes afin de réduire leur risque de faillite et de protéger les droits des assurés.

MSH International, n'étant pas une compagnie d'assurance, n'est donc pas soumise à cette réglementation. Dans cette logique, MSH International constitue des montants de provisions afin d'offrir une meilleure visibilité de la sinistralité future à ses clients, de mieux piloter son portefeuille et ses flux de trésorerie et de challenger les provisionnements effectués par ces assureurs partenaires. En effet, le niveau de provision influe de manière significative sur les comptes de résultats et donc sur les taux de revalorisations tarifaires à appliquer pour les clients. Le calcul des provisions techniques permet donc à MSH International, dans son rôle de courtier, d'accompagner, de conseiller et de négocier au mieux pour son client.

L'objectif de ce mémoire consiste en l'étude et l'implémentation automatisée des différentes méthodes de provisionnement non-vie connues du marché dans le but d'améliorer l'existant. L'analyse de données permet de mieux appréhender le risque et de mesurer la variabilité des provisions techniques du compte de résultat santé pour expatriés.

Les provisions techniques en assurances non-vie sont principalement des provisions pour sinistres à payer (PSAP), des provisions pour primes non acquises (PPNA), des provisions pour risques en cours (PPRE) et des provisions pour égalisation (PPE). Il existe deux grandes catégories de méthodes de calculs de provisionnement non-vie : déterministes et stochastiques, qui répondent à des objectifs différents. L'utilisation de méthodes stochastiques satisfait le besoin de mesurer l'incertitude présente dans les triangles et les résultats obtenus à partir de méthodes déterministes. Plus précisement, la méthode stochastique calcule le montant de provision avec une marge de risque et en soustrait la provision en « Best Estimate » pour déterminer la marge. Pour cela, l'on préconise d'utiliser la « Value At Risk », mais l'on peut également se fier aux intervalles de confiance.

Ce mémoire se développe ainsi à travers le prisme du projet de refonte du calcul des montants de provisions techniques dans le compte de l'assurance santé pour expatriés au sein de MSH International.

Mots-clés

Provisionnement stochastique, provisionnement deterministe, IBNR, Bootstrap, Value at Risk, mesures de risques, distribution des provisions, Chain Ladder, London Chain, Mack.

Abstract

In order to be able to meet their future obligations, insurance companies must build up technical reserves. The new Solvency II standard (new European regulation), which requires insurers to have sufficient capital in reserve to deal with almost any catastrophe, will specifically regulate the level of provisioning of European insurance companies. to cope with almost any catastrophe, will specifically regulate the level of provisioning of European insurance companies in order to reduce their risk of bankruptcy and to protect the rights of policyholders.

MSH International, not being an insurance company, is therefore not subject to these regulations. With this in mind, MSH International establishes reserves in order to offer its clients better visibility of future claims, to better manage its portfolio and cash flows and to challenge the provisions the provisions made by its partner insurers. Indeed, the level of reserves has a significant impact on the income statement and therefore on the rates of tariff revaluation to be applied to clients. The calculation of the technical reserves allows MSH International, in its role of broker, to to accompany, advise and negotiate in the best possible way for its clients.
The objective of this thesis consists of the study and automated implementation of the different non-life provisioning methods known to the market in order to improve the existing system. The data analysis allows to better understand the risk and to measure the variability of the technical provisions of the expatriate health income statement.
Non-life insurance technical reserves are mainly reserves for claims payable (PSAP), reserves for (PSAP), provisions for unearned premiums (PPNA), provisions for outstanding risks (PPRE) and (PPRE) and equalization reserves (PPE). There are two main categories of calculation methods for non-life reserves: deterministic and stochastic, which serve different purposes. The use of stochastic methods satisfies the need to measure uncertainty in triangles and present in the triangles and results obtained from deterministic methods. More specifically, the stochastic method calculates the amount of provision with a risk margin and subtracts the best estimate provision to determine the margin. For this purpose, it is recommended to use the "Value At Risk", but one can also rely on confidence intervals.

This thesis is developed through the prism of the project to recalculate the amounts of technical reserves in the health insurance account for expatriates within MSH International.

Keywords

Stochastic provisioning, deterministic provisioning, Bootstrap, IBNR, Value at Risk , risk measures , provision distribution , Chain Ladder , London Chain , Mack .

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à présenter toute ma reconnaissance à Dieu tout-puissant, celui-là qui m'a donné toute la force et qui m'a éclairé tout le long de ce parcours.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire, par leur soutien, leur aide et leur présence.

Je remercie M. Patrick BOUCCARA, Directeur technique pour m'avoir accepté au sein de la Direction Technique de MSH INTERNATIONAL.

Je remercie mon maitre de stage Omar CHARAFI, responsable du Département Actuariat, qui m'a accueilli et intégré dans son équipe, en m'offrant l'opportunité de travailler sur un sujet aussi intéressant que celui-ci.

Mes remerciements vont également à toute l'équipe de l'Actuariat et statistique, de paramétrage, de reporting et de Gestion, pour leur accueil, leur présence et leurs conseils. J'ai pu apprendre dans d'excellentes conditions et j'ai bénéficié d'un soutien de qualité de toute l'équipe.

Je remercie également mon tuteur académique Didier RUILLIERE, professeur d'actuariat, maitre de conférences école ISFA et responsable du suivi de mon étude, pour ses conseils et sa disponibilité tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce travail à ma mère.

Pour tous les sacrifices que tu as fait pour moi.

Table des matières

Résumé 1

Abstract 2

Remerciements 3

Dédicaces 4

Table des matières 5

Introduction générale 8

1 Le cadre de l'étude 11

1.1 Le marché de l'assurance santé pour expatriés en France . . . 11

1.1.1 L'évolution de la population française à l'étranger . . . 11

1.1.2 Les acteurs de l'offre santé expatriés en France . . . 12

1.1.3 Les types de contrats . . . 13

1.1.4 Les mécanismes . . . 13

1.1.5 Les garanties proposées . . . 13

1.1.6 Les garanties annexes . . . 14

1.1.7 Les conditions de souscription . . . 15

1.2 Présentation de l'entreprise MSH INTERNATIONAL . . . 15

1.2.1 L'offre santé expatriés de MSH . . . 16

1.3 La problématique posée et enjeux pour l'entreprise . . . 16

2 Le portefeuille MSH 19

2.1 Les données . . . 19

2.1.1 Traitement des données . . . 19

2.1.2 La base d'étude exploitable . . . 20

2.2 Statistiques descriptives et Analyse des données . . . 20

2.3 Classification des actes médicaux 25

3 Outils et modèles **30**

3.1 Généralités 30

3.2 Méthodes déterministes de calcul de provisions techniques 31

3.2.1 Méthode de Chain Ladder 32

3.2.2 Variante sur la méthode de Chain Ladder : Pondération 33

3.2.3 Méthode de London Chain 35

3.3 Méthodes stochastiques de calcul provisions techniques 36

3.3.1 Méthode de Mack 36

3.3.2 Méthode de Bootstrap 40

3.4 Mesures de risques 42

3.4.1 Généralités 42

3.4.2 Mesures de risque : Définitions et propriétés 43

3.4.3 Indicateur de risque 1 : Value At Risk (VaR) 43

3.4.4 Indicateur de risque 2 : Tail Value At Risk (TVaR) 44

3.5 Choix du modèle 45

4 Applications de ces modèles aux données MSH **47**

4.1 Agrégation des sinistres 47

4.2 Consultation 48

4.2.1 Méthode 1 : Méthode de Chain Ladder 48

4.2.2 Méthode 2 : Méthode de London Chain 52

4.2.3 Méthode 3 : Méthode de Thomas Mack 53

4.2.4 Méthode 4 : Méthode de Bootstrap 57

4.3 Pharmacie 63

4.3.1 Méthode 1 : Méthode de Chain Ladder 63

4.3.2 Méthode 2 : Méthode de London Chain 65

4.3.3 Méthode 3 : Méthode de Thomas Mack 65

4.3.4 Méthode 4 : Méthode de Bootstrap 66

4.4 Assurés vs Providers 67

4.4.1 Méthode 1 : Méthode de Chain Ladder 69

4.4.2 Méthode 2 : Méthode de London Chain 69

4.4.3 Méthode 3 : Méthode de Thomas Mack 70

4.4.4 Méthode de Bootstrap 72

Conclusion générale **76**

Annexe 1 : Vérification de l'hypothèse de cadence régulière des règlements **80**

Annexe 2 : MÉTHODE DE LONDON CHAIN : Solution de l'équation des moindres carrés **83**

Annexe 3 : MÉTHODE DE Chain Ladder : Code VBA **85**

Introduction générale

Une des spécificités du secteur de l'assurance est l'inversion de son cycle de production. En effet, pour un contrat d'assurance donné, les primes sont généralement encaissées par les assureurs avant ou pendant la période de couverture alors que la sinistralité totale n'est quant à elle connue que plusieurs années après la fin de la période de couverture. Cette spécificité oblige les compagnies d'assurance à faire des estimations qui doivent être au plus près de la réalité future, afin de rester solvable.

L'actuaire, dont l'un des rôles fondamentaux est d'estimer les risques que comportent une assurance, doit pour cela projeter ces risques inconnus dans le futur et en déduire l'avenir le plus probable, grâce à des techniques mathématiques lui permettant de maîtriser au mieux le hasard, ou à défaut, d'en contrôler les conséquences.

A ce titre, tout assureur ou réassureur doit calculer des provisions techniques au moment de l'arrêté des comptes, pour couvrir les risques qu'il porte vis-à vis des contrats souscrits, et lui permettre de couvrir ses engagements, à savoir l'indemnisation complète des garanties souscrites. MSH International, n'étant pas une compagnie d'assurance, aussi n'ayant pas l'obligation de provisionner, constitue quant à elle des montants de provisions afin de mieux piloter leur portefeuille et challenger le niveau de provisonnement effectué par l'assureur partenaire.
De ce fait, l'enjeu de ce provisionnement est grand car il est primordial d'avoir un niveau de provisions suffisant pour pouvoir faire face aux engagements pris envers les assurés, ce qui relève d'une précision.

Les méthodes classiques d'estimations des provisions techniques sont des méthodes statistiques déterministes, basées sur des données historiques des sinistres connus. Ces méthodes sont multiples et celles développées dans ce mémoire sont la méthode de Chain Ladder et la méthode de London Chain.

Mon stage au sein de la direction technique de MSH INTERNATIONAL a consisté essentiellement en l'étude et l'implémentation automatisée des différentes méthodes de provisionnement non-vie connues du marché, en l'analyse de données afin de mieux appréhender le risque et la variabilité des provisions techniques du compte de résultat santé. Plus largement, ce stage a été l'opportunité pour moi d'appréhender le monde du courtage en assurance. Au-delà de l'enrichissement de mes connaissances en gestion de risques et d'une montée en compétence dans l'utilisation des différents logiciels Excel VBA et R, ce stage m'a permis de comprendre dans quelle mesure appliquer chaque méthode de provisionnement non-vie connue du marché et à quel point la gestion de risque en assurance en matière de provisionnement est primordiale.

Ce mémoire se développe ainsi à travers le prisme du projet de refonte du calcul des montants de provisions techniques au sein de MSH International. L'élaboration de ce rapport a pour principale source les différents enseignements tirés de la pratique journalière des tâches auxquelles j'étais affecté, et de sources externes que je citerai dans les références bibliographiques. Enfin, les nombreux entretiens que j'ai pu avoir avec les différents services que sont le service de gestion, le service marketing et le service commercial, m'ont permis de donner une cohérence à la rédaction de ce mémoire.

En vue de rendre compte de manière fidèle et analytique des mois passés au sein de MSH International, il apparaît logique de présenter au préalable le cadre de l'étude, à savoir le marché de l'assurance santé pour expatriés en France, l'entreprise MSH International, la problématique posée et les enjeux. Le portefeuille MSH sera ensuite décrit par le biais des statistiques descriptives. Puis la démarche de provisionnement et la théorie des différents outils et modèles de calculs de provisions techniques connus du marché seront présentées. L'application de cette théorie sera illustrée sur le portefeuille MSH. Cette illustration pratique incluera son intégration avec le métier.

Première partie :

Cadre de l'étude

CHAPITRE 1

Le cadre de l'étude

Ce premier chapitre consiste en la présentation du marché de l'assurance santé pour expatriés en France, de l'offre santé expatriée de MSH [2], ainsi que de la problématique et des enjeux de cette étude afin de saisir toutes les particularités de l'assurance santé pour expatriés qui ont motivé les choix de modélisation réalisés.

1.1 Le marché de l'assurance santé pour expatriés en France

1.1.1 L'évolution de la population française à l'étranger

Avec une croissance totale de près de 30% en 2017 et un taux de croissance annuel moyen de 3,4%, le nombre d'expatriés Français n'a de cessé de croitre, en confère le Ministère des affaires étrangères.

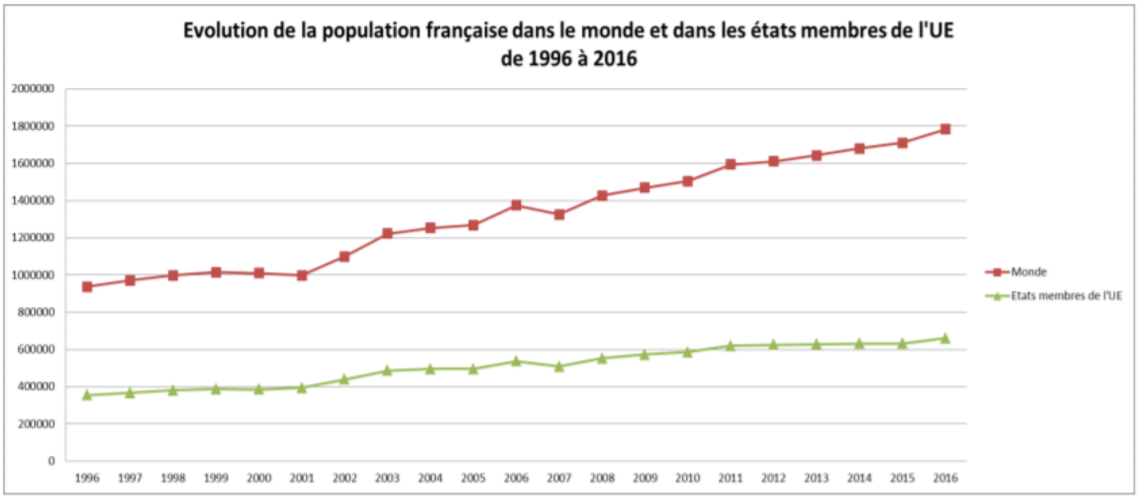


Figure 1 : Evolution du nombre d'expatriés inscrits au registre

2. MSH : Mobility Saint Honoré

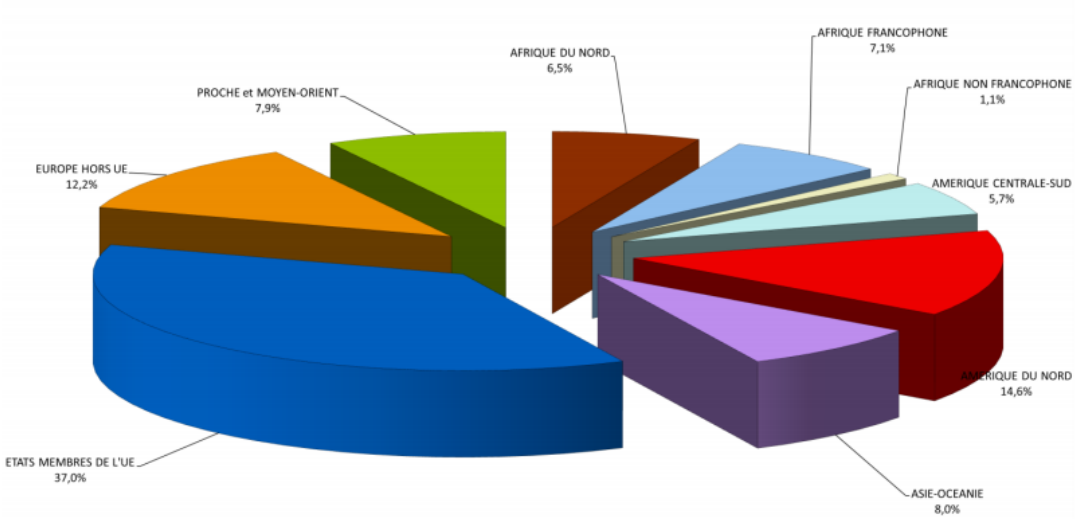


Figure 2 : Inscriptions au registre mondial au 31/12/2016

Les variations de populations diffèrent d'une région à l'autre. Certains pays ou zones connaissant un élargissement plus important.
Néanmoins, il convient de constater un point important, comme le montre la figure 2, que près de la moitié des Français inscrits au registre reste établie en Europe, plus de 20% en Amérique et près de 15% en Afrique.

1.1.2 Les acteurs de l'offre santé expatriés en France

Le marché de l'assurance santé pour expatriés s'articule autour de peu d'acteurs. Les assureurs les plus importants en France demeurent AXA, Swisslife, Allianz, Generali ...
La sécurité sociale et/ou la caisse des Français à l'Étranger (CFE) interviennent aussi sur ce marché, mais à un niveau de garantie moindre puisque leurs prestations sont basées sur les coûts pratiqués en France. Ceux-ci constituent en général les porteurs de risques.

Néanmoins, le courtage demeure un canal de vente privilégié pour les produits d'assurance des expatriés. Ce marché comprend MSH INTERNATIONAL, April, Henner, etc.. Le courtage fonctionne comme un gestionnaire permettant la fluidité des opérations au moyens de différents éléments techniques et d'expertises, en contrepartie d'une prime.

Le marché peut etre simplifié de la manière suivante :

Offre	Demande
Assureurs en direct	Particuliers
Gestionnaires spécialisés (MSH)	Entreprises de taille intermédiaire
Gestionnaire "classiques"	Grandes entreprises
Organisme à but non lucratif (CFE)	Organisation non gouvernementales

1.1.3 Les types de contrats

Une distinction des contrats est opérée entre des contrats d'assurance dits collectifs et ceux dits individuels suivant qu'ils aient été conclus par une entreprise ou une organisation non gouvernemental pour les contrats dits collectifs ou par un particulier pour se couvrir ou couvrir sa famille pour les contrats individuels. On peut aussi distinguer plusieurs types de contrats en fonction du souscripteur, des garanties (1er euro, CFE [1]).

Individuel et collectif

La complémentaire santé en France etant généralisée , les entreprises françaises qui expatrient leurs salariés sont obligées de souscrire une assurance collective. En conséquence, il existe une demande croissante de la part de ces entreprises en matière de protection de la santé collective des expatriés. Cependant l'assurance individuelle n'est pas en reste. Elle reste en nette croissance en raison de l'incomplétude des contrats collectifs. Suivant cette obligation , il convient de faire le distinguo entre un contrat reccurent qui est le contrat 1er euro et la complementaire.

Complémentaire et 1er euro

Les garanties peuvent être définies en plus d'une ou plusieurs autres garanties. Un salarié par exemple , affilié à la C.F.E, peut choisir de compléter sa couverture s'il le juge opportun de souscrire une assurance privée complémentaire. Cette assurance ne couvrira qu'en tout ou en partie les frais de santé qui restent à la charge de l'assuré après l'intervention du C. F. E . Dans la plupart des cas, l'intervention de la couverture complémentaire est conditionnée par l'intervention de la couverture complémentaire.
En revanche, la couverture dite du premier euro couvrira les sinistres directement après déduction de toute franchise.

1.1.4 Les mécanismes

L'assurance santé pour expatriés présente des spécificités de montage des produits afin de répondre au mieux aux demandes des assurés, des courtiers et des gestionnaires et de faciliter la gestion et le déploiement des solutions d'assurance.
Le processus d'adhésion passe généralement par l'intermédiaire d'un courtier (apporteur) qui recueille les informations nécessaires auprès des assurés pour les conseiller. Une fois que l'assuré a décidé d'adhérer, le délégataire de gestion émet les primes, paie les sinistres et gère généralement le flux d'informations avec lui.

1.1.5 Les garanties proposées

Les garanties proposées peuvent être divisées par grand poste . Les 5 grands postes cités de manière classique en assurance santé sont l'Hospitalisation, la Médecine Courante, la Maternité, l'Optique et Dentaire.

1. caisse des Français à l'Étranger : Equivalent de la sécurité sociale à l'internationale pour les popilations française en mobilités.

En France, les frais de santé supportés par l'assurance complémentaire sont principalement les frais d'optique et de dentaire. En matière d'assurance pour expatriés, le coût de l'hospitalisation, et de médecine courante passe en premier.

Le tableau suivant résume la classification des differents actes médicaux :

Hospitalisation	Frais de sejour Honoraires Chambre particulière Lit accompagnant
Médecine courante	Consultation généraliste - spécialiste Acte de diagnostique - biologie Pharmacie Auxiliaires médicaux Petits appareillages Acte d'imagerie médicale Laboratoire
Maternité	Sans complication Avec complication
Dentaire	Soins dentaires Prothèse dentaire Orthodontie
Optique	Monture, verres, lentilles Chirugie refractive
Autres	Cure thermale Bilan de santé

Figure 3 : Classification des actes médicaux

1.1.6 Les garanties annexes

Lors d'une mobilité ou une expatriation, l'assuré peut trouver nécessaire de souscrire à des produits garantissant d'autres risques pouvant être rencontrés lors de la mobilité.

- Prévoyance : capitaux décès, rentes incapacité/ invalidité, indemnités journalières, rente de conjoint, rente éducation.

- Assistance : En règle générale, le rapatriement, l'envoi de médicaments non disponibles localement et le séjour d'un être cher en cas d'hospitalisation sont couverts. Compte tenu du coût potentiellement important, il peut être intéressant de souscrire à cette couverture.

- Protection juridique : Contrat qui aide à faire valoir les droits en cas de litiges dans la vie quotidienne. Par exemple Litige en tant que patient face à un représentant du corps médical ou paramédical d'un établissement de soins public ou privé, suite à une erreur de diagnostic, une infection nosocomiale...

- Responsabilité civile : S'assurer contre les dommages involontaires causés à des tiers.

Les solutions d'assurance énumérées ci-dessus sont à considérer comme annexes au contrat de santé.

1.1.7 Les conditions de souscription

Les conditions de souscriptions dépendent des particularités du contrat que sont la durée de l'expatriation, l'âge de l'assuré, le pays d'expatriation, le statut de l'assuré (salarié/ retraité...).
Pour certains portefeuilles spécifiques, les taux de provisions sont appréciés à chaque cas en fonction de l'exposition aux risques, des pays d'expatriations et de l'historique des sinistres.

Des délais de carence sont fréquents dans les contrats d'assurance santé complémentaire et dans les contrats d'assurance-crédit, et correspondent à des périodes pendant lesquelles l'assuré n'est pas encore couvert par les garanties des contrats.
En effet , ceux ci sont mis en place par les assureurs pour pouvoir éviter l'anti-selection. Les garanties concernées que sont :

— La maternité : entre 9 et 12 mois de délai de carence.

— Le dentaire : généralement de 6 mois, avec suppression de ce délai en cas d'accident.

— L'optique : géneralement de 6 mois, avec suppression de ce délai en cas d'accident. Aussi, il peut y avoir un délai supplémentaire pour la chirugie effractive de l'oeil.

Les plafonds de garanties et franchises : Ces plafonds pouvant s'exprimer en montant annuel, en montant par code acte, ou en durée de prise en charge, nécessitent tout de même une attention particulière.
Les franchises présentes sur certaines garanties, sont des franchises annuelles fixes et ont un taux de prise en charge. Ce taux de prise en charge induit un reste à charge à l'assuré s'il est inférieur à 1.

Ces conditions de souscription produisent toutes des effets sur le comportement des assurés.

1.2 Présentation de l'entreprise MSH INTERNATIONAL

MSH INTERNATIONAL est un leader mondial dans la conception et la gestion de solutions de santé internationales, avec plus de 400 000 assurés dans plus de 194 pays et 2 000 entreprises clientes.

Depuis plus de 45 ans, MSH conçoit et gère des solutions d'assurance santé et prévoyance internationales à l'attention des personnes en mobilité, qu'il s'agisse de collaborateurs d'entreprises, d'organisations internationales ou de particuliers.

MSH INTERNATIONAL, filiale de SIACI SAINT HONORE, est le partenaire de soins de santé des personnes en mobilité internationale dans le monde entier :
- Employés de multinationales,
- Employés d'organisations internationales,
- Petites et moyennes entreprises,

- Expatriés, étudiants et frontaliers,
- Particuliers fortunés locaux à la recherche d'une assurance santé internationale.

SIACI SAINT HONORE est l'un des leaders européens du conseil et du courtage en assurance de biens et de personnes. Le groupe conçoit et développe des solutions sur mesure pour ses entreprises clientes, accompagne ses clients multinationales, ETI et PME sur l'ensemble de la chaîne de valeur pour les aider à piloter leurs risques en IARD, Transport, Protection sociale, Retraite, Epargne salariale, Rémunération et Mobilité internationale.

1.2.1 L'offre santé expatriés de MSH

D'un pays à l'autre, les conditions sanitaires et les infrastructures médicales peuvent être très contrastées. De même, les coûts des soins de santé peuvent atteindre rapidement des sommes exorbitantes dans certaines destinations. De plus, l'organisme peut également avoir des difficultés à s'adapter aux conditions climatiques ou à un changement de régime alimentaire dans certains pays.

Dans ce sens, l'offre santé expatriés de MSH devient le partenaire santé à l'étranger, elle permet d'assurer dans le monde entier des collèges de collaborateurs expatriés ou détachés de différentes entreprises, françaises principalement. Ces collaborateurs peuvent être détachés, avec un maintien du contrat de travail français, et donc relever toujours de la Sécurité Sociale française, ou expatriés ne relevant plus de la sécurité sociale, avec un besoin d'assurance au premier euro ou en complément de la Caisse des Français de l'Etranger (CFE).
Le remboursement dit "au premier euro" correspond à un remboursement dès les premiers frais engagés par l'assuré. Il n'y a généralement pas de franchise en revanche des plafonds peuvent exister.

La garantie First'Expat+ par exemple permet de bénéficier d'une couverture complète - hospitalisation, médecine courante, assistance et rapatriement, maternité . La garantie Relais'Expat+ compléte les niveaux de remboursements CFE couverture "en complément de la CFE" (qui est le régime facultatif de sécurité sociale des expatriés) assurée par exemple par Groupama GAN vie assurances, assureur de premier plan.

1.3 La problématique posée et enjeux pour l'entreprise

Depuis plusieurs années, une forte demande est constatée sur le marché de l'assurance pour expatriés en France. Dans ce sens, avoir une meilleure prédiction de sa sinistralité future permettra de donner de la visibilité à ses clients et à ses assureurs partenaires.

Aujourd'hui, au sein du département actuariat chez MSH International, les taux de provisions sont calculés directement sur l'ensemble du portefeuille. Vu que les différents portefeuilles sont a priori hétérogènes, la question est de savoir quelles sont les méthodes de constitution des montants de provisions. En effet, la constitution des montants de provisions est différente en fonction des spécificités de chaque portefeuille : le pays d'expatriation, la nature de l'encaisseur (l'assuré ou un paiement à un prestataire de santé), la nature des soins.

Ma mission au sein de MSH International rentre dans le cadre du projet de refonte du calcul des montants des provisions techniques pour le compte d'assurance santé pour expatriés.
Dans cette optique, la première étape de mon étude a été la présentation des différentes méthodes de provisionnement non-vies connues du marché.
Pour MSH, les provisions techniques représentent les provisions pour sinistres relatifs aux sinistres connus ou inconnus non encore réglées. Une meilleure estimation des prestations futures permet de mieux piloter son portefeuille et ses flux de trésorerie, et de challenger le niveau de provisionnement effectué par les assureurs partenaires.
La deuxième étape de mon étude a été d'appliquer ces différentes méthodes au portefeuille MSH afin de mieux appréhender la sinistralité future par le biais des intervalles de confiance et des indicateurs de risque (Value At Risk et Tail Value At Risk).
La dernière étape de mon étude a été l'automatisation de ses différentes méthodes de calcul à l'aide du logiciel Excel VBA et son intégration dans le corps du métier.

Deuxième partie :

Le portefeuille MSH

CHAPITRE 2

Le portefeuille MSH

Dans cette partie nous nous intéressons à la présentation des données et à leur exploration. Nous présenterons la structure de la base l'étude et procéderons à son exploration statistique. MSH International est un gestionnaire qui a la charge de tous les flux avec l'assuré, y compris les primes et les règlements de sinistres.

2.1 Les données

Un traitement des données reçues s'impose avant de nous étendre sur le contenu en sortie de ces traitements.

2.1.1 Traitement des données

Bien souvent, les bases de données présentent certains désavantages. Certains principaux points sont :

— L'occurrence possible d'erreurs humaines lors de la saisie d'information par le gestionnaire,

— Les données manquantes.

Une étude préalable a été effectuée pour le paramétrage des modalités manquantes et une validation de quelques hypothèses après consultation des gestionnaires (lorsque cela en valait la peine) afin de pouvoir réaliser notre étude.

Lors des enregistrements des données en gestion, il peut arriver que le pays d'expatriation ne soit pas connu. "Inconnu" est souvent entré comme valeur par défaut dans ces cas de figure.

Lorsque la situation d'un assuré change, une mise à jour de celle ci est directement effectuée. Par exemple, si un assuré résidait en début d'année aux Etats-Unis et qu'il déménageait au Royaume-Uni en cours d'année, les soins relatifs à la période de résidence aux Etats-Unis seront comptabilisés pour les pays d'expatriation USA et les soins relatifs à la période de résidence Royaume-Uni seront comptabilisés pour le Royaume-Uni. Ce choix a été fait afin d'être au plus proche de la réalité. Une autre solution, plus simple à mettre en place, aurait été de ne prendre en compte que la dernière situation de l'assuré.

Du coté de la gestion, la vue du portefeuille à la date courante est bien évidemment au dernier pays d'expatriation renseigné. Mais du coté de la direction Actuariat en charge du provisionnement, se créera un véritable biais car la variable "Pays d'expatriation" est une variable ayant un effet sur le délai de remboursement , donc sur le montant de provisions.

2.1.2 La base d'étude exploitable

L'information dans la base d'étude est synthetisée de la manière suivante :

- Index Client : Cette variable nous donne les index des différents clients du portefeuille.
- Encaisseur : L'assuré, ou Providers (qui consite en un paiement à un prestataire de santé).
- Devise : Devise principale du contrat ; c'est dans cette devise que les primes sont appelées et les sinistres réclamés à l'assureur.
- Année clôture et Mois clôture : nous informe de la date de la clôture du sinistre.
- Année soin et Mois soin : nous informe de la date de survenance du sinistre.
- Délai : La durée de remboursement c'est à dire la différence entre la date de survenance et la date de clôture. Généralement exprimé en mois.
- Montant de remboursement : définit le montant du remboursement effectué en devise de contrat et en euros.
- Code acte : Classification des actes médicaux.
- Nationalités : Les nationalités des assurés.
- stat groupe : représente un agrégat en fonction des codes actes.
- Pays d'expatriations de l'assuré .

2.2 Statistiques descriptives et Analyse des données

Les Pays d'expatriations

Les principaux pays d'expatriation selon le nombre de sinistres, pour une période de sinistralité de survenance de 2017 à 2019, sont représentés sur la figure suivante :

Figure 4 : Principaux pays d'expatriations

La population expatriée en France est composée d'expatriés français rentrant en France et qui continuent à bénéficier d'une couverture pendant un certain temps, et de salariés impatriés.

Les encaisseurs

On entend par encaisseur, la nature du bénéficiaire qui est soit l'assuré lui-même, ou un remboursement à un prestataire de santé (Clinique, médecin ...).
La figure 5 ci-dessous nous reprend la répartition des encaisseurs dans le portefeuille MSH en matière de montants de remboursements effectués.

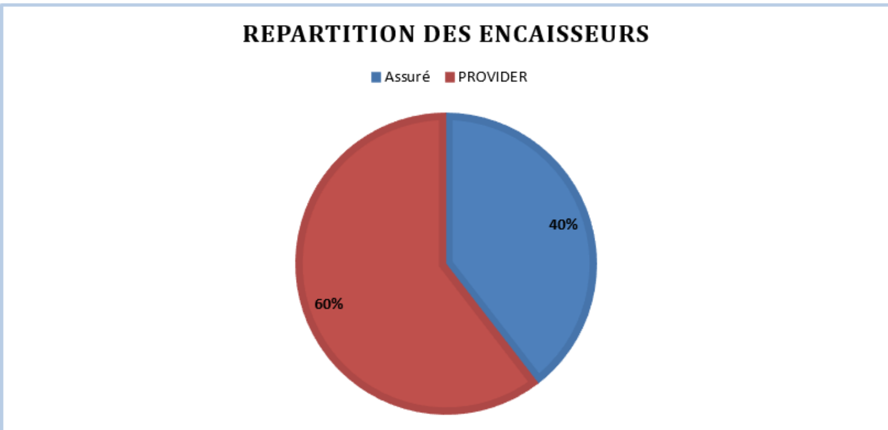


Figure 5 : Répartition des encaisseurs dans le portefeuille MSH

Les assurés representent près de 65% du portefeuille comparativement aux différents providers qui eux constituent 35%.
Mais en terme de montants engagés, les remboursements aux providers constituent 60% des montants totaux engagés contre 40% de celui des remboursements directs aux assurés .

Ainsi, réprésentons le nombre de remboursements effectués par encaisseurs (Assuré et Providers) par pays d'expatriations.

Remboursements effectués par encaisseurs par pays d'expatriations

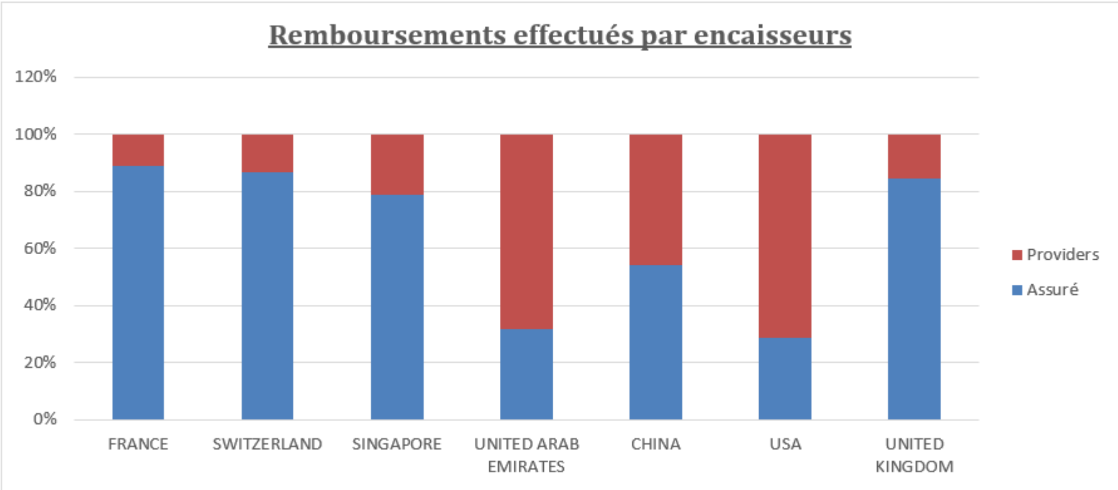


Figure 6 : Nombre de remboursements par encaisseur par pays d'expatriation

On constate une forte volatilité par rapport aux pays en fonction du nombre de remboursements aux assurés ou aux providers. En effet, en france il y'a beaucoup plus de remboursements aux assurés tandis qu'aux USA/UNITED ARAB EMIRATES il y'a beaucoup plus de remboursements aux providers.

En règle générale, le nombre de remboursements aux assurés est plus élevé par rapport au nombre de remboursements effectué aux providers. Le cas des USA et l'UNITED ARAB EMIRATES font exception en raison, probablement de la cherté du cout des soins, et ou du réseau médical qui y est développé. Ce fait a pour effet de succiter l'intermediation des providers dans le recours remboursement.

Au final, la France, les USA et l'UNITED ARAB EMIRATES demeurent les trois grands pays d'expatriations qui sont les plus gérés et sinistrés dans le portefeuille MSH.

Regardons la somme des différents montants de remboursements effectués dans ces pays d'expatriations exposés ci dessus.
Les montants par pays d'expatriations étant éffectués dans la dévise de chaque contrat, tous les remboursements du portefeuille sont convertis en euros dans la suite.

Montants des remboursements effectués par pays d'expatriation sur la période de sinistralité de survénance de 2017 à 2019

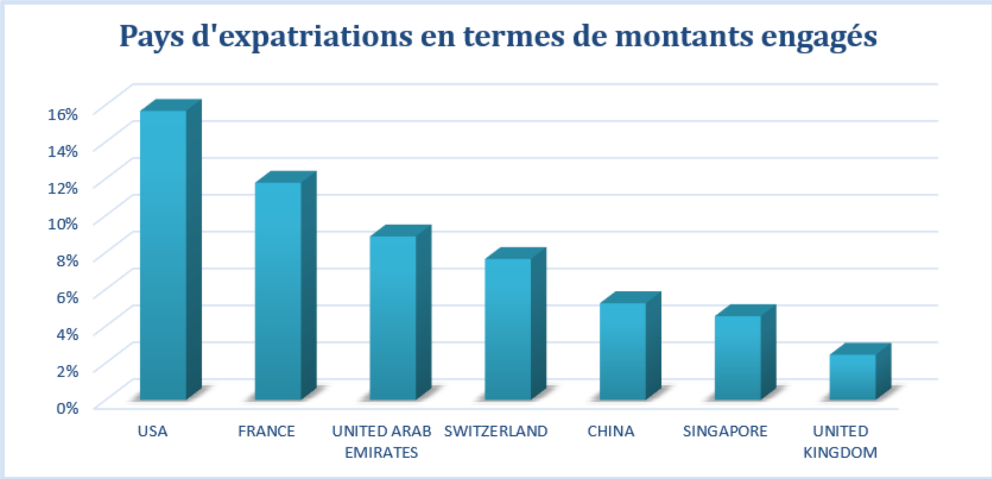


Figure 7 : Pourcentage des montants totaux engagés par pays d'expatriations

Concernant donc les pays les plus sinistrés et les pays ayant les montants de remboursement les plus élevés, l'USA, la FRANCE demeurrent encore une fois.

Les USA représentent le pourcentage le plus élevé en matière de remboursements effectués, dû au fait des coûts de la santé qui y sont très élevés. Certaines monnaies telles que le Franc cfa par exemple pour les pays d'Afrique de l'Ouest ayant une valeur fortement inférieure à l'euro où le dollar représentent un taux beaucoup plus faible du montant des remboursements.

Les âges des bénéficiaires

Les expatriés adultes du portefeuille MSH ont une moyenne d'âge de 40 ans, cette moyenne a été calculée sur la période [2017-2019]. L'âge moyen des femmes adultes est de 39 ans, tandis que celui des hommes adultes est de 41 ans.

Les nationalités des expatriés

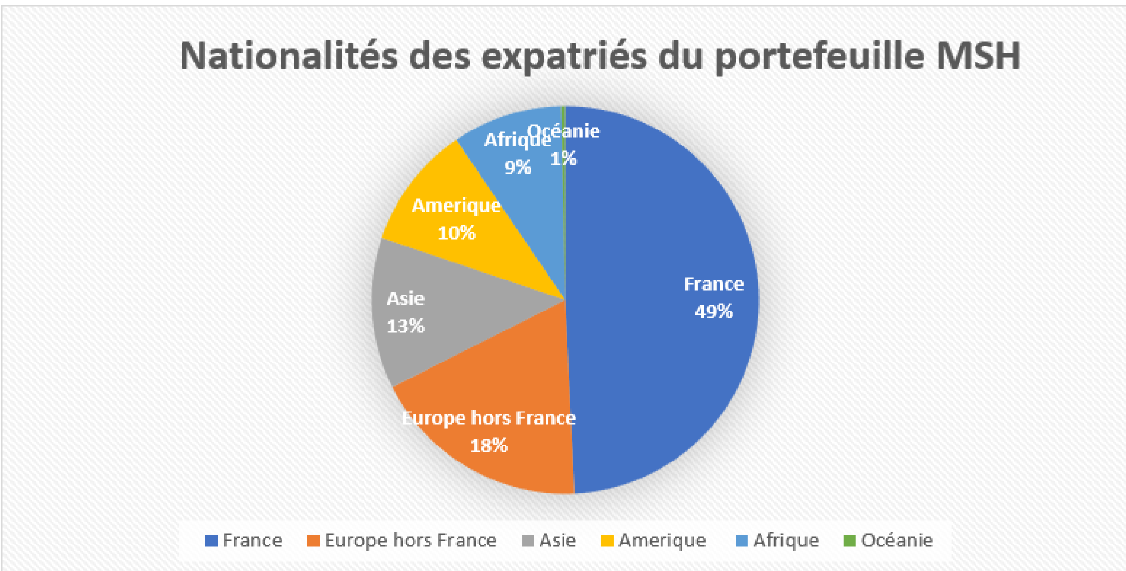
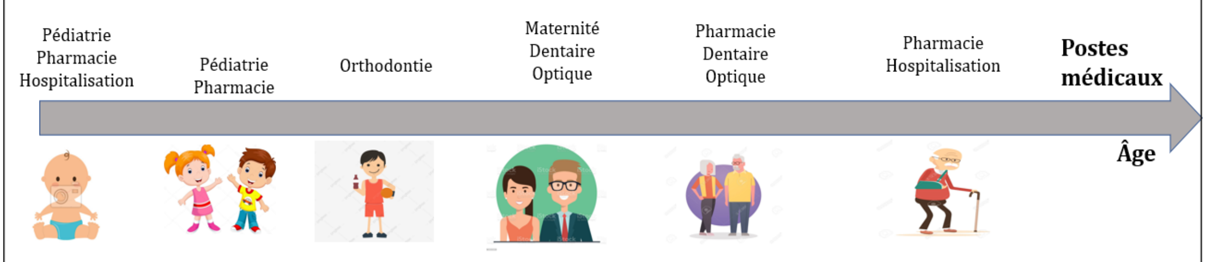


Figure 8 : Nationalités des expatriés du portefeuille MSH

La figure 8 ci dessus reprend la répartition des expatriés par zone de nationalité en terme de sinistralité.
La moitié des expatriés du portefeuilles sinistrée est française. La deuxième zone de nationalité est l'Europe hors France suivie par les pays d'Asie et des USA.
La nationalité dominante des bénéficiaires est la nationalité française.

Cycle de consommation santé

Voici presenté le resumé cycle de consommation santé du portefeuille MSH par tranche d'âge :



Cycle de consommation santé

L'âge des assurés du portefeuille part de 0 à 114 ans. L'âge des assurés est calculé au 1er janvier de l'année N.
Les remboursements les plus effectués chez la catégorie des anciens rentrent dans le cadre de l'hospitalisation et du maintien de l'autonomie de ceux ci tandis que les remboursements effectués chez la catégorie des nouveaux nés et enfants rentrent dans la cadre de la prévention et des maladies infantiles.

2.3 Classification des actes médicaux

Repartition des remboursements engagés par postes médicaux

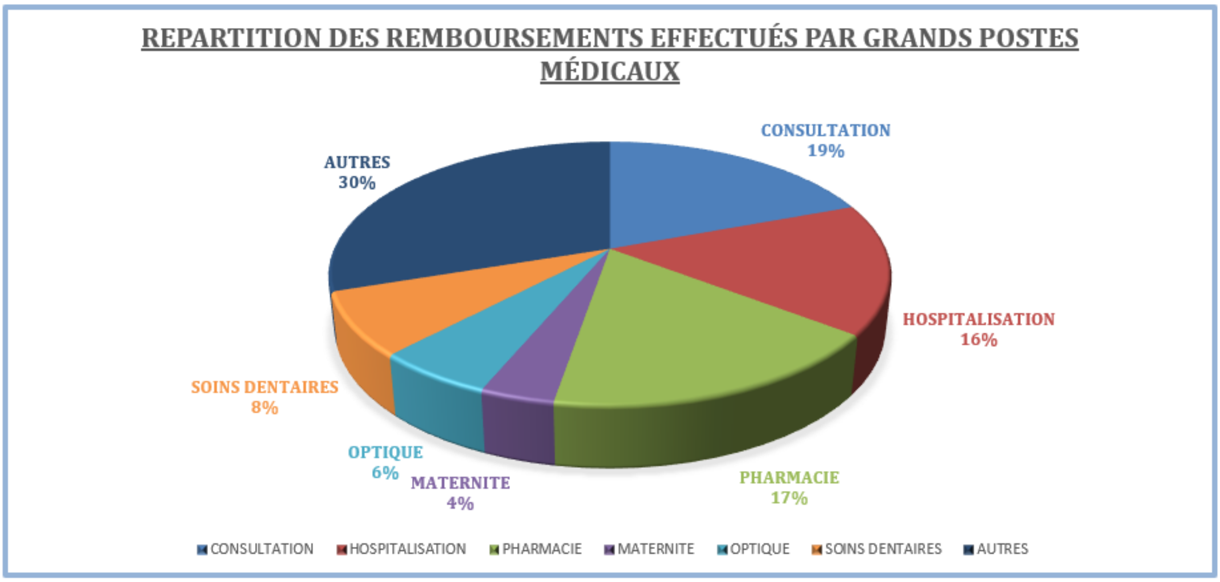


Figure 9 : Repartition des remboursements par postes médicaux

Les consultations et la pharmacie représentent chacuns 19% et 16% des remboursements totaux engagés.

Le rapport entre les inégalités de taux tient à la frequence de ceux ci. Certains postes médicaux ne seront accessibles qu'à une categorie d'assurés .
Pour exemple, la maternité n'est accessible qu'aux femmes enceintes uniquement. Les assurés peuvent aussi y avoir recours plus généralement à un moment de leur vie. C'est le cas de l'orthodontie (classé dans la catégorie "Autres") chez les adolescents, expliquant ainsi sa minorité dans le diagramme. La dominance de la pharmacie et la consultation tient moins aux coûts des soins qu'à leur récurrence.

Poste 1 : La consultation

C'est le plus grand poste en termes de prestations parmi l'ensemble des postes soumis à l'étude. Cette distinction tient moins aux coûts des consultations qu'à leur récurrence.

Les garanties diffèrent de l'autre à cette position en introduisant des limites en nombre de consultations, plafonds par consultation et variant du taux de prise en charge des frais.

Consultation	Niveau de couverture
	Consultations de médecins généralistes
	Consultations de médecins spécialistes (sauf dentistes, ophtamologistes, psychiatres)
	Actes de spécialistes
	Séances prescrites d'orthophonie, d'orthoptie, d'ergothérapie et de soins infirmiers

Poste 2 : La pharmacie

Par pharmacie, il est entendu que seul les médicaments sont inclus dans les contrats présentés. Les médicaments couverts sont ceux achetés sur ordonnance et figurent généralement sur les listes des produits remboursés par la sécurité sociale française.
Les garanties proposées varient relativement peu d'un contrat à un autre. En général, elles couvrent 100% des dépenses engagées par l'assuré lorsqu'elles se conforment à l'exigence de prescription médicale.

Le niveau de garantie de ce poste peut se résumer dans le tableau récapitulatif simplifié suivant :

Pharmacie	Niveau de couverture
	Médicaments sur prescription
	Médicaments sur prescription pour affection de longue durée
	Equipement médical prescrit

Poste 3 : L'hospitalisation

C'est le poste le plus homogène en termes de garanties entre tous les produits soumis à l'étude.
L'hospitalisation est toujours présentée par la garantie minimale d'un contrat d'assurance pour les expatriés, car elle représente un minimum d'occurrence, mais il s'agit parfois d'un coût extrêmement important.
Certains contrats suggèrent une prise en charge d'un lit d'accompagnant pour un parent dans le cas d'une hospitalisation d'un enfant ou encore d'un package pour bénéficier d'une chambre individuelle.
Il n'est pas question ici de l'hôpital psychiatrique, qui relève de garanties spécifiques aux maladies mentales. Les différences entre contrats interviennent principalement sur les plafonnements des différentes garanties offertes.

Le niveau de garantie de ce grand poste peut se résumer dans le tableau récapitulatif simplifié suivant :

Hospitalisation	Niveau de couverture
	Chambre d'hôpital prise en charge
	Frais de séjour pour un parent accompagnant un enfant -18 ans à l'hôpital
	Hospitalisation de jour (dont chirurgie ambulatoire)
	Hospitalisation d'urgence dans la zone de couverture sélectionnée
	Soins intensifs
	Actes de chirurgie, incluant les honoraires chirurgicaux, de bloc opératoire et d'anesthésie
	Dialyse rénale
	Soins oncologiques (traitement du cancer)
	Traitement du SIDA
	Greffe d'organe (frais de séjour, de soins et honoraires d'hospitalisation)
	Hospitalisation à domicile (sur prescription)
	Chirurgie réparatrice suite à un accident survenant pendant la période de couverture
	Évacuation médicale : transport local en ambulance ou appareil sanitaire aérien vers l'hôpital le plus proche

Poste 4 et 5 : Optique et Dentaire

Les garanties qu'offrent ces deux éléments principaux sont souvent présentées ensemble sous forme d'options dans les contrats d'assurance. Certains contrats offrent des garanties minimales pour les soins dentaires ou optiques en cas d'événements accidentels, mais ils sont très limités et largement sous-représentés.

Les garanties optiques, comme avec l'assurance maladie française, offrent généralement des garanties pour l'achat de verres et montures, l'achat de verres. Des augmentations garanties sont offertes pour les traitements complexes. Les consultations ultérieures avec un spécialiste sont également incluses dans les garanties couvertes. Quant au cas spécifique de la chirurgie oculaire au laser, certains contrats offrent une couverture partielle de ces traitements. Mais là encore, ces garanties sont rarement trouvées ou même jouées.

Les garanties dentaires couvrent les bilans de santé dentaires ainsi que les traitements courants (caries, couronne, etc.). Plus rarement, certains contrats offrent une couverture des prothèses dentaires telles que les implants, les ponts. La plupart des contrats prévoient une couverture orthodontique pour les enfants de moins de 18 ans.

Le niveau de garantie de ce grand poste peut se résumer dans le tableau récapitulatif simplifié suivant :

Dentaire	Niveau de couverture
	Soins dentaires courants
	Prothèses et implants dentaires
	Chirurgie dentaire
	Parodontologie
	Orthodontie jusqu'à 16 ans
Optique	**Niveau de couverture**
	Consultations d'ophtalmologistes
	Verres et monture, lentilles correctrices y compris les lentilles jetables, dans la limite d'une paire tous les 2 ans, et frais de traitements chirurgicaux des corrections visuelles (myopie, hypermétropie, astigmatie, kératocône)

Poste 6 : La maternité

Ce poste correspond à tous les actes de soin de la grossesse conséquente. C'est à dire des consultations de suivi de la grossesse jusqu'à l'accouchement et les consultations post natales. Les niveaux de garanties sont majorés dans le cas de complications lors de l'accouchement nécessitant une hospitalisation. Certains contrats de garantie de base n'offrent pas de soins de maternité. Pour des raisons anti-sélection évidentes, ces garanties ne sont jamais offertes comme une option.

Le niveau de garantie de ce poste peut se résumer dans le tableau récapitulatif simplifié suivant :

	Niveau de couverture
Maternité	Séances de préparation à l'accouchement
	soins pré et postnatals reçus par la mère et Soins immédiats du nouveau-né
	Accouchement sans complication (simple ou multiple)
	Complications à l'accouchement
	Traitement de l'infertilité

Poste 7 : Autres

Ce grand poste "Autres" regroupe plusieurs stat groupes que sont :

- L'acte de diagnostique,
- Le laboratoire,
- L'orthodontie,
- Paramédical,
- Prévention,
- Psychiatrie,
- Soins externes ...

Partie II : Théorie

Outils et modèles

CHAPITRE 3

Outils et modèles

3.1 Généralités

D'après le code des assurances [2], *la provision pour sinistres à payer (PSAP en abrégé) est la valeur estimative des dépenses en principal et en frais, tant internes qu'externes* [3]*, nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus (connus ou inconnus de l'assureur) et non payés* .

Comme toutes les provisions techniques, elle doit *reglementairement être suffisante*[4] *pour le reglement intégral des engagements vis-à-vis des assurés ou beneficiaires des contrats.*

Réglementairement [5], la méthode de base pour l'évaluation de la PSAP est la méthode dossier-dossier : le gestionnaire sinistre évalue le montant restant à payer sur chaque sinistre déclaré non clos. Une estimation de la charge des tardifs (ou IBNR [6]) doit être ajoutée à ces provisions dossier-dossier. Depuis 1991, l'entreprise peut (avec l'accord de la Commission de contrôle des assurances) utiliser des méthodes statistiques.

La méthode de base restant l'évaluation Dossier-Dossier, une approche largement repandue consiste à mobiliser un ensemble de méthodes statistiques, dans un souci de comparer les estimation de la provision qu'lles produisent .

Une convergence de ces estimations conduit à une provision qualitativement "fiable".

Une divergence de celles ci est un avertissement sur l'instabilité des données analysées et la necessité d'adopter une demarche prudentielle dans l'estimation de la provision.

On peut noter que les méthodes stochastiques, exposées dans les chapitres suivants, fournissent une mesure de la "fiabilité" de l'estimation qu'elles proposent.

Les méthodes statistiques, contrairement à l'évaluation dossier-dossier, reposent principalement sur les données historiques de sinistralité. Elles sont d'autant plus performantes que :

2. Article R 331-6.
3. Frais d'expertise, frais judiciaires .
4. Article R 331-1.
5. Article R 331-15.
6. IBNR pour *Incurred But Not Reported*. Ce terme désigne l'ensemble des sinistres survenus non encore réglés.

- Le passé est régulier ;
- Le présent et le futur sont structurellement peu différents du passé ;
- La branche considerée est peu volatile ;
- Les données sont nombreuses ;
- Les données sont fiables .

Il est donc essentiel de savoir comment ont été generées les données et de comprendre les facteurs internes et externes succeptibles de les influencer :

Facteurs internes :

- Evolution du portefeuille,
- Evolution de la politique de gestion des sinistres, en particulier de la cadence des règlements .

Facteurs externes :

- Evolution des pratiques du marché,
- Changements dans l'inflation des montants de sinistres,
- Evolution de la sinistralité (nombre, montants),
- Indicateurs d'exposition au risque ou de sinistralité .

3.2 Méthodes déterministes de calcul de provisions techniques

Les principaux modèles déterministes developpés dans ce mémoire sont :

- Méthode de Chain Ladder ;

- Méthode de London Chain ;

On utilisera les notations suivantes :

n = nombre maximal d'années ou mois nécessaires pour clore un sinistre et le régler en totalité,

i = indice des années ou mois de survenance des sinistres , avec $i = \{1, \ldots, n\}$,

j = indice des années ou mois de développement ou de déroulement, avec $j = \{1, \ldots, n\}$,

$Y_{i,j}$ = montant des sinistres survenus le mois i et payés après j mois de développement, c'est-à-dire à le mois $i + j$,

$C_{i,j}$ = montant cumulé des sinistres survenus le mois i et payés en j mois de développement, c'est-à-dire entre le mois i et le mois $i + j$: $C_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} Y_{i,k}$

Les triangles qui seront presentés dans la suite peuvent se lire de trois manières différentes :

- les lignes correspondent aux années ou mois de survenance i des sinistres,
- les colonnes correspondent aux années ou mois de développement j,
- les diagonales aux années ou mois calendaires $i + j$.

3.2.1 Méthode de Chain Ladder

La méthode Chain Ladder est une méthode déterministe fréquemment utilisée car elle est facile à mettre en oeuvre, elle s'applique à différents types de triangle (règlement, charge, nombre de sinistres. . .), et donne une estimation ponctuelle de la provision.

Hypothèses du modèle :

Ce modèle repose sur 2 hypothèses sous-jacentes :

(H1) : Il existe une relation de proportionalité entre les règlements cumulés , d'une année de développement à la suivante lié par le modèle suivant :

$$C_{i,j+1} = \lambda j * C_{i,j}, \ \ \forall i \in \{1, ..., n\}, \ j \in \{1, ..., n-1\}$$

(H2) : Le coefficient de proportionalité d'une année de développement λj est identique pour toutes les années de survenance i.

Etape N°1 : Constitution du triangle des règlements cumulés

j / i	1	2	...	...	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	...	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$\ddots$			
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		
$n-1$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$			
n	$C_{n,1}$				

Etape N°2 : Calcul des coefficients de développement

Les coefficients de développement d'une année à une autre sont considérés communs à toutes les années de survenance . Leur estimation est donnée par la formule suivante :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}$$

Etape N°3 : Calcul des règlements cumulés futurs par années de survenance :

Ensuite, grâce à ces coefficients, on évalue la partie inférieure du triangle des règlements cumulés :

$$\hat{C}_{i,j} = (\hat{\lambda}_{n-i+1} * ... * \hat{\lambda}_{j-1}) * C_{i,n-i+1}, \quad \forall i \in \{2,..,n\}, \ j \in \{n-i+2,...,n\}$$

j / i	1	2	$\cdots$	$n-1$	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$\cdots$	$\cdots$	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$\ddots$			$\hat{C}_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		
$n-1$	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$			$\hat{C}_{n-1,n}$
n	$C_{n,1}$	$\hat{C}_{n,2}$	$\cdots$	$\cdots$	$\hat{C}_{n,n}$

$\times f_1$ $\qquad$ $\times f_{n-1}$

Etape N°4 : Calcul des montants de provisions par années ou mois de survenance :

La provision au titre de l'année ou mois de survenance i, notée R_i , s'estime en calculant la différence entre le montant cumulé prévu au mois n et le dernier montant cumulé connu :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1}, \quad \forall i \in \{2,..,n\}$$

Enfin, le montant total R de la provision se calcule en faisant la somme des provisions au titre des différents mois de survenance i, $i \in \{2,..,n\}$

$$\hat{R} = \sum_{i=2}^{n} \hat{R}_i$$

3.2.2 Variante sur la méthode de Chain Ladder : Pondération

Il est possible d'introduire des pondérations lors de l'estimation des λ_k , pour accorder plus ou moins d'importance aux exercices passés . Parmi les types de pondération utilisées, on pourra considerer :

- des pondérations accordant plus de poids aux années récentes et moins aux années éloignées .
- des pondérations tenant compte de l'exposition réelle au risque de chacune des années , c'est à dire que les pondérations sont liées au nombre de contrats , ou à la

prime acquise associée aux contrats en vigueur l'année i .

Dans ces cas , on considère alors des link-ratios de la forme :

$$\hat{\lambda_k} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-k} \omega_{i,k}} \sum_{i=1}^{n-k} \omega_{i,k} \lambda_{i,k}$$

avec

$$\lambda_{i,k} = \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$$

$$\forall k = 1, ..., n-1$$

On peut d'ailleurs noter que si $\omega_{i,k} = C_{i,k}$, on retrouve la méthode de Chain Ladder Standard .

Avantages et inconvenients

La méthode de Chain Ladder présente l'avantage d'être simple à appliquer et à comprendre, les paramètres utilisés sont facilement estimables et interprétables. Elle sert également de base aux méthodes stochastiques d'estimation des provisions techniques.
Le premier inconvénient de cette méthode est qu' elle ne permet pas d'évaluer la précision de l'estimation obtenue.
En outre, cette méthode ne peut s'appliquer que si la cadence de règlements reste globalement la même d'un mois sur l'autre.

La méthode Chain Ladder reste cependant incontournable en provisionnement. Elle n'est pas restrictive au niveau des données d'entrée (des valeurs non cumulées négatives sont acceptées ce qui permet d'utiliser la méthode pour les triangles de charges et de règlements nets de recours).
Les estimations Chain Ladder étant considérées comme des estimations "benchmarks", les méthodes stochastiques qui reproduisent les provisions Chain Ladder sont favorisées par les actuaires. C'est le cas du modèle de Mack qui sera presenté par la suite .

On peut également ajouter une composante affine au modèle standard de Chain Ladder : c'est la méthode de London Chain.

3.2.3 Méthode de London Chain

Présentation de la méthode

La méthode de London Chain , quant à elle , a une cadence de paiements qui ne dépend pas uniquement des coefficients de développement λ_j, mais également d'une autre composante constante α_j.

Les $C_{i,j}$ sont donc liés par le modèle suivant :

$$C_{i,j+1} = \lambda j * C_{i,j} + \alpha j, \ \ \forall i \in \{1, ..., n\}, \ j \in \{1, ..., n-1\}$$

En ce qui concerne les hypothèses sous jacentes à ce modèle , elles restent pareilles à celle de Chain Ladder mais l'hypothèse sur la régularité des paiements diffère légèrement .

C'est à dire , pour chaque année ou mois de déroulement j, les points de coordonnées $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ doivent toujours être sensiblement alignés sur une droite, mais celle-ci ne doit pas nécessairement passer par l'origine comme dans le cas de Chain Ladder.

Le principe de la méthode de London Chain est de déterminer les valeurs des coéfficients λ_j et α_j tels que les écarts entre les montants cumulés réels $(C_{i,j+1})$ et ceux prédits par le modèle $(\lambda_j C_{i,j} + \alpha_j)$ soient minimisés .

Pour cela on utilise la méthode des moindres carrés :

$$(\hat{\lambda}_j, \hat{\alpha}_j) = argmin \sum_{i=1}^{n-j} (C_{i,j+1} - \lambda_j * C_{i,j} - \alpha_j)^2$$

La solution est la suivante (démonstration faite en annexe 2) :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} (C_{i,j} * C_{i,j+1}) - \bar{C}_j^{(j)} * \bar{C}_{j+1}^{(j)}}{\frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} (C_{i,j}^2) - (\bar{C}_j^{(j)})^2}$$

Pour tout $j \in \{1, ..., n-2\}$ et $\hat{\lambda}_{n-1} = \frac{C_{1,n}}{C_{1,n-1}}$

$$\hat{\alpha}_j = \bar{C}_{j+1}^{(j)} - \hat{\lambda}_j * \bar{C}_j^{(j)} \text{ pour } j \in \{1, ..., n-2\} \text{ et } \hat{\alpha}_{n-1} = 0$$

avec $\bar{C}_j = \frac{1}{n-j}\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}$ et $\bar{C}_{j+1} = \frac{1}{n-j}\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}$

Le calcul de la provision totale et par année de survénance s'effectue ensuite pareillement que dans la méthode de Chain Ladder.

3.3 Méthodes stochastiques de calcul provisions techniques

L'utilisation de méthodes stochastiques a d'abord satisfait le besoin de mesurer l'incertitude présente dans les triangles et les résultats obtenus à partir de méthodes déterministes.

Ces méthodes sont basées sur un modèle stochastique paramétré du triangle de règlement, estimant les paramètres du modèle à partir des données du triangle supérieur.

Par conséquent, nous supposons que les constituants du triangle de règlement, quels qu'ils soient, sont de véritables variables aléatoires.

Compte tenu des résultats obtenus avec les méthodes déterministes, l'approche stochastique permet :

- expliquer les hypothèses utilisées dans le modèle ,
- de valider , au moins partiellement , celles-ci par une analyse des résidus ,
- d'évaluer la variabilité des estimations de ceux-ci prévus par le modèle ,
- de construire des intervalles de confiance pour ces paramètres .

Plus précisement , les méthodes stochastiques permettent de calculer un montant de provision avec marge de risque.
Pour cela, l'on préconise l'utilisation d'un indicateur de risque tel que la Value At Risk (VaR) ou la Tail Value At Risk (TVaR) , mais on peut également se baser sur un intervalle de confiance à un niveau de confiance souhaité.

Les principaux modèles stochastiques devéloppés dans ce mémoire sont :

- Méthode de Mack ;

- Méthode de Bootstrap ;

3.3.1 Méthode de Mack

Ce modèle développé par Thomas Mack en 1993 correspond à la version stochastique de la méthode de Chain Ladder. Cette méthode fournit une estimation de la moyenne et de l'écart-type pour l'estimateur de la variable aléatoire R qui représente la provision technique à constituer.

En effet ,si nous disposons d'un nombre suffisant de données, nous pouvons considérer que R suit une loi normale, ce qui va nous permettre de la modéliser à l'aide d'une loi normale .

Le modèle déterministe de Chain Ladder presenté plus haut est :

$$C_{i,j+1} = \lambda j * C_{i,j}, \ \ \forall i \in \{1, ..., n\}, \ j \in \{1, ..., n-1\}$$

Ce qui devient en stochastique :

$$E(C_{i,j+1}) = \lambda j * E(C_{i,j}), \ \ \forall i \in \{1, ..., n\}, \ j \in \{1, ..., n-1\}$$

Le modèle de Mack repose sur trois hypothèses qui sont les mêmes hypothèses que celles de la méthode de Chain Ladder, à savoir l'indépendance des années ou mois de survenance et la régularité de la cadence des paiements.

(H1) : Pour $i \neq i'$, les vecteurs aléatoires $(C_{i,j})_{j\in(1,...,n)}$ et $(C_{i',j})_{j\in(1,...,n)}$ sont independants.

(H2) : $E[C_{i,j+1}|C_{i,1}, ..., C_{i,j}] = \lambda_j * C_{i,j}$ pour $i \in \{1, ..., n\}$ et $j \in \{1, ..., n-1\}$.

Sous ces 2 hypothèses, les coefficients $\hat{\lambda_j}$ pour $j \in \{1, ..., n-1\}$, calculés dans la méthode de Chain Ladder, sont des estimateurs sans biais des coefficients de développement λ_j. Ceci nous permet d'affirmer que $\hat{R_i}$ est un estimateur sans biais de R_i le « vrai » montant de la provision au titre de l'année de survenance i, pour tout $i \in \{2, ..., n\}$.

La modèle de Mack fournit alors la même estimation du montant de la provision que la méthode de Chain Ladder . Ce montant sera donc retenu comme moyenne pour la modélisation à l'aide d'une loi normale .

Il conviendra dès lors de déterminer l'écart-type, c'est-à-dire l'erreur de prévision. Dans ce sens , l'on s'intéressera à l'écart moyen entre le montant de la provision au titre de l'année i et son estimateur .

$$MSE(\hat{R_i}) = E[(\hat{R_i} - R_i)^2|D], \ \ D = [C_{i,j}/i \in \{1, ..., n\}, \ j \in \{1, ..., n-i+1\}]$$

(mse = mean squared error : erreur quadratique moyenne)

Pour estimer cet écart, il convient d'ajouter une troisième hypothèse :

$$H3 : Var[C_{i,j+1}|C_{i,1}, ..., C_{i,j}] = \sigma_j^2 * C_{i,j} \ \ \forall i \in \{1, ..., n\}, \ j \in \{1, ..., n-1\}]$$

On peut alors écrire :

$$M\hat{S}E(\hat{R_i}) = \hat{C}_{i,n}^2 * \sum_{j=n-i+1}^{n-1} [\frac{\hat{\sigma_j}^2}{\hat{\lambda_j}} * (\frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}})]$$

où :

- $\hat{C}_{i,j} = (\hat{\lambda}_{n-i+1} * ... * \hat{\lambda}_{j-1}) * C_{i,n+1-i}$
  pour $i \in \{2, ..., n\}, j \in \{n-i+2, ..., n\}$

- par extension, $\hat{C}_{i,n+1-i} = C_{i,n+1-i}$

- $\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} * \sum_{i=1}^{n-j} [C_{i,j} * (\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{\lambda}_j)^2]$

- $\hat{\sigma}_{n-1}^2 = min\{\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}; min\{\hat{\sigma}_{n-3}^2; \hat{\sigma}_{n-2}^2\}\}$

L'écart moyen entre le vrai montant total de la provision R et son estimateur sans biais $\hat{R}$ s'estime ainsi :

$$\hat{mse}(\hat{R}) = \sum_{i=2}^{n} \left((mse(\hat{R}_i))^2 + \hat{C}_{i,n} (\sum_{k=i+1}^{n} \hat{C}_{k,n}) \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\frac{2\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2}}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right)$$

Remarque : La démonstration de ces résultats : Mack [1]

L'estimation de l'écart type de la variable R (respectivement R_i pour $i \in \{2, ..., n\}$) est alors :

$$se(\hat{R}) = \sqrt{mse(\hat{R})}$$

On peut maintenant construire un intervalle de confiance pour les variables R_i pour $i \in \{2, ..., n\}$ et R , selon l'hypothèse faite sur leur loi de distribution.

Pour établir des intervalles de confiance, il faut poser une hypothèse paramétrique sur la distribution de la réserve R . Si nous disposons d'un nombre suffisant de données, nous pouvons considérer que R suit une loi normale.

Loi normale

Intervalle de confiance au niveau 1-α pour R_i, la provision au titre de l'année de survenance i , pour tout $i \in \{2, ..., n\}$:

$$[\hat{R}_i - q_{1-\alpha/2} * se(\hat{R}_i); \hat{R}_i + q_{1-\alpha/2} * se(\hat{R}_i)]$$

1. Mack : Thomas MACK, *Distribution-free calculation of the standard error of Chain Ladder reserve estimates, ASTIN bulletin vol. 23, 1993*

Intervalle de confiance au niveau 1-α pour R, le montant total de la provision :

$$[\hat{R} - q_{1-\alpha/2} * se(\hat{R}); \hat{R} + q_{1-\alpha/2} * se(\hat{R})]$$

avec $q_{1-\alpha/2}$ représentant le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi normale.

<u>Loi log-normale</u>
Une variable aléatoire Y suit une loi log-normale de paramètres μ et σ^2 si et seulement si $X = \ln Y$ obéit à une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$.

$E[Y] = \exp\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\}$ et $Var(Y) = [\exp(\sigma^2) - 1] \exp(2\mu + \sigma^2)$

Supposons que, pour $i \in \{2, ..., n\}$, R_i suit une loi log normale de parametres μ_i et σ_i^2, on a alors :

$$\hat{R}_i = \exp\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\} \text{ et } m\hat{s}e(\hat{R}_i) = [\exp\{\sigma^2 - 1] \exp(2\mu + \sigma^2).$$

On en deduit que : $\sigma_i^2 = \ln\{\frac{m\hat{s}e(\hat{R}_i)}{(\hat{R}_i)^2} + 1\}$ et $\mu_i = \ln \hat{R}_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2$.

L'intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha$ pour R_i , qui suit une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$ est :

$$[\exp(\mu_i - q_{1-\alpha/2} * \sigma_i); \exp(\mu_i + q_{1-\alpha/2} * \sigma_i)]$$

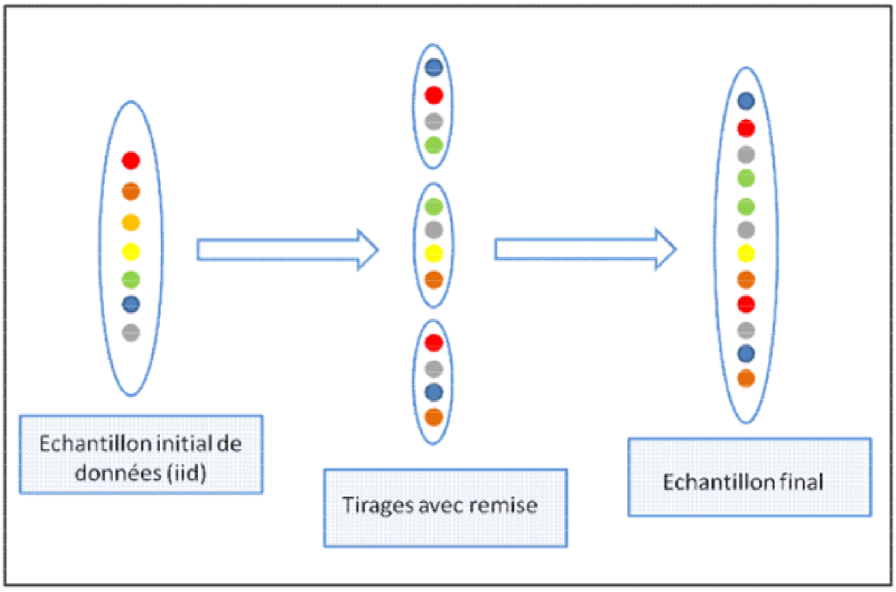
On suppose que R suit une loi normale de paramètres μ et σ^2, l'intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha$ pour R est :

$$[\exp(\mu - q_{1-\alpha/2} * \sigma); \exp(\mu + q_{1-\alpha/2} * \sigma)]$$

3.3.2 Méthode de Bootstrap

Le bootstrap est une théorie qui consiste à fabriquer de l'information . Elle se base sur le principe du ré-échantillonnage.
Par définition , reechantilloner permet d'estimer la précision d'un échantillon statistique (médiane, variance , quantile) en utilisant des sous ensembles des données disponibles.

A partir d'un échantillon initial, on construit un échantillon bootstrap. On effectue un tirage au sort avec remise de n éléments parmi les n variables de l'échantillon initial, où chaque réalisation a la même probabilité de tirage, qui est donc $1/n$.



Dans le cas du calcul des provisions, On souhaite obtenir un intervalle de confiance pour la variable aléatoire R qui modélise le montant de la provision technique. Pour cela, on se base sur les règlements des mois précédents. Le rééchantillonnage ne s'effectuera pas sur les règlements cumulés mais sur des résidus, calculés à partir de ces observations.

Ci dessous, la procédure de Bootstrap à suivre :

Tout part du triangle des règlements cumulés .

1. À partir du triangle des règlements cumulés, on calcule les coefficients de développement de la même manière que dans la méthode de Chain Ladder :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}$$

2. Grâce à ces coefficients et à la diagonale du triangle des règlements cumulés, c'est-à dire les dernières valeurs observées, on calcule un nouveau triangle, que l'on appelle triangle prédit des règlements cumulés et que l'on note $(D_{i,j})$ en procédant par récursion arrière :

$$D_{i,n-i+1} = C_{i,n-i+1}, \forall i \in \{1, ..., n\}$$

3. On décumule le triangle des règlements cumulés $C_{i,j}$ et le triangle prédit des règlements cumulés $(D_{i,j})$ afin d'obtenir le triangle des règlements non cumulés $(Y_{i,j})$ et le triangle prédit des règlements non-cumulés, noté $(Y_{i,j})$ noté $(Z_{i,j})$:

$$\begin{aligned}
&Y_{i,1} = C_{i,1}, Z_{i,1} = D_{i,1},\ \forall i \in \{1, ..., n\},\\
&Y_{i,J} = C_{i,j} - C_{i,j-1}\\
&Z_{i,J} = D_{i,j} - D_{i,j-1}\ \forall i \in \{1, ..., n-1\}, j \in \{2, ..., n-i+1\}
\end{aligned}$$

4. À l'aide de ces deux nouveaux triangles, on calcule le triangle des résidus de Pearson, noté $r_{i,j}$.

$$r_{i,j} = \frac{Y_{i,j} - Z_{i,j}}{\sqrt{Z_{i,j}}}, \forall i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., n-i+1\}$$

Ces résidus sont indépendants et identiquement distribués, excepté les deux situés aux extrémités de la diagonale qui sont nuls par construction, et devront dont être exclus du ré-échantillonnage.

5. Ces résidus sont ensuite ré-échantillonnés aléatoirement avec remise pour former un triangle des résidus « bootstrap » que l'on note $(r^*_{i,j})$.
On effectue ensuite le chemin inverse : on calcule le triangle des règlements non-cumulés « bootstrap » $(Y^*_{i,j})$:

$$Y^*_{i,j} = Z_{i,j} + r^*_{i,j} * \sqrt{Z_{i,j}}, \forall i \in \{1, ..., n\}, , j \in \{1, ..., n-i+1\}$$

grâce auquel on détermine le triangle des règlements cumulés « bootstrap » .

Ce triangle nous permet alors de calculer un montant de provision « bootstrap » à l'aide de la méthode de Chain Ladder.

On réitère B fois cette dernière étape, afin d'obtenir un échantillon de B observations de la variable R. On peut alors calculer sa moyenne et son écart-type empirique .

Pour un nombre d'itérations suffisamment très grand , l'échantillon suit une loi normale. On peut ainsi déterminer la Value at Risk, la Tail Value at Risk, ainsi qu'un intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha$ pour la variable aléatoire R :

$$[\bar{R} - q_{1-\alpha/2} * \sigma_R; \bar{R} + q_{1-\alpha/2} * \sigma_R]$$

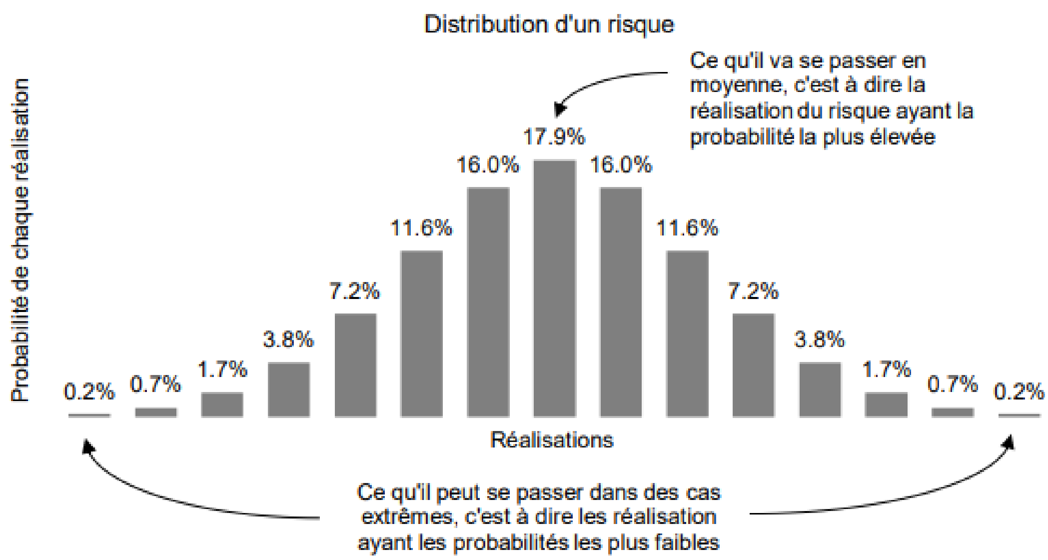
3.4 Mesures de risques

3.4.1 Généralités

La gestion de risque en matière de provisionnement est primordiale en assurance.

La capacité du modèle à estimer les prestations futures repose en fait sur le respect de deux hypothèses implicites. Premièrement, nous supposons que le passé est correctement modélisé. Par conséquent, en supposant que les caractéristiques des futures prestations d'indemnisation resteront cohérentes avec le modèle, on suppose également qu'il n'y a pas de changements fondamentaux ou de changement de régime dans la formation des prestations.

Dans le contexte de la gestion du risque, il est nécessaire de disposer de la distribution du risque, c'est à dire la probabilité associée à chaque réalisation possible d'un risque. Par le théorème central limite, la distribution d'un risque tend, sous certaines conditions, vers une loi normale.



Dans la pratique, certains paramètres influent sur le niveau moyen des prestations, des changements dans la procédure interne de gestion des sinistres ou dans la nomenclature des produits, la révision de contrats de réassurance sont autant de causes susceptibles de rendre caduque la cadence des paiements utilisée dans la projection des prestations futures. Ces facteurs d'incertitude peuvent conduire à des changements graduels ou brusques des paramètres réels du modèle de provisionnement.

Dans ce sens, la variabilité des provisions permet, dans une première approche, d'appréhender le risque mais ne permet pas de quantifier le risque de pertes encouru par l'organisme assureur. Pour cela il faut être capable d'estimer la distribution des provisions et choisir une mesure de risque pertinente.

3.4.2 Mesures de risque : Définitions et propriétés

Généralement, l'objectif de mesure risquée est de pouvoir représenter une véritable incertitude ou une quantité, dont la valeur est inconnue, en utilisant une norme de mesure appropriée, pour exprimer l'exposition au risque de cette grandeur .

Par définition , Une mesure de risque est une fonction (notée ρ en général) qui associe à une variable aléatoire X un réel $\rho(X)$ .Cette variable X, appelée risque, modélise le plus souvent dans ce contexte une perte.

Une mesure de risque est dite cohérente si elle vérifie les propriétés suivantes :

— monotonie : $\forall(X,Y), X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$
— sous-additivité : $\forall(X,Y), \rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
— homogénéité positive : $\forall X, \forall c \in]0;+\infty[\,, \rho(cX) = c\rho(X)$
— invariance par translation : $\forall X, \forall c \in R, \rho(X+c) = \rho(X) + c$

3.4.3 Indicateur de risque 1 : Value At Risk (VaR)

La Value at Risk (VaR) au niveau α d'une distribution X , notée VaR (X,α) se définit comme le quantile d'ordre α :

$$F_x(VaR(x;\alpha)) = \alpha$$

où est F_x est la fonction de répartition de X . Si F_x est strictement croissante, ce qui est le cas le plus fréquent, la VaR est définie directement par :

$$VaR(x;\alpha) = F_x^{-1}(\alpha)$$

La VaR de niveau α est donc le quantile α de la loi de X.

Ceci signifie qu'en provisionnant à hauteur de la VaR, l'assureur a une probabilité α que la charge des sinistres soit inférieure à la provision, c'est-à-dire une probabilité α de ne pas subir de perte.

Limites de la VaR

Bien que très utilisée comme mesure de risque dans la pratique assurantielle (principalement du fait qu'elle se calcule aisément), la VaR a de nombreux défauts :

Tout d'abord elle ne possède pas de chargement de sécurité, c'est à dire que l'inégalité $VaR(X, \alpha) \geq E(X)$ n'est pas systématiquement vérifiée pour $\alpha > 50\%$.
De plus, elle n'est pas sous-additive, c'est-à-dire que la relation :

$$\text{VaR(X+Y };\alpha) \leq VaR(X;\alpha) + VaR(Y;\alpha)$$

n'est pas vérifiée pour toutes les distributions et n'est donc pas cohérente.
Ceci est particulièrement problématique dans le cadre actuariel, car la sous-additivité modélise un principe de base en assurance : la diversification. L'effet de diversification des risques ne se vérifie donc pas systématiquement avec la VaR, ainsi la VaR de la somme de risques peut être supérieure à la somme des VaR. Ceci pose donc problème lors de l'agrégation des risques.

Enfin elle ne fournit aucune information sur la queue de distribution de la charge sinistre, c'est-à-dire sur les pertes excédant le quantile calculé qui peuvent potentiellement être élevées sur certaines branches.

3.4.4 Indicateur de risque 2 : Tail Value At Risk (TVaR)

Les critiques de la VaR ci-dessus amènent donc à s'intéresser à d'autres mesures de risque.
Parmi celles-ci, la Tail Value At Risk, notée TVaR, présente l'intérêt d'être une mesure de risque cohérente.
Dans l'optique de la prudence, la question se pose de savoir ce qui se passe en cas où la charge des sinistres dépasse le niveau de la VaR, c'est-à-dire en cas de pertes. Une première réponse consiste à calculer la Tail Value At Risk (TVaR) d'une distribution X au niveau α.
La TVaR est une mesure de risque qui apparaît comme une VaR moyenne sur toutes les probabilités dépassant le niveau α :

$$TVaR(x, \alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^{1} VaR(x; u) du$$

Si F_x est continue , alors :

$$TVaR(x, \alpha) = VaR(X; \alpha) + \frac{1}{1-\alpha} * E[\max X - VaR(X; \alpha); 0]$$

Cette mésure de risque est donc sensible à la queue de distribution de X.

La TVaR présente donc l'intérêt d'être sous-additive, contrairement à la VaR.

$$TVaR(X+Y;\alpha) \leq TVaR(X;\alpha) + TVaR(Y;\alpha)$$

Elle est également plus avantageuse que la VaR, dans le sens où elle permet de prendre en compte le comportement de la queue de distribution.

Ces mesures de risque, seront utilisées dans les méthodes stochastiques, telles que le modèle de Mack ou le Bootstrap, pour déterminer la marge de risque des provisions.

3.5 Choix du modèle

Le choix du modele de calcul se fait en fonction de plusieurs criteres tels que :

- Le type de données disponible ;

- Le développement de la branche ;

- Les sorties désirées.

Lorsque l'on ne s'intéresse qu'au montant de la provision estimée, il est souvent recommandé d'utiliser des modèles déterministes qui sont souvent plus simples d'utilisation, facilement paramétrables et qui peuvent prendre en entrée de nombreux types de données tels que les règlements, les charges, le nombre de sinistres, etc.
Si, en revanche, l'on désire obtenir des informations complémentaires au montant de provisions comme la volatilité de ces dernières, on choisira alors des modèles stochastiques.

Partie III : Applications

Application de ces modèles aux données MSH

CHAPTER 4

Applications de ces modèles aux données MSH

Les deux parties précédentes de ce mémoire ont permis de préciser le cadre de l'étude ainsi que la problématique étudiée, présenter le portefeuille de MSH et les différentes méthodes de calcul de provisions techniques connues du marché.

Cette nouvelle partie est celle de l'illustration pratique. A partir du portefeuille de MSH moyennant quelques modifications pour préserver la confidentialité, nous allons calculer les provisions techniques à l'aide des méthodes presentées ci dessus .

4.1 Agrégation des sinistres

L'une des difficultés au provisionnement est qu'un sinistre peut couvrir plusieurs mois ou années. Chaque sinistre survenu donne lieu à un premier remboursement qui constitueras le point de départ d'un processus de paiement qui s'étale dans le temps.

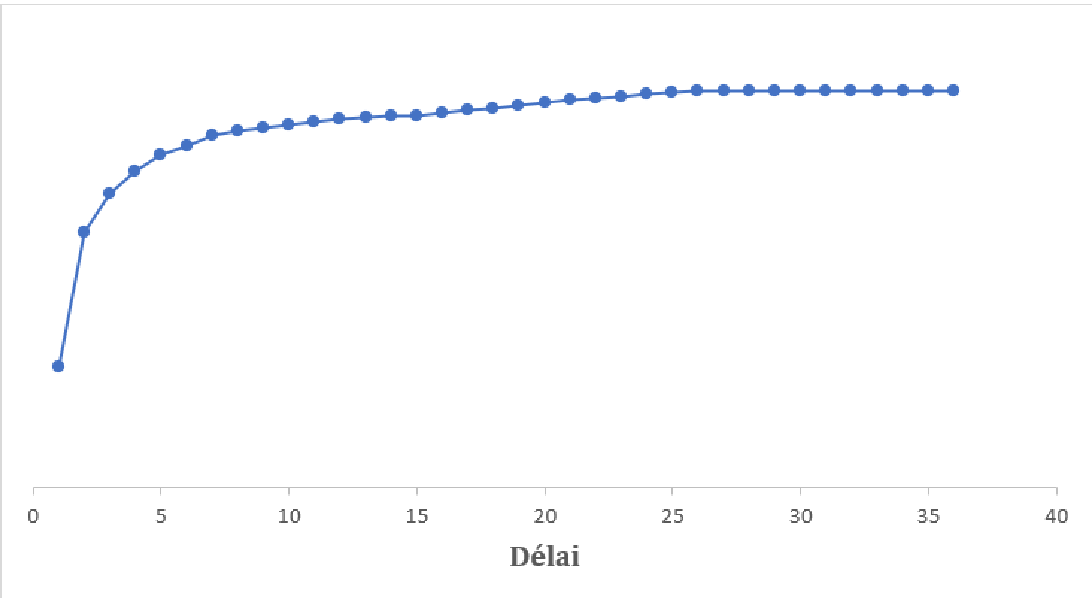


Figure 10 : Evolution de la cadence de règlement d'un sinistre

C'est un processus qui est particulier à chaque sinistre et nous donne une idée de l'évolution des remboursements effectués. Il permet d'avoir une description des montants à chaque mois. Le délai maximum en nombre de mois sur le portefeuille global de MSH International est de 36 mois, comme le présente la figure 10 ci dessus.

Choix et motivations des postes médicaux à modéliser

La sélection des postes que nous retiendrons pour la modélisation répond au principe de représentativité. Dans ce sens, nous allons privilegier les postes médicaux ayant une grande representativité dans le portefeuille.
Avec pour objectif final d'être en mesure d'estimer le montant total des prestations santé relatives à un contrat d'assurance pour expatriés, nous porterons notre attention sur les postes médicaux qui ont un niveau important de prestations générées, c'est à dire la consultation et la pharmacie.

4.2 Consultation

Considerons le triangle de règlements cumulés du poste médicale "Consultation" suivant :

Survenances		**Déroulement**							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	...	...	**34**	**35**	**36**
2017	**1**	66 384	139 340	160 326	...	...	207 527	207 559	207 564
2017	**2**	66 336	111 769	143 694	...	...	201 541	201 558	
2017	**3**	52 437	123 133	163 122	...	...	211 915		
...	**...**	...	...	...	...	...			
...	**...**	...	...	...	...	...			
2019	**10**	70 602	138 194	170 274					
2019	**11**	68 645	130 845						
2019	**12**	63 504							

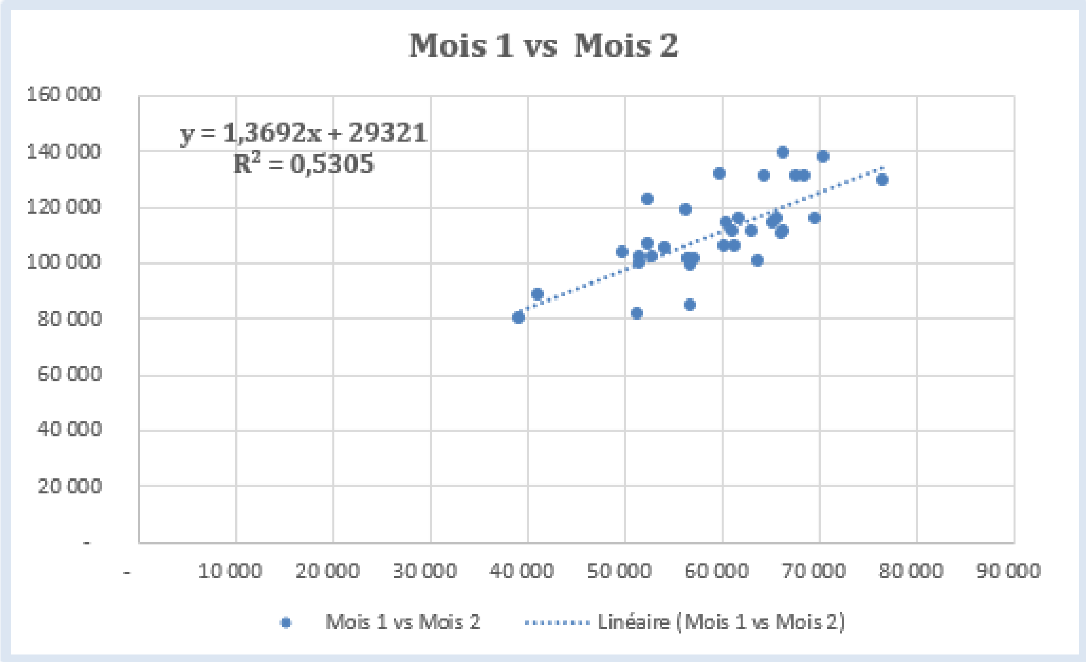
4.2.1 Méthode 1 : Méthode de Chain Ladder

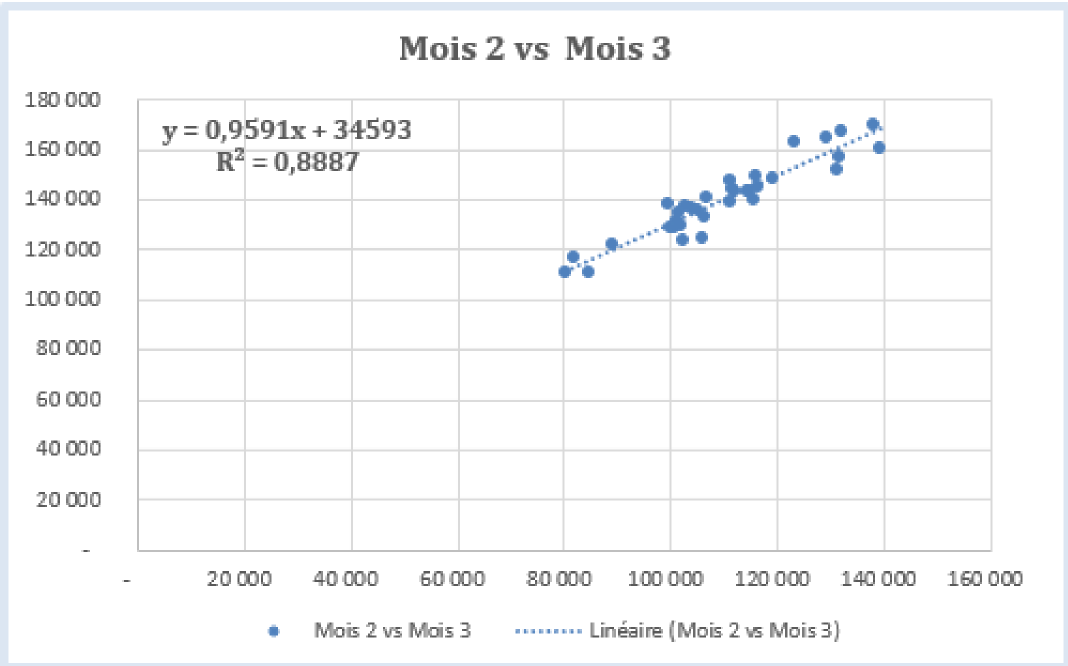
Commençons d'abord par vérifier les hypothèses sous jacentes au modèle de Chain Ladder.

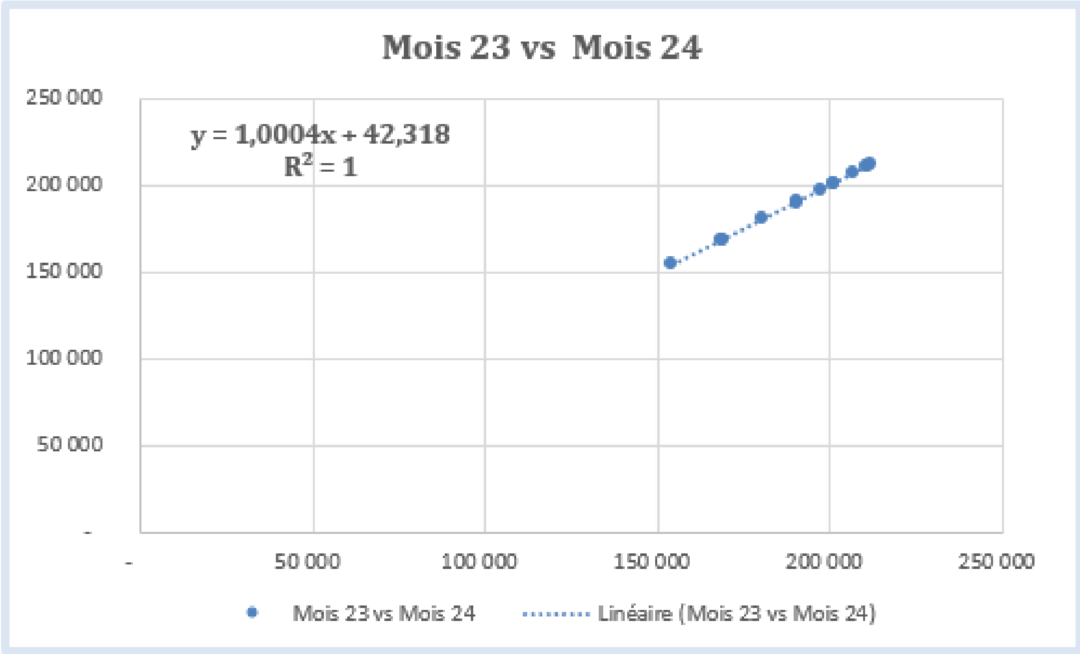
La première hypothèse d'indépendance des mois de survénance a été mise par défaut et confirmée par les gestionnaires.

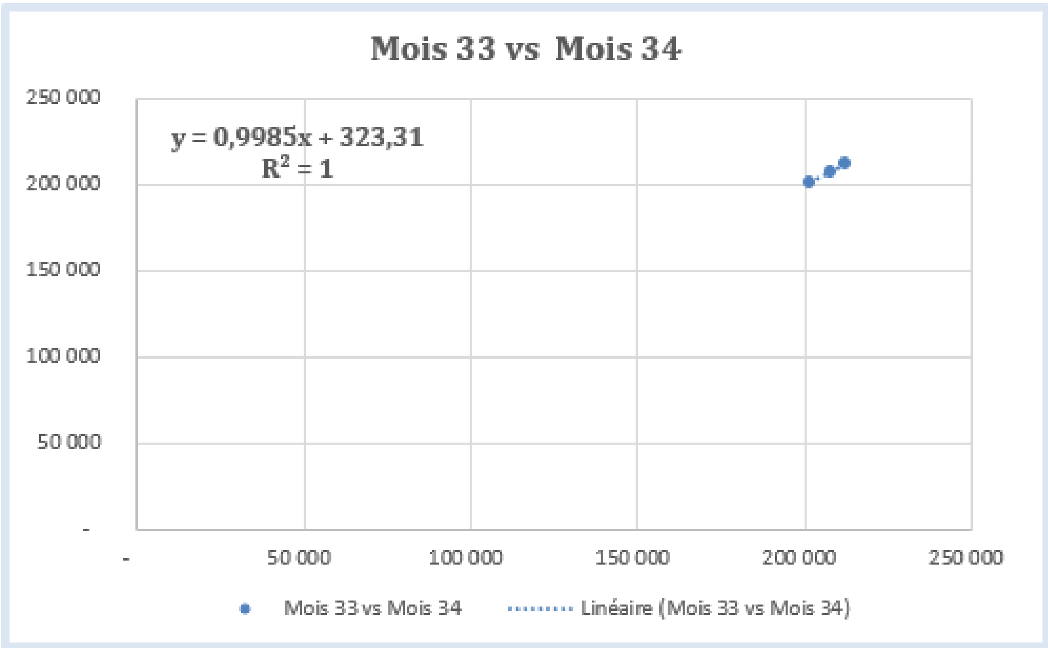
Vérifions graphiquement la seconde hypothèse de régularité de la cadence des paiements.

Pour chaque mois de déroulement j , les points de coordonnées $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ doivent être sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine.


Mois 1 vs Mois 2
y = 1,3692x + 29321
R² = 0,5305
160 000
140 000
120 000
100 000
80 000
60 000
40 000
20 000
-
-
10 000
20 000
30 000
40 000
50 000
60 000
70 000
80 000
90 000
Mois 1 vs Mois 2
Linéaire (Mois 1 vs Mois 2)


Mois 2 vs Mois 3
y = 0,9591x + 34593
R² = 0,8887
180 000
160 000
140 000
120 000
100 000
80 000
60 000
40 000
20 000
-
-
20 000
40 000
60 000
80 000
100 000
120 000
140 000
160 000
Mois 2 vs Mois 3
Linéaire (Mois 2 vs Mois 3)





On observe que les points sont relativement peu éloignés de la droite de régression dans les 3 premiers mois, mais se rapprochent beaucoup plus de la droite à partir des mois suivants. Il n'est pas nécessaire de tracer les droites de régression pour les derniers mois de développement j=35 et j=36 car on n'a que le point $(C_{i,35}, C_{i,36})$ à placer, et la droite de régression contrainte passe par ce point et par l'origine.

On valide donc l'hypothèse de régularité de la cadence .

On peut donc appliquer la méthode de Chain Ladder.

On commence par estimer les coefficients de déroulement :

J	**1**	**2**	**3**	...	...	**34**	**35**
$\hat{\lambda}_j$	1,863	1,274	1,111	...	...	1,00011	1,0000

Ces coefficients de développement nous permettent ensuite de compléter la partie inférieure du triangle des règlements cumulés :

Survenances		**Deroulement**							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	...	...	**34**	**35**	**36**
2017	**1**	66 384	139 340	160 326	...	...	207 527	207 559	207 564
2017	**2**	66 336	111 769	107 415	...	...	201 541	201 558	201 563
2017	**3**	52 437	123 133	111 590	...	...	211 915	211 940	211 946
...	**...**	...	...	...	...	...	...	...	...
...	**...**	...	...	...	...	...	...	...	...
2019	**10**	70 602	138 194	170 274	...	...	226 985	227 012	227 018
2019	**11**	68 645	130 845	166 655	...	...	222 160	222 187	222 192
2019	**12**	63 504	118 329	150 713	...	...	200 909	200 933	200 938

Ce qui nous donne les provisions suivantes :

Survenances		Montants		
Années	**Mois**	**Montant total estimé**	**Montant déjà réglé**	**Provisions**
2017	**1**	207 564	207 564	0
2017	**2**	201 563	201 558	5
2017	**3**	211 946	211 915	31
...	**...**	...	...	...
...	**...**	...	...	...
2019	**10**	227 018	170 274	56 744
2019	**11**	222 192	130 845	91 347
2019	**12**	200 938	63 504	137 434

La méthode de Chain Ladder nous donne donc un montant total de la provision technique à constituer de $\boxed{\text{415 220 €}}$.

4.2.2 Méthode 2 : Méthode de London Chain

Considérons le même triangle de règlements cumulés precédent .

A priori, lorsque la méthode Chain Ladder suppose des paiements réguliers, il n'est pas nécessaire de vérifier la méthode London-Chain.

En fait, si les points de coordonnées $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ sont sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine, ils le seront également sur une droite sans cette restriction et l'approximation sera meilleure.

Commencons donc par estimer les coéfficients $\hat{\lambda}_j$ et $\hat{\alpha}_j$:

J	**1**	**2**	**3**	...	...	**33**	**34**	**35**
$\hat{\lambda}_j$	1,369	0,960	0,954	...	...	0,998	1,0024	1
$\hat{\alpha}_j$	29320,96	34593,22	21943,54	...	...	323,313	-480,71	0

Ces coefficients nous permettent de calculer la partie inférieure du triangle des règlements cumulés :

Survenances		**Deroulement**							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	...	...	**34**	**35**	**36**
2017	**1**	66 384	139 340	160 326	...	...	207 527	207 559	207 564
2017	**2**	66 336	111 769	107 415	...	...	201 541	201 558	201 563
2017	**3**	52 437	123 133	111 590	...	...	211 915	211 957	211 963
...	**...**	...	...	...	...	...	...	...	...
...	**...**	...	...	...	...	...	...	...	...
2019	**10**	70 602	138 194	160 086	...	...	217 811	217 868	217 874
2019	**11**	68 645	130 845	166 655	...	...	207 266	207 297	207 303
2019	**12**	63 504	116 269	146 106	...	...	192 796	192 792	192 796

Ce qui nous donne les provisions suivantes :

Survenances		Montants		
Années	**Mois**	**Montant total estimé**	**Montant déjà réglé**	**Provisions**
2017	**1**	207 564	207 564	0
2017	**2**	201 563	201 558	5
2017	**3**	211 963	211 915	48
...	**...**	...	...	...
...	**...**	...	...	...
2019	**10**	217 874	170 274	47 600
2019	**11**	207 303	130 845	76 457
2019	**12**	192 796	63 504	129 293

La méthode de London Chain nous donne donc un montant total de la provision technique à constituer de $\boxed{\text{385 009 €}}$.

4.2.3 Méthode 3 : Méthode de Thomas Mack

Considérons le triangle des montants cumulés utilisé dans l'application numérique de la méthode de Chain Ladder.
Sous les deux premières hypothèses, identiques à celles de la méthode de Chain ladder et vérifiées dans la partie correspondante, le modèle de Mack prédit la même estimation des coefficients de developpement, de la partie inférieure du triangle et du montant de la provision.

Rappelons les coefficients de développement obtenus par la méthode de Chain Ladder :

J	**1**	**2**	**3**	...	...	**34**	**35**
$\hat{\lambda}_j$	1,863	1,274	1,111	...	...	1,00011	1,0000

Et les montants de provisions obtenus par la méthode de Chain Ladder :

Survenances		Montants		
Années	**Mois**	**Montant total estimé**	**Montant déjà réglé**	**Provisions**
2017	**1**	207 564	207 564	0
2017	**2**	201 563	201 558	5
2017	**3**	211 946	211 915	31
...	**...**	...	...	...
...	**...**	...	...	...
2019	**10**	227 018	170 274	56 744
2019	**11**	222 192	130 845	91 347
2019	**12**	200 938	63 504	137 434

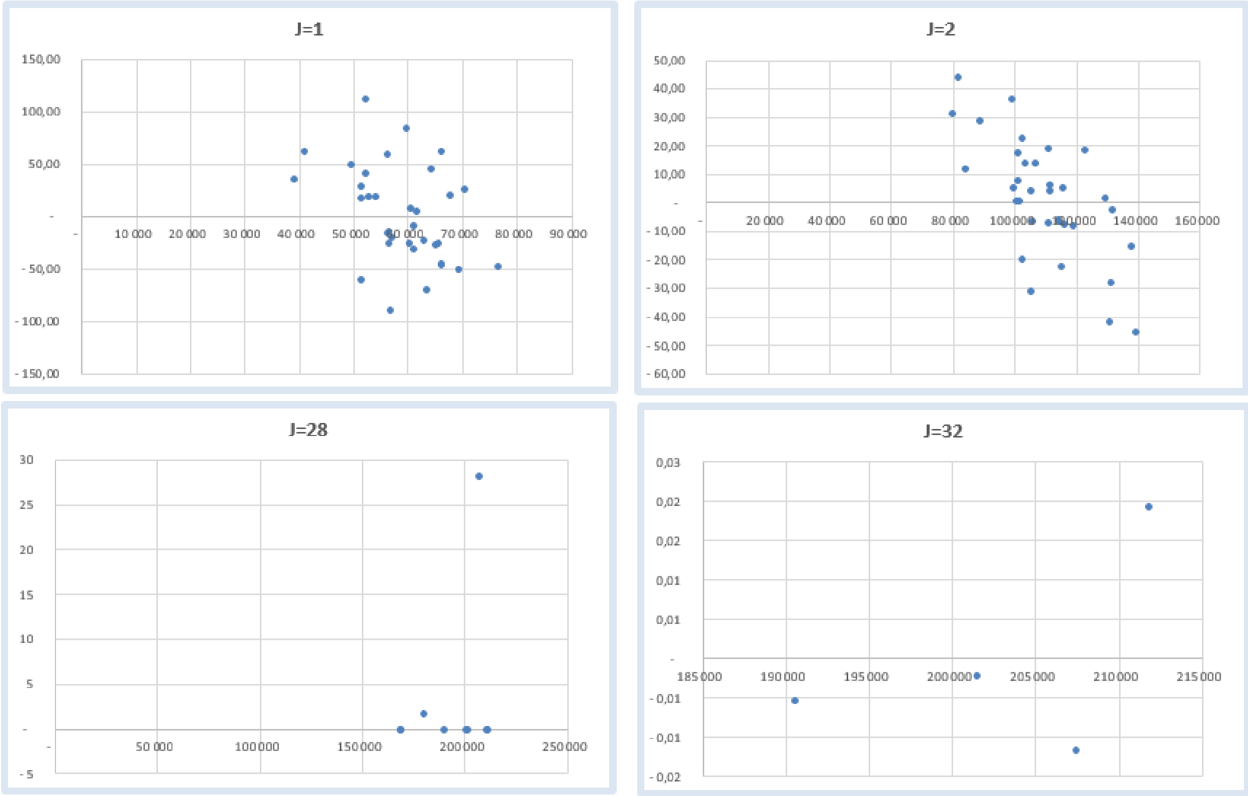
Nous devons maintenant tester la troisième hypothèse du modèle avant de pouvoir calculer les coefficients $\hat{\sigma}_j^2$.
Nous pouvons interpréter cette hypothèse graphiquement : pour chaque mois de survenance j , les points de coordonnées $(C_{i,j}, B_{i,j})$ doivent être non-structurés,

$$B_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j * C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$$

, résidus d'une estimation par moindres carrés.
Le triangle de ces résidus $B_{i,j}$ est le suivant :

Survenances		**Deroulement**							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	...	...	**33**	**34**	**35**
2017	**1**	60,72	-45,94	-13,26	...	...	-0,0065	-0,0154	0,00
2017	**2**	-45,96	3,99	8,824	...	...	0,0210	-0,0157	
2017	**3**	111,035	17,93	-10,46	...	...	-0,0140		
...	**...**	...	...	...					
...	**...**	...	...	...					
2019	**10**	24,99	-15,44						
2019	**11**	11,21							

A vu d'oeil , il est donc impossible de détecter une quelconque structure.
Sur un graphique , plaçons donc les points de coordonnées $(C_{i,j}, B_{i,j})$.



Nous n'observons aucune structure particulière pour ces points, nous validons donc cette troisième hypothèse. Par conséquent, nous pouvons calculer la variance $\hat{mse}(\hat{R})$ et l'écart type $\hat{se}(\hat{R})$ pour le montant de la provision.

Survenances		Montants	
Années	**Mois**	**Variance** $M\hat{S}E(\hat{R}_i)$	**Ecart type** $\hat{SE}(\hat{R}_i)$
2017	**1**	0,00	0,00
2017	**2**	135	12
2017	**3**	302	17
...	**...**	...	...
...	**...**	...	...
2019	**10**	66 174 046	8 135
2019	**11**	168 696 326	12 988
2019	**12**	551 841 043	23 491
Total		**893 744 177**	**29 896**

Ensuite, nous pouvons déterminer un intervalle de confiance, la Value at Risk et la Tail Value at Risk pour le montant de la provision R , au niveau de confiance $1 - \alpha$ voulu.

Loi log-normale

Pour un niveau de confiance de 95% avec la loi log-normale , on obtient donc :

Survenances		Montants					
Années	**Mois**	**Moyenne**	**Ecart type**	**ICinf**	**ICsup**	**VaR**	**TVaR**
2017	**1**	0	0	0	0	0	0
2017	**2**	5	12	0	28	18	39
2017	**3**	30	17	9	75	63	81
...	**...**	...	...	...	...	...	
...	**...**	...	...	...	...	...	
2019	**10**	56 744	8 135	42 471	74 286	71 022	75 491
2019	**11**	91 347	12 988	68 537	119 336	114 133	121 254
2019	**12**	137 434	23 491	97 139	188 925	179 088	192 641
Total		**415 220**	**29 896**	**359 707**	**476 829**	**466 146**	**480 537**

Loi normale

Pour un niveau de confiance de 95% avec la loi normale , on obtient donc :

Survenances		Montants					
Années	**Mois**	**Moyenne**	**Ecart type**	**ICinf**	**ICsup**	**VaR**	**TVaR**
2017	**1**	0	0	0	0	0	0
2017	**2**	5	12	0	28	24	29
2017	**3**	30	17	4	65	59	66
...	**...**	...	...	...	...	...	
...	**...**	...	...	...	...	...	
2019	**10**	56 744	8 135	40 800	72 688	70 125	73 523
2019	**11**	91 347	12 988	75 890	116 804	112 711	118 138
2019	**12**	137 434	23 491	101 392	183 476	176 074	185 889
Total		**415 220**	**29 896**	**356 626**	**473 815**	**464 394**	**476 885**

Ecarts relatifs entre les resultats des deux modélisations : Loi log normale et loi normale

Borne inf	Borne sup	VaR	TVaR
0,86%	**0,64%**	**0,38%**	**0,77%**

Ces deux résultats de modélisation confirment le fait que la modélisation selon une loi normale et une loi log normale produit evidemment des résultats différents. Par précaution, nous calculons la marge de risque à l'aide des deux modèles et conservons le plus élevé.

4.2.4 Méthode 4 : Méthode de Bootstrap

Appliquons la méthode du bootstrap au triangle des règlements cumulés utilisé précédemment.
Rappelons les données $C_{i,j}$ utilisées ainsi que les coefficients de deroulement $\hat{\lambda}_j$:

Survenances		**Deroulement**							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	**...**	**...**	**34**	**35**	**36**
2017	**1**	66 384	139 340	160 326	…	…	207 527	207 559	207 564
2017	**2**	66 336	111 769	143 694	…	…	201 541	201 558	
2017	**3**	52 437	123 133	163 122	…	…	211 915		
...	**...**	...	...	...	...	...			
...	**...**	...	...	...	...	...			
2019	**10**	70 602	138 194	170 274					
2019	**11**	68 645	130 845						
2019	**12**	63 504							

J	**1**	**2**	**3**	**...**	**...**	**34**	**35**
$\hat{\lambda}_j$	1,863	1,274	1,111	...	...	1,00011	1,0000

On commence par calculer le triangle prédit des règlements cumulés $D_{i,j}$ par récursion arrière :

Survenances		Deroulement							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	...	...	**34**	**35**	**36**
2017	**1**	65 598	122 231	155 683	...	...	207 534	207 559	207 564
2017	**2**	63 701	118 697	151 181	...	...	201 534	201 558	
2017	**3**	66 983	124 811	158 969	...	...	211 915		
...	**...**	...	...	...	...	...			
...	**...**	...	...	...	...	...			
2019	**10**	71 746	133 687	170 274					
2019	**11**	70 221	130 845						
2019	**12**	63 504							

En décumulant , on obtient donc le triangle prédit des reglements non cumulés suivants :

Survenances		Deroulement							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	...	...	**34**	**35**	**36**
2017	**1**	60 256	56 633	33 452	...	...	7	25	5
2017	**2**	63 701	54 996	32 484	...	...	7	24	
2017	**3**	66 983	57 829	34 158	...	...	7		
...	**...**	...	...	...	...	...			
...	**...**	...	...	...	...	...			
2019	**10**	71 746	61 941	36 587					
2019	**11**	70 221	60 624						
2019	**12**	63 504							

On determine le triangle des résidus de pearsons :

Survenances		Deroulement							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	...	...	**34**	**35**	**36**
2017	**1**	3,07	68,59	-68,16	...	...	-1,15	1,41	0,00
2017	**2**	10,44	-40,78	-3,11	...	...	3,69	-1,43	
2017	**3**	-56,20	53,51	31,55	...	...	-2,47		
...	**...**	...	...	...	...	...			
...	**...**	...	...	...	...	...			
2019	**10**	-4,27	22,71	-23,56					
2019	**11**	-5,95	6,40						
2019	**12**	0,00							

On effectue maintenant B ré-échantillonnages aléatoires avec remise de toutes les autres valeurs, y compris à la place des deux résidus nuls.

À partir de ces triangles, on calcule le triangle des règlements non-cumulés « bootstrap » suivant :

Survenances		Deroulement							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	...	...	**34**	**35**	**36**
2017	**1**	69 628	49 893	17 369	...	...	21	25	39
2017	**2**	62 623	46 692	15 490	...	...	19	35	
2017	**3**	56 196	58 470	16 888	...	...	13		
...	**...**	...	...	...	...	...			
...	**...**	...	...	...	...	...			
2019	**10**	68 299	63 058	36 785					
2019	**11**	67 483	60 549						
2019	**12**	63 992							

Le triangle des règlements cumulés « bootstrap » et completé par la méthode de Chain Ladder :

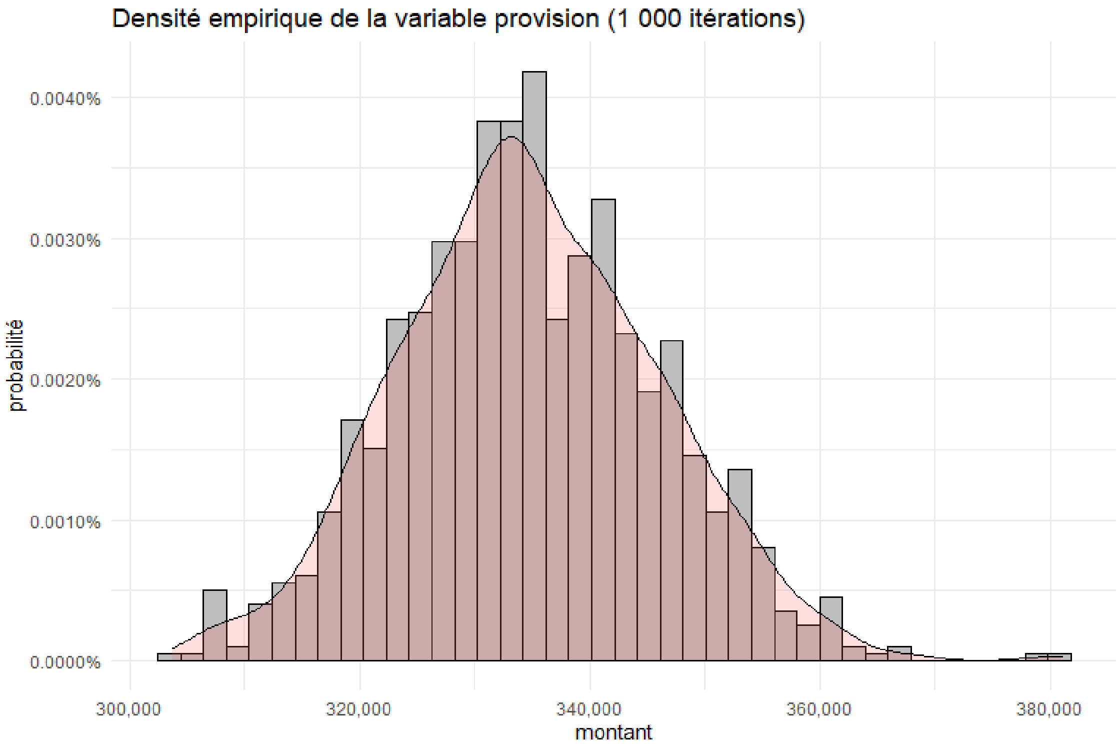
Survenances		**Deroulement**							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	...	...	**34**	**35**	**36**
2017	**1**	69 628	119 522	156 864	...	...	208 541	208 566	208 605
2017	**2**	62 623	109 315	143 681	...	...	196 731	196 697	196 733
2017	**3**	56 196	114 666	150 368	...	...	192 662	192 664	192 700
...	**...**	...	...	...	...	...	...	...	...
...	**...**	...	...	...	...	...	...	...	...
2019	**10**	68 299	131 357	168 142	...	...	224 463	224 466	224 507
2019	**11**	67 483	128 032	163 145	...	...	217 792	217 794	217 834
2019	**12**	63 992	116 923	148 988	...	...	198 893	198 895	198 932

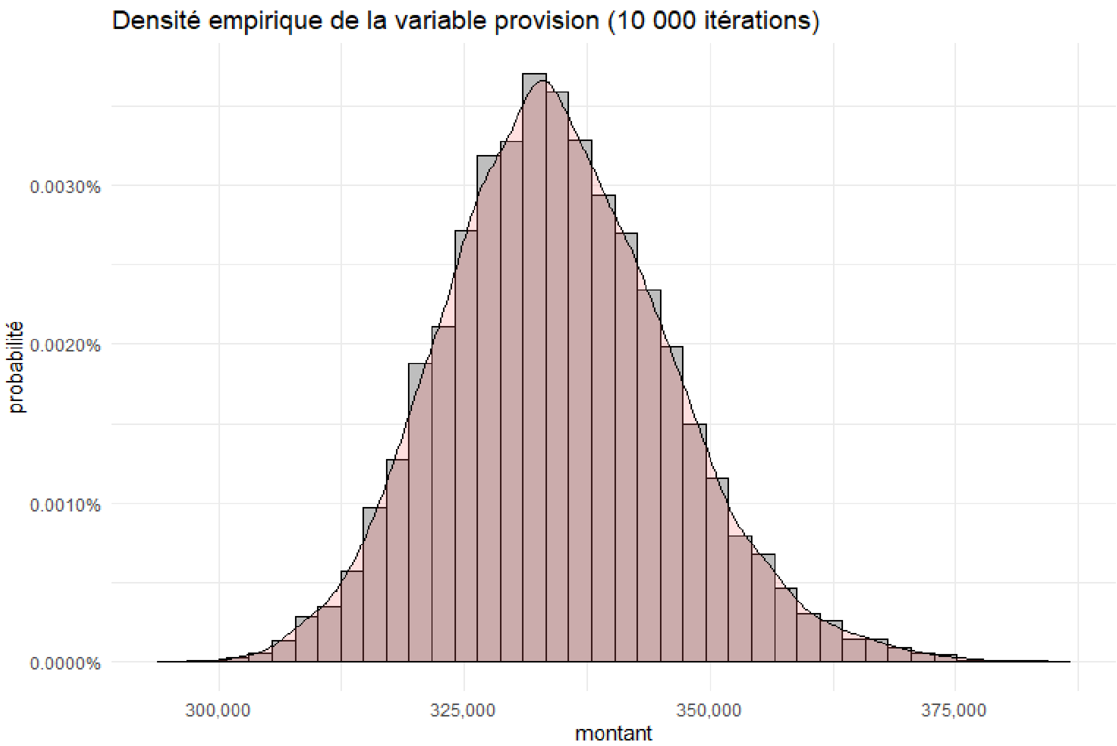
Ce qui nous donne ces montants de provision « bootstrap » par années de survenance et total :

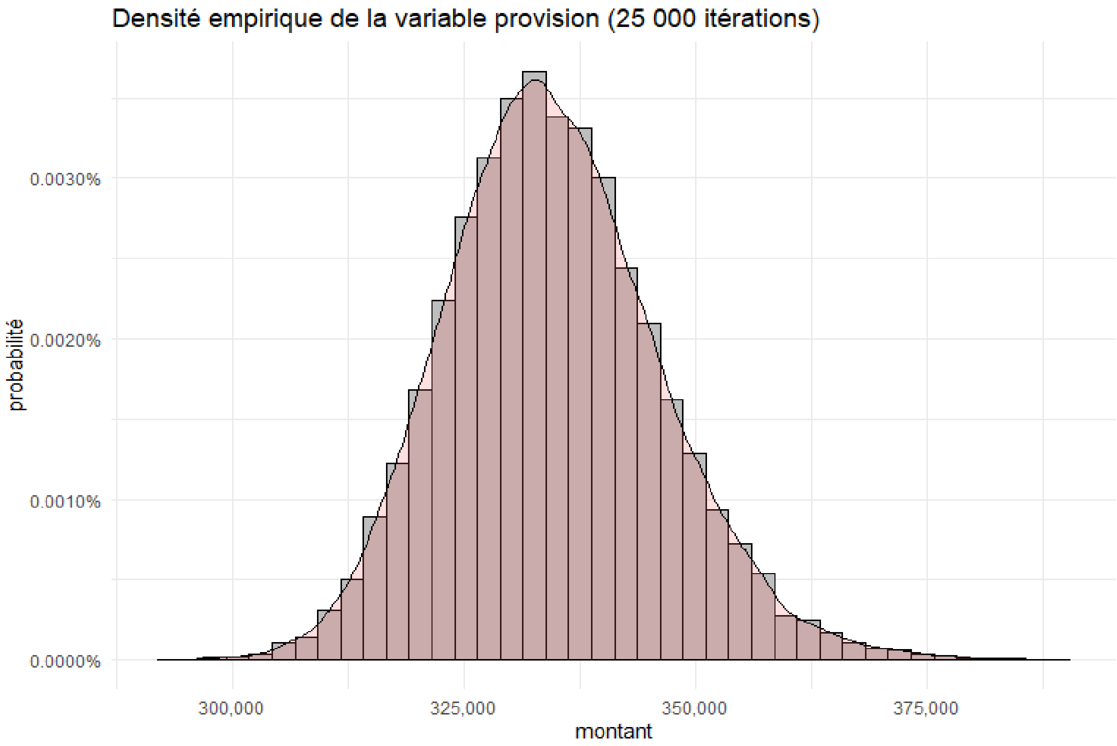
Survenances		Montants		
Années	**Mois**	**Montant total estimé**	**Montant déjà réglé**	**Provisions Bootsrap**
2017	**1**	208 605	208 605	0
2017	**2**	196 733	196 697	37
2017	**3**	192 700	192 662	38
...	**...**	...	...	...
...	**...**	...	...	...
2019	**10**	224 507	168 142	56 365
2019	**11**	217 834	128 032	89 802
2019	**12**	198 932	63 992	134 940
Total				**407 779**

On se propose d'effectuer 1000 itérations , 10 000 , 25 000 itérations .

On obtient la distribution empirique suivante :


Densité empirique de la variable provision (1 000 itérations)
probabilité
0.0040%
0.0030%
0.0020%
0.0010%
0.0000%
300,000
320,000
340,000
360,000
380,000
montant


Densité empirique de la variable provision (10 000 itérations)
probabilité
0.0030%
0.0020%
0.0010%
0.0000%
300,000
325,000
350,000
375,000
montant



Visuellement, nous supposons que cette distribution suit une loi normale.
Par contre , effectuons un test de normalité de cet echantillon à l'aide du test de Kolmogorov-Smirnov .

```
> ks.test(X1000$échantillon,"pnorm",mean(X1000$échantillon),sd(X1000$échantillon))

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  X1000$échantillon
D = 0.04838, p-value = 0.01854
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(X10000$échantillon,"pnorm",mean(X10000$échantillon),sd(X10000$échantillon))

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  X10000$échantillon
D = 0.02605, p-value = 2.551e-06
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(X25000$échantillon,"pnorm",mean(X25000$échantillon),sd(X25000$échantillon))

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  X25000$échantillon
D = 0.02861, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided
```

Les 3 test nous fournissent des p-values faibles . Les hypothèses de normalité supposées peuvent donc etres confirmées.
On peut aussi constater que , plus le nombre d'itérations est élevé , la p-value devient tres faible , et la densité empirique se rapproche de la densité théorique .

Calculons l'intervalle de confiance, la VaR et la TVaR en utilisant cet échantillon de 25 000 itérations des variables de provisions obtenues avec un niveau de confiance de

95%.

On obtient donc :

		Intervalle de confiance à 95%			
Moyenne	**Ecart type**	**Borne inf**	**Borne sup**	**VaR**	**TVaR**
417 281	14 861	392 837	441 725	441 725	447 934

4.3 Pharmacie

4.3.1 Méthode 1 : Méthode de Chain Ladder

Considerons le triangle de règlements cumulés du grand poste Pharmacie suivant :

Survenances		**Deroulement**							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	**...**	**...**	**34**	**35**	**36**
2017	**1**	49 490	108 533	120 886	...	...	146 183	146 197	146 221
2017	**2**	63 334	108 455	128 542	...	...	155 293	155 314	
2017	**3**	51 507	117 173	132 080	...	...	166 458		
...	**...**	...	...	...	...	...			
...	**...**	...	...	...	...	...			
2019	**10**	73 920	118 901	133 257					
2019	**11**	65 654	114 712						
2019	**12**	67 124							

La verification des hypothèses sous jacentes au modèle de Chain Ladder ont été faites et présentée en annexe 1 .

Estimation des coefficients de déroulement :

J	**1**	**2**	**3**	...	...	**34**	**35**
$\hat{\lambda}_j$	1,933	1,217	1,076	...	...	1,0011	1,000

A l'aide de ces coefficients de développement, on compléte la partie inférieure du triangle des règlements cumulés :

Survenances		**Deroulement**							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	...	...	**34**	**35**	**36**
2017	**1**	49 490	108 533	120 886	...	...	146 183	146 197	146 221
2017	**2**	63 334	108 455	128 542	...	...	155 293	155 314	155 339
2017	**3**	51 507	117 173	132 080	...	...	166 458	166 478	166 505
...	**...**	...	...	...	...	...	...	...	...
...	**...**	...	...	...	...	...	...	...	...
2019	**10**	73 920	118 901	133 257	...	...	168 009	168 029	168 057
2019	**11**	65 654	114 712	139 634	...	...	176 049	176 069	176 098
2019	**12**	67 124	129 765	157 957	...	...	199 151	199 174	199 207

Ce qui nous donne les provisions suivantes :

Survenances		Montants		
Années	**Mois**	**Montant total estimé**	**Montant déjà réglé**	**Provisions**
2017	**1**	146 221	146 221	0
2017	**2**	155 339	155 314	26
2017	**3**	166 505	166 458	47
...	**...**	...	...	...
...	**...**	...	...	...
2019	**10**	168 057	133 257	34 800
2019	**11**	176 098	114 712	61 387
2019	**12**	199 207	67 124	132 084

La méthode de Chain Ladder nous donne donc un montant total de la provision technique à constituer de 370 390 €.

4.3.2 Méthode 2 : Méthode de London Chain

Survenances		Montants		
Années	**Mois**	**Montant total estimé**	**Montant déjà réglé**	**Provisions**
2017	**1**	146 221	146 221	0
2017	**2**	155 339	155 314	26
2017	**3**	166 515	166 458	57
...	**...**	...	...	...
...	**...**	...	...	...
2019	**10**	169 477	133 257	36 219
2019	**11**	171 733	114 712	57 021
2019	**12**	168 224	67 124	101 100

La méthode de London Chain nous donne donc un montant total de la provision technique à constituer de 348 491 €.

4.3.3 Méthode 3 : Méthode de Thomas Mack

Loi normale

Pour un niveau de confiance de 95% avec la loi normale , on obtient donc :

Survenances		Montants					
Années	**Mois**	**Moyenne**	**Ecart type**	**ICinf**	**ICsup**	**VaR**	**TVaR**
2017	**1**	0	0	0	0	0	0
2017	**2**	27	2	23	30	29	40
2017	**3**	47	6	36	57	56	58
...	**...**	...	...	...	...	...	
...	**...**	...	...	...	...	...	
2019	**10**	34 800	7 690	19 731	49 868	47 446	50 658
2019	**11**	61 387	11 673	48 507	84 266	80 587	85 465
2019	**12**	132 084	26 266	100 603	180 564	175 288	186 263
Total		**370 390**	**38 063**	**295 789**	**444 991**	**432 997**	**448 900**

Loi Log-normale

Pour un niveau de confiance de 95% avec la loi log-normale , on obtient donc :

Survenances		Montants					
Années	**Mois**	**Moyenne**	**Ecart type**	**ICinf**	**ICsup**	**VaR**	**TVaR**
2017	**1**	0	0	0	0	0	0
2017	**2**	27	2	23	32	30	42
2017	**3**	47	6	39	60	59	62
...	**...**	...	...	...	...	...	
...	**...**	...	...	...	...	...	
2019	**10**	34 800	7 690	22 151	52 125	48 660	53 490
2019	**11**	61 387	11 673	50 489	86 221	82 235	89 186
2019	**12**	132 084	26 266	114 415	184 162	179 105	190 006
Total		**370 390**	**38 063**	**313 394**	**450 423**	**436 108**	**455 526**

4.3.4 Méthode 4 : Méthode de Bootstrap

On obtient ces montants de provision « bootstrap » par années et mois de survenance et total :

Survenances		Montants		
Années	**Mois**	**Montant total estimé**	**Montant déjà réglé**	**Provisions Bootsrap**
2017	**1**	144 191	144 191	0
2017	**2**	135 198	135 195	3
2017	**3**	170 730	170 688	42
...	**...**	...	...	...
...	**...**	...	...	...
2019	**10**	198 430	156 126	42 304
2019	**11**	171 971	111 100	60 871
2019	**12**	215 234	71 522	143 782
Total				**387 333**

On se propose d'effectuer 25 000 itérations .

On obtient donc :

		Intervalle de confiance à 95%			
Moyenne	**Ecart type**	**Borne inf**	**Borne sup**	**VaR**	**TVaR**
373 030	25 283	331 443	414 617	414 617	425 181

Remarques :

L'on constate (à l'aide de ces deux postes representatifs du portefeuille qu'on vient de modeliser) qu'il existe une enorme pertinence par rapport aux differents postes médicaux dans le calcul des provisons techniques.
Vu que l'on ne dispose pas d'assez de données concernant tous ces differents postes médicaux , nous nous interesserons dans la suite à la variable "Encaisseur" qui est une variable préponderante et significative.

4.4 Assurés vs Providers

Dans cette partie, nous nous contenterons de calculer les differents montants de provisions tout en prenant en compte la nature de l'encaisseur.

Ce qui nous interesse ici, ce sont les deux modalités de la variable "Encaisseur" que sont: Assuré, Providers.

Pour rappel, les remboursements effectués aux providers consiste en des remboursements à des prestataires de santé (clinique , medecin etc ...)

En ce qui concerne les assurés, le constat est que le délai de remboursement est beaucoup plus court par rapport à celui effectué aux providers. Ceci s'explique par le fait que chez les assurés, tout depend du comportement de l'assuré. C'est à dire, plus l'assuré déclare vite, et plus vite celui ci est indemnisé.

Tandis que chez les Providers, le délai de remboursement depend du processus des entreprises, et ou des prestataires. Certains ont des processus plutot longs.

Le montant total de provision pour le portefeuille sera donc égal à la somme des montants de provisions obtenus (assurés, providers).

$$\boxed{\text{Provision totale} = \text{Provisions (assurés)} + \text{Provisions (Providers)}}$$

Considerons le triangle de règlements cumulés des remboursements effectués aux assurés.

Triangle de règlements cumulés chez les assurés :

Survenances		Deroulement							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	**...**	**...**	**22**	**23**	**24**
2017	**1**	176 981	287 446	350 006	...	...	549 577	549 967	550 551
2017	**2**	163754	255 692	315 795	...	...	463 280	463 740	
2017	**3**	186 286	301 177	352 945	...	...	531 013		
...	**...**	...	...	...	...	...			
...	**...**	...	...	...	...	...			
2018	**10**	231 146	336 556	396 486					
2018	**11**	237 230	328 297						
2018	**12**	229 692							

Et le triangle de règlements cumulés des remboursements effectués aux Providers .

Triangle de règlements cumulés chez les Providers :

Survenances		Deroulement							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	**...**	**...**	**34**	**35**	**36**
2017	**1**	25 032	80 310	113 479	...	...	170 307	170 336	170 386
2017	**2**	38 077	77 095	112 698	...	...	165 052	165 052	
2017	**3**	25 427	76 389	101 512	...	...	157 275		
...	**...**	...	...	...	...	...			
...	**...**	...	...	...	...	...			
2019	**10**	283 263	648 594	827 306					
2019	**11**	325 881	641 719						
2019	**12**	229 992							

On constate, au vu de ces deux triangles de règlements cumulés, que le nombre de mois de déroulement diffère.
Le délai de remboursement aux assurés est beaucoup plus court par rapport à celui effectué aux providers. Ceci s'explique par le fait que chez les assurés, tout depend du comportement de l'assuré. C'est à dire, plus l'assuré déclare vite, et plus vite celui ci est indemnisé .

Tandis que chez les Providers, le délai de remboursement depend du processus des entreprises, et ou des prestataires qui ont des processus plutot longs.

4.4.1 Méthode 1 : Méthode de Chain Ladder

La verification des hypothèses sous jacentes au modèle de Chain Ladder ont été faites et présentée en annexe .

Estimation des coefficients de déroulement :

J	**1**	**2**	**3**	...	...	**22**	**23**
$\hat{\lambda}_j$ **(assurés)**	1,503	1,192	1,099	...	...	1,0008	1

J	**1**	**2**	**3**	...	...	**34**	**35**
$\hat{\lambda}_j$ **(providers)**	2,444	1,442	1,172	...	...	1,000	1

Ces coefficients de passage nous permettent d'estimer les montants de prestations futures et de determiner les montants de provisions suivantes :

Assurés	**Providers**
Montant Provision Chain Ladder	**Montant Provision Chain Ladder**
1 153 759	3 530 446
4 684 205	

4.4.2 Méthode 2 : Méthode de London Chain

La verification des hypothèses sous jacentes au modèle de Chain Ladder ont été faites et présentée en annexe .

Estimation des coefficients de déroulement :

J	**1**	**2**	**3**	...	...	**21**	**22**	**23**
$\hat{\lambda}_j$ **(assurés)**	0,7799	1,0368	1,0741	...	...	0,998	0,9991	1
$\hat{\alpha}_j$ **(assurés)**	149426,45	48004,04	9165,42	...	...	1008,46	840,65	0

J	**1**	**2**	**3**	...	...	**33**	**34**	**35**
$\hat{\lambda}_j$ **(providers)**	2,216	1,402	1,180	...	...	0,999	1,0056	1
$\hat{\alpha}_j$ **(providers)**	30857,26	11888,28	-3809,91	...	...	121,81	829,48	0

Ces differents coefficients de passage nous permettent d'estimer les montants de prestations futures et de determiner les montants de provisions suivantes :

Assurés	**Providers**
Montant Provision London Chain	**Montant Provision London Chain**
1 102 871	3 459 930
4 562 802	

4.4.3 Méthode 3 : Méthode de Thomas Mack

Considérons les deux triangles des montants cumulés utilisés dans l'application numérique de la méthode de Chain Ladder.
Sous les deux premières hypothèses, identiques à celles de la méthode de Chain ladder et vérifiées dans la partie correspondante, le modèle de Mack prédit la même estimation des coefficients de developpement, de la partie inférieure du triangle et du montant de la provision.

Rappelons ces coefficients de deroulement obtenus pour ces deux triangles à l'aide de la méthode de Chain Ladder :

J	**1**	**2**	**3**	...	...	**22**	**23**
$\hat{\lambda}_j$ **(assurés)**	1,503	1,192	1,099	...	...	1,0008	1

J	**1**	**2**	**3**	...	...	**34**	**35**
$\hat{\lambda}_j$ **(providers)**	2,444	1,442	1,172	...	...	1,000	1

Et les montants de provisions obtenus par la méthode de Chain Ladder :

Assurés	**Providers**
Montant Provision Chain Ladder	**Montant Provision Chain Ladder**
1 153 759	3 530 446
4 684 205	

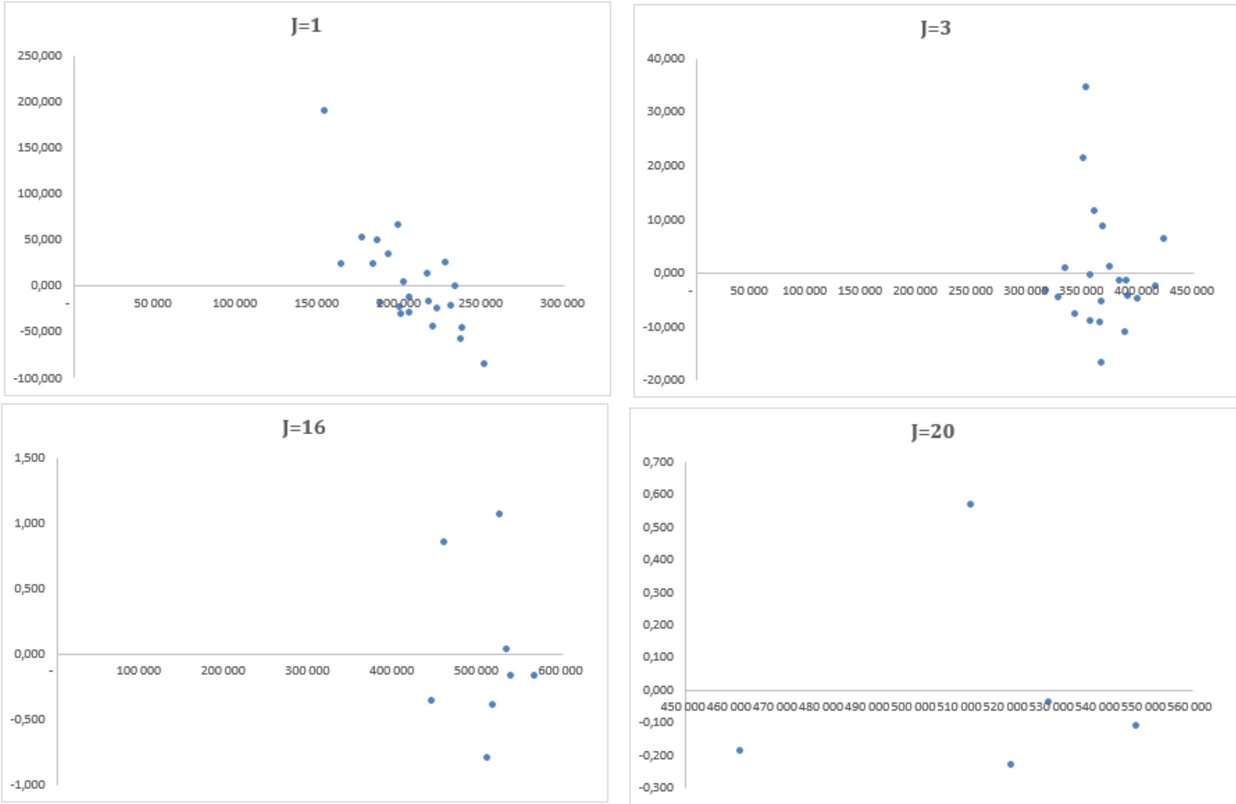
Nous devons maintenant tester la troisieme hypothèse du modèle concernant à l'aide des triangles de résidus obtenus à l'aide de la formule suivante :

$$B_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j * C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$$

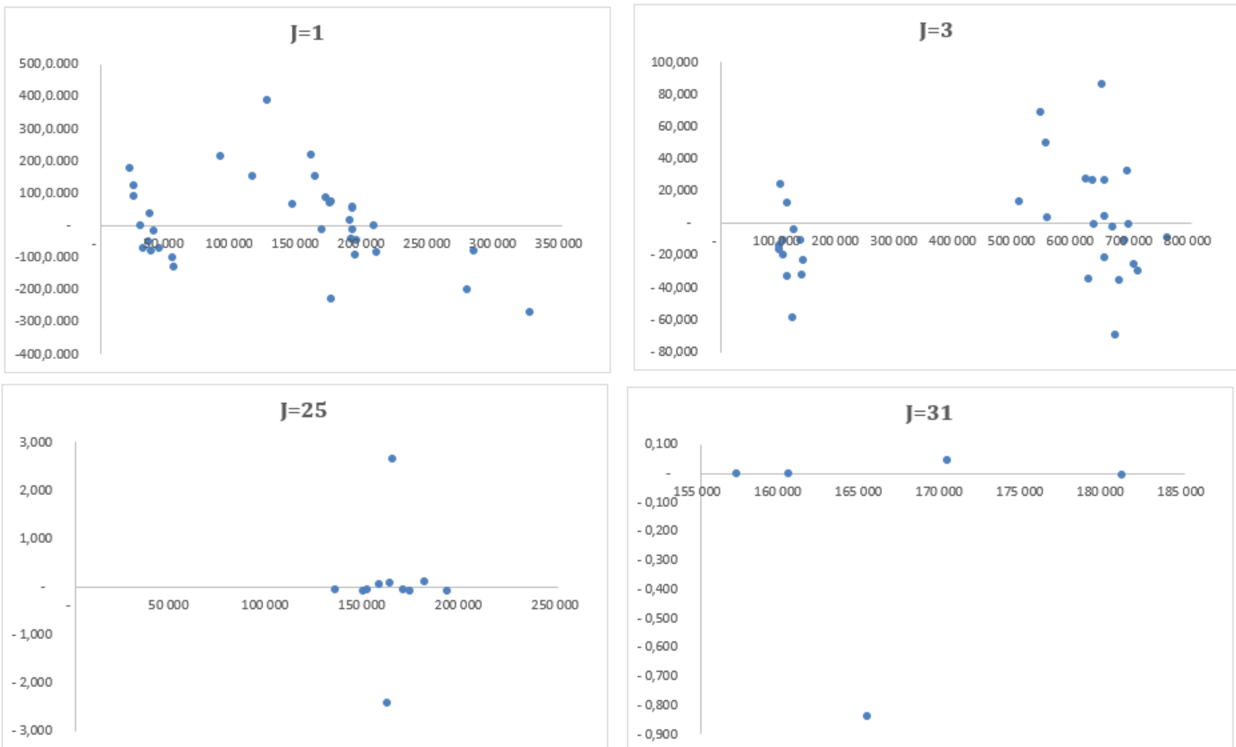
résidus d'une estimation par moindres carrés.

Nous pouvons interpréter cette hypothèse graphiquement : pour chaque mois de survenance j , les points de coordonnées $(C_{i,j}, B_{i,j})$ doivent être non-structurés.

Assurés



Providers



Nous n'observons aucune structure particulière pour ces points, nous validons donc cette troisième hypothèse. Par conséquent, nous pouvons calculer la variance $\hat{mse}(\hat{R})$ et l'écart type $\hat{se}(\hat{R})$ pour le montant de la provision de chacun.

Assurés		Providers	
Variance	**Ecart type**	**Variance**	**Ecart type**
4 002 247 435	63 263	96 341 417 197	310 389

Ensuite, nous pouvons déterminer un intervalle de confiance, la Value at Risk et la Tail Value at Risk pour le montant de la provision R , au niveau de confiance de 95% à l'aide de la loi normale .

On obtient donc :

Assurés						
	Moyenne	**Ecart type**	**ICinf**	**ICsup**	**VaR**	**TVaR**
Montants	**1 153 759**	**63 263**	**1 029 765**	**1 277 753**	**1 257 818**	**1 284 251**

Providers						
	Moyenne	**Ecart type**	**ICinf**	**ICsup**	**VaR**	**TVaR**
Montants	**3 548 585**	**310 389**	**2 940 234**	**4 156 937**	**4 059 130**	**4 188 817**

4.4.4 Méthode de Bootstrap

Conmencons par rappeler les differents triangles de règlements cumulés des assurés et Providers utilisés .

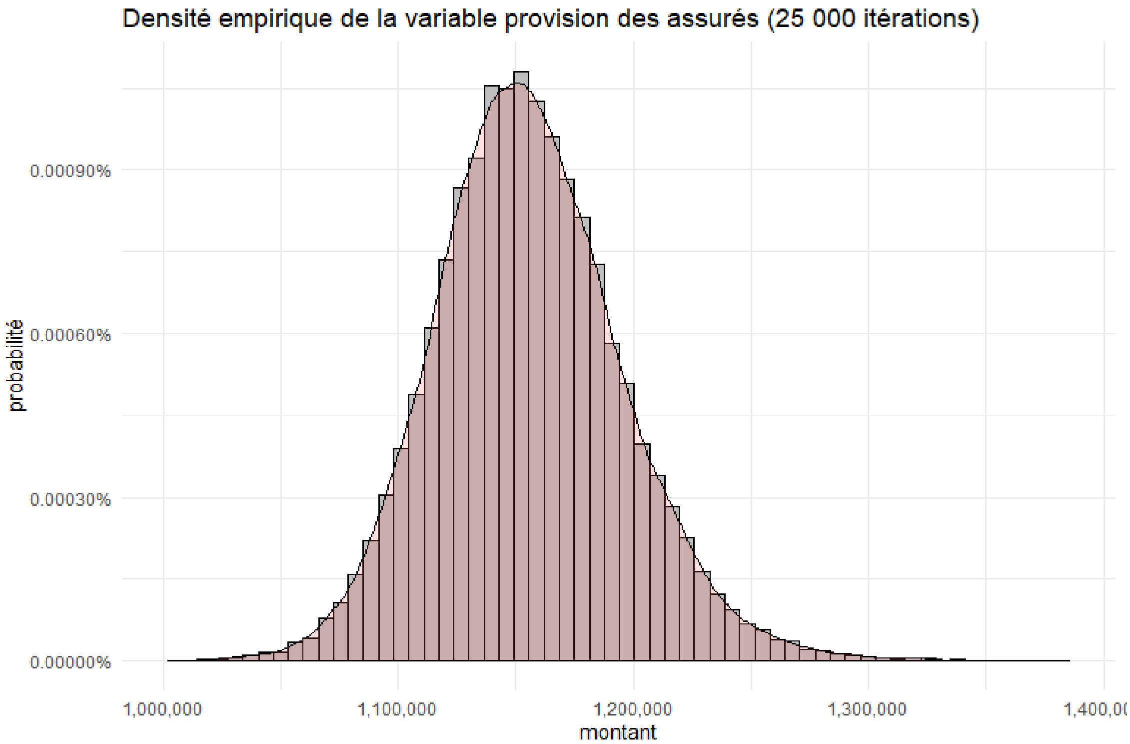
Soit le triangle de règlements cumulés des remboursements effectués aux assurés suivant :

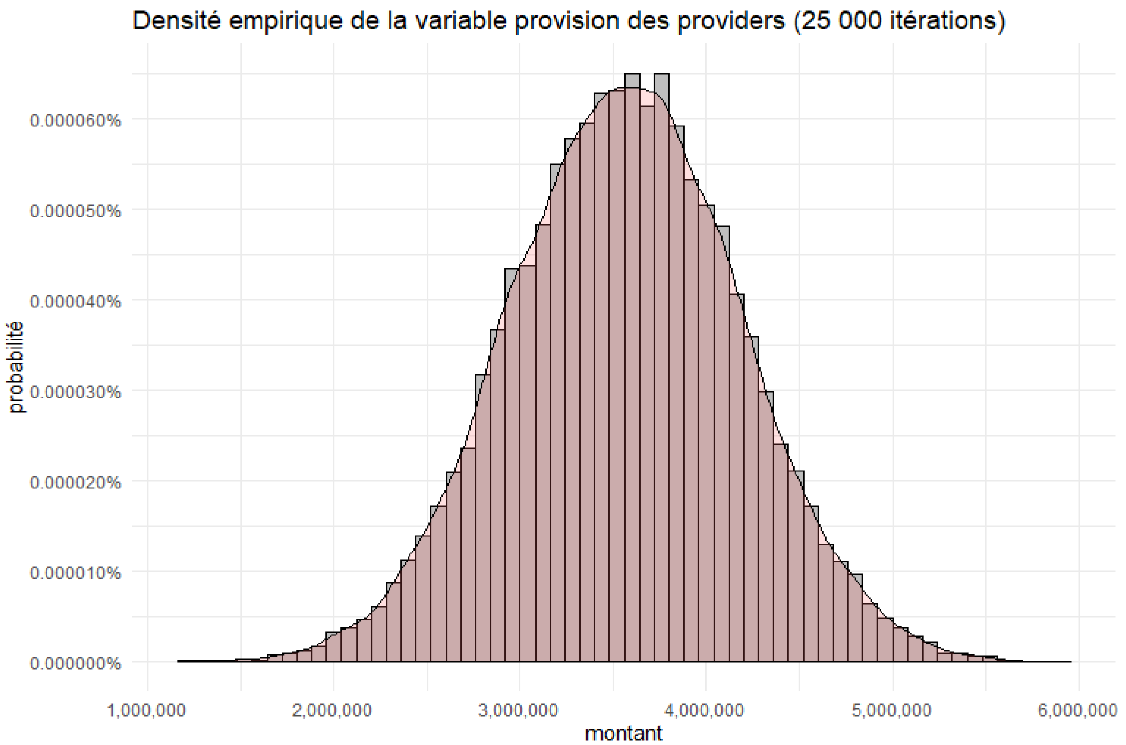
Survenances		Deroulement							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	...	...	**22**	**23**	**24**
2017	**1**	176 981	287 446	350 006	. . .	. . .	549 577	549 967	550 551
2017	**2**	163754	255 692	315 795	. . .	. . .	463 280	463 740	
2017	**3**	186 286	301 177	352 945	. . .	. . .	531 013		
...	**...**	...	...	...	...	...			
...	**...**	...	...	...	...	...			
2018	**10**	231 146	336 556	396 486					
2018	**11**	237 230	328 297						
2018	**12**	229 692							

Et le triangle de règlements cumulés des remboursements effectués aux Providers suivant :

Survenances		Deroulement							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	...	...	**34**	**35**	**36**
2017	**1**	25 032	80 310	113 479	. . .	. . .	170 307	170 336	170 386
2017	**2**	38 077	77 095	112 698	. . .	. . .	165 052	165 052	
2017	**3**	25 427	76 389	101 512	. . .	. . .	157 275		
...	**...**	...	...	...	...	...			
...	**...**	...	...	...	...	...			
2019	**10**	283 263	648 594	827 306					
2019	**11**	325 881	641 719						
2019	**12**	229 992							

On se propose d'effectuer directement 25 000 itérations . On obtient donc les distributions empiriques suivantes :





Visuellement, nous supposons que ces deux distributions suivent une loi normale. Par contre , effectuons un test de normalité de cet echantillon à l'aide du test de Kolmogorov-Smirnov .

```
> ks.test(X25000assures$échantillon,"pnorm",mean(X25000assures$échantillon),sd(X25000assures$échantillon))

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  X25000assures$échantillon
D = 0.023737, p-value = 1.164e-12
alternative hypothesis: two-sided

> ks.test(X25000Providers$échantillon,"pnorm",mean(X25000Providers$échantillon),sd(X25000Providers$échantillon))

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  X25000Providers$échantillon
D = 0.18805, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: two-sided
```

Les 2 test nous fournissent des p-values faibles . Les hypothèses de normalité supposées peuvent donc etres confirmées.
On peut aussi constater que , plus le nombre d'itérations est élevé , la p-value devient tres faible , et la densité empirique se rapproche de la densité théorique .

Calculons l'intervalle de confiance, la VaR et la TVaR en utilisant ces deux échantillons de 25 000 itérations des variables de provisions obtenues avec un niveau de confiance de 95%.

Assurés						
	Moyenne	**Ecart type**	**ICinf**	**ICsup**	**VaR**	**TVaR**
Montants	**1 155 263**	**39 768**	**1 089 850**	**1 220 675**	**1 220 675**	**1 237 291**

Providers						
	Moyenne	**Ecart type**	**ICinf**	**ICsup**	**VaR**	**TVaR**
Montants	**3 563 220**	**616 017**	**2 549 962**	**4 576 477**	**4 576 477**	**4 833 861**

Conclusion générale

La nécessité, pour un courtier ayant acquis une certaine expérience sur le marché de l'assurance santé pour expatriés, de se doter d'outils de modélisation des prestations futures est primordiale. En effet, ces outils permettent d'avoir une visibilité plus claire de sa sinistralité future, de piloter au mieux leur portefeuille, et permettent également de challenger le niveau de provisionnement de l'assureur.

Au vu du constat de la forte demande depuis plusieurs années sur le marché de l'asurance pour expatriés, l'objectif de ce stage a été d'améliorer l'existant en ce qui concerne les méthodes de constitutions des montants de provisions au sein de MSH International.

Pour se faire, les différentes méthodes de calcul des provisions techniques connues du marché furent presentées, suivi de leur application sur le compte d'assurance santé pour expatriés de MSH International tout en se focalisant sur une variable significative qu'est la nature de l'Encaisseur (assurés / providers).

Ces méthodes sont variées, elles ne répondent pas toutes au même objectif. Parmi les méthodes déterministes, la méthode de Chain Ladder est celle qui est la plus utilisée par sa simplicité mais elle n'est pas la plus adaptée dans tous les cas car les hypothèses sous-jacentes ne sont pas vérifiées par tous les triangles de règlements. Dans ces cas, il faut alors s'orienter vers une autre méthode, comme celle de London Chain dont les hypothèses sont moins contraignantes. Toutefois, aucune de ces deux méthodes déterministes ne permet d'évaluer la volatilité des provisions, c'est pourquoi on fait alors appel aux méthodes stochastiques tel que le modèle de Mack et la méthode de Bootstrap. Le modèle de Mack est le plus simple à mettre en oeuvre, mais, de même que pour la méthode de Chain Ladder, les hypothèses sous-jacentes peuvent ne pas être vérifiées. La méthode du Boostrap, quant à elle, ne souffre pas de ces contraintes, mais est beaucoup plus difficile à mettre en oeuvre.
Les méthodes stochastiques ne doivent pas être utilisées par réflexe, on doit aussi préférer mettre en oeuvre des méthodes plus simples et moins coûteuses en temps quand cela est possible.

Au final, Je suis très satisfait de ce stage de fin d'études effectué au sein de la Direction Technique de MSH International, qui fût ma première expérience professionnelle dans le monde du courtage en assurance, et qui m'a permis de travailler sur un sujet aussi interessant que celui-ci.

Bibliographie

[1] Clémence MICHAUD , *La mesure du risque de provisionnement à horizon un an en assurance non-vie,* ISFA , 2012

[2] LE TUAN Anh , *Les méthodes de provisionnement en assurance non-vie* , ISFA

[3] Thomas CAMBARROT , *Provisionnement non-vie , Le modèle de poisson sur-dispersé* , ISFA , 2009

[4] Jean-Baptiste CROGUENNEC , *MÉTHODES DE CALCUL DES PROVISIONS TECHNIQUES EN PRÉVOYANCE ARRÊT DE TRAVAIL* , EURIA ,2009

[5] SAUVET Clélia , *Quelle modélisation stochastique des provisions techniques prévoyance et non-vie ?* , ISFA, 2006

[6] MONTANT Eni Walley , *Évaluation des IBNR en assurance non-vie : étude d'une méthode alternative* , EURIA, 2008

[7] Hélène COMPAIN , *Analyse du risque de provisionnement non-vie dans le cadre de la réforme Solvabilité II* , Université Paris Dauphine, 2010

[8] Pierre MARJOLLET, *Nouvelles approches en tarification de produits santé pour expatriés* , ISFA, 2020

[9] Lucie MARFOQ *Evaluation des provisions techniques en réassurance IARD, dans le cadre de solvabilité 2* , Université Paris Dauphine, 2011

[10] Ahmed Tidiane DIOMANDE *Tarification de garanties santé liées à un portefeuille d'expatriés* , ISFA

[11] Ilan HABIB, Stéphane RIBAN , *Quelle méthode de provisionnement pour des engagements non-vie dans Solvabilité 2 ?*, ENSAE , 2012

[12] Loup Ortiz, *Eléments d'Intelligence Artificielle faible en Provisionnement Non-Vie* , 2019

[13] Ministère des Affaires Étrangère. Rapport du gouvernement sur la situation des français établis hors de france, 2017.

[14] CHARPENTIER Arthur, DENUIT Michel *Mathématiques de l'Assurance Non Vie Tarification et provisionnement,* Economica, 2005

[15] MACK Thomas, *Distribution-free calculation of the standard error of Chain Ladder reserve estimates , ASTIN bulletin vol. 23,* 1993

[16] Anne MARION , *Provisions pour risques croissants en santé* ,2008

[17] SEABIRD , *Provisionnement sous contrainte Covid-19 : la piste Berquist-Sherman*, Juillet 2020

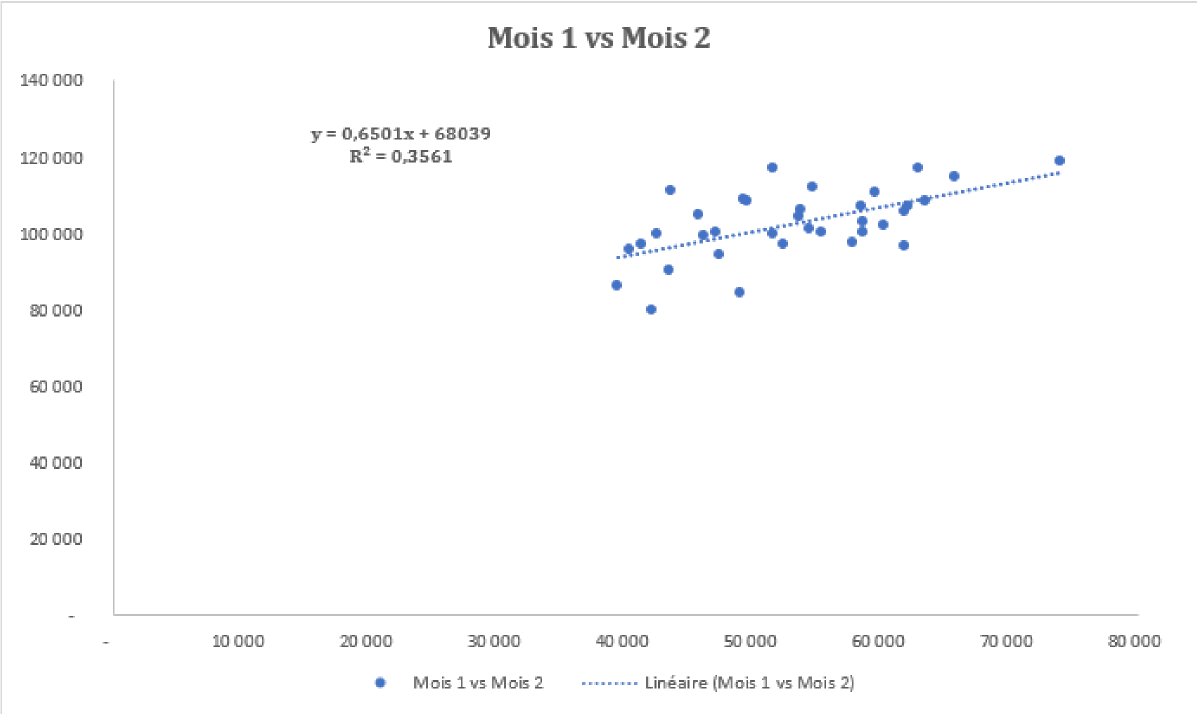
Annexes

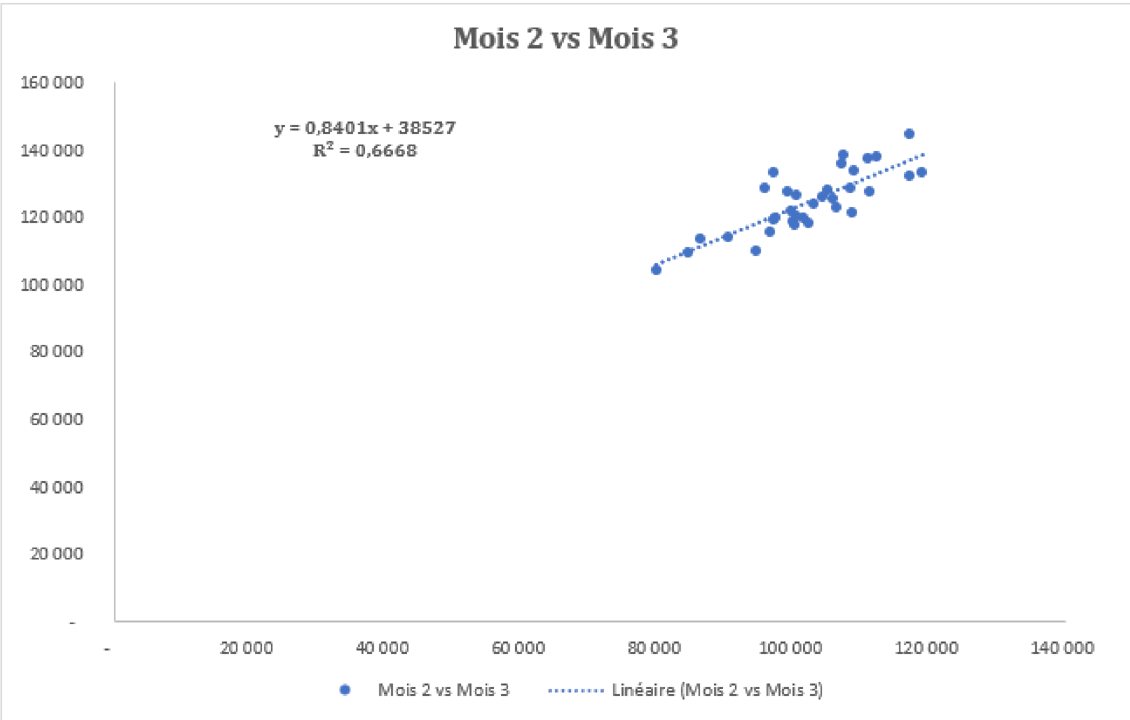
Annexe 1 : Vérification de l'hypothèse de cadence régulière des règlements

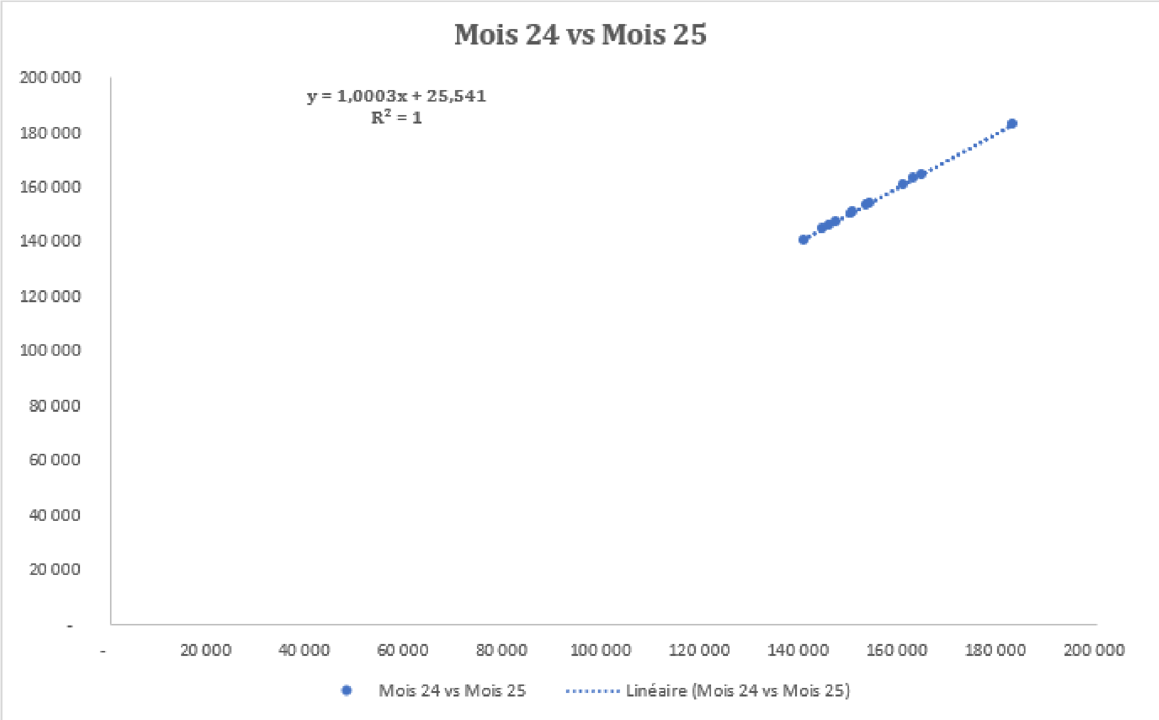
Commençons par rappeler le triangle des montants cumulés du poste médical "Pharmacie" utilisé dans l'application numérique des différentes méthodes :

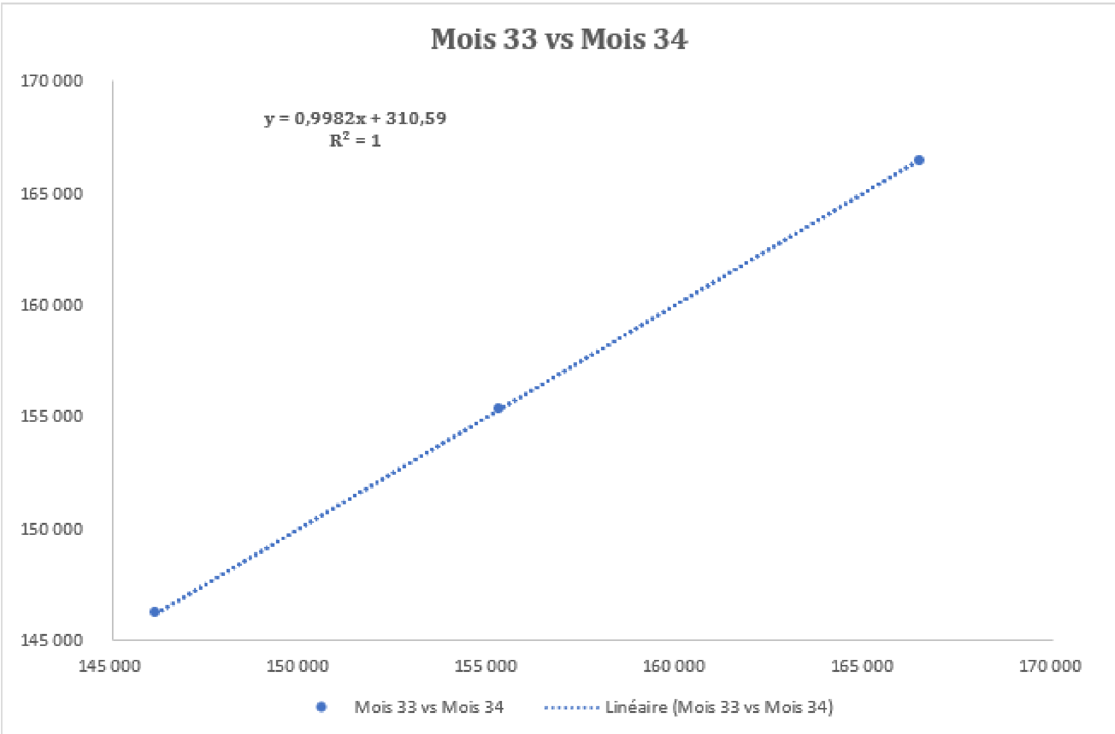
Survenances		**Deroulement**							
Années	**Mois**	**1**	**2**	**3**	...	...	**34**	**35**	**36**
2017	**1**	49 490	108 533	120 886	...	...	146 183	146 197	146 221
2017	**2**	63 334	108 455	128 542	...	...	155 293	155 314	
2017	**3**	51 507	117 173	132 080	...	...	166 458		
...	**...**	...	...	...	...	...			
...	**...**	...	...	...	...	...			
2019	**10**	73 920	118 901	133 257					
2019	**11**	65 654	114 712						
2019	**12**	67 124							

La méthode de Chain Ladder et le modèle de Mack reposent notamment sur l'hypothèse que la cadence des règlements est régulière. Vérifions donc que, pour chaque mois de développement j, les points de coordonnées $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ sont sensiblement alignés sur une droite de régression contrainte passant par l'origine.


Mois 1 vs Mois 2
y = 0,6501x + 68039
R² = 0,3561
140 000
120 000
100 000
80 000
60 000
40 000
20 000
-
10 000
20 000
30 000
40 000
50 000
60 000
70 000
80 000
Mois 1 vs Mois 2
Linéaire (Mois 1 vs Mois 2)


Mois 2 vs Mois 3
y = 0,8401x + 38527
R² = 0,6668
160 000
140 000
120 000
100 000
80 000
60 000
40 000
20 000
-
20 000
40 000
60 000
80 000
100 000
120 000
140 000
Mois 2 vs Mois 3
Linéaire (Mois 2 vs Mois 3)





Il n'est pas nécessaire de tracer la droite de régression pour les derniers mois de développement j=36 car on n'a que le point $(C_{1,35}, C_{1,36})$ à placer, et la droite de régression contrainte passe par ce point et par l'origine.

Annexe 2 : MÉTHODE DE LONDON CHAIN : Solution de l'équation des moindres carrés

L'équation des moindres carrés à résoudre pour estimer les coefficients λ_j et α_j pour $j \in \{1, ..., n-1\}$ est :

$$(\hat{\lambda}_j, \hat{\alpha}_j) = argmin\{\sum_{i=1}^{n-j}(C_{i,j+1} - \lambda_j * C_{i,j} - \alpha_j)^2\}.$$

<u>Premier cas :</u> $j \in \{1, ..., n-2\}$

La somme atteint sa valeur minimum lorsque les dérivées partielles par rapport à λ_j et α_j pour $j \in \{1, ..., n-1\}$ sont nulles :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \lambda_j}(\sum_{i=1}^{n-j}(C_{i,j+1} - \lambda_j * C_{i,j} - \alpha_j)^2) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_j}(\sum_{i=1}^{n-j}(C_{i,j+1} - \lambda_j * C_{i,j} - \alpha_j)^2) & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n-j} -2 * C_{i,j} * (C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j * C_{i,j} - \hat{\alpha}_j) & = 0 \\ \sum_{i=1}^{n-j} -2 * (C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j * C_{i,j} - \hat{\alpha}_j) & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n-j}(C_{i,j} * C_{i,j+1}) - \hat{\lambda}_j * \sum_{i=1}^{n-j}(C_{i,j}^2) - \hat{\alpha}_j * \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} & = 0 \\ \sum_{i=1}^{n-j} \hat{\alpha}_j = \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j * \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \end{cases}$$

Dans la seconde équation, $\hat{\alpha}_j$ est indépendant de i , donc $\sum_{i=1}^{n-j} \hat{\alpha}_j = (n-j) * \hat{\alpha}_j$.

Posons $\bar{C}_j^{(j)} = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}$ et $\bar{C}_{j+1}^{(j)} = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}$. On obtient alors :

$$\hat{\alpha}_j = \bar{C}_{j+1}^{(j)} - \hat{\lambda}_j * \bar{C}_j^{(j)}$$

pour $j \in \{1, ..., n-1\}$.

On remplace donc par son expression dans la première équation :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j}(C_{i,j} * C_{i,j+1}) - \bar{C_j^{(j)}} * \bar{C_{j+1}^{(j)}}}{\frac{1}{n-j}\sum_{i=1}^{n-j}(C_{i,j}^2) - (\bar{C_j^{(j)}})^2}$$

Pour tout $j \in \{1, ..., n-2\}$
Second cas : $j = n-1$

L'équation à résoudre est alors la suivante :

$$(\hat{\lambda}_{n-1}, \hat{\alpha}_{n-1}) = argmin(C_{1,n} - \lambda_{n-1} * C_{1,n-1} - \alpha_{n-1})^2$$

Le minimum est atteint lorsque les dérivées partielles par rapport à λ_{n-1} et α_{n-1} sont nulles :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \lambda_{n-1}}((C_{1,n} - \lambda_{n-1} * C_{1,n-1} - \alpha_{n-1})^2) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_{n-1}}((C_{1,n} - \lambda_{n-1} * C_{1,n-1} - \alpha_{n-1})^2) & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 * C_{i,n-1} * (C_{1,n} - \hat{\lambda_{n-1}} * C_{1,n-1} - \hat{\alpha_{n-1}}) & = 0 \\ -2 * (C_{1,n} - \hat{\lambda_{n-1}} * C_{1,n-1} - \hat{\alpha_{n-1}}) & = 0 \end{cases}$$

Or $C_{i,n-1} \neq 0$

Nous avons donc une équation et deux inconnues, dont une infinité de solutions.
La plus simple des solutions est :

$$\hat{\lambda_{n-1}} = \frac{C_{1,n}}{C_{1,n-1}}$$

et

$$\hat{\alpha_{n-1}} = 0$$

Annexe 3 : MÉTHODE DE Chain Ladder : Code VBA

```
Public Sub ChainLadder()

' Declaration des differentes variables

Dim n As Integer

Dim i As Integer
Dim j As Integer

Dim lambda() As Double  'coefficients de passages

Dim somme1() As Double
Dim somme2() As Double

Dim C() As Double

Dim Ri() As Double  ' Reserves par mois de survenance
Dim R As Double  'Reserve totale

Dim TriangleCumule As Range  ' Triangle cumulé à prendre en entrée

Dim debut_triangle As Range   ' Récuperation de la cellule du debut du triangle


Set TriangleCumule = Application.InputBox("Sélectionner le triangle des montants cumulé


R = 0  ' Initialisation de la reserve à 0

n = TriangleCumule.Rows.Count

' Message d'erreur au cas où

If TriangleCumule.Columns.Count <> n Then
MsgBox ("Erreur de Dimension")

Exit Sub

End If
```

```
ReDim lambda(n - 1)
ReDim somme1(n - 1)
ReDim somme2(n - 1)
ReDim C(n, n)
ReDim Ri(n)


' Calcul des coeffients de développement

For j = 1 To n - 1

'initialisation des valeurs à 0

somme1(j) = 0
somme2(j) = 0

 For i = 1 To n - j
 somme1(j) = somme1(j) + TriangleCumule.Cells(i, j)
 somme2(j) = somme2(j) + TriangleCumule.Cells(i, j + 1)
 Next i

lambda(j) = somme2(j) / somme1(j)

Next j

' Completer la partie inferieure du triangle

For i = 1 To n
 For j = 1 To n - i + 1
 C(i, j) = TriangleCumule.Cells(i, j)
 Next j

Next i
For i = 2 To n
 For j = n - i + 2 To n
 C(i, j) = C(i, j - 1) * lambda(j - 1)
 Next j

Next i


      ' Calcul de la provision par mois de survenances et la reserve totale

      For i = 1 To n
      Ri(i) = C(i, n) - C(i, n - i + 1)
      R = R + Ri(i)
      Next i



' Affichage des résultats dans excel et mise en forme

Set debut_triangle = TriangleCumule.Cells(1, 1)
debut_triangle.Offset(n + 1, 0).Value = "Coefficients de passage """
debut_triangle.Offset(n + 4, 0).Value = "Triangle des règlements cumulés complété"
debut_triangle.Offset(n + 4, n + 1).Value = "Provision par mois"
debut_triangle.Offset(2 * n + 6, n + 1).Value = "Provision totale"

For j = 1 To n - 1

debut_triangle.Offset(n + 2, j - 1).Value = lambda(j)
debut_triangle.Offset(n + 2, j - 1).NumberFormat = "General"

Next j
```

```
For i = 1 To n

 For j = 1 To n

 debut_triangle.Offset(n + 4 + i, j - 1).Value = C(i, j)
 debut_triangle.Offset(n + 4 + i, j - 1).NumberFormat = "General"

 Next j

debut_triangle.Offset(n + 4 + i, n + 1).Value = Ri(i)
debut_triangle.Offset(n + 4 + i, n + 1).NumberFormat = "General"

Next i
debut_triangle.Offset(2 * n + 7, n + 1).Value = R
debut_triangle.Offset(2 * n + 7, n + 1).NumberFormat = "General"


End Sub
```