

Mémoire présenté devant
l'UFR de Mathématique et Informatique
pour l'obtention du du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg
et l'admission à l'Institut des Actuaire

le 2 décembre 2021

Par : LENIAU Morgane

Titre: Prise en compte des déclarations tardives de décès dans l'évaluation des swaps de longévité sous Solvabilité II

Confidentialité : NON OUI Durée : 1 an 2 ans 3 ans 4 ans 5 ans

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Signature :

Membres du jury de l'Unistra :

Entreprise : Partner Re

P. ARTZNER

J. BERARD

A. COUSIN

K.-T. EISELE

M. MAUMY-BERTRAND

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Anna SAROVA

Signature : 

Invité :

Nom :

Signature :


Jury de l'Institut des
Actuaire :

M. KELLE VIGON

J. MODRY

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents
actuariels** (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise



Secrétariat : Mme Stéphanie Richard

Bibliothèque : Mme Christine Disdier

Signature du candidat



Remerciements

Je tiens, tout d'abord, à remercier le manager de mon équipe, James ALLISON pour m'avoir accordée du temps, ses conseils et sa confiance.

Par la même occasion, je souhaiterais remercier mon tuteur académique, Monsieur COUSIN Areski pour son suivi et ses recommandations.

Je tiens à également à adresser mes remerciements à l'ensemble des membres de l'équipe *Reserving-Longevity* pour leur accueil et leurs conseils ; et tout particulièrement à Anna SAROVA pour son expertise et ses recommandations. Je remercie également Stanislas BOYER pour son esprit critique et pour ses commentaires toujours pertinents.

Par la même occasion je souhaiterais remercier, Amine IBELHASSE et Hicham BOUKHARSA, des actuels d'autres équipes du département *Reserving*, qui se sont rendus disponibles à de multiples reprises pour répondre à mes questions et me faire part de leurs expertise et expérience.

Je voudrais également remercier tous les stagiaires et alternants du service *Life & Health – Reserving* pour leur soutien, leur camaraderie et leur jovialité. En particulier, je tiens à adresser mes remerciements à Lina TABET-AOUL pour son soutien moral et ses bavardages.

Qui plus est, je souhaite adresser mes remerciements à l'intégralité de l'équipe pédagogique de la formation du DUAS pour la qualité de l'enseignement transmis.

Je tiens également à remercier mes proches pour leur soutien moral et tout particulièrement Michel PADONOU pour sa précieuse relecture.

Enfin et surtout, je désire remercier ma mère pour son amour et son soutien sans faille pendant toutes mes études et encore plus pendant la rédaction de mon mémoire.

Résumé

Mots-clés : Solvabilité, *Best Estimate*, provisionnement, swaps de longévité, IBNR, rentes viagères, déclarations tardives, Schnieper, Parodi, Mack-Chain Ladder

Les réassureurs ont souvent une vision biaisée de l'évolution démographique des populations réassurées. En effet, il s'agit d'une conséquence de l'essence même de l'activité de réassurance qui implique que les informations soient relayées par un intermédiaire : la compagnie cédante. Ainsi, en général, les décès ne sont signalés aux compagnies de réassurance que quelques mois après leur survenance.

Selon la directive Solvabilité II, les provisions sont évaluées selon le principe du *Best Estimate* ; tous les comportements observables au cours de la vie du traité doivent donc être pris en compte. Ainsi, dans le provisionnement des swaps de longévité, il est primordial de pouvoir connaître ou, au moins, estimer la mortalité survenue au sein de la population rentière.

A ce jour, les modèles d'évaluation de swaps de longévité interprètent au pied de la lettre les informations transmises par la cédante sans considérer les éventuelles déclarations tardives de décès. Ceci engendre une surévaluation du besoin en capital lié au risque de longévité : le provisionnement tient compte d'engagements liés aux versements de rentes viagères à des polices qui sont, en réalité, déjà décédées.

Le nombre de décès survenus sera estimé à partir de la mortalité qui a déjà été déclarée au réassureur à l'aide de méthodes de prédiction non-vie. Des méthodes classiques de provisionnement telles que Mack-Chain Ladder, *bootstrap*-Chain Ladder et Schnieper seront confrontées à une approche de provisionnement individuel introduite par Parodi et proposant de s'affranchir des triangles de développement. Après avoir sélectionné le modèle le plus adapté au contexte étudié, ce mémoire abordera une réflexion sur la meilleure méthode de prise en compte des déclarations tardives de décès dans l'évaluation des swaps de longévité sous les réglementations Solvabilité II, en termes de praticité et de précision.

Abstract

Keywords: Solvency, Best Estimate, reserving, longevity swaps, IBNR, life annuities, late reporting, Schnieper, Parodi, Mack-Chain Ladder

Reinsurers often have a skewed view of the demographic evolution of the block of pensioners they reinsure. Indeed, it is an inevitable consequence of the activity of reinsurance as information is relayed by a middleman: the cedant. Thus, in general, deaths are only reported to the reinsurance company a few months after the occurrence.

Under Solvency II regulations, reserves are valued following the Best Estimate principle: consequently, all the observable behaviors of the contracts must be considered. Thus, when evaluating the Best Estimate reserves for longevity swaps, it is essential to, at least, be able to estimate the mortality among the beneficiaries.

To this day, in PartnerRe, valuation models for longevity swaps take the information relayed at face value without considering the potential late reporting. This causes an overestimation of the solvency capital requirement related to the longevity risk as the Best Estimate reserves level is too high - they take into account liabilities for the life annuities of policies that are already dead.

The number of deaths that have already occurred but are not yet reported is going to be estimated using the deaths that have already been reported. Usual non-life reserving methods such as Mack-Chain Ladder, bootstrap-Chain Ladder and Schnieper's approach will be compared to Parodi's method which does not involve any run-off triangles. After selecting the most appropriate technique, this thesis will be an opportunity to wonder how to best integrate the late reporting in the valuation process of longevity swaps under the Solvency II regulations.

Table des abréviations

AD : Anderson-Darling

AIC : *Akaike information criterion* (critère d'information d'Akaike)

BE : *Best Estimate*

BEL : *Best Estimate Liability*

BIC : *Bayesian information criterion* (critère d'information bayésien)

CDF : *Cumulative Distribution Function* (fonction de répartition)

CDR : *Claims Development Result*

CVM : Cramer Von Mises

GBP : *Great Britain Pound* (livre sterling)

i.i.d : indépendante et identiquement distribuée

KS : Kolmogorov-Smirnoff

MCR : *Minimum Capital Required* (minimum de capital requis)

mGBP : million de livres sterling

MLE : *Maximum likelihood estimator* (estimateur du maximum de vraisemblance)

MME : *Method of moments estimator* (estimateur de la méthode des moments)

MSEP : *Mean squared error of predictions* (erreur quadratique moyenne des prédictions)

NAV : *Net Asset Value* (actif net réévalué)

NPV : *Net Present Value* (valeur actuelle nette)

ONS : *Office for National Statistics* (institut officiel de statistiques britannique)

ORSA : *Own Risk and Solvency Assessment* (évaluation interne des risques de solvabilité)

RAFM : *Risk Agility Financial Modeler*

SCR : *Solvency Capital Requirement* (capital de solvabilité requis)

SSE : *Sum of squared estimate of errors* (somme des carrés des erreurs estimées)

VAP : Valeur Actuelle Probable

VA : Valeur Actuelle

Table des matières

Remerciements	3
Résumé	4
Abstract.....	5
Table des abréviations	6
Note de synthèse	10
<i>Executive summary</i>	17
Introduction	24
Chapitre 1 – Cadre de l'étude	26
1.1 – Contexte règlementaire de l'étude : la directive Solvabilité II.....	26
1.1.1 Présentation de la réforme Solvabilité II	26
1.1.2 Pilier I : les exigences quantitatives	26
1.1.3 Capital de solvabilité requis (SCR).....	28
1.1.4 <i>Best Estimate Liability</i>	30
1.2 – Besoin de couverture du risque de longévité	31
1.2.1 Le risque de longévité	31
1.2.2 Les sources du besoin de couverture du risque de longévité.....	31
1.3 – Couverture du risque de longévité par un swap de longévité.....	33
1.3.1 Méthodes de transfert du risque de longévité	33
1.3.2 Principe de la couverture du risque de longévité par un swap de longévité	34
1.3.3 Fonctionnement des swaps de longévité	35
1.3.4 Intérêt de la couverture par un swap de longévité	35
1.4 – Les décès déclarés tardivement.....	36
1.4.1 Définition et impact sur l'évaluation des swaps de longévité	36
1.4.2 Comparaison avec les provisions IBNR	37
1.4.3 Lien avec les méthodes de provisionnement non-vie	38
1.5 – Présentation des données.....	38
Chapitre 2 – Les méthodes de provisionnement par triangularisation.....	42
2.1 – Triangle de développement	42
2.2 – Chain Ladder	42
2.2.1 Principe de la méthode	42
2.2.2 Hypothèses et méthodes de validation	43
2.2.3 Résultats.....	44
2.2.4 Avantages et limites.....	45

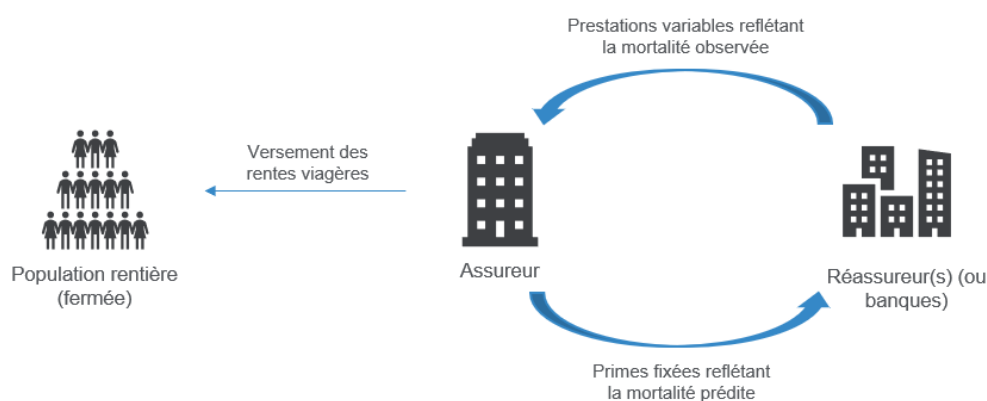
2.3 – Mack.....	46
2.3.1 Principe de la méthode	46
2.3.2 Hypothèses et méthodes de validation	46
2.3.3 Résultats.....	47
2.3.4 Avantages et limites.....	48
2.4 – <i>Bootstrap</i>	49
2.4.1 Présentation et hypothèse fondamentale	49
2.4.2 Etapes de la méthode <i>bootstrap</i>	49
2.4.3 Avantages et limites.....	51
2.5 – Modèle de Schnieper	52
2.5.1 Présentation du modèle.....	52
2.5.2 Hypothèses et méthodes de validation	53
2.5.3 Résultats.....	53
2.5.4 Avantages et limites.....	54
2.6 – Application des méthodes de provisionnement classiques.....	55
2.6.1 Chain Ladder : validation des hypothèses	55
2.6.2 Méthode de Mack : validation des hypothèses et résultats	58
2.6.3 <i>Bootstrap</i> : résultats.....	60
2.6.4 Méthode de Schnieper : validation des hypothèses et résultats	61
2.6.5 Comparaison des résultats.....	63
Chapitre 3 – L’approche Pietro Parodi.....	65
3.1 – Principe de l’approche Parodi	65
3.1.1 Limites des méthodes de provisionnement par triangularisation.....	65
3.1.2 Présentation de l’approche de Pietro Parodi.....	65
3.1.3 Lien avec l’étude	66
3.2 – Méthodes de calibrage à une loi.....	66
3.2.1 Analyse graphique et statistiques descriptives.....	66
3.2.2 Méthodes d’estimation paramétrique	67
3.2.3 Critères de sélection de lois	68
3.3 – Modélisation des délais de déclaration	70
3.3.1 Analyse statistique et ajustement	70
3.3.2 Qualité et incertitude du calibrage de la loi choisie	73
3.3.3 Correction du biais	75
3.4 – Estimation du nombre de déclarations tardives à l’ultime.....	77
3.4.1 Interprétation géométrique de la formule d’estimation du nombre de déclarations tardives	77

3.4.2 Cadre discret	79
3.4.3 Mesure de l'incertitude par période de survenance	79
3.4.4 Résultats et commentaires	80
3.4.5 Comparaison des résultats avec les méthodes classiques.....	81
3.5 – Modélisation du nombre de déclarations tardives.....	82
3.5.1 Les lois candidates	82
3.5.2 Sélection de la loi et qualité du calibrage	83
3.6 – Avantages et limites de l'approche Parodi	85
Chapitre 4 – Critères de sélection du modèle	86
4.1 – Les mesures d'incertitude	86
4.1.1 Mesure d'incertitude à une période	86
4.1.2 Mesure d'incertitude à un an	87
4.1.3 Mesure d'incertitude à l'ultime	88
4.2 – <i>Backtesting</i> : une mesure de sélection du modèle relative aux données historiques	88
4.3 – Conclusion.....	90
Chapitre 5 – Implémentation dans l'évaluation sous Solvabilité II.....	91
5.1 – Choix de modélisation.....	91
5.1.1 Ajustement pour déclarations tardives	91
5.1.2 Approche employant des <i>model points</i>	92
5.1.3 Approche simplifiée	93
5.1.4 Résultats et sensibilité à la méthode de provisionnement.....	94
5.2 – Impact sur l'évaluation des swaps de longévité sous Solvabilité II.....	96
5.2.1 Impact sur le niveau des provisions <i>Best Estimate</i>	96
5.2.2 Impact sur le <i>SCRlongévité</i>	97
5.2.3 Impact sur l'évaluation des passifs du bilan prudentiel.....	100
Conclusion	101
Bibliographie	103
Table des figures	105
Annexe 1 : Test d'absence d'effet calendaire	108
Annexe 2 : Test de corrélation entre facteurs de développement individuels	110
Annexe 3 : Version stochastique du modèle de Schnieper	111
Annexe 4 : Qualité prédictive du modèle de Schnieper	115
Annexe 5 : Calcul de l'exigence de capital du risque de souscription vie : le <i>SCRlife</i>	116
Annexe 6 : Calcul du minimum de capital requis : le MCR	117
Annexe 7 : Calcul de la marge de risque selon la formule standard.....	117

Note de synthèse

Sous la directive Solvabilité II, l'évaluation des swaps de longévité implique que le calcul des provisions repose sur le principe du *Best Estimate*. Ce principe du *Best Estimate* veut que les projections reflètent au plus près la réalité de la vie du contrat. L'intégralité des comportements observables doit donc être pris en compte dans l'évaluation. Qui plus est, le niveau des provisions *Best Estimate* influe sur le calcul de l'exigence de capital à détenir pour garantir la solvabilité selon les réglementations Solvabilité II, et plus globalement sur l'évaluation des passifs.

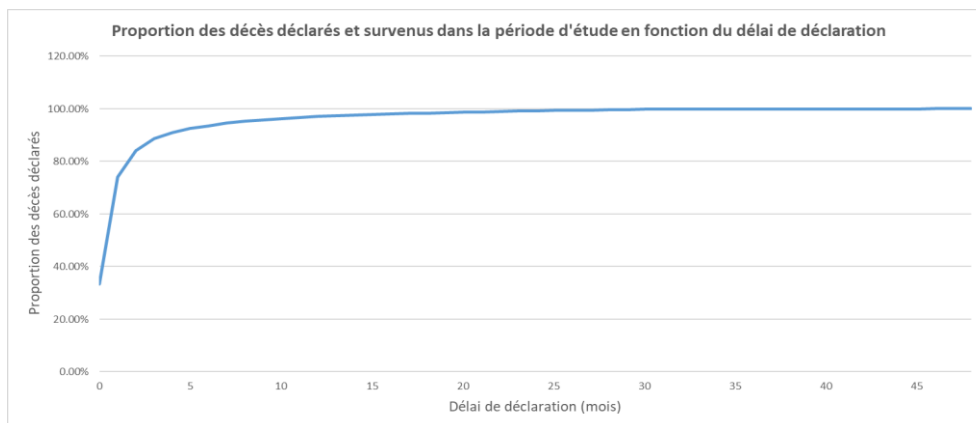
Les swaps de longévité sont des traités de réassurance permettant à une compagnie cédante de transférer son risque de longévité en cédant la mortalité observée au sein d'une population bénéficiaire de rentes viagères contre le paiement de primes dont le montant a été prédéterminé pour refléter la mortalité prédite.



Principe du transfert de risque de longévité par un swap de longévité

L'essence même de l'activité du réassureur implique que les informations relatives à la mortalité observée soient relayées par la compagnie cédante seulement après que celle-ci y ait accès. Par conséquent, il est courant que le réassureur ait une vision biaisée de l'évolution de la population rentière réassurée.

L'évolution démographique **connue** est communiquée mensuellement au(x) réassureur(s) par la compagnie cédante via des « bordereaux ». Toutefois, il est courant que les décès ne soient déclarés que quelques mois après la survenance.



Proportion des décès déclarés et survenus dans la période d'étude

Chez PartnerRe, les modèles de projection des flux de prestations à verser interprètent au pied de la lettre les informations transmises par les bordereaux. Ainsi, des capitaux sont mobilisés pour le provisionnement d'engagements liés à des rentes viagères dont les bénéficiaires sont, en réalité, déjà décédés. Par conséquent, la non prise en compte des déclarations tardives de décès engendre un sur-provisionnement.

Ce mémoire propose de se poser la question suivante : « Comment prendre en compte les déclarations tardives de décès dans l'évaluation des swaps de longévité sous Solvabilité II ? ».

Des méthodes classiques de provisionnement pour sinistres d'assurance non-vie seront employées. En effet, l'étude de l'impact de déclarations tardives sur le provisionnement s'apparente à la constitution de provisions IBNR. Néanmoins, si en général, le provisionnement gonfle le niveau des provisions pour sinistres ; ici, la prise en compte des déclarations tardives permettra de réduire les provisions techniques.

Après avoir présenté le contexte du mémoire, la première partie de l'étude a consisté en l'estimation du nombre de décès survenus mais non encore déclarés, dans un premier temps, à l'aide de méthodes de provisionnement classiques employant des triangles de développement puis à l'aide d'une méthode de provisionnement individuel permettant de s'affranchir de ces triangles. Le mémoire s'est poursuivi en la sélection du modèle de provisionnement le plus adapté au contexte selon plusieurs critères. Après s'être interrogé sur la meilleure manière de prendre en compte les déclarations tardives de décès dans l'évaluation sous Solvabilité II, la dernière partie de ce mémoire a permis la mesure des impacts sur l'évaluation des passifs du bilan prudentiel.

I – Estimation du nombre de déclarations tardives

Méthodes de provisionnement classiques

Diverses méthodes de provisionnement par triangulation ont été employées :

1. La **méthode Chain Ladder** qui est l'approche la plus classique dans le provisionnement pour sinistres.
2. La **méthode de Mack**, version stochastique de Chain Ladder, qui permet une mesure de l'incertitude des prédictions à l'ultime.
3. La **méthode du bootstrap** : Il s'agit d'une méthode qui sera employée dans le but d'estimer la distribution suivie par le nombre de déclarations tardives attendu. Le principe de cette méthode est de créer un plus grand nombre de données à partir de celles disponibles par un rééchantillonnage par tirage aléatoire avec remise.
4. La **méthode de Schnieper** : Il s'agit là d'une méthode qui n'est pas très utilisée dans le monde professionnel. Elle est surtout adaptée à des situations où la survenance de déclarations tardives (IBNyR) est courante.

Cette méthode utilise deux triangles distincts : l'un permettant l'étude des IBNyR et l'autre celle des IBNeR. Dans le cadre de notre étude, le triangle IBNeR sera nul ; de manière évidente, les décès ne surviennent qu'une seule fois et aucune aggravation n'est possible.

Dans ce modèle, le fait que la prédiction du nombre de déclarations tardives dépende de l'exposition au risque permet de refléter une des spécificités de la couverture par swap de longévité : la population bénéficiaire est fermée, l'exposition au risque est donc globalement décroissante.

Une version stochastique de la méthode Schnieper introduite par Liu et Verrall en 2001 sera employée afin d'estimer l'erreur des estimations à l'ultime.

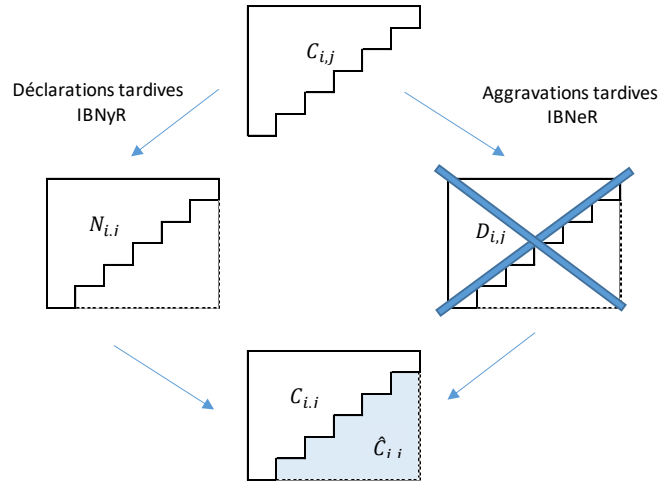
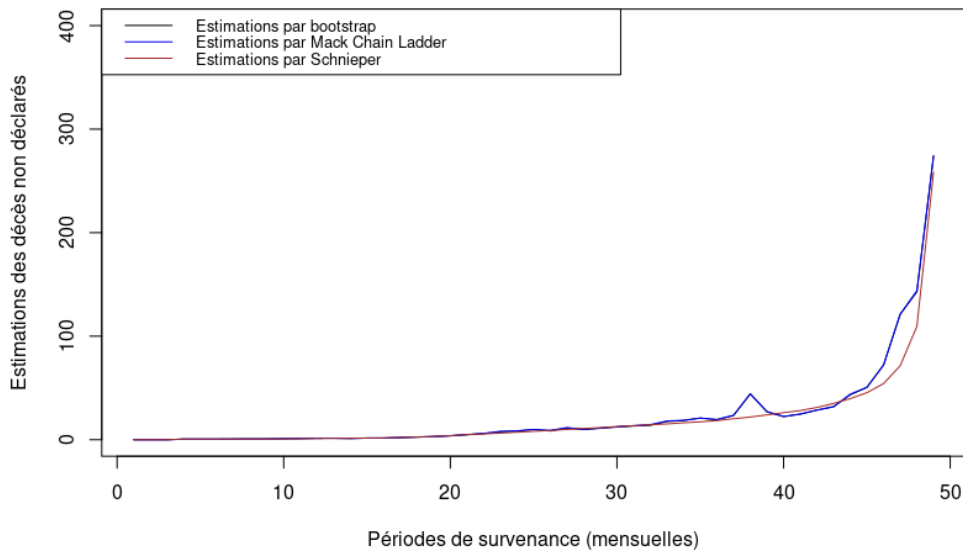


Illustration de la méthode Schnieper

Les résultats obtenus selon les différentes méthodes sont observables ci-dessous :

Comparaison des estimations du nombre de décès non déclarés par période de survénance



Comparaison des estimations du nombre de décès non déclarés par période de survénance (mensuelle)

Les erreurs d'estimation à l'ultime des prédictions peuvent être observées ci-dessous :

Méthode	Chain Ladder	Mack	Bootstrap	Schnieper
Estimation du nombre total de décès survenus non reportés	1 130,81	1 130,81	1 124,68	972,10
Erreur de prédiction (%)		9,31%	9,30%	12,98%

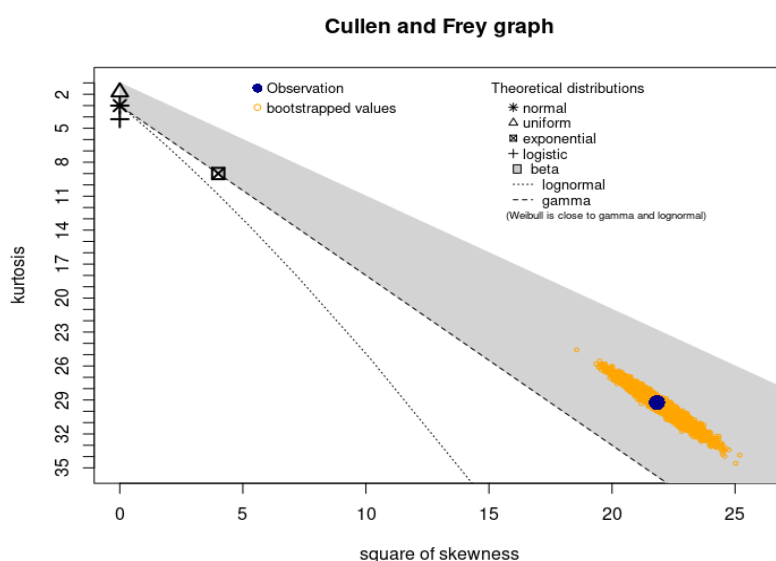
Comparaison des résultats des méthodes de provisionnement classiques

Méthode de provisionnement individuel introduite par Pietro Parodi

Pietro Parodi affirme que les méthodes nécessitant la compression des données dans un triangle de développement sont « inadéquates dans un contexte de modélisation précise de la distribution de la sinistralité tardive ».

Il propose alors une approche innovante sensée permettre l'amélioration des prédictions sans perte d'informations. Cette approche repose sur un modèle coût/fréquence des sinistres tardifs. Dans le cadre de l'étude, on se contentera d'estimer le nombre de décès déclarés tardivement en estimant la distribution des délais de déclarations puis celle du nombre de déclarations tardives.

Le graphique de Cullen & Frey et les statistiques descriptives suivantes ont permis de sélectionner la loi permettant le meilleur ajustement à l'échantillon de données étudié.



Graphique Cullen & Frey des délais de déclarations observés (jours)

Loi candidate	AIC	BIC	Statistique Kolmogorov-Smirnov	Statistique Cramer Von Mises	Statistique Anderson - Darling
Gamma	211 281,5	211 297,3	0,19	244,12	1 279,16
Log normale	202 160,2	202 176,0	0,11	65,92	374,63
Weibull	211 270,9	211 286,7	0,16	215,05	1 224,84

Comparaison des critères d'ajustement aux lois

Parmi les lois positives non bornées à droite, **la loi log-normale** a été jugée la plus adéquate.

La méthode d'estimation du maximum de vraisemblance a été sélectionnée selon les critères suivants comme étant la plus adaptée.

Méthode d'estimation paramétrique	AIC	BIC	Statistique Kolmogorov-Smirnov	Statistique Cramer Von Mises	Statistique Anderson - Darling
Maximum de vraisemblance	202 160,2	202 176,0	0,11	65,92	374,63
Méthode des moments			0,15	145,01	858,78

Choix de la méthode d'estimation paramétrique

Soit T : la variable aléatoire représentant le délai de déclaration d'un décès (jours).

Il a été supposé que T suive la distribution ci-dessous :

$$T \sim \mathcal{LN}(3,7769601 ; 0,8665308^2)$$

La distribution empirique des délais de déclaration présente un biais vers les délais de déclaration courts. En effet, l'échantillon utilisé pour notre étude ne présente que les délais de déclaration observés sur une fenêtre de 49 mois. De manière évidente, aucun délai de déclaration supérieur à cette période étudiée n'a pu être observé. Ce biais a donc été corrigé comme suit :

Soit :

- T_0 : la variable aléatoire représentant le jour de survenance du décès
- f_a : la fonction densité de la loi suivie par les délais de déclaration observés sur la période $[0; a]$
- f : la fonction densité de la loi suivie par les délais de déclaration (après correction du biais)
- r_t : nombre de décès déclarés et survenus pendant l'intervalle $[0; t]$ (a priori connu)
- μ_t : nombre de décès survenus pendant l'intervalle $[0; t]$ (inconnu)

On peut écrire :

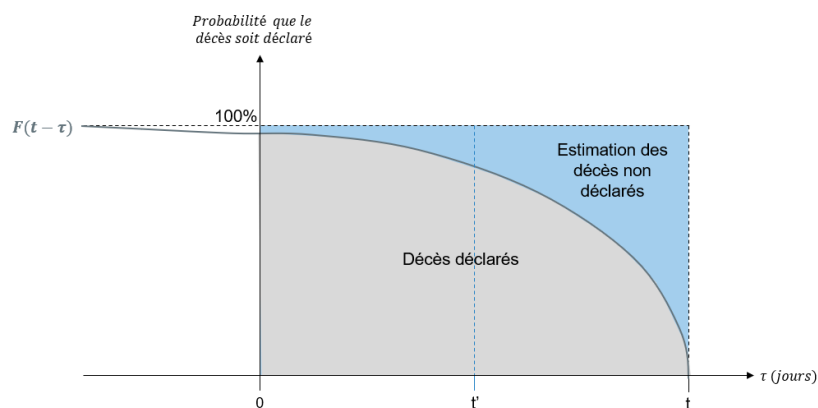
$$f_a(t) = \frac{\mathbb{P}(T + T_0 \leq a | T = t) \times \mathbb{P}(T = t)}{\mathbb{P}(T + T_0 \leq a)}$$

Après une hypothèse simplificatrice, l'égalité suivante est obtenue :

$$\forall t < a, f(t) = \frac{\mathbb{P}(T + T_0 \leq a) \times f_a(t)}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)}$$

La formule introduite par Parodi pour estimer le nombre de sinistres déclarés à une date d'évaluation t est la suivante :

$$\hat{\mu}_t = \frac{t}{\int_0^t F(t - \tau) d\tau} \times r_t$$

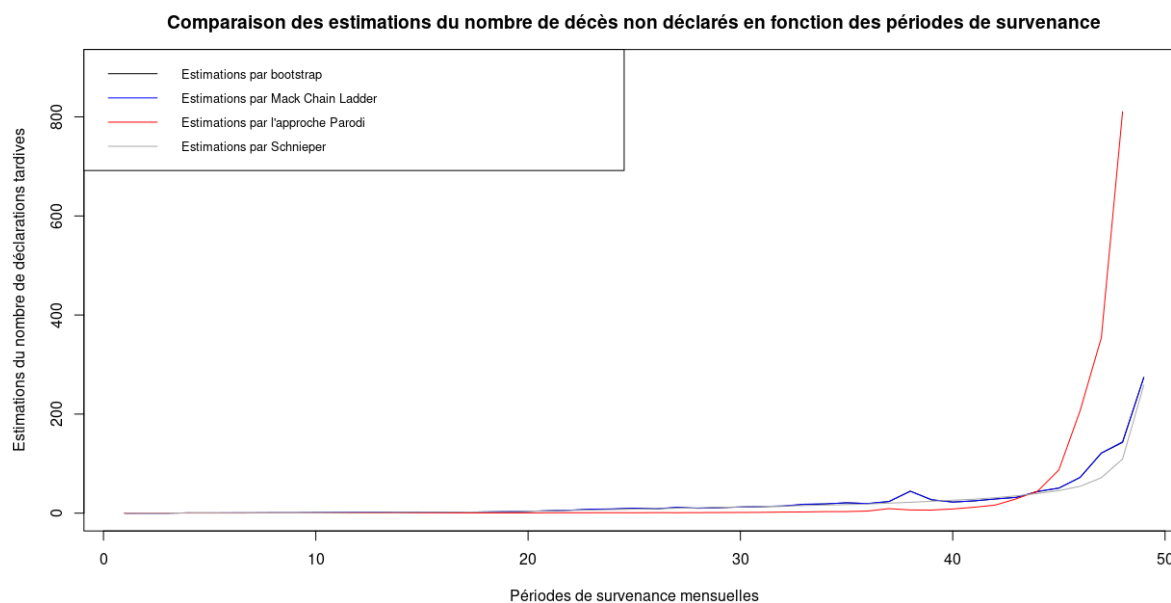


Interprétation géométrique de la formule d'estimation du nombre de déclarations tardives

Les estimations du nombre de déclarations tardives par période de survenance étant sur-dispersées, elles ont été calibrées par une loi binomiale négative avec les paramètres suivants :

$$X \sim \mathcal{NB}(r = 0,1439655 ; p = 0,004236009)$$

Choix de la méthode de provisionnement la plus adaptée au contexte



Comparaison des méthodes d'estimation du nombre de déclarations tardives par période de survenance (mensuelle)

Plusieurs critères ont été pris en compte dans la prise de décision du choix du modèle de provisionnement :

- Un critère de **backtesting** introduit par Denuit & Charpentier en 2005 : il souligne l'écart entre les prédictions faites par le modèle et les observations de nos données historiques.
- Une mesure d'**incertitude** des prédictions à l'**ultime**.
- Un critère d'**incertitude à une (ou plusieurs) période(s)** mesurant la variabilité des prédictions à l'ultime en fonction de l'information détenue.
- La **praticité** de la méthode. La méthode de provisionnement doit être assez simple à mettre en place pour être répliquée facilement.
- La **prudence** des estimations.

Méthode	Backtesting	Incertitude à l'ultime	Incertitude à 1 période	Incertitude à 2 périodes	Incertitude à 3 périodes	Incertitude à 4 périodes	Simplicité d'application	Prudence
Mack	1 515 865	105,30	5 917	4 975	3 547	3 505	++	+
Bootstrap	1 531 448	104,62	6 011	5 181	3 715	3 564	++	+
Schnieper	834 295	126,23	2 283	3 346	3 455	3 855	+	++
Parodi	✘	✘	29 534	46 981	57 787	64 060	-	-

Récapitulatif des critères de sélection du modèle de provisionnement

Les critères de sélection ont permis de **choisir d'adopter la méthode de provisionnement de Schnieper**.

II - Implémentation des déclarations tardives dans l'évaluation sous Solvabilité II

À une date d'évaluation t , l'engagement *Best Estimate* se calcule comme suivant :

$$BEL_t = VAP Prestations_t + VAP Frais_t - VA Primes_t$$

Où :

- $VAP Frais_t = \alpha \times VAP Prestations_t$
- α : une constante préfixée.

La prise en compte des délais de déclarations est traitée comme un ajustement :

$$VAP \widehat{Prestations}_{ajustée,t} = VAP Prestations_t - Ajustement \text{ pour } \widehat{déclarations tardives}_t$$

Par soucis de simplicité et de praticité, pour estimer l'ajustement à appliquer afin de prendre en compte les déclarations tardives, il a été choisi d'amplifier les engagements liés aux polices dont le décès a été déclaré.

Ainsi, en notant :

$VAP Prestations_{Décès déclarés,t}$: la VAP des prestations des polices dont les décès ont été déclarés pendant la dernière période (mensuelle).

On propose :

$$Ajustement \text{ pour } \widehat{déclarations tardives}_t = VAP Prestations_{Décès déclarés,t} \times \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \times \hat{\eta}_i$$

Où :

- ω_i : Proportion des décès survenus pendant la période i et déclarés
- $\hat{\eta}_i = \frac{C_{i,n-i-1}}{\hat{C}_{i,n-1}} - 1$

La prise en compte des déclarations tardives de décès dans l'évaluation d'un swap de longévité a eu l'impact suivant sur les provisions *Best Estimate* :

$BEL_{Mars 2021}$	$BEL_{ajusté,Mars 2021}$	Impact de l'ajustement
-154,32	-158,51	-2,71%

Impact de l'ajustement pour déclarations tardives sur les provisions Best Estimate (en mGBP)

Qui plus est, l'exigence de capital correspondant au sous-module « risque de longévité » a également été impactée :

$SCR_{Longévité,Mars 2021}$	$\widehat{SCR}_{Longévité,ajusté,Mars 2021}$	Impact de l'ajustement
64,93	64,45	-0,75%

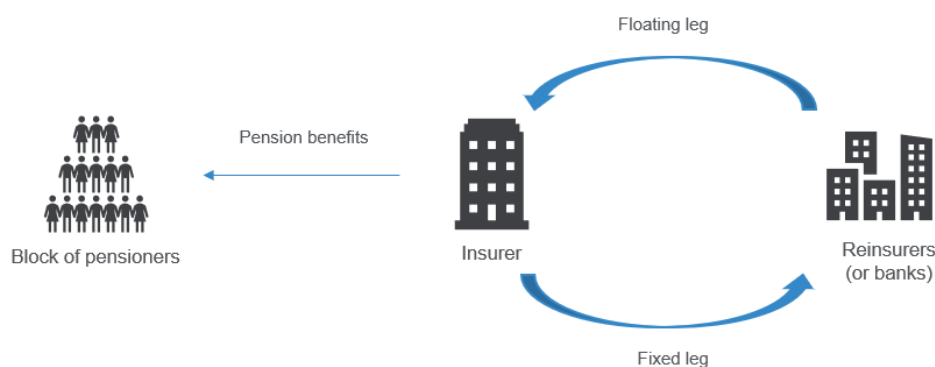
Impact de l'ajustement pour déclarations tardives sur le niveau du besoin en capital relatif au risque de longévité (en mGBP)

En somme, la prise en compte des déclarations tardives dans l'évaluation des swaps de longévité sous Solvabilité II a permis de réduire le niveau des capitaux immobilisés dans le but de respecter les exigences imposées par la directive Solvabilité II.

Executive summary

Under the Solvency II regulations, the calculations of the technical reserves are based on the “Best Estimate” principle. This principle suggests that the cashflow projections should best reflect the reality of the life of the contract. Therefore, all observable behaviors must be considered in the Best Estimate assessment. Furthermore, the Best Estimate reserves level affects the calculation of the solvency capital requirement and overall, the valuation of the liabilities under the Solvency II regulations.

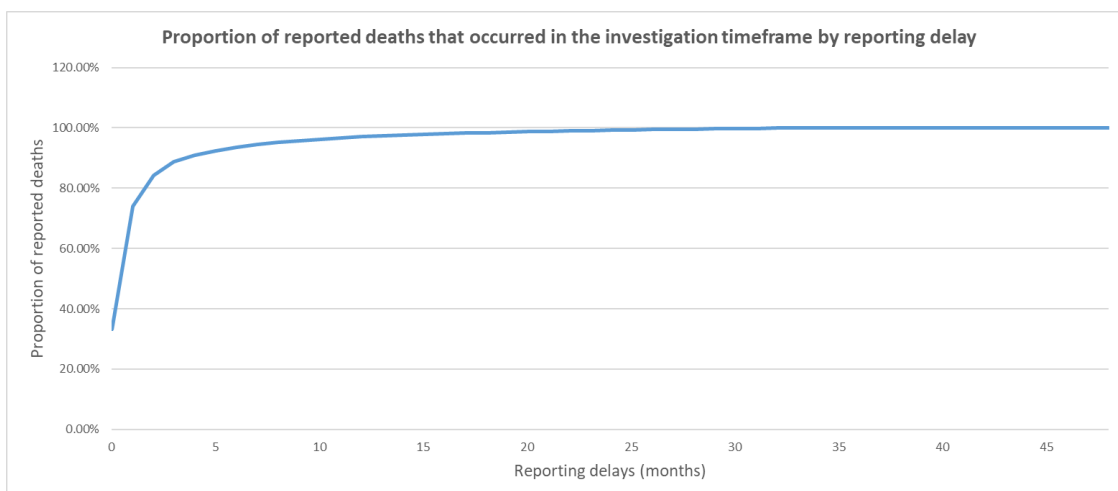
Longevity swaps are reinsurance treaties that allow the cedant to hedge their longevity risk by transferring to reinsurers the risk of pension scheme members living longer than expected. The reinsurers receive pre-determined premiums that reflect the expected mortality to accept this longevity risk and pay the underlying pension scheme benefits.



Longevity risk transfer via a longevity swap

The very essence of reinsurance implies that the information related to the observed mortality is conveyed by the cedant only after they have access to it. Consequently, it is common for a reinsurer to have a skewed view of the demographic movements that have occurred in the pensioners population.

The **known** demographic evolution is transmitted monthly to the reinsurers via bordereaux. Nevertheless, usually, deaths are reported a few months after the occurrence.



Proportion of reported deaths in the investigation timeframe by reporting delay

In PartnerRe, the projection models interpret the bordereaux at face value. Thus, the reserves consider liabilities for the benefits of some policies that are already dead: not taking late reporting into account causes over-reserving.

This thesis is the perfect opportunity to wonder how late reporting should be considered in the valuation process of longevity swaps under the Solvency II regulations.

Usual non-life reserving techniques will be applied as the impact of late reporting on valuation can be related to a very common non-life problematic: IBNR. Nonetheless, in non-life insurance, including IBNR generates an increase of the reserves, whereas, in this context, considering late reporting of deaths will lower the level of the technical reserves.

After introducing the context of the study, the first part of this thesis will consist of estimating the number of unreported deaths. Firstly, usual non-life reserving methods that involve run-off triangles will be used to estimate the number of unreported deaths. Secondly, a triangle-free reserving method introduced by Pietro Parodi will be applied. This thesis will then explain how to select the reserving method that is best fitted to the circumstances using multiple criterions. After discussing how to best consider late reporting in the Solvency II valuation of longevity swaps, the final part of this study will be an opportunity to measure the impact on the valuation of a specific treaty.

I – Estimation of the number of unreported deaths

Usual non-life reserving methods

Several reserving methods involving run-off triangles will be used:

1. **Chain Ladder's method:** The most common claim reserving method.
2. **Mack's method:** The stochastic version of Chain Ladder that can measure the variability of the estimations.
3. **Bootstrapping:** It is a technique used to obtain more information from a dataset by resampling it with replacement. The bootstrap method is also used to estimate the claim reserve distribution.
4. **Schnieper's method:** This method is often overlooked in the professional world. However, it is particularly suitable in situations where late reporting is common. This technique aims at separating IBNeR and IBNyR; thus, it requires two different run-off triangles. In this context, the triangle related to IBNeR will be full of zeros as a death can only occur once during a beneficiary's lifetime.

This approach links risk exposure to the predictions of the number of late reports which reflects a characteristic that is specific to longevity swaps: the annuitants are part of a closed off block; consequently, overall, the risk exposure decreases.

A stochastic version of this method introduced by Liu and Verrall in 2001 will also be used to estimate the ultimate prediction error from Schnieper's approach.

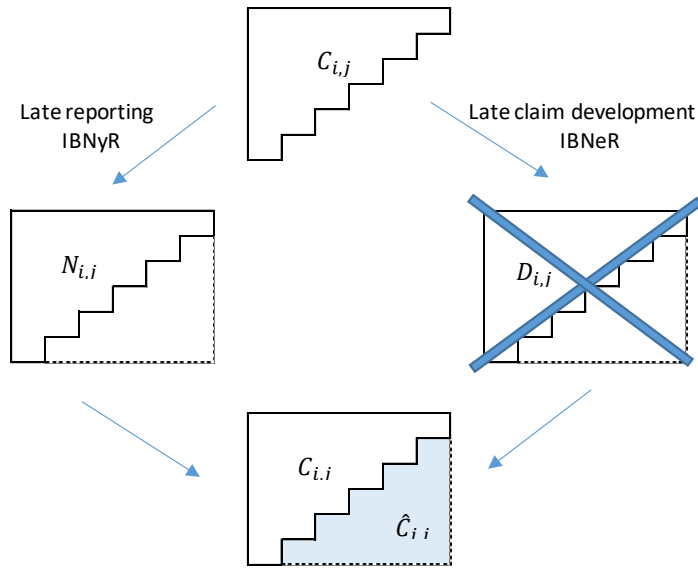
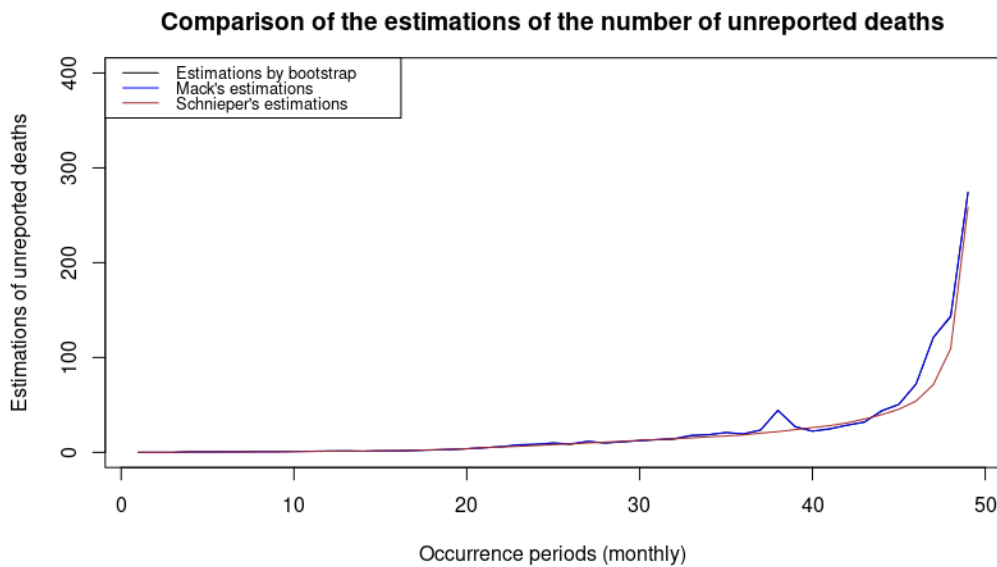


Illustration of Schnieper's methodology

The results from the different methods can be found thereafter:



Comparison of the estimated number of unreported deaths by occurrence period (monthly)

The ultimate prediction errors of the estimates are as follows:

Methods	Chain Ladder	Mack	Bootstrap	Schnieper
Number of unreported deaths estimation	1,130.81	1,130.81	1,124.68	972.10
Prediction error (%)		9.31%	9.30%	12.98%

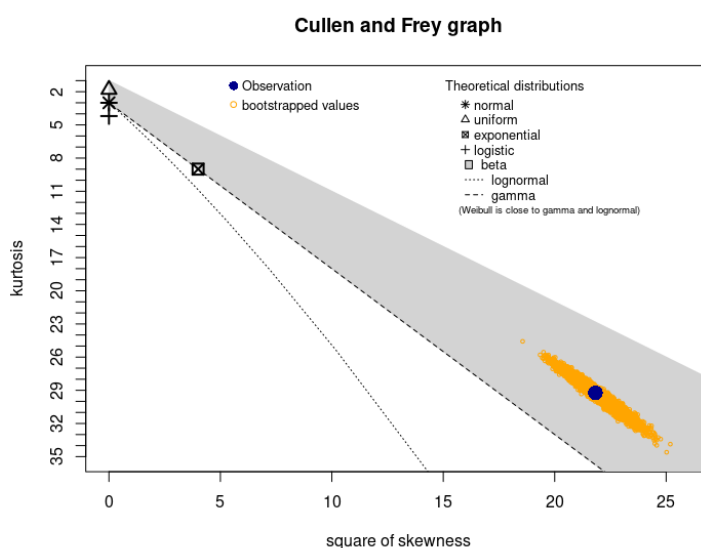
Comparison of the results from all the usual non-life reserving methods

Triangle-free reserving method introduced by Pietro Parodi

Pietro Parodi asserts that every technique “based on claims triangulations, no matter how sophisticated [...] are inherently inadequate to accurately model the distribution of reserves”.

Thus, he introduced a non-traditional framework for estimating the numbers of unreported deaths and the uncertainty of the estimations without any loss of information. His approach consists in developing a frequency and a severity model based on individual loss information and combining the two models with a Monte Carlo simulation. As part of this study, the estimated delay distribution will be used to estimate the number of unreported deaths.

The *Cullen & Frey* graph along with some descriptive statistics were used to choose the distribution that is best suited to our data sample and can be found below:



Cullen & Frey graph for the reporting delays (days)

Candidate methods	AIC	BIC	Kolmogorov-Smirnov statistic	Cramer Von Mises statistic	Anderson – Darling statistic
Gamma	211,281.5	211,297.3	0.19	244.12	1,279.16
Log normal	202,160.2	202,176.0	0.11	65.92	374.63
Weibull	211,270.9	211,286.7	0.16	215.05	1,224.84

Choice of the best fitted distribution

Among the unbounded positive distributions, the log-normal distribution seemed the best-fitted.

The maximum likelihood estimation method was chosen considering the following criteria:

Parametric estimation methods	AIC	BIC	Kolmogorov-Smirnov statistic	Cramer Von Mises statistic	Anderson – Darling statistic
Maximum likelihood method	202,160.2	202,176.0	0.11	65.92	374.63
Method of moments			0.15	145.01	858.78

Choice of the parametric estimation method

Let T be the random variable that represents the reporting delay in days.

Considering the results above, T is assumed to follow the distribution below:

$$T \sim \mathcal{LN}(3.7769601 ; 0.8665308^2)$$

The empirical distribution of the reporting delay has a bias towards shorter delays as our data sample consists of reporting delays observed during a limited timeframe. Consequently, no reporting delay bigger than the observation period can be observed and delays of length near the length of the observation period will be very scarce.

Given:

- T_0 : the random variable denoting the date of death
- f_a : the density of the observed reporting delay distribution over the period $[0; a]$
- f : the density of the reporting delay distribution after the bias correction
- r_t : number of deaths that occurred and were reported during the period $[0; t]$ (known)
- μ_t : number of deaths that occurred during the period $[0; t]$ (to be estimated)

We can write:

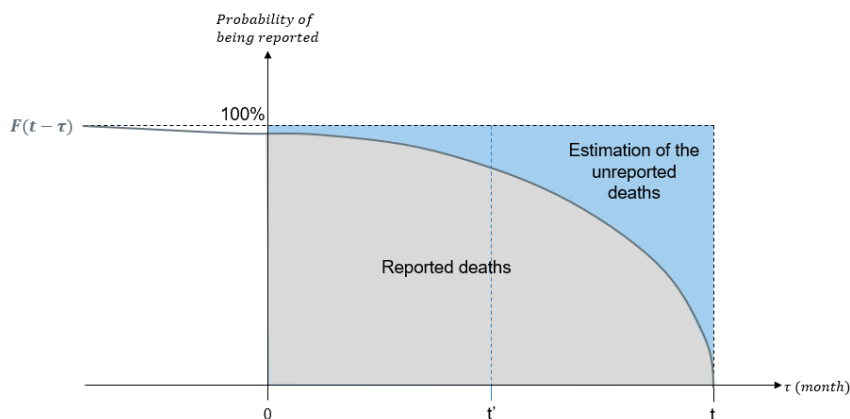
$$f_a(t) = \frac{\mathbb{P}(T + T_0 \leq a | T = t) \times \mathbb{P}(T = t)}{\mathbb{P}(T + T_0 \leq a)}$$

Using Bayes' theorem and a simplifying assumption, the following equation is obtained:

$$\forall t < a, f(t) = \frac{\mathbb{P}(T + T_0 \leq a) \times f_a(t)}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)}$$

The formula introduced by Parodi to estimate the number of deaths that will be reported by the valuation date t is the following cross product:

$$\hat{\mu}_t = \frac{t}{\int_0^t F(t - \tau) d\tau} \times r_t$$



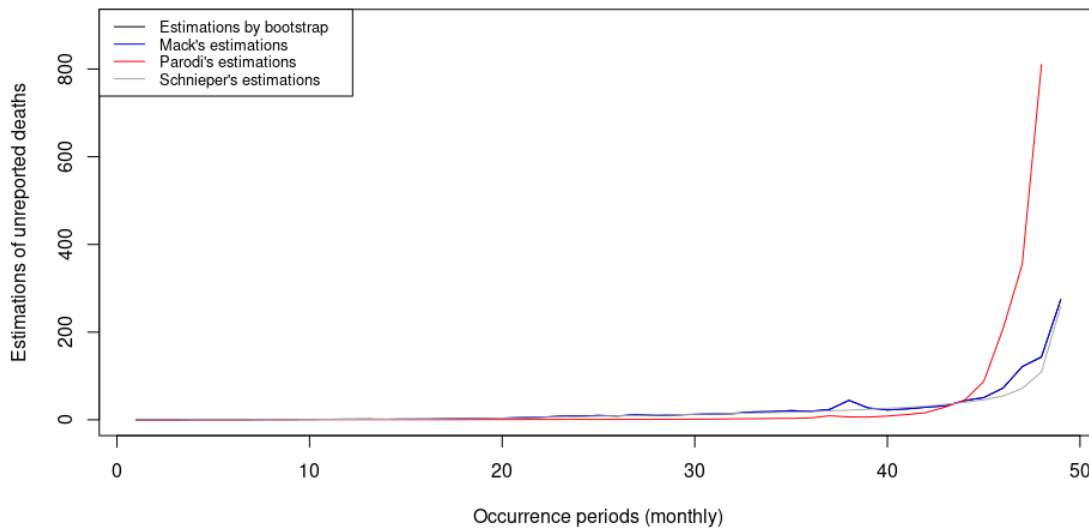
Geometrical interpretation of Parodi's formula

The estimations of the number of unreported deaths by month are over-dispersed. Thus, it will be assumed that it follows a negative binomial distribution over a Poisson distribution. The distribution is estimated to be as follows:

$$X \sim \mathcal{NB}(r = 0.1439655 ; p = 0.004236009)$$

The choice of the reserving method

Comparison of the estimations of the number of unreported deaths



Comparison of the estimations of unreported deaths by all the reserving methods applied

Several criteria were considered to help the choice of the best-fitted reserving method:

- A back-testing criterion introduced by Denuit and Charpentier in 2005 that measures the discrepancy between the predictions made by the model on past periods and the observed historic data.
- A measure of the ultimate uncertainty
- A measure of the predictive performance using four months of newly observed data.
- The complexity of implementation of the methods. The method chosen needs to be fairly simple to implement in order to be integrated to the usual Solvency II valuation process.
- The prudence of the estimations.

Method	Backtesting (SSE)	Ultimate variability	1-month variability	2-months variability	3-months variability	4-months variability	Implementation complexity	Prudence
Mack	1,515,865	105.30	5,917	4,975	3,547	3,505	Very easy	+
Bootstrap	1,531,448	104.62	6,011	5,181	3,715	3,564	Very easy	+
Schnieper	834,295	126.23	2,283	3,346	3,455	3,855	Fairly easy	++
Parodi	✘	✘	29,534	46,981	57,787	64,060	Complex	-

Summary of the criteria used to choose the reserving model

Considering the criteria mentioned above, it seemed discerning to choose **Schnieper's methodology**.

II – Considering late reporting in the Best Estimate reserves

The Best Estimate Liability is calculated as follows:

$$BEL_t = NPV\ Claim + NPV\ Expenses_t - NPV\ Premiums_t$$

Where:

- $VAP\ Expenses_t = \alpha \times VAP\ Claims_t$
- α : a predetermined constant

Considering the late reporting in the Best Estimate reserves is seen as an adjustment:

$$NPV\ Claims_{adjusted,t} = NPV\ Claims_t - Adjustment\ for\ late\ reporting_t$$

For simplicity and practicality, the following approach was chosen to consider late reporting in the BEL calculations:

$$Adjustment\ for\ late\ reporting_t = NPV\ Claims_{Deaths\ reported,t} \times \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \times \hat{\eta}_i$$

Where:

- $NPV\ Claims_{Death\ reported,t}$: The NPV of claims related to the policies whose death was reported in the last period (month)
- ω_i : proportion of reported deaths that occurred in the period i
- $\hat{\eta}_i = \frac{C_{i,n-i-1}}{\hat{C}_{i,n-1}} - 1$

Taking late reporting into account had the following impact on the level of the Best Estimate reserves:

$BEL_{March\ 2021}$	$\widehat{BEL}_{adjusted,March\ 2021}$	Adjustment impact
-154.32	-158.51	-2.71%

Impact of the adjustment for late reporting on the Best Estimate reserves (in mGBP)

In addition, the $SCR_{Longevity}$ was also impacted by the consideration of late reporting in the valuation process:

$SCR_{Longevity,March\ 2021}$	$\widehat{SCR}_{Longevity,adjusted,March\ 2021}$	Adjustment impact
64.93	64.45	-0.75%

Impact of the adjustment for late reporting on the $SCR_{Longevity}$ (in mGBP)

Overall, taking late reporting into account in the Solvency II valuation process of longevity swaps caused a decrease of the amount of capital that was required to guarantee the solvency of the company.

Introduction

Solvabilité II est le régime de solvabilité applicable aux entreprises d'assurance et de réassurance des pays membres de l'Union Européenne. Depuis son entrée en vigueur en 2016, la protection des assurés par l'application de règles prudentielles veillant à la solvabilité des organismes est devenue un sujet central.

Sous la directive Solvabilité II, le calcul des provisions techniques repose sur le principe du *Best Estimate* qui correspond à « la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs compte tenu de la valeur temporelle de l'argent »¹. Le calcul des provisions *Best Estimate* constitue ainsi une projection au plus proche de la réalité de la vie du contrat étudié. C'est pourquoi, il est d'autant plus important de prendre en compte l'intégralité des comportements observables pour l'évaluation du *Best Estimate*.

Dans le cadre de swaps de longévité où une compagnie cédante transfère son risque de longévité à un ou plusieurs réassureurs, en échangeant la mortalité observée du portefeuille contre celle prédite, connaître l'évolution de la population rentière est une composante cruciale au provisionnement *Best Estimate*. Toutefois, l'essence même de l'activité de réassurance implique que l'information soit relayée par la compagnie cédante seulement après que celle-ci y ait accès. Par conséquent, il est courant que le réassureur ait une vision biaisée de l'évolution de la population rentière réassurée.

L'épidémie de Covid-19 a permis de mettre en évidence un point d'amélioration possible dans la méthode actuelle de provisionnement *Best Estimate* des swaps de longévité chez PartnerRe. En effet, la première vague du Covid-19 a eu lieu entre les mois de mars et mai 2020. Toutefois, les données transmises par les compagnies cédantes au mois de mai 2020 ne reflétaient pas la surmortalité attendue à la suite des effets du coronavirus au sein de la population. En effet, une grande partie des décès des populations bénéficiaires ne sont déclarés que quelques mois après la survenance des décès.

A ce jour, les déclarations tardives des décès ne sont pas prises en compte dans la modélisation des provisions *Best Estimate* des swaps de longévité au sein de la compagnie de réassurance Partner Re. Les modèles de projection des engagements interprètent les données transmises au pied de la lettre sans tenir compte des éventuels décès non encore déclarés. Cela engendre un sur-provisionnement : le niveau des provisions *Best Estimate* est trop élevé étant donné qu'il tient compte d'engagements liés à des rentes viagères destinées à des polices qui sont, en réalité, déjà décédées.

Selon la perspective du réassureur, la mortalité survenue et non encore déclarée est égale à la différence entre la mortalité prédite et la mortalité qui a été communiquée par la cédante. Toutefois, le nombre de décès survenus et non encore déclarés ne pourra être estimé à partir de la mortalité prédite au sein de la population de rentiers par les tables de mortalité générationnelles employées dans le modèle *Best Estimate*. En effet, ces tables de mortalité ont pour objectif principal de capturer le risque de longévité. Le risque de longévité est un risque de long (voire très long) terme ; ainsi, ces tables de mortalité générationnelles ne permettent en aucun cas de faire des prédictions de la mortalité à court terme. A titre d'exemple, aucune hypothèse de saisonnalité n'est prise en compte dans la modélisation de la mortalité du portefeuille.

¹ Citation de l'article 77 paragraphe 2 de la directive Solvabilité II

Par conséquent, c'est à partir de la mortalité déclarée que l'on estimera la mortalité sur les périodes passées grâce à des méthodes de provisionnement non-vie.

Ce mémoire sera ainsi l'occasion de se questionner sur la meilleure approche pour prendre en compte les déclarations tardives de décès dans l'évaluation, sous Solvabilité II, des swaps de longévité ; d'autant plus que, ce type de couverture est en plein essor.

Effectivement, si c'est en Grande-Bretagne qu'est apparue pour la première fois la technique innovante de cession du risque de longévité par *longevity swaps*, son développement s'accélère et gagne de nouveaux pays pour plusieurs raisons. En premier lieu, le contexte démographique actuel au sein duquel la population est vieillissante et survit plus longtemps après l'âge de la retraite place la question du transfert du risque de longévité au cœur du débat. Dans un second temps, la norme prudentielle Solvabilité II encourage au transfert du risque de longévité en exigeant des assureurs « la détention d'une quantité de capital supplémentaire significative permettant de garantir leurs obligations liées aux rentes viagères si le risque de longévité ne peut être couvert efficacement » (Courbage, 2014).

Dans le cadre de ce mémoire, il sera proposé, dans un premier temps, de manier des méthodes d'estimation du nombre de déclarations tardives par des approches classiques de provisionnement non-vie employant des triangles de développement. Dans un second temps, une méthode de provisionnement individuel introduite par Pietro Parodi permettant de s'affranchir des triangles de développement pour le provisionnement de coûts liés aux sinistres tardifs sera employée. Après avoir comparé les méthodes d'estimation et avoir sélectionné le modèle le plus adapté au contexte, ce mémoire sera l'occasion d'un questionnement par rapport aux techniques d'ajustement du niveau des provisions à détenir pour se rapprocher du *Best Estimate* en prenant en compte les déclarations tardives de décès. Enfin, la dernière section de ce mémoire sera consacrée à la mesure de l'impact de la prise en compte des déclarations tardives dans l'évaluation des passifs du bilan prudentiel de Solvabilité II.

Chapitre 1 – Cadre de l'étude

1.1 – Contexte réglementaire de l'étude : la directive Solvabilité II

1.1.1 Présentation de la réforme Solvabilité II

Entrée en application le 1er janvier 2016, la directive Solvabilité II est un ensemble de réglementations constituant le régime prudentiel applicable aux sociétés d'assurance et de réassurance des pays membres de l'Union Européenne. Le principal objectif de cette directive est la protection des assurés en garantissant la solvabilité des organismes. La solvabilité étant définie comme la capacité à disposer d'actifs suffisants pour faire face à tous les engagements futurs vis-à-vis des assurés. Les principes généraux de la réforme consistent à :

- Homogénéiser la mesure des fonds propres et le niveau du capital requis entre les organismes membres de l'Union Européenne,
- Evaluer la solvabilité globale d'une compagnie en prenant en compte l'intégralité de ses risques et spécificités,
- Inciter les assureurs et réassureurs à mesurer et à contrôler leurs risques,
- Encourager la transparence dans la communication avec le public et l'autorité de contrôle.

Les règles de la directive se répartissent selon 3 piliers qui sont les suivants :

- Le premier pilier définit les exigences quantitatives par la construction d'un bilan prudentiel. Il détermine également les modalités et méthodes de calcul des provisions techniques et des exigences de capitaux à détenir pour maintenir la solvabilité de l'organisme.
- Le deuxième pilier fixe, d'une part, les exigences qualitatives de gouvernance et de gestion des risques et d'autre part, définit l'évaluation interne des risques et de la solvabilité (*Own Risk and Solvency Assessment – ORSA*)
- Le troisième et dernier pilier a pour but de non seulement accroître la transparence vis-à-vis du public mais également de mettre à la disposition du superviseur les informations nécessaires au contrôle des organismes.

1.1.2 Pilier I : les exigences quantitatives

Le bilan comptable « décrit séparément les éléments actifs et passifs d'une entreprise et fait apparaître, de façon distincte les capitaux propres »². Dans le cadre de la directive Solvabilité II, le bilan est prudentiel et les actifs y sont évalués selon la valeur de marché. Autrement dit, les actifs sont « valorisés au montant pour lequel ils pourraient être échangés dans le cadre d'une transaction conclue, dans des conditions de concurrence normales, entre des parties informées et consentantes »³.

² Définition présente à l'article L123-3 du Code de Commerce et à l'article 112-2 du Plan Comptable Général

³ Citation de l'article 75 paragraphe 1-a) de la directive Solvabilité II

Les passifs se décomposent en 2 catégories : les provisions techniques et les fonds propres.

- Les provisions techniques doivent être constituées, selon la directive, comme suivant :

$$\mathbf{Provisions\ techniques}_t = \mathbf{Best\ Estimate\ Liability}_t + \mathbf{Marge\ de\ risque}_t \quad (1.1.1)$$

Avec, à une date d'évaluation t :

- *Best Estimate Liability*_t: La meilleure estimation des engagements de l'organisme d'assurance ou de réassurance.
 - *Marge de risque*_t: La marge calculée afin que « la valeur des provisions techniques soit équivalente au montant qu'une entité demanderait pour reprendre et honorer les engagements de l'entreprise. »⁴
- Les fonds propres sont également divisés en 2 catégories :
 - Le capital excédentaire (aussi appelé « L'excédent des actifs par rapport aux passifs »⁵) qui correspond au montant de fonds propres économiques de l'entreprise.
 - Le SCR (Capital de solvabilité requis ou *Solvency Capital Requirement*), qui est le capital que l'organisme doit détenir afin de pouvoir absorber des pertes imprévues dans 99,5% des cas sur un horizon d'un an. Ce solde de capital requis doit toujours être au moins égal au MCR (minimum de capital requis ou *Minimum Capital Requirement*).

Le minimum de capital requis constitue le montant minimum des fonds propres nécessaires au maintien de la solvabilité de l'organisme. Dans le cas où le capital serait inférieur au niveau du MCR, l'organisme serait exposé à un risque inacceptable et une intervention de contrôle devrait avoir lieu.

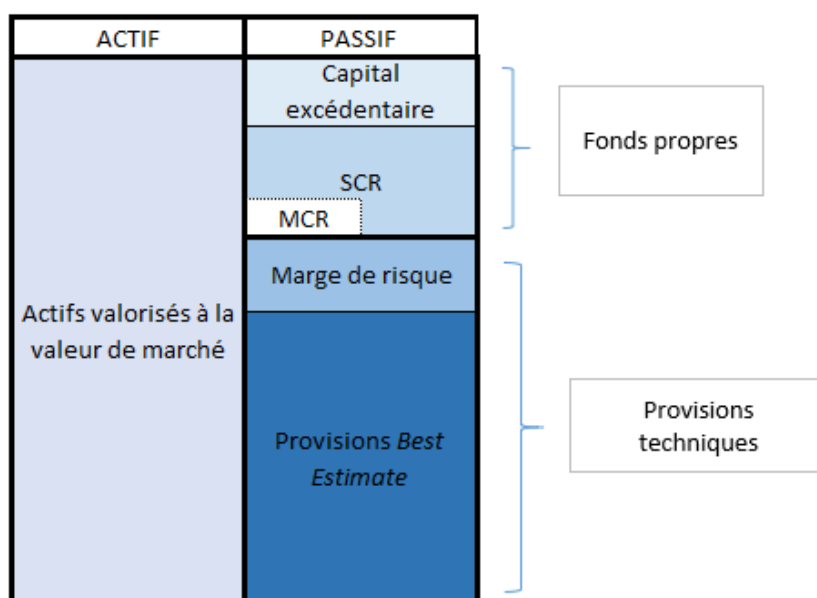


Figure 1 : Bilan prudentiel simplifié dans le cadre de Solvabilité II

⁴ Citation de l'article 77 paragraphe 3 de la directive Solvabilité II

⁵ Citation de l'article 88 paragraphe 1 de la directive Solvabilité II

1.1.3 Capital de solvabilité requis (SCR)

Le capital de solvabilité requis peut être calculé soit à l'aide de la formule standard proposée par l'EIOPA (Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles) soit selon un modèle interne spécifique à l'organisme et à ses risques.

Formule standard pour le calcul du capital de solvabilité requis

Selon la formule standard, le capital de solvabilité requis est calculé comme ci-dessous :

$$SCR = SCR_{de\ base} + Adj + SCR_{opérationnel} \quad (1.1.2)$$

- $SCR_{de\ base}$: le capital de solvabilité requis de base
- Adj : « l'ajustement visant à tenir compte de la capacité d'absorption de pertes des provisions techniques et des impôts différés. »⁶
- $SCR_{opérationnel}$: l'exigence de capital pour le risque opérationnel de l'organisme.⁷

Cette formule standard repose sur une approche dite de « *Bottom-Up* ». En effet, l'intégralité des risques inhérents à l'activité d'assurance sont agrégés pour constituer cinq modules qui seront, par la suite, eux-mêmes assemblés afin d'obtenir le SCR de base.

Ces cinq modules sont les suivants :

- SCR_{life} : l'exigence de capital correspondant au module « risque de souscription vie »
- SCR_{nl} : l'exigence de capital correspondant au module « risque de souscription en non-vie »
- SCR_{health} : l'exigence de capital correspondant au module « risque de souscription en santé »
- SCR_{market} : l'exigence de capital correspondant au module « risque de marché »
- $SCR_{default}$: l'exigence de capital correspondant au module « risque de crédit »

Les différents SCR correspondent, en effet, à une valeur sous risque (*Value-at-Risk*) des fonds propres de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99,5% à un horizon d'un an. Par ailleurs, lors du calcul des capitaux de solvabilité requis, il faut tenir « compte de l'impact des techniques d'atténuation des risques, sous réserve que le risque de crédit et les autres risques inhérents à l'emploi de ces techniques soient pris en considération de manière adéquate dans le capital de solvabilité requis »⁸. Autrement dit, le calcul du SCR se fait net de réassurance.

⁶ Définition présente dans l'article 108 de la directive Solvabilité II

⁷ Dans la mesure où ces risques ne sont pas déjà pris en compte dans les modules de risques mentionnés dans l'article 104 de la directive Solvabilité II. (Citation de l'article 107 paragraphe 1 de la directive Solvabilité II)

⁸ Citation de l'article 101 paragraphe 5 de la directive Solvabilité II

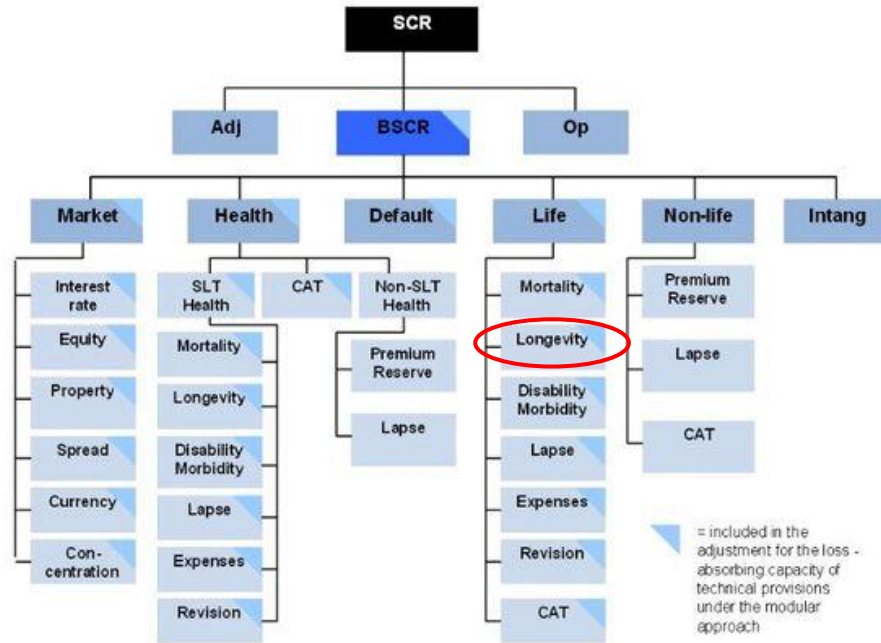


Figure 2 : Modules de risque pris en compte dans le calcul du SCR de base⁹

Formule standard pour le calcul du capital de solvabilité requis de base

Selon la formule standard, le montant du SCR de base se calcule comme suivant :

$$SCR_{de\ base} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j} \quad (1.1.3)$$

Où :

- $Corr_{i,j}$: le facteur de corrélation entre les risques des modules i et j évoqué dans la Figure 3.
- SCR_i : l'exigence de capital correspondant à l'un des cinq modules de risque susmentionnés

i \ j	Marché	Défaut	Vie	Santé	Non-vie
Marché	1	0,25	0,25	0,25	0,25
Défaut	0,25	1	0,25	0,25	0,5
Vie	0,25	0,25	1	0,25	0
Santé	0,25	0,25	0,25	1	0
Non-vie	0,25	0,5	0	0	1

Figure 3 : Matrice de corrélation à employer dans le calcul du capital de solvabilité requis de base selon la formule standard

10

⁹ Source : www.ressources-actuarielles.net (Kamega, 2015)

¹⁰ Source : Annexe IV de la directive de Solvabilité II

1.1.4 Best Estimate Liability

Le *Best Estimate Liability* correspond à « la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs »¹¹ estimée sur la base des taux sans risques pertinents. Autrement dit, il s'agit de la meilleure estimation de la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs.

Aucune marge de prudence n'est intégrée au calcul du *Best Estimate*. Ce dernier correspond donc à la somme actualisée des flux entrants et des flux sortants probables futurs et bruts de réassurance. Pour l'évaluation BE des swaps de longévité à une date t , on a donc :

$$\text{Best Estimate Liability}_t = \sum_{i=t}^{+\infty} \frac{\text{Flux entrants}_i - \text{Flux sortants probables}_i}{(1 + r_i^{(m)})^i} \quad (1.1.4)$$

Où :

- $r_i^{(m)}$: taux d'actualisation sans risque mensuel
- Flux entrants_i : Primes de réassurance versées par la cédante en début de période i . Dans le cadre des swaps de longévité, les primes sont fixées et déterminées à la signature du contrat.
- Les $\text{Flux sortants probables}_i$ incluent les paiements des prestations (rentes viagères) aux polices du portefeuille, les commissions de réassurance ainsi que les coûts liés au courtage, à la gestion et au fonctionnement, versés en période i .

Les hypothèses employées dans le calcul de la meilleure estimation des engagements se doivent d'être fondées sur des informations actualisées, crédibles et réalistes. De plus, elles doivent « faire appel à des méthodes actuarielles et statistiques adéquates, applicables et pertinentes »¹².

Il est important de noter que le *Best Estimate Liability* est calculé brut de réassurance et selon le profil de risque de l'organisme (principe de proportionnalité) et sous une hypothèse de continuité d'exploitation.

L'étude menée dans le cadre de ce mémoire aura précisément pour but de constituer des provisions *Best Estimate* respectant les principes de la directive Solvabilité II, notamment en prenant en compte le délai de déclaration des décès.

¹¹ Citation de l'Article 77 paragraphe 2 de la directive Solvabilité II

¹² Citation de l'Article 77 paragraphe 2 de la directive Solvabilité II

1.2 – Besoin de couverture du risque de longévité

1.2.1 Le risque de longévité

Le risque de longévité est, par définition, le risque qu'une population rentière survive plus longtemps qu'escompté. Autrement dit, il s'agit du risque de sous-estimer les taux de survie des rentiers et que, par conséquent, les provisions destinées aux règlements de rentes viagères soient insuffisantes pour couvrir les promesses de futurs paiements.

Le risque de longévité est particulièrement difficile à maîtriser. En effet, il se compose des cinq volets principaux qui sont les suivants :

- Le **risque de base** provenant de la possibilité que les populations assurées vivent de manière générale plus longtemps que la population nationale.
- La **volatilité intrinsèque** étant les variations de la mortalité autour de la tendance centrale dues à des fluctuations statistiques.
- Le **risque de cohorte** étant le risque qu'une génération puisse subir une plus forte augmentation de l'espérance de vie que la génération précédente (grâce à des avancées médicales par exemple).
- Le **risque catastrophe** qui correspond à des variations de la mortalité autour d'une tendance centrale dues à un événement ponctuel, type pandémie (ex : Covid-19), canicule ou guerre.
- Le **risque de tendance** correspond au fait que les améliorations de la mortalité de la population dans les années futures soient, en réalité, supérieures à ce qui avait été anticipé. Ce risque est bien le plus complexe à appréhender car il ne peut être atténué par la diversification. En effet, de manière générale, l'amélioration de la mortalité concerne une population dans son ensemble. De plus, ce risque de tendance influence très fortement les projections à moyen et long terme.

Le risque de longévité est d'autant plus présent lorsque la mortalité future est projetée sur le long voire le très long terme.

1.2.2 Les sources du besoin de couverture du risque de longévité

- Besoin démographique :

De jours en jours, une plus grande proportion de la population atteint l'âge de la retraite et cette dite population survit de plus en plus longtemps du fait de l'augmentation de l'espérance de vie. Effectivement, en 2018, l'institut officiel de statistique britannique (ONS) prévoyait qu'en 50 ans, l'espérance de vie augmenterait de plus de 5 ans au Royaume-Uni. De plus, les projections indiquent que d'ici 50 ans, 16,6% des hommes et 17,3% des femmes seraient âgés de plus de 60 ans. Or, à ce jour, ils représentent respectivement 11,6% et 13,10 de la population britannique.

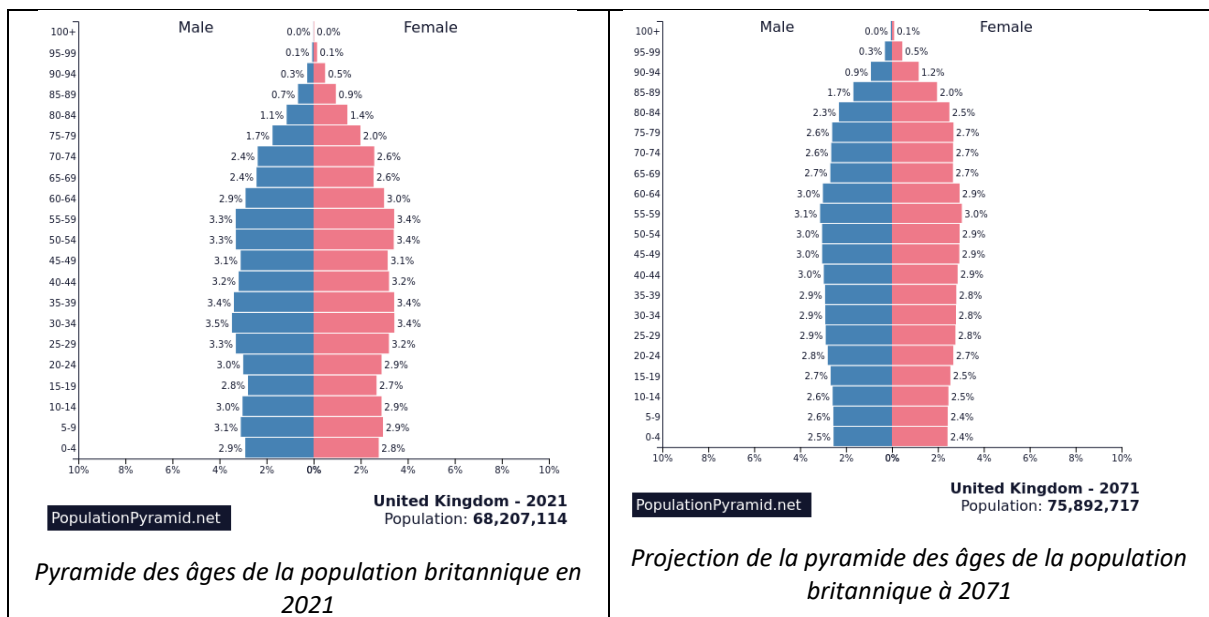


Figure 4 : Evolution démographique par tranche d'âges en Grande Bretagne (Source : PopulationPyramid.net – 2021)

Figure 1: Period life expectancy at birth is projected to increase by six years for males and five years for females by 2068

Male and female period life expectancy at birth, historical data and 2018-based projection, United Kingdom, 1981 to 2068

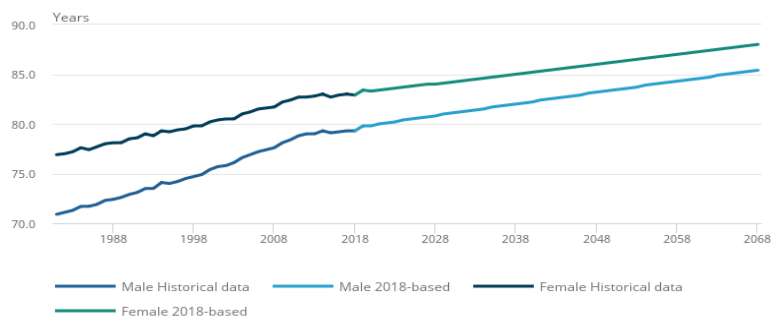


Figure 5 : Estimation de l'évolution de l'espérance de vie au Royaume-Uni (Source : ONS – 2018)

- Contexte social

Cette étude porte sur la réassurance de rentes viagères de populations britanniques par les swaps de longévité. De manière générale, les marchés des pays anglo-saxons et notamment celui du Royaume-Uni, sont dominés par les fonds de pension. En effet, « les produits de retraite britanniques d'après-guerre sont [principalement fondés] sur une capitalisation par l'employeur et avec l'obligation de transformer 75% du capital en rentes viagères immédiates » (Luginsland, 2014).

Par opposition, au moment du départ à la retraite, les Français choisissent principalement une sortie en capital¹³.

¹³ Dans une enquête réalisée sur 130 000 salariés épargnants français, 77% des interrogés auraient déclaré préférer une sortie en capital à une sortie en rente viagère. (Dupuy, 2018)

- Contexte réglementaire

Solvabilité II impose la détention de capitaux suffisants pour garantir la solvabilité des organismes d'assurance. Or, les engagements liés aux rentes viagères sont très lourds et impliquent des transactions mensuelles de montants élevés sur le long voire le très long terme.

Le risque de longévité intervient dans le calcul du SCR_{life} , lui-même utilisé pour déterminer le SCR de base. Or, le calcul du SCR est mené net de réassurance. Ainsi, la directive Solvabilité II encourage les assureurs à transférer leur risque de longévité vers les compagnies de réassurance.

1.3 – Couverture du risque de longévité par un swap de longévité

1.3.1 Méthodes de transfert du risque de longévité

Il existe de nombreuses méthodes de transfert du risque de longévité. De plus, le besoin accru du transfert de ce risque a permis des innovations et l'apparition de solutions modernes de réassurance du risque de longévité.

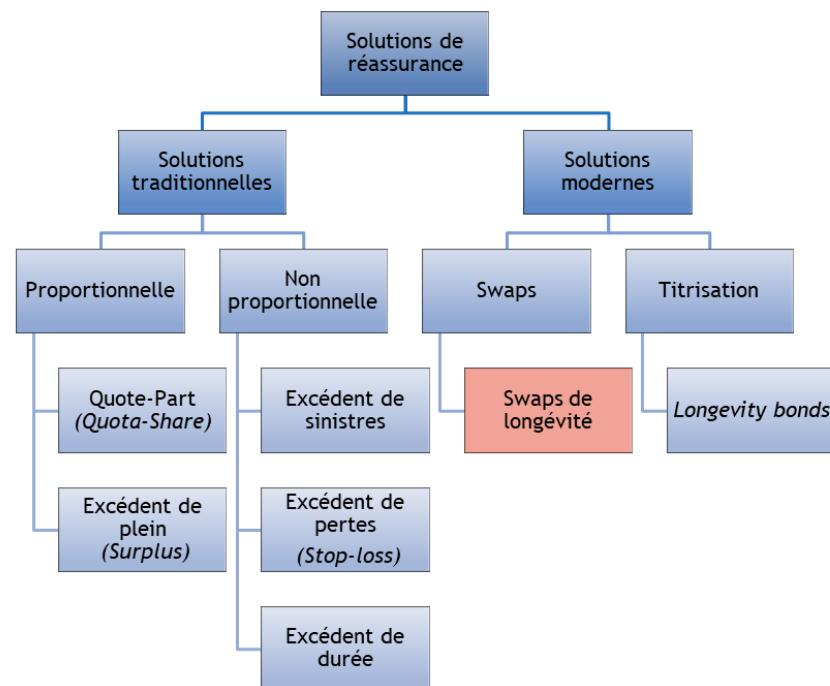


Figure 6 : Organigramme des solutions de transfert du risque de longévité

Les méthodes de transfert du risque de longévité les plus adoptées sont les suivantes :

- Le traité en **quote-part** : Il s'agit d'une couverture de réassurance proportionnelle dans laquelle l'assureur cède un pourcentage fixé des primes reçues et cède la même proportion de prestations à verser.
- L'**excédent de durée** : Dans ce type de traité, le réassureur ne prend en charge les prestations que lorsque la durée de versement de la rente a dépassé un certain seuil et ceci jusqu'à une durée qui peut être fixée (« portée »). Il s'agit donc d'une couverture non proportionnelle.

Toutefois, le cœur de l'étude menée à travers ce mémoire se concentrera sur les swaps de longévité. Également connus sous les noms de *mortality swaps* et *longevity swaps*, les swaps de longévité constituent une solution innovante à la problématique de cession du risque de longévité. Elle consiste en l'échange de flux financiers entre l'assureur et le(s) réassureur(s). L'assureur dit « la cédante » s'engage à verser des flux prédéterminés à la signature du contrat (les primes) tandis que le réassureur assure le paiement d'un pourcentage des coûts réels des versements de rentes viagères.

1.3.2 Principe de la couverture du risque de longévité par un swap de longévité

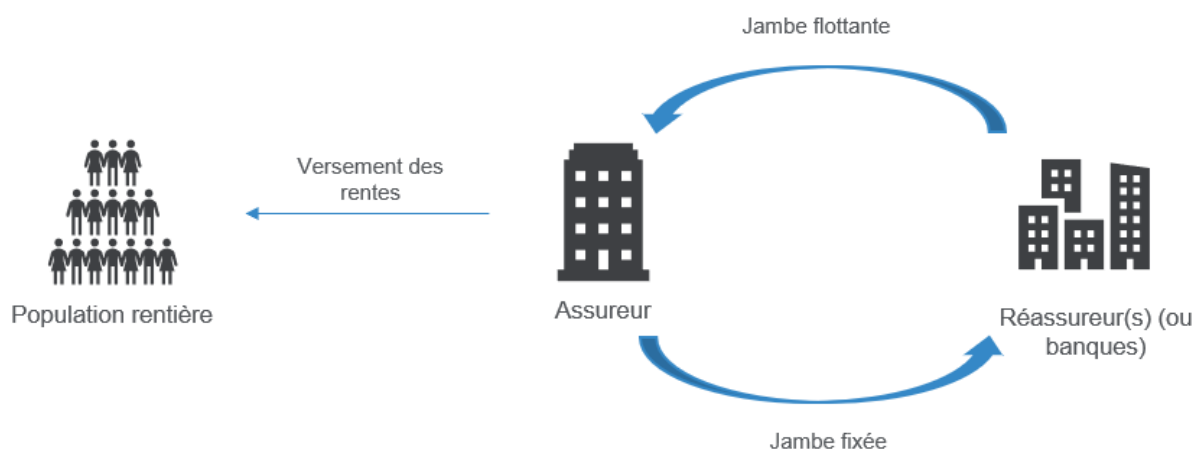


Figure 7 : Fonctionnement d'un swap de longévité

Dans un traité de swap de longévité, en échange de primes dites la « jambe fixée » dont le montant est déterminé à la signature du contrat, le réassureur verse périodiquement une somme variable (« la jambe flottante ») dépendant de la mortalité observée dans la population des bénéficiaires. La différence entre la jambe flottante et la jambe fixée est donc due à la déviation de mortalité par rapport aux prédictions. C'est pourquoi les swaps de longévité sont utilisés dans une démarche de transfert du risque de longévité pour des engagements liés à des rentes viagères d'assurance-vie ou de fonds de pension.

Le swap de longévité couvre un portefeuille fermé. Autrement dit, cela signifie que l'unique motif de sortie définitive pour un bénéficiaire est le décès mais également qu'aucun rentier ne peut être ajouté dans la population couverte.

Les traités de « *mortality swaps* » peuvent également inclure une clause de réversion qui permet à un(e) veuf(ve) survivant(e) de percevoir un pourcentage de la rente du conjoint(e) défunt(e) selon des conditions prédéterminées. Ces conjoints bénéficiaires sont appelés les « dépendants » ou « *Lives 2* » par opposition aux « membres » également surnommés les « *Lives 1* ».

1.3.3 Fonctionnement des swaps de longévité

Selon une cadence déterminée au sein du traité, un recensement de la population survivante est réalisé. De manière générale, ce recensement est effectué à un rythme mensuel. Toutefois, de nombreuses cédantes optent pour un inventaire trimestriel des polices survivantes.

Ainsi, fréquemment, les polices bénéficiaires ou leurs proches doivent fournir un certificat d'existence mentionnant les éléments suivants :

- Confirmation d'existence de la police ou sa date de décès
- Statut marital de la police
- Nom et date de naissance du conjoint actuel

Malgré la digitalisation des certificats d'existence, le recensement des décès survenus au sein de la population est souvent lent. Lorsqu'une police faillit à son obligation de remplir le certificat d'existence pendant une durée dépassant un délai défini au traité, le versement de sa rente est suspendu jusqu'à ce qu'une preuve d'existence ou une confirmation de décès soit fournie.

Lors d'une déclaration de décès d'une police « *Life 1* », si le traité prévoit une clause de réversion, le conjoint devient bénéficiaire d'une proportion de la rente anciennement versée à l'assuré défunt.

Après avoir synthétisé l'intégralité de l'information recueillie par les certificats d'existence reçus, la compagnie cédante constitue un bordereau reflétant l'évolution connue de la population bénéficiaire. Le bordereau est ensuite transmis au(x) réassureur(s). C'est à l'aide de ces bordereaux que les réassureurs prennent connaissance de la mortalité observée et déclarée au sein de la population de rentiers.

1.3.4 Intérêt de la couverture par un swap de longévité

La couverture par un swap de longévité présente de nombreux avantages non seulement pour l'assureur mais aussi pour le réassureur.

- **Du point de vue de l'assureur**

Le transfert du risque de longévité à un réassureur permet à la cédante de payer uniquement des flux fixes certains et de s'affranchir des flux aléatoires dépendant de la sinistralité réelle. De cette manière, les swaps de longévité permettent aux compagnies cédantes de lisser leur résultat dans le temps.

Comme évoqué dans la partie 1.1.3, dans le cadre de la directive Solvabilité II, pendant le calcul du capital de solvabilité requis, les assureurs tiennent compte de l'impact de l'atténuation des risques due à la réassurance. Ainsi, étant donné que le swap de longévité élimine toute la dimension aléatoire de la couverture, il permet de ne pas mobiliser de capitaux pour constituer le SCR du sous-module « longévité ». Toutefois, dans ce cas, la cédante doit modéliser le risque de défaut lié à ce transfert de risque et le prendre en compte dans le calcul de son SCR.

- **Du point de vue du réassureur**

La réassurance par le biais de swaps de longévité permet au réassureur de diversifier ses activités. Le risque de longévité étant corrélé négativement avec celui de mortalité, il est particulièrement intéressant pour les réassureurs fortement positionnés dans le risque de mortalité de proposer ce

type de couverture. En effet, cela permet de, non seulement optimiser le besoin en capital mais également de se protéger contre le risque catastrophe (ex : surmortalité due à la pandémie du Covid-19)

1.4 – Les décès déclarés tardivement

1.4.1 Définition et impact sur l'évaluation des swaps de longévité

Le délai de déclaration est calculé comme explicité ci-dessous :

$$\text{Délai de déclaration} = \text{Date du bordereau de première déclaration du décès} - \text{Date du décès}$$

Dans le cadre de l'étude, les délais de déclaration seront considérés dans un référentiel mensuel.

Exemple : Date de décès : 10 Janvier 2021

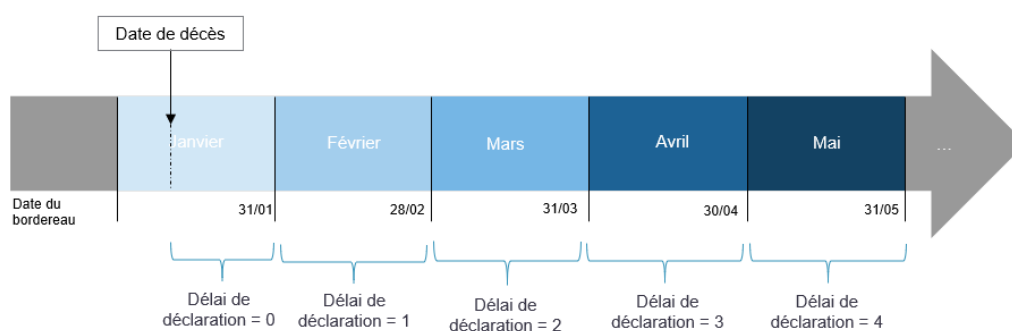


Figure 8 : Définition du délai de déclaration (en mois)

Les bordereaux transmis au(x) réassureur(s) communiquent uniquement l'évolution **connue** de la population bénéficiaire. Ainsi, les modèles de projection des flux de prestations qui interprètent les bordereaux au pied de la lettre sans prendre en compte les possibles décès déclarés tardivement, surestiment la population de rentiers survivants.

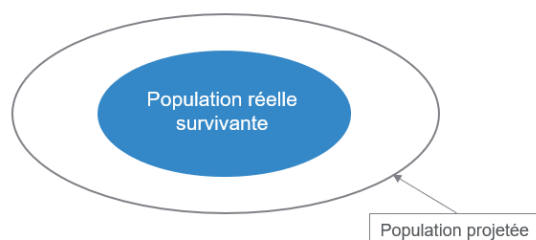


Figure 9 : Impact de la non prise en compte des déclarations tardives de décès sur la projection de la population rentière

Par conséquent, en ne prenant pas en compte les déclarations tardives, des capitaux sont immobilisés pour le provisionnement d'engagements liés à des rentes viagères destinées à des polices qui sont, en réalité, déjà décédées. Dans ce cas-là, le niveau des provisions *Best Estimate* est plus élevé qu'il ne devrait l'être.

1.4.2 Comparaison avec les provisions IBNR

- Définition des IBNR :

L'étude des délais de déclaration est extrêmement courante dans le provisionnement en assurance non-vie. En effet, l'étude menée dans le cadre de ce mémoire pourrait aisément être comparée à un provisionnement des IBNR.

En effet, on définit les IBNR (*Incurred But Not Reported*) comme suivant :

$$IBNR = IBNeR + IBNyR \quad (1.4.1)$$

Où :

- *IBNeR : Incurred but not enough reported*
- *IBNyR : Incurred but not yet reported*

Le premier volet du provisionnement des IBNR est la constitution d'une provision visant à couvrir les coûts liés aux sinistres survenus mais qui n'ont pas encore été déclarés ; on parle de la provision IBNyR. En effet, en assurance non-vie également, les sinistres ne sont pas déclarés instantanément après leur survenance.

Le second volet est la mise en place de la provision IBNeR visant à couvrir les coûts liés aux aggravations tardives de sinistres. En effet, en assurance non-vie, l'assureur estime dès la déclaration du sinistre le coût probable de celui-ci. Toutefois, des aggravations et des déviations par rapport à la première estimation du coût du sinistre peuvent survenir ; elles sont donc sensées être couvertes par la provision IBNR.

La provision IBNR augmente ainsi le *Best Estimate Liability*, qui constitue le montant intégral des dépenses nécessaires au règlement des sinistres.

- Comparaison de l'étude avec un provisionnement IBNR classique :

Même si l'étude de la prise en compte des déclarations tardives de décès dans le provisionnement des swaps de longévité peut s'apparenter à un provisionnement des IBNR en assurance non-vie, ces deux types de travaux se distinguent l'un de l'autre. En effet, un décès ne survient qu'une seule fois au cours de la vie d'une police bénéficiaire. Ainsi, une fois le décès déclaré, aucune aggravation n'est possible. De cette manière, la constitution d'une provision assimilable aux IBNeR n'aurait pas de sens dans cette étude.

De surcroît, l'estimation des décès survenus et non reportés permettra l'estimation de l'évolution de la population rentière. Cette estimation permettra de ne plus provisionner de prestations à payer pour des polices décédées qui ne doivent plus recevoir de rentes viagères. Par conséquent, contrairement au provisionnement des IBNR en assurance non-vie, l'étude détaillée dans ce mémoire réduira le niveau des provisions *Best Estimate*.

1.4.3 Lien avec les méthodes de provisionnement non-vie

Le nombre de déclarations tardives sera estimé comme ci-dessous :

$$\text{Mortalité survenue mais non déclarée} = \text{Mortalité prédite} - \text{Mortalité déclarée} \quad (1.4.2)$$

Toutefois, la mortalité prédite ne pourra pas être déduite des tables de mortalité générationnelles utilisées pour prédire les évolutions démographiques de la population rentière. En effet, ces tables de mortalité ont été élaborées pour appréhender le risque de longévité ; elles ne sont donc pas adaptées aux contextes de projection à court terme mais plutôt à très long terme. A titre d'exemple, aucun effet de saisonnalité n'est pris en compte dans la modélisation de la mortalité par ces tables générationnelles.

Une autre approche sera alors adoptée dans ce mémoire. En effet, c'est à partir de la mortalité observée et déclarée que la mortalité sera prédite via des méthodes de prédiction non-vie qui supposent que la cadence de déclaration des décès reste stable au fil des périodes de survenance. Une partie de l'étude consistera donc en la recherche de la méthode de provisionnement la plus adaptée aux spécificités du contexte de l'étude et aux données qui seront présentées ci-après.

1.5 – Présentation des données

L'étude détaillée dans ce mémoire sera illustrée à l'aide d'un swap de longévité dont les caractéristiques figurent ci-dessous. Par souci de confidentialité, certaines informations ne pourront être divulguées et le traité sera nommé « Traité A ».

Nom du traité étudié	Traité A
Durée de la période étudiée	49 mois (mars 2017 à mars 2021)
Option de réversion	Oui
Nombre de décès déclarés dans la période d'étude	20 005 décès
Proportion réassurée	42,5%
Cadence d'envoi des bordereaux	Mensuelle

Figure 10 : Présentation du traité étudié

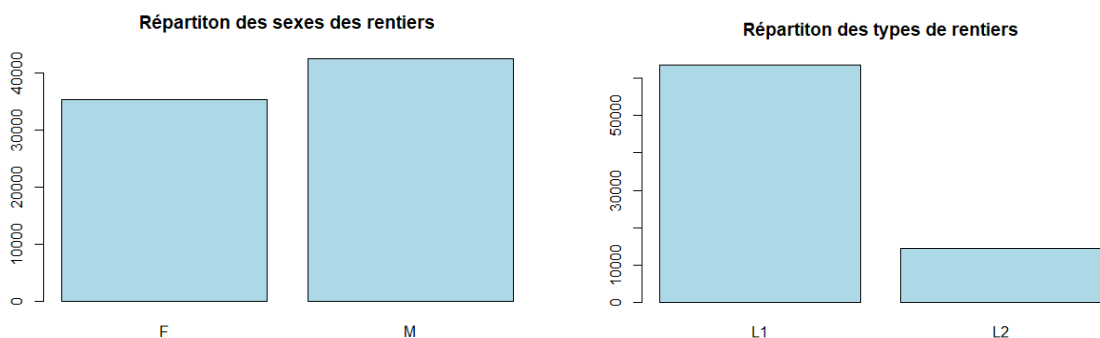
La base de données observée est constituée de l'information transmise par les bordereaux de la cédante sur un horizon de 49 mois. Elle a été traitée de manière à ne conserver que les informations relatives aux polices dont le décès a été déclaré.

Les variables de la base de données qui seront utilisées pendant l'étude sont les suivantes :

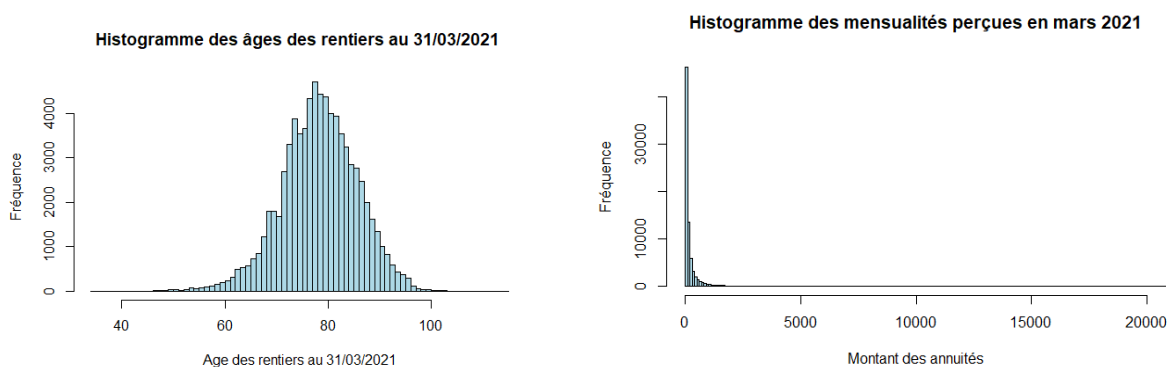
- Identifiant de la police bénéficiaire
- Statut marital
- Montant de l'annuité perçue (GBP)
- Date de naissance (JJ/MM/AAAA)
- Date de décès (JJ/MM/AAAA)
- Date de déclaration du décès à la compagnie de réassurance (JJ/MM/AAAA)

Analyse descriptive de la base de données étudiée

A la date du 31 mars 2021, le bordereau communiqué à Partner Re atteste que la population rentière est constituée de 77 891 bénéficiaires. Ils sont majoritairement de sexe masculin et de type « Lives 1 ». En effet, la population étudiée est constituée, au 31 mars 2021, de 54,6% d'hommes et de 81,43% de rentiers de type « membres ».



Si le bénéficiaire moyen est âgé de 78,27ans et perçoit une rente mensuelle d'un montant de 211,71GBP ; il n'est pas représentatif de la population rentière. En effet, il s'agit là d'une population relativement hétérogène. Au 31 mars 2021, les âges des rentiers s'étendent sur une plage de plus de 75 années et si 75% des bénéficiaires perçoivent moins de 200GBP par mois ; près de 2% d'entre eux en perçoivent plus de 20 000GBP.



Min	1 ^{er} quartile	Médiane	Moyenne	3 ^{ème} quartile	Max
34,81	73,59	78,37	78,27	83,22	109,98

Figure 13 : Statistiques descriptives des âges des rentiers déclarés vivants en mars 2021

Min	1 ^{er} quartile	Médiane	Moyenne	3 ^{ème} quartile	Max
0	26,68	70,53	211,71	183,38	28 448,61

Figure 14 : Statistiques descriptives des montants des rentes mensuelles des bénéficiaires déclarés vivants en mars 2021 (GBP)

A partir des données disponibles au sein de l'échantillon d'étude, les délais de déclaration peuvent être déduits comme suivant :

$$\text{Délai de déclaration} = \text{Date du bordereau de déclaration du décès} - \text{Date du décès} \quad (1.5.1)$$

Les données étudiées répondent aux exigences de qualité imposées par PartnerRe, elles-mêmes alignées sur celles de la réglementation Solvabilité II consistant à « garantir le caractère approprié, l'exhaustivité et l'exactitude des données utilisées »¹⁴.

Cette étude sera illustrée par les données du Traité A. Par rapport aux douze traités de swaps de longévité détenus par PartnerRe, le Traité A a été sélectionné pour le comportement moyen de sa cédante ; en effet, les délais de déclarations du Traité A sont moyens en comparaison avec ceux de l'ensemble des swaps en portefeuille.

Graphiquement, les délais de déclaration se profilent comme suivant :

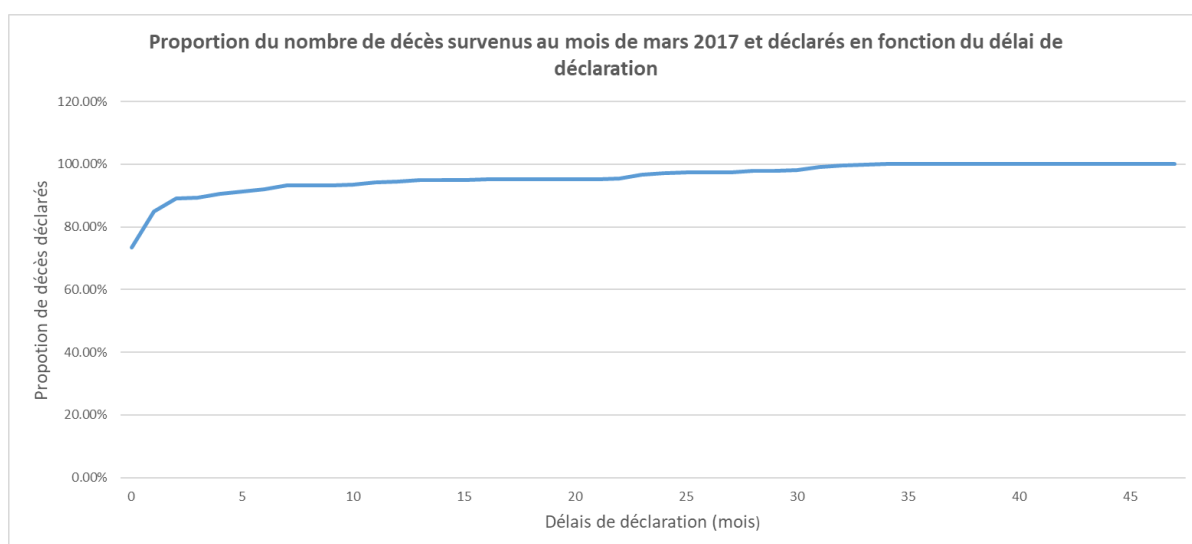


Figure 15: Proportion du nombre de décès survenus au mois de mars 2017 et déclarés en fonction du délai de déclaration (mois)

Dans l'hypothèse que l'intégralité des décès survenus au mois de mars 2017 ait déjà été déclarée, 94,30% ont été déclarés avec un délai inférieur ou égal à 12 mois. Et ce n'est qu'après 35 mois que l'intégralité des décès a été déclarée.

¹⁴ Citation de l'article 82 de la directive Solvabilité II

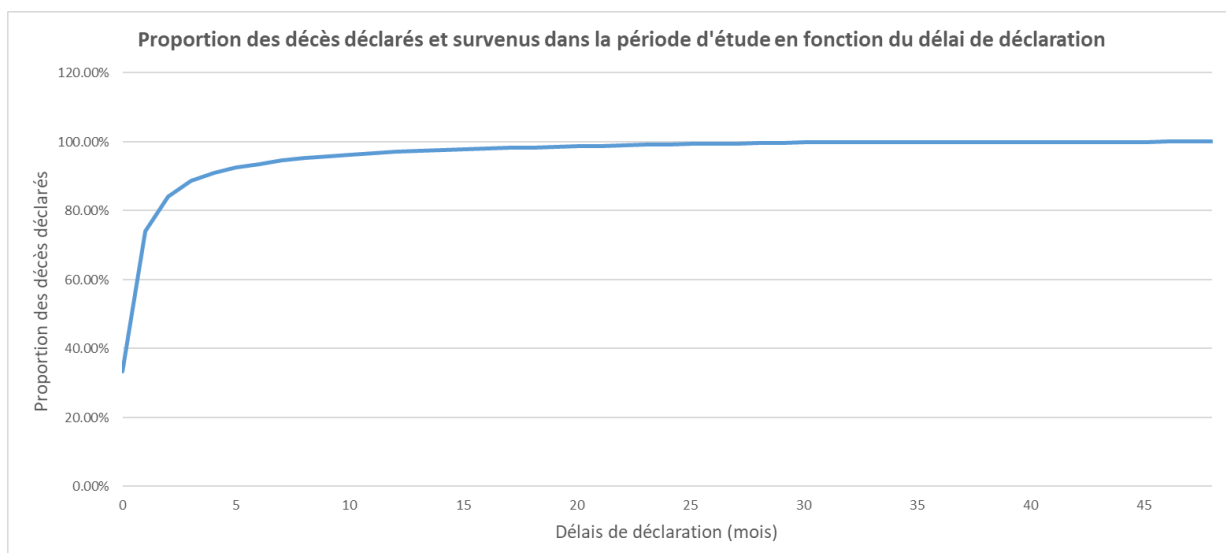


Figure 16 : Proportion des décès déclarés et survenus dans la période d'étude en fonction du délai de déclaration

Dans la période d'étude (mars 2017 à mars 2021), 97,04% des décès ont été déclarés au bout de 12 mois.

Min	1 ^{er} quartile	Médiane	Moyenne	3 ^{ème} quartile	Max
0	0	1	1,9	2	46

Figure 17 : Statistiques descriptives des délais de déclaration de décès (mois)

L'analyse descriptive des délais de déclaration permet de confirmer, qu'en général, les décès sont déclarés dans des délais relativement raisonnables (75% des décès déclarés avant 2 mois après la survenance du décès).

Ces données feront l'objet d'une étude plus approfondie dans les parties suivantes lorsqu'elles seront utilisées dans des modèles de provisionnement non-vie.

Chapitre 2 – Les méthodes de provisionnement par triangularisation

Dans ce chapitre du mémoire, des méthodes classiques de provisionnement pour sinistres seront employées à des fins d'estimation du nombre de déclarations tardives de décès. Seules les techniques de provisionnement non-vie applicables à des triangles de développement de nombre de sinistres pourront être appliquées ici.

2.1 – Triangle de développement

Dans le reste de ce mémoire, les notations suivantes seront adoptées :

$i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$: période de survenance des décès (en ligne)

$j \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$: délai de déclaration du décès, période de développement (en colonne)

n : nombre de périodes de développement (ou de survenance) étudiées

$X_{i,j}$: nombre de décès survenus dans la période i et déclarés après un délai de j périodes

Le triangle de développement sera constitué avec des périodes mensuelles. En effet, même si, en général, les méthodes classiques de provisionnement sont appliquées sur un pas de temps annuel, la perte d'information serait ici trop importante. Les statistiques descriptives reportées dans la partie 1.5 permettent de justifier que la grande majorité des déclarations de décès a lieu pendant les 12 mois suivants la survenance du décès.

2.2 – Chain Ladder

2.2.1 Principe de la méthode

La méthode de Chain Ladder est une méthode de provisionnement déterministe, très populaire dans le secteur du provisionnement grâce à sa simplicité de mise en œuvre. Cette méthode s'applique sur des triangles de développement cumulés qu'ils soient de paiements, de charges ou encore de nombre de sinistres. Dans le cadre de ce mémoire, l'étude consistera à appliquer la méthode Chain Ladder à l'aide de triangles de développement du nombre de décès déclarés dans le but d'estimer le nombre de décès survenus qui n'ont pas encore été signalés à la compagnie de réassurance.

Les notations suivantes seront appliquées dans la suite du mémoire :

- $C_{i,j}$: nombre de décès survenus au cours du mois i déclarés et ayant un délai de déclaration inférieur ou égal à j
- f_j : facteur de développement associé à la période de développement j
- R_i : nombre de décès survenus pendant la période i et non reportés

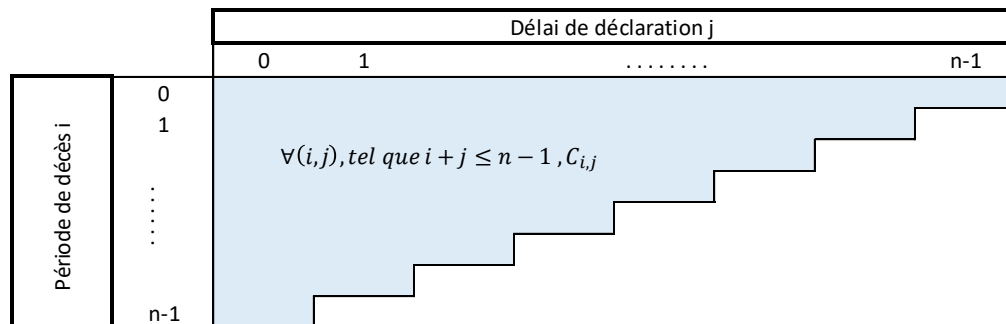


Figure 18 : Triangle de développement du nombre de décès déclarés (cumulés)

De manière générale, le principe de cette méthode est de considérer que l'évolution des montants cumulés du triangle d'une période à la suivante reste semblable pour toutes les périodes de survéance. En effet, la méthode Chain Ladder repose sur l'utilisation de facteurs de développement, également appelés *link ratios*, qui pour chaque période de développement caractérisent l'évolution des montants cumulés ; il s'agira ici des nombres de décès déclarés agrégés.

2.2.2 Hypothèses et méthodes de validation

• Hypothèses

La méthode de Chain Ladder repose sur deux hypothèses fondamentales qui sont les suivantes :

(H1) Indépendance des périodes de survéance

$$\forall i \neq k, \{C_{i,0}, \dots, C_{i,n-2}, C_{i,n-1}\} \text{ et } \{C_{k,0}, \dots, C_{k,n-2}, C_{k,n-1}\} \text{ sont indépendants}$$

(H2) Il existe des facteurs de développement $f_0, \dots, f_{n-2} > 0$ tels que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, C_{i,j+1} = f_j \times C_{i,j}$$

Corolaire de (H2) :

$$C_{i,n-1} = C_{i,n-i-1} \times f_{n-i-1} \times f_{n-i-2} \times \dots \times f_{n-2}$$

- **Méthodes de validation des hypothèses**

Il est important de noter que (H1) est une hypothèse forte. On considère que cette hypothèse est vérifiée lorsque les facteurs de développement individuels sont sensiblement stables par période de développement. Mack propose également un test d'absence d'effet calendaire afin de contrôler le respect de la condition ; cette approche sera détaillée dans l'Annexe 1.

Les facteurs de développement individuels sont définis comme suivant :

$$\forall (i, j) \text{ tel que } i + j \leq n - 1, \quad f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \quad (2.2.1)$$

Il est également possible de valider la seconde hypothèse (H2) par le biais de tests graphiques. L'hypothèse (H2) suggère que les couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_i$ sont liés par une relation linéaire. L'hypothèse sera alors considérée validée lorsque les couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_i$ seront alignés selon une droite passant par l'origine ou qu'un test de corrélation de Pearson déterminera que leur coefficient de corrélation est significatif.

Le test de corrélation de Pearson s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &: \text{les variables ne sont pas corrélées linéairement} \\ \mathcal{H}_1 &: \text{les variables sont corrélées linéairement} \end{aligned}$$

Ce test est paramétrique. En effet, a priori, il est supposé que le couple étudié suive une loi normale bivariée.

A un seuil α fixé :

- Si $p_{value} > \alpha$: Le test est non significatif au seuil α ; l'hypothèse \mathcal{H}_0 est conservée avec un risque de deuxième espèce β . Ce risque β sera accepté ; toutefois, son calcul ne sera pas mené.
- Si $p_{value} \leq \alpha$: Le test est significatif au seuil α ; l'hypothèse \mathcal{H}_0 est rejetée au profit de l'hypothèse \mathcal{H}_1 en acceptant le risque p_{value} .

2.2.3 Résultats

Selon la méthode Chain Ladder, si les deux hypothèses susmentionnées sont vérifiées, les facteurs de développement sont estimés comme suivant :

Estimateur des coefficients de développement :

$$\forall i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, n - 2 \rrbracket, \hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-2} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-2} C_{i,j}} \quad (2.2.2)$$

Ces estimateurs des facteurs de développement permettent de compléter le triangle de développement en estimant le nombre de décès dans la partie inférieure du triangle.

Le triangle est ainsi complété de la façon suivante :

$$\forall (i, j) \text{ tel que } i + j \geq n, \hat{C}_{i,j} = \hat{f}_j \times \hat{C}_{i,j-1} \quad (2.2.3)$$

On a également,

$$\forall (i, j) \text{ tel que } i + j \geq n, \hat{C}_{i,j} = \hat{f}_{j-1} \times \hat{f}_{j-2} \dots \times \hat{f}_{n-i-1} \times C_{i,n-i-1} \quad (2.2.4)$$

Ainsi, le nombre de décès non encore déclarés et survenus pendant la période de survenance i , R_i est estimé de la manière suivante :

$$\forall i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i-1} \quad (2.2.5)$$

Où : $C_{i,n-i-1}$ est le terme sur la diagonale du triangle de développement cumulé situé à la ligne i

2.2.4 Avantages et limites

La méthode Chain Ladder est souvent adoptée pour sa simplicité d'implémentation.

Par ailleurs, cette méthode étant sensible aux valeurs extrêmes, elle permet de capter les périodes de surmortalité (ex : pandémie Covid-19).

Toutefois, la méthode de Chain Ladder présente certaines limites. En effet, elle se doit d'être appliquée sur un portefeuille non seulement homogène mais également possédant un historique de données assez suffisant pour constituer un échantillon fiable.

Par ailleurs, \hat{R}_n est directement lié au seul nombre de décès déclarés pendant la dernière période de survenance ; si celui-ci est faible ou nul alors le résultat final de l'estimation du nombre de décès survenus ne peut être que très peu fiable.

De plus, le calcul de l'estimateur du dernier facteur de développement (\hat{f}_{n-2}) n'est fondé que sur deux observations ; il peut ainsi être très peu fiable et très instable.

En outre, la méthode de Chain Ladder étant déterministe, elle ne permet pas de préciser les erreurs de prédiction du modèle. Mack propose alors d'estimer ces erreurs avec sa méthode qui sera détaillée dans la partie suivante.

Enfin et surtout, supposer une absence d'effet calendaire dans l'étude du nombre de décès déclarés avec un pas de temps mensuel remet en cause la légitimité des résultats. En effet, au cours d'une année civile, les nombres de décès observés sont fortement influencés par des phénomènes saisonniers tels que l'hiver, la(les) canicule(s), la saison des gripes etc.... Par ailleurs, dans le contexte de cette étude, d'une année à l'autre, la population étant globalement vieillissante car fermée, les probabilités de décès des bénéficiaires auront une tendance croissante.

2.3 – Mack

2.3.1 Principe de la méthode

En 1993, Thomas Mack propose son modèle basé sur la méthode Chain Ladder et permettant d'estimer son erreur de prédiction. Ce modèle constitue, en fait, une version stochastique de la méthode Chain Ladder. Les prédictions sont ainsi identiques à celles faites par Chain Ladder, mais la méthode de Mack permet de mesurer l'incertitude de ces prédictions. De plus, il s'agit d'un modèle non-paramétrique.

2.3.2 Hypothèses et méthodes de validation

- **Hypothèses**

Le modèle proposé par Mack repose sur trois hypothèses fondamentales qui sont les suivantes :

(H1) Indépendance des périodes de survenance

$$\forall i \neq k, \{C_{i,0}, \dots, C_{i,n-2}, C_{i,n-1}\} \text{ et } \{C_{k,0}, \dots, C_{k,n-2}, C_{k,n-1}\} \text{ sont indépendants}$$

(H2) Il existe des facteurs de développement $f_0, \dots, f_{n-2} > 0$ tels que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, \quad \mathbb{E}(C_{i,j+1} | C_{i,j}, \dots, C_{i,0}) = \mathbb{E}(C_{i,j+1} | C_{i,j}) = f_j \times C_{i,j}$$

Corolaire de (H2) :

$$\mathbb{E}(C_{i,n-1} | C_{i,n-i-1}) = C_{i,n-i-1} \times f_{n-i-1} \times f_{n-i-2} \times \dots \times f_{n-2}$$

(H3) $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, \exists \sigma_j$ tel que :

$$\mathbb{V}(C_{i,j+1} | C_{i,j}, C_{i,j-1}, \dots, C_{i,0}) = \mathbb{V}(C_{i,j+1} | C_{i,j}) = \sigma_j^2 \times C_{i,j}$$

Où σ_j est un paramètre inconnu et qui sera estimé

- **Méthodes de validation des hypothèses**

- Première hypothèse :

Cette hypothèse est identique à l'hypothèse (H1) de Chain Ladder : il est possible de confirmer le respect de cette condition comme explicité dans la partie 2.1.2. Toutefois, en 1994, Mack proposa un test de vérification d'absence d'effet calendaire, dont le principe sera détaillé dans l'Annexe 1. Ce test consistera simplement en l'étude des facteurs de développement individuels afin de déceler d'éventuelles tendances sur les diagonales du triangle de développement du nombre de décès déclarés.

➤ Deuxième hypothèse :

En 1994, dans son article “*Measuring the variability of chain ladder reserve estimates*”, Mack proposa un test de corrélation des facteurs de développement. (H2), et plus particulièrement son corollaire, suppose que l'évolution du nombre de décès déclarés ne dépend que du délai de déclaration. Il est donc supposé que les facteurs de développement soient décorrélés. Le principe de ce test introduit par Mack est d'étudier la corrélation entre les facteurs de développement individuels situés dans les colonnes consécutives du triangle, deux à deux, mais également d'étudier une corrélation éventuelle au sein du triangle dans son intégralité.

Par souci de simplicité, il est également possible de valider la deuxième hypothèse de Mack comme celle de Chain Ladder (cf 2.1.2)

➤ Troisième hypothèse :

Selon les (H2) et (H3), les résidus du modèle $(e_{i,j})$ peuvent être définis comme ci-dessous :

$$e_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - f_j \times C_{i,j}}{\sqrt{\sigma_j^2 \times C_{i,j}}} \quad (2.3.1)$$

Ainsi, il est également possible d'introduire les résidus standardisés :

$$r_{i,j} = \frac{e_{i,j}}{\sigma_j} = \frac{C_{i,j+1} - f_j \times C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}} \quad (2.3.2)$$

De cette manière, il est possible de valider (H3) en s'assurant graphiquement que les couples $(C_{i,j}, r_{i,j})_{i,j}$ ne présentent aucune tendance. Dans le cas où, cela serait vérifié, cela signifierait que les hypothèses (H2) et (H3) agrègent l'intégralité de l'information traduisant l'évolution des $(C_{i,j})_{i,j}$.

2.3.3 Résultats

Dans ce modèle, Mack propose une estimation de la variabilité des estimations à l'ultime par période de développement :

$$\hat{\sigma}_j = \begin{cases} \frac{1}{n-j-2} \times \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2 ; \forall j \in \llbracket 0, n-3 \rrbracket \\ \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{n-3}^4}{\hat{\sigma}_{n-4}^2} ; \hat{\sigma}_{n-4}^2 ; \hat{\sigma}_{n-3}^2 \right) ; j = n-2 \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Il démontre également que l'erreur quadratique dans la prédiction du nombre de décès non déclarés par période de survénance se décompose en deux volets :

$$\widehat{mse}_p(\hat{R}_i) = \underbrace{V(C_{i,n-1} | \mathcal{D}_n)}_{\text{Erreur du modèle}} + \underbrace{(\mathbb{E}(C_{i,n-1} | \mathcal{D}_n) - \hat{C}_{i,n-1})^2}_{\text{Erreur d'estimation}} \quad (2.3.4)$$

En notant : $\mathcal{D}_n = \{C_{i,j} \mid (i,j) \leq n-1\}$

Selon Mack, cette erreur quadratique par période de survénance est estimée à l'aide de la formule suivante :

$$\widehat{mse}_p(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n-1}^2 \times \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j \times \hat{C}_{i,j}} + \hat{C}_{i,n-1}^2 \times \sum_{j=n-i}^{n-2} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j} \times \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-j-1} C_{k,j}} \quad (2.3.5)$$

Avec $\hat{C}_{i,n-i-1} = C_{i,n-i-1}$ (terme de la diagonale)

Plus globalement, Mack estime l'erreur quadratique dans la prédiction du nombre de décès non déclarés totale comme détaillé ci-dessous :

$$\widehat{mse}_p(\hat{R}) = \sum_{i=1}^{n-1} \widehat{mse}_p(\hat{R}_i) + \hat{C}_{i,n-1} \times \left(\sum_{k=i}^{n-1} \hat{C}_{k,n-1} \times \sum_{j=n-i}^{n-2} \frac{2\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j} \times \frac{1}{\sum_{h=0}^{n-j-1} C_{h,j}} \right) \quad (2.3.6)$$

Enfin, il est possible d'estimer l'écart type du prédicteur \hat{R} :

$$\widehat{se}(\hat{R}) = \sqrt{\widehat{mse}_p(\hat{R})} \quad (2.3.7)$$

2.3.4 Avantages et limites

La méthode de Mack a l'avantage de mesurer l'incertitude des estimations prédites par la méthode de Chain Ladder.

Néanmoins, cette méthode présente quelques limites. En effet, elle est affectée par tous les inconvénients de la méthode Chain Ladder. De surcroît, cette méthode est essentiellement jumelée à Chain Ladder et ne peut être adoptée pour mesurer l'incertitude d'aucun modèle de provisionnement autre que Chain Ladder ; contrairement à l'approche *bootstrap* qui sera détaillée dans la section suivante.

2.4 – Bootstrap

2.4.1 Présentation et hypothèse fondamentale

Le principe de la méthode du *bootstrap* est de créer un plus grand nombre de données à partir de celles déjà disponibles. Ceci est rendu possible par un rééchantillonnage des données basées sur un tirage aléatoire avec remise. La méthode du *bootstrap* est une méthode paramétrique.

L'hypothèse fondamentale de cette méthode est la supposition que les éléments rééchantillonnés sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. La méthode de rééchantillonnage de *bootstrap* sera alors appliquée sur les résidus de Pearson calculés à partir du triangle des incréments dans l'objectif que cette hypothèse fondamentale soit respectée. En effet, en général, l'hypothèse d'indépendance n'est pas souvent vérifiée lorsque seuls les incréments des montants sont considérés.

2.4.2 Etapes de la méthode *bootstrap*

La méthode *bootstrap* sera appliquée sur le triangle de développement du nombre de décès déclarés agrégés.

Etape 1 : Estimation du triangle incrémental complété :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket^2, \quad \begin{cases} \hat{X}_{i,0} = \hat{C}_{i,0} \\ \hat{X}_{i,j} = \hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Où $\forall (i, j)$ tel que $i + j \leq n - 1$, $\hat{C}_{i,j} = C_{i,j}$

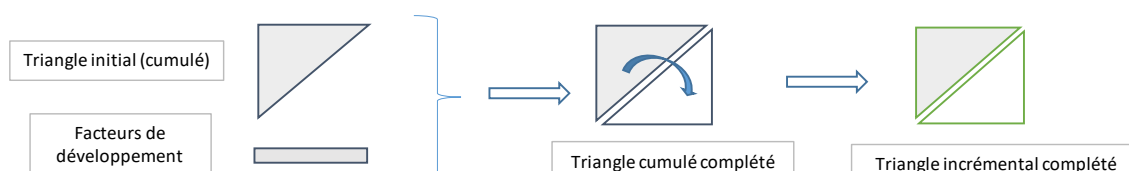


Figure 19 : Etape 1 de la méthode du *bootstrap*

Etape 2 : Estimation du triangle incrémental théorique :

Il s'agit de recalculer le triangle supérieur « théorique » à rebours à partir des facteurs de développement en partant des dernières observations situées sur la diagonale $(C_{i,n-i-1})_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$. Les éléments du triangle supérieur théorique cumulé sont estimés comme ci-dessous :

$$\hat{C}_{i,j}^* = \frac{\hat{X}_{n-1-i}}{\prod_{k=j}^{n-2} \hat{J}_k} \quad (2.4.2)$$

Avec $\hat{C}_{i,j}^*$: le montant cumulé théorique du triangle supérieur en position (i, j)

A partir de ce triangle, il est simple d'obtenir le triangle incrémental « théorique ». Les incréments théoriques estimés seront notés $(\hat{\mu}_{i,j})_{i,j}, \forall(i,j)$ tels que $i + j \leq n - 1$.

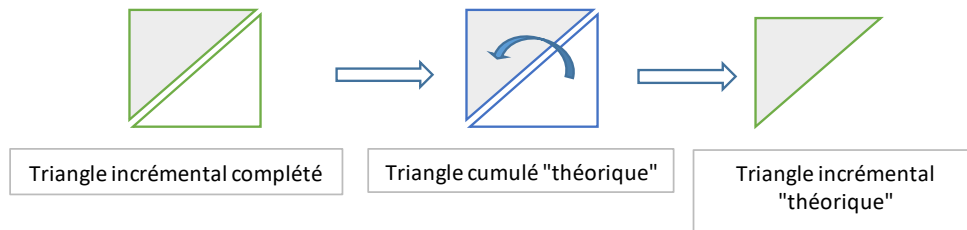


Figure 20 : Etape 2 de la méthode du bootstrap¹⁵

Etape 3 : Estimation du triangle des résidus de Pearson :

La notation suivante sera adoptée pour désigner les résidus de Pearson $r_{i,j} = \frac{X_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{\mathbb{V}(\hat{\mu}_{i,j})}}$

Il est supposé que $\hat{\mu}_{i,j}$ suive une loi de Poisson, ainsi $\mathbb{V}(\hat{\mu}_{i,j}) = \hat{\mu}_{i,j}$

Les résidus de Pearson non biaisés seront notés comme ci-après : $r_{i,j}^* = \sqrt{\frac{l}{l-p}} \times r_{i,j}$

Où :

- $p = 2n - 1$: le nombre de paramètres à estimer
- $l = \frac{n(n+1)}{2}$: le nombre d'agrégation de données dans le triangle

Etape 4 : Rééchantillonnage par tirage avec remise :

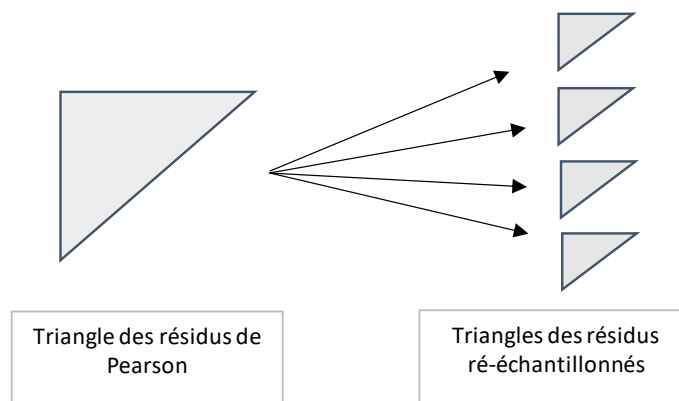


Figure 21 : Etape 4 de la méthode du bootstrap

Par tirage avec remise, K triangles des résidus rééchantillonnés sont générés. Le paramètre K est fixé par l'actuaire.

¹⁵ Les illustrations de cette section du mémoire sont inspirées du support de cours de « Provisionnement non-vie » enseigné au DUAS en 2020/21. (Piat, 2020)

Etape 5 : Estimation des triangles supérieurs incrémentaux complétés puis cumulés :

A partir des K triangles de résidus de *Pearson* non biaisés, on produit K triangles des nombres de décès théoriques incrémentaux estimés à l'aide de la formule suivante :

$$X_{i,j}^* = r_{i,j}^* \times \sqrt{\mathbb{V}(\hat{\mu}_{i,j})} + \hat{\mu}_{i,j} \quad (2.4.3)$$

Ensuite, les triangles du nombre de décès théoriques cumulés $(C_{i,j}^*)_{i,j}$ sont estimés.

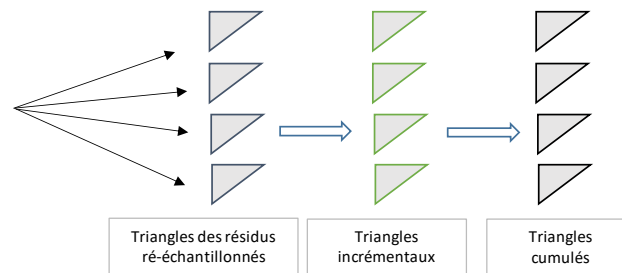


Figure 22 : Etape 5 de la méthode du bootstrap

Etape 6 : Application de la méthode de Chain Ladder aux K triangles cumulés

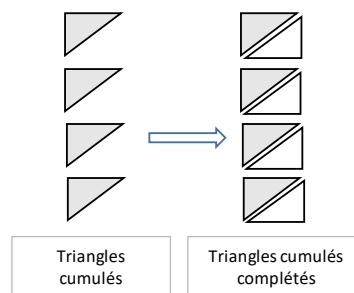


Figure 23 : Etape 6 de la méthode du bootstrap

Les estimations du nombre de décès non déclarés faites par Chain Ladder sur chacun de ces triangles permettent d'observer la distribution empirique des déclarations tardives. La prédiction finale du nombre de déclarations tardives est, en effet, la moyenne des prédictions faites sur les K triangles.

L'estimation de l'écart-type du prédicteur final $\hat{R}, \widehat{se}(\hat{R})$, est ainsi, l'écart-type des prédictions réalisées sur l'ensemble des K triangles.

2.4.3 Avantages et limites

La méthode du *bootstrap* présente de nombreux avantages. En effet, cette méthode est facilement implémentable et permet de s'affranchir d'hypothèses sur une famille de lois de probabilités. Par ailleurs, cette méthode produit des prédictions proches de celles de Chain Ladder tout en mesurant l'incertitude des prédictions. En effet, à l'aide de la méthode du *bootstrap*, on obtient la distribution et la volatilité de l'estimation du nombre de décès survenus et non déclarés. Par ailleurs, la méthode du *bootstrap* peut être appliquée en employant d'autres modèles que celui de Chain Ladder.

2.5 – Modèle de Schnieper

2.5.1 Présentation du modèle

Ce modèle déterministe développé par R. Schnieper en 1991¹⁶ a été introduit dans le cadre de la tarification d'un excédent de perte¹⁷ dans le but d'estimer la fréquence de survenance de sinistres en-dessous et au-dessus du seuil de rétention de la cédante, séparément, à l'aide de deux triangles distincts.

Dans l'article "*Separating true IBNR and IBNER claims*", les notations suivantes sont introduites :

- $N_{i,j}$: le nombre de sinistres survenus pendant la période i et ayant dépassé le seuil de rétention pendant la période de développement j
- $D_{i,j}$: nombre de sinistres survenus pendant la période i ayant dépassé le seuil de rétention avant $j - 1$ et repassant sous la priorité pendant la période j
- $H_k = \{N_{i,j}, D_{i,j} \mid i + j \leq k\}, \forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$
- E_i : l'exposition au risque au début de la période de survenance i

Cette méthode est souvent reprise pour des études d'IBNR en traitant séparément les IBNyR (au sein du triangle des termes $(N_{i,j})_{i,j}$) et les IBNeR (au sein du triangle des termes $(D_{i,j})_{i,j}$).

En effet, cette méthode emploie deux triangles avant de regrouper les informations dans le triangle final complété des $(\hat{C}_{i,j})_{i,j}$.

- Le N-triangle renseigne le nombre de nouveaux sinistres par période de survenance et de développement.
- Le D-triangle, lui, documente l'évolution des sinistres déjà déclarés dans les périodes précédentes.

Ici, ce modèle sera appliqué au nombre de déclarations tardives des décès. Dans le cadre de l'étude, le triangle des $(N_{i,j})_{i,j}$ représentera le nombre de décès survenus pendant la période i et ayant été déclarés avec un délai de déclaration de j périodes.

Le triangle des $(D_{i,j})_{i,j}$, assimilable au nombre de sinistres sujets aux IBNeR, sera nuls dans le cadre de l'étude.

Le modèle proposé par Schnieper repose sur les égalités suivantes :

$$\begin{cases} C_{i,0} = N_{i,0} & ; \forall i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket \\ C_{i,j+1} = C_{i,j} - D_{i,j+1} + N_{i,j+1} & ; \forall (i,j) \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, n - 2 \rrbracket \end{cases} \quad (2.5.1)$$

¹⁶ Introduction de la méthode par l'article intitulé "*Separating true IBNR and IBNER claims*"

¹⁷ L'excédent de perte est une couverture également appelée *Excess of Loss*. Il s'agit d'un type de traité de réassurance non-proportionnelle qui garantit l'indemnisation des sinistres dépassant le seuil de rétention de la cédante (« la priorité ») et jusqu'à une limite nommée la « portée ».

2.5.2 Hypothèses et méthodes de validation

- **Hypothèses**

Le modèle Schnieper repose sur les trois hypothèses fondamentales suivantes :

(H1) Il existe des facteurs positifs ou nuls $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ tels que $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$:

$$\mathbb{E}(N_{i,j} | H_{i+j}) = E_i \lambda_j$$

(H2) Il existe des facteurs $(\delta_0, \dots, \delta_{n-1})$ tels que $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \times \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\mathbb{E}(D_{i,j} | H_{i+j}) = C_{i,j-1} \delta_j$$

(H3) Indépendance des périodes de survénance

$\forall i \neq k, \{N_{i,j}, D_{i,j} \mid j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ et $\{N_{k,j}, D_{k,j} \mid j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ sont indépendants

- **Méthodes de validation des hypothèses**

- Première hypothèse :

La première hypothèse sera vérifiée à l'aide de tests graphiques. En effet, cette hypothèse suggère une relation de proportionnalité au sein des couples $(N_{i,j}, E_i)_i$ pour une période de développement j fixée.

- Deuxième hypothèse :

De même, l'hypothèse (H2) peut être vérifiée graphiquement. Effectivement, ici encore, les couples $(D_{i,j}, C_{i,j-1})_i$ sont censés être alignés selon une droite passant par l'origine. Dans le cadre de cette étude, de manière évidente, cette contrainte sera respectée avec $\delta_j = 0 \quad (\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket)$.

- Troisième hypothèse :

L'hypothèse de l'indépendance des périodes de survénance peut être vérifiée comme mentionné dans les parties précédentes.¹⁸

2.5.3 Résultats

Les estimateurs sans biais des paramètres $(\lambda, \delta)_j$ introduits par la méthode sont les suivants :

$$\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} N_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j} E_i} \quad (2.5.2)$$

¹⁸ Les méthodes de validation de l'hypothèse d'indépendance des périodes de survénance sont détaillées dans les sections 2.2.2 et 2.3.2.

$$\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \hat{\delta}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} D_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j}} \quad (2.5.3)$$

De plus, les variances de ces estimateurs respectent les égalités suivantes :

$$\mathbb{V}(\hat{\lambda}_j) = \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=0}^{n-j} E_i} \quad (2.5.4)$$

$$\mathbb{V}(\hat{\delta}_j) = \frac{\tau_j^2}{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j-1}} \quad (2.5.5)$$

Ces variances peuvent être calculées en utilisant les estimateurs sans biais des paramètres $(\sigma^2, \tau^2)_j$ suivants :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{1}{E_i} (N_{i,j} - \hat{\lambda}_j E_i)^2 \quad (2.5.6)$$

$$\hat{\tau}_j^2 = \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{1}{C_{i,j-1}} (D_{i,j} - \hat{\delta}_j C_{i,j-1})^2 \quad (2.5.7)$$

Enfin, les trois triangles sont complétés à l'aide des relations suivantes :

$$\forall (i,j) \text{ tels que } i+j \geq n-1, \quad \hat{N}_{i,j} = E_i \hat{\lambda}_j \quad (2.5.8)$$

$$\forall (i,j) \text{ tels que } i+j \geq n-1, \quad \hat{D}_{i,j} = \hat{C}_{i,j-1} \hat{\delta}_j \quad (2.5.9)$$

$$\hat{C}_{i,j+1} = \hat{C}_{i,j} (1 - \hat{\delta}_{j+1}) + E_i \hat{\lambda}_j \quad (2.5.10)$$

2.5.4 Avantages et limites

Le modèle de Schnieper présente l'avantage d'être simple à implémenter sur une feuille Excel. Par ailleurs, l'hypothèse que le nombre de décès survenus pendant une période de survénance i est proportionnelle à l'exposition au risque reflète bien la spécificité du contexte étudié dans lequel le portefeuille de polices bénéficiaires est fermé et donc globalement décroissant.

De plus, en 1991, une version stochastique du modèle est introduite par Liu et Verrall. Cette version de la méthode, qui sera détaillée dans l'Annexe 3, permet la mesure l'erreur de prédiction commise en estimant \hat{R} par l'approche Schnieper.

Par ailleurs, il est recommandé d'avoir recours à la méthode Schnieper dans les contextes où les déclarations tardives de sinistres sont courantes. Ainsi, cette méthode est parfaitement adaptée au contexte de notre étude.

Toutefois, il s'agit d'une méthode sensible à l'exposition au risque, qui, dans le contexte de cette étude ne peut qu'être estimée. Qui plus est, cette approche nécessite énormément d'informations supplémentaires pour pouvoir distinguer les déclarations tardives (IBNyR) et les aggravations tardives (IBNeR).

2.6 – Application des méthodes de provisionnement classiques

2.6.1 Chain Ladder : validation des hypothèses

- Hypothèse 1 :

La première hypothèse de Chain Ladder sera validée à l'aide d'une étude statistique prouvant la stabilité des coefficients de développement individuels par période de développement.

	j = 0	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	j = 5	j = 6	j = 7	j = 8	j = 9	j = 10
Moyenne	0,98	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Ecart-type	0,38	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
Coefficient de variation¹⁹ (%)	16,66	3,88	2,88	1,59	1,39	1,06	1,03	0,84	0,74	0,78	0,82

Figure 24 : Dispersion des coefficients de développement individuels par période de développement

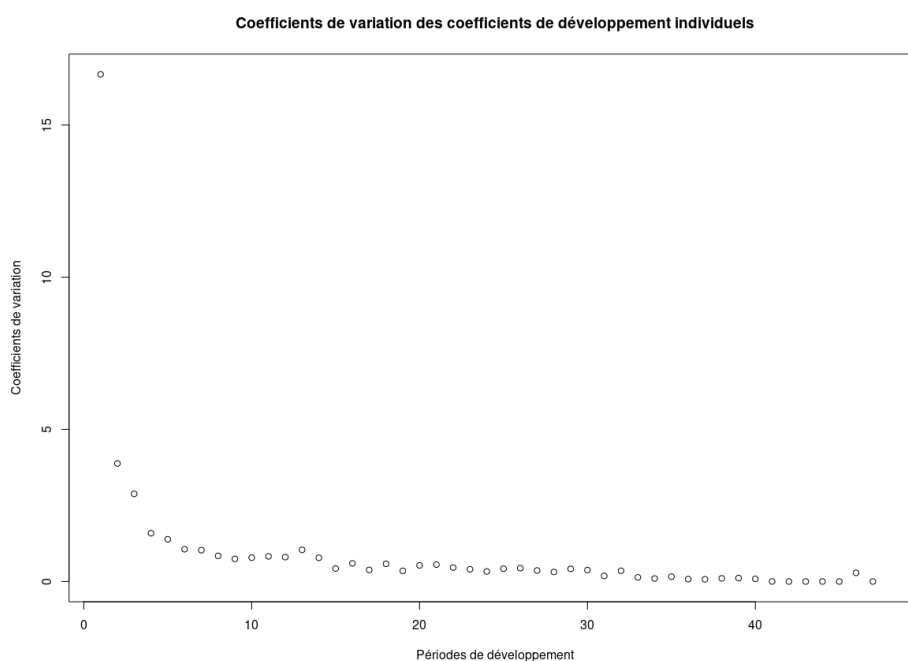


Figure 25: Coefficients de variation des facteurs de développement individuels en fonction des périodes de développement (mensuelles)

Le coefficient de variation est choisi comme une mesure de la dispersion des coefficients de développement par période de développement. Il est clair que les facteurs de développement individuels se stabilisent lorsque que les périodes de développement croissent. Hormis, le premier mois de développement ($j = 0$) pour lequel le coefficient de variation s'élève à 16,66%, les coefficients de variation individuels sont jugés relativement stables en fonction des délais de déclaration.

¹⁹ Coefficient de variation = $\frac{\text{Ecart-type}}{\text{Moyenne}}$

- Hypothèse 2 :

Dans un premier temps, il est pertinent d'observer graphiquement l'alignement des couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_i$.

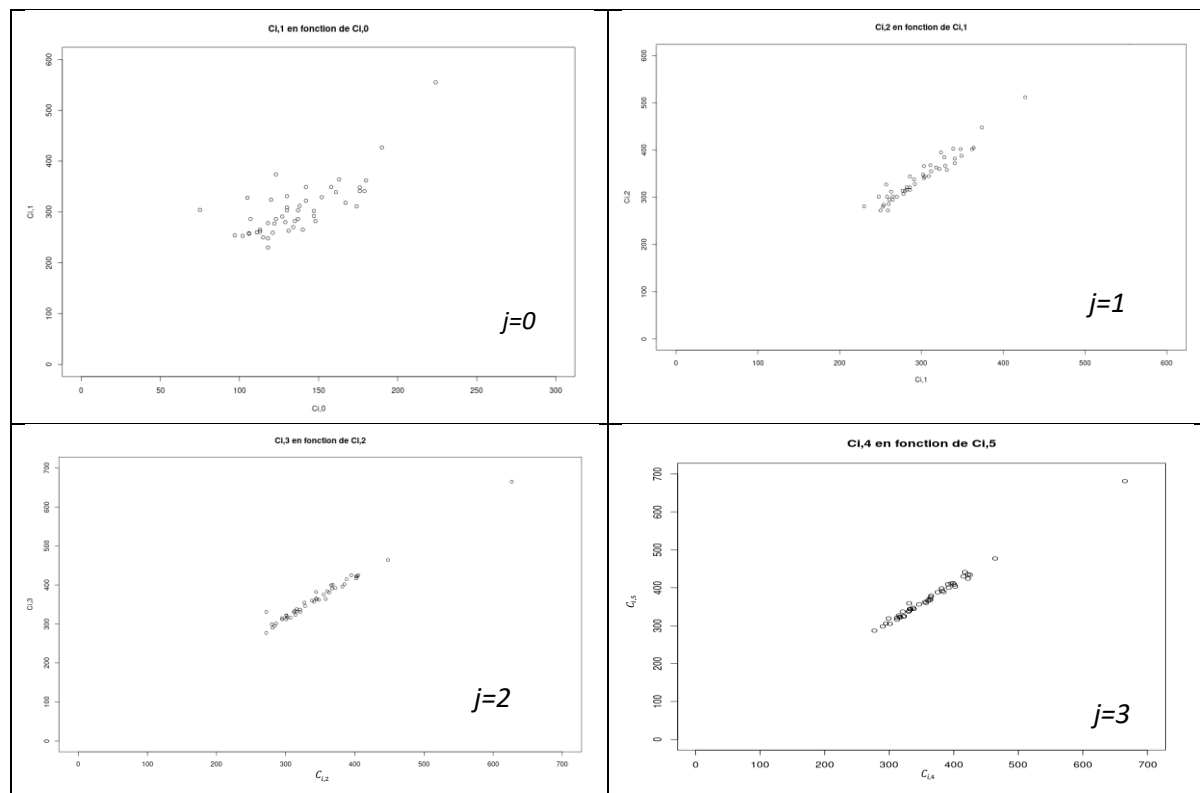


Figure 26 : $C_{i,j+1}$ en fonction de $C_{i,j}$ avec j fixé - Alignement des couples

Les couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_i$ semblent suffisamment alignés lorsque $j \neq 0$. Toutefois, il ne semble pas déraisonnable de passer outre d'autant plus que $(C_{i,0}, C_{i,1})_i$ présente, tout de même, une légère corrélation positive. L'étude se poursuit avec des tests de corrélation de Pearson afin de confirmer cette conjecture.

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$	$j = 8$
Coefficient de corrélation de Pearson	0,98	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
p-value du test de corrélation	8,59E-33	1,48E-38	5,41E-47	9,77E-49	4,30E-52	4,55E-51	3,48E-54	2,40E-53	6,74E-51
Significativité du test au seuil de 5%	Significatif	Significatif	Significatif	Significatif	Significatif	Significatif	Significatif	Significatif	Significatif

Figure 27 : Tests de corrélation entre les couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ avec j fixé et $\alpha = 5\%$

L'ensemble des tests réalisés sur l'intégralité du triangle de développement sont significatifs au seuil $\alpha = 5\%$. Toutefois, il est important de vérifier que les couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_i$ suivent des lois normales bivariées $\forall j \in \llbracket 0, n - 2 \rrbracket$ pour que les p-valeurs des tests obtenues puissent être interprétées.

On conjecturera du respect de cette contrainte à l'aide d'une analyse graphique. Lorsqu'un couple de variables suit une loi normale bivariée, la densité dudit couple doit prendre une forme de cloche en trois dimensions.

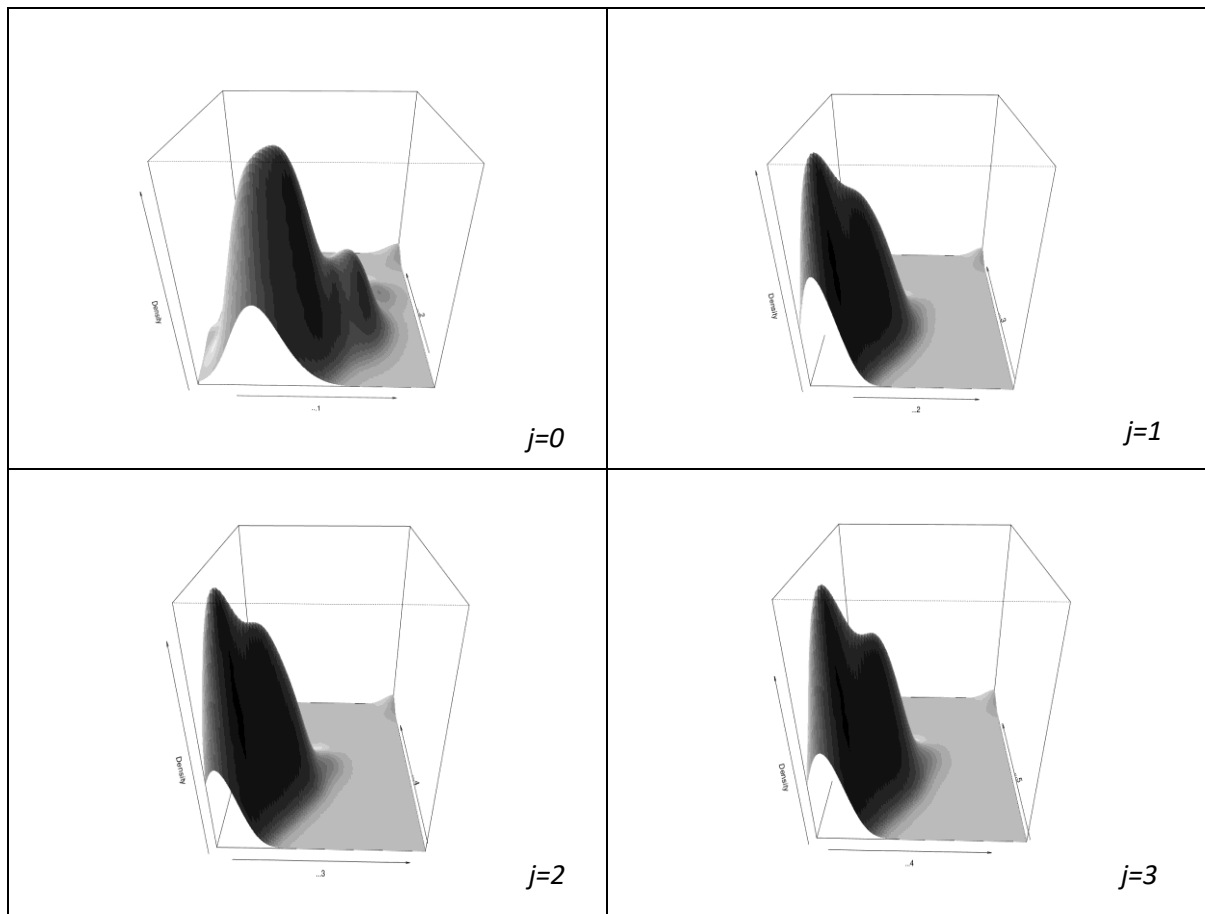


Figure 28 : Densités empiriques des couples $(C_{(i,j+1)}, C_{(i,j)})_i$ avec j fixé

Les graphiques obtenus ne s'apparentent pas exactement à des cloches, notamment lorsque $j = 0$. Ainsi, nous conjecturons que les couples ne suivent pas une loi normale bivariée. Cette conjecture sera, par la suite, confirmée par le test de normalité multivariée du package « MVN »²⁰ sur R. Par conséquent, les coefficients de corrélation de Pearson ne constituent qu'une mesure parmi les autres de l'intensité de la corrélation des couples $(C_{i,j+1}, C_{i,j})_i$. Les coefficients de corrélation étaient, toutefois, très proches de 1 et ayant une allure croissante selon les périodes de développement j , on conclut tout de même que l'hypothèse (H2) est vérifiée.

²⁰ Version 5.9 du package « *Multivariate Normality Tests* »

2.6.2 Méthode de Mack : validation des hypothèses et résultats ²¹

Validation des hypothèses

- Hypothèses 1 et 2 :

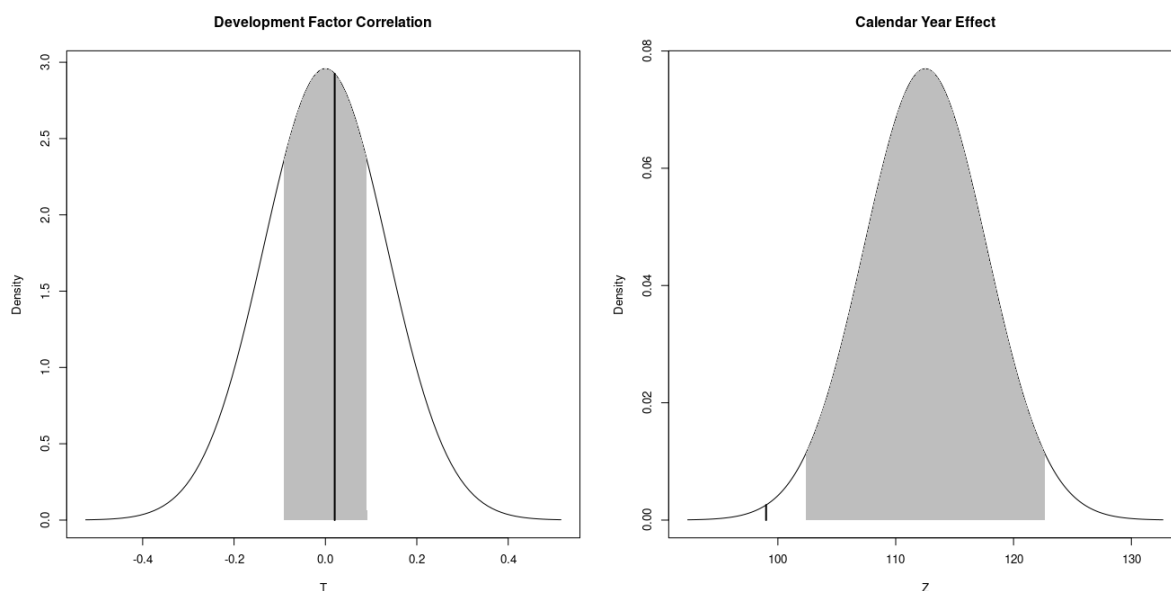


Figure 29 : Résultats des tests de validation des hypothèses (H1) (à droite) et (H2) (à gauche)

Le test d'absence d'effet calendaire proposé par Mack conclut que l'hypothèse (H1) n'est pas respectée. Toutefois, la statistique Z est telle que $Z = 99$ tandis que l'intervalle de confiance obtenu est le suivant :

$$IC_{95\%} = [102,36 ; 122,68]$$

La statistique étant tout de même proche de la borne inférieure de l'intervalle de confiance ; cette hypothèse étant très forte et son non-respect étant courant même dans des cadres d'application classiques, il est choisi de négliger sa non-validation et de, malgré tout, appliquer la méthode de Mack.

Le test de corrélation entre les coefficients de développement individuels subséquents permet de conclure que l'hypothèse (H2) du modèle de Mack est vérifiée. En effet, la statistique de test T introduite dans l'Annexe 2 se situe effectivement dans l'intervalle de confiance.

- Hypothèse 3 :

Quelques résultats des représentations graphiques effectués sont présentés ci-dessous. L'hypothèse sera jugée validée si les résidus ne présentent pas de tendance particulière.

²¹ La version 0.2.11 du *package* « Chain Ladder » sur R sera utilisée pour obtenir les résultats relatifs aux méthodes de Chain Ladder et Mack.

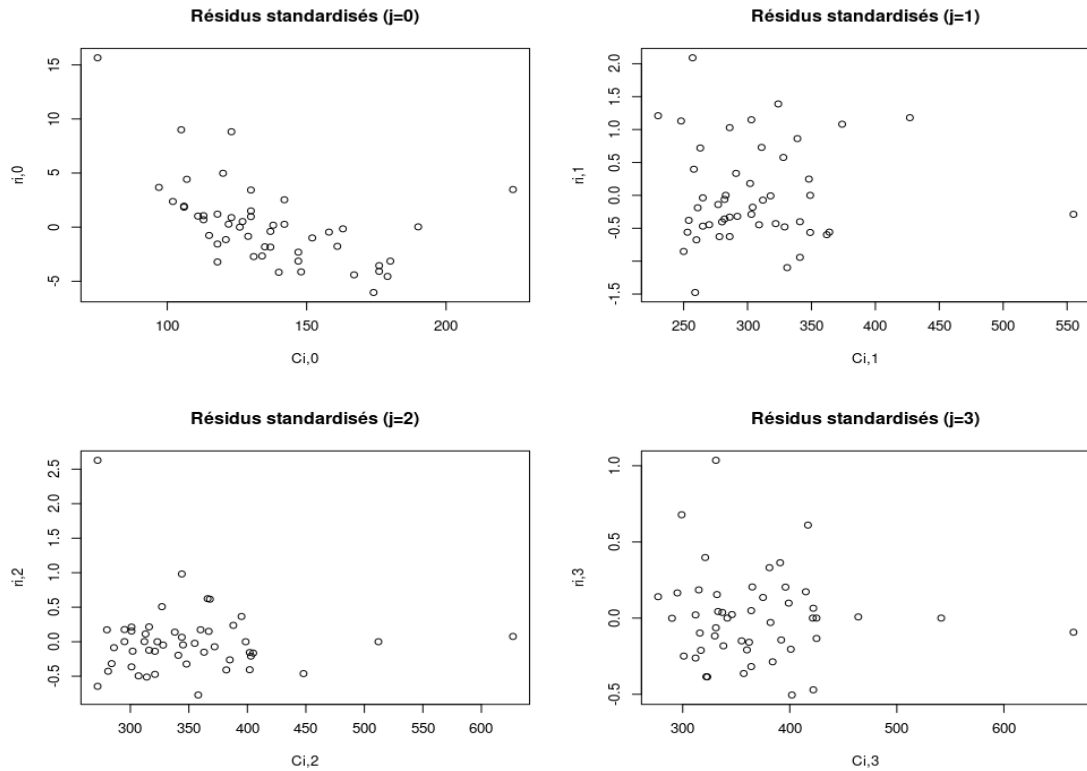


Figure 30 : $r_{(i,j)}$ en fonction de $C_{(i,j)}$ avec j fixé – Recherche de tendance

Hormis, pour le premier mois de développement ($j = 0$), on peut sensiblement affirmer que les résidus ne présentent pas de tendance particulière. Ici encore, il a été choisi de passer outre la faible corrélation négative présente dans la relation du couple $(C_{i,j}, r_{i,j})_i$ pour $j = 0$.

Résultats

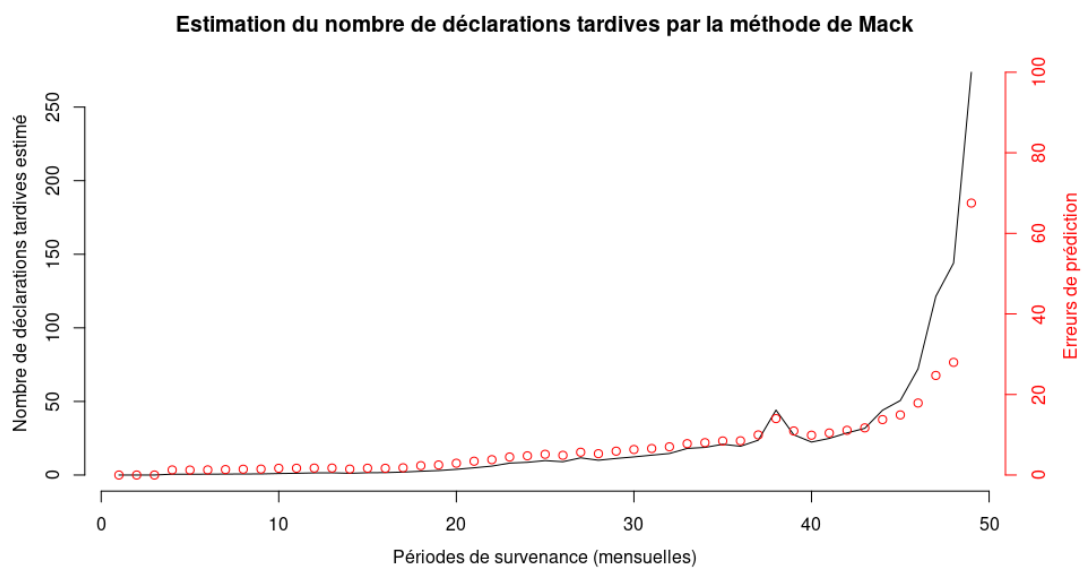


Figure 31 : Estimation du nombre de déclarations tardives (ligne continue) par la méthode de Mack et erreurs de prédictions (ronds)

Ci-dessus sont représentés les résultats des estimations du nombre de déclarations tardives selon la méthode de Mack ainsi que les erreurs de prédiction par période de survénance mesurée par $\overline{mse}_p(\hat{R}_i)$. On remarque que, comme attendu, les estimations du nombre de déclarations tardives croissent lorsque les périodes sont récentes. De plus, l'erreur de prédiction prend aussi une allure croissante, ce qui traduit une forte volatilité des prédictions concernant les périodes récentes étant donné qu'elles sont basées sur un faible nombre d'observations.

2.6.3 Bootstrap : résultats

L'application de la méthode *bootstrap* avec $K = 10\,000$ sur l'échantillon de données permet l'obtention des résultats suivants :

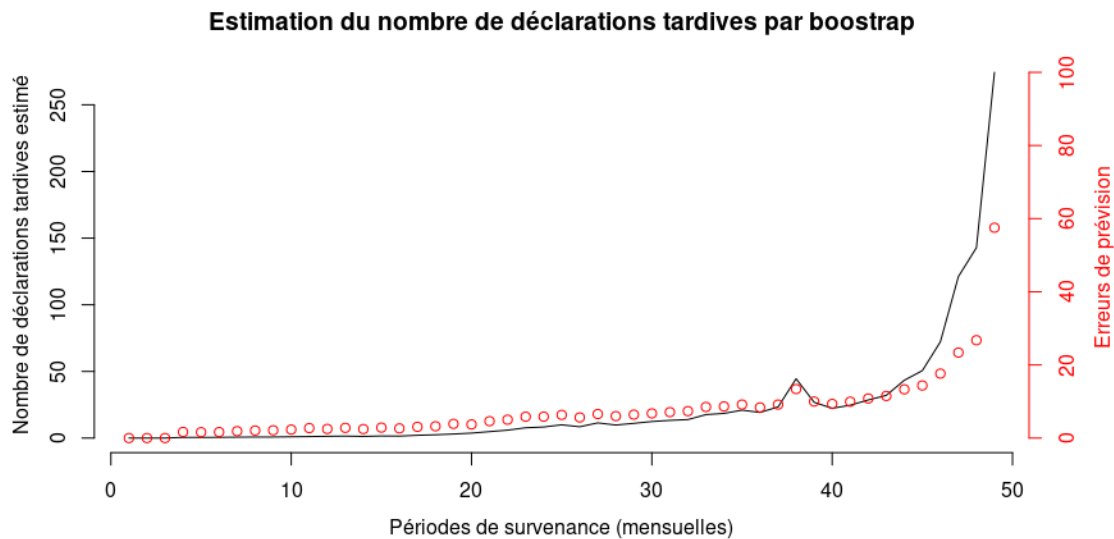


Figure 32 : Estimations du nombre de déclarations tardives (ligne continue) par bootstrap et erreurs de prédictions (ronds)

De même, ici encore, on observe que les périodes récentes présentent non seulement des prédictions mais aussi des erreurs de prédictions estimées élevées.

2.6.4 Méthode de Schnieper : validation des hypothèses et résultats

Validation des hypothèses

Etant donné le contexte de l'étude et les travaux menés précédemment, seule l'hypothèse (H1) se doit d'être validée. Cette hypothèse sera alors jugée vérifiée si les représentations graphiques des couples $(N_{i,j}, \hat{E}_i)_i$ sont sensiblement stables.

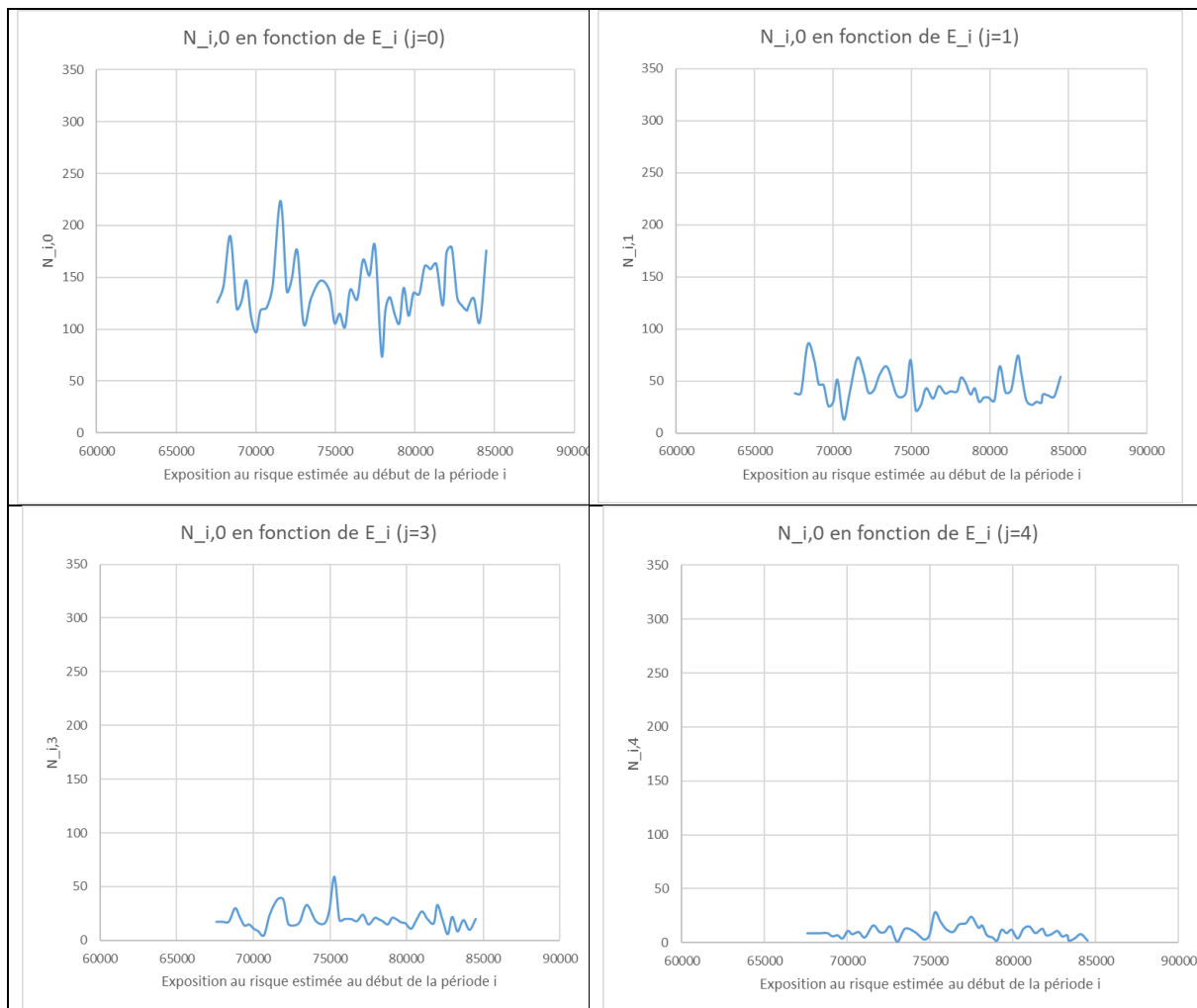


Figure 33 : Validation de la première hypothèse de la version stochastique du modèle de Schnieper

On observe que l'allure des couples $(N_{i,j}, \hat{E}_i)_i$ a tendance à se stabiliser lorsque la période de développement j croît. On choisit alors de considérer que cette contrainte est respectée.

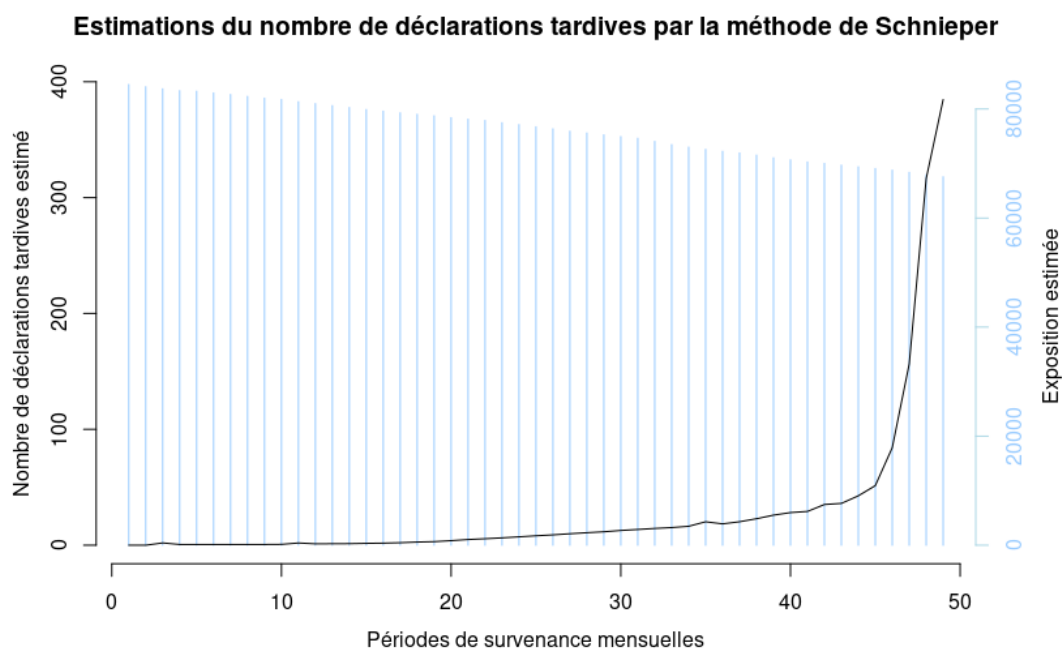


Figure 34 : Estimations du nombre de déclarations tardives par la méthode Schnieper (ligne continue) et exposition au risque (bleu ciel) par période de survénance mensuelle

Le cœur du problème traité est que l'évolution de la population rentière ne soit pas connue en temps réel. Ainsi, on considèrera que l'exposition au risque déclarée par la cédante approxime l'exposition réelle au risque. Cette exposition estimée a une tendance décroissante au cours du temps étant donné que le portefeuille réassuré est fermé ; la population bénéficiaire est ainsi foncièrement décroissante.

Les prédictions du nombre de déclarations sont, ici encore, cohérentes car croissantes avec les périodes de survénance.

2.6.5 Comparaison des résultats

Méthode	Bootstrap	Chain Ladder	Mack	Schnieper
Estimation du nombre total de décès survenus non reportés	1 124,68	1 130,81	1 130,81	972,10
Erreur de prédiction $\overline{se}(\hat{R})$	104,624		105,30	126,23 ²²
Erreur de prédiction relative (%)	9,30%		9,31%	12,98%

Figure 35 : Comparaison des résultats des méthodes de provisionnement classiques

Les estimations selon les différentes méthodes classiques de provisionnement non-vie sont relativement proches. On remarque tout de même que les erreurs des prédictions commises par la méthode du *bootstrap* sont inférieures à celles de la méthode de Mack-Chain Ladder.

Les estimations les plus prudentes sont réalisées par la méthode Schnieper étant donné qu'elle produit l'estimation du nombre de déclarations tardives le plus faible. Son erreur de prédiction relative n'est que légèrement plus élevée que celles des méthodes basées sur l'approche Chain Ladder.

Comparaison des estimations du nombre de décès non déclarés par période de survenance

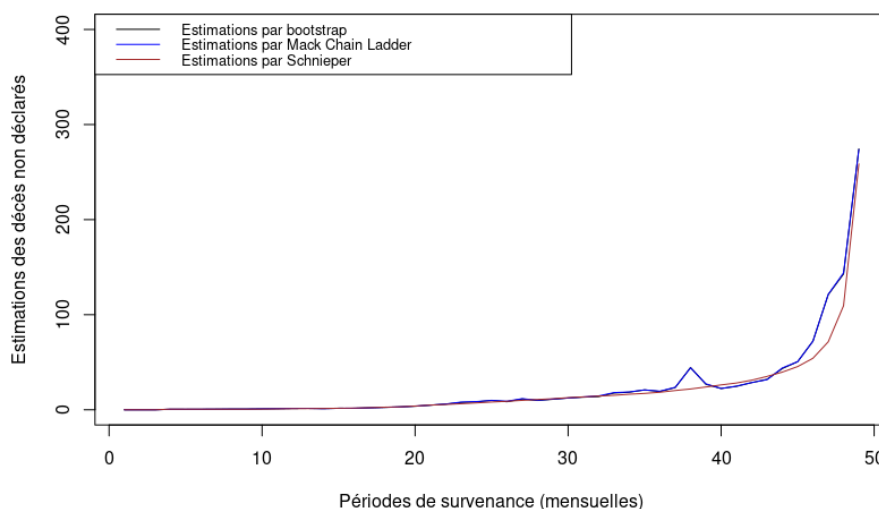


Figure 36 : Comparaison des estimations du nombre de décès non déclarés par période de survenance (mensuelle)

Les estimations ont la même allure globale peu importe la méthode. Toutefois, il faut noter que les estimations par *bootstrap* et Mack-Chain Ladder sont extrêmement proches, ceci est rassurant étant donné que leur fondement repose sur la même méthode. On remarque, par ailleurs, que les représentations graphiques des estimations réalisées par les méthodes Chain Ladder et *bootstrap* présentent un pic en période de survenance $i = 38$ et témoignent de la surmortalité observée au cours du mois d'avril 2020. On observe également que la méthode Schnieper est moins sensible aux valeurs extrêmes.

²² Les détails de la méthode de mesure de l'erreur de prédiction à l'ultime de la méthode de Schnieper sont explicités dans l'Annexe 3.

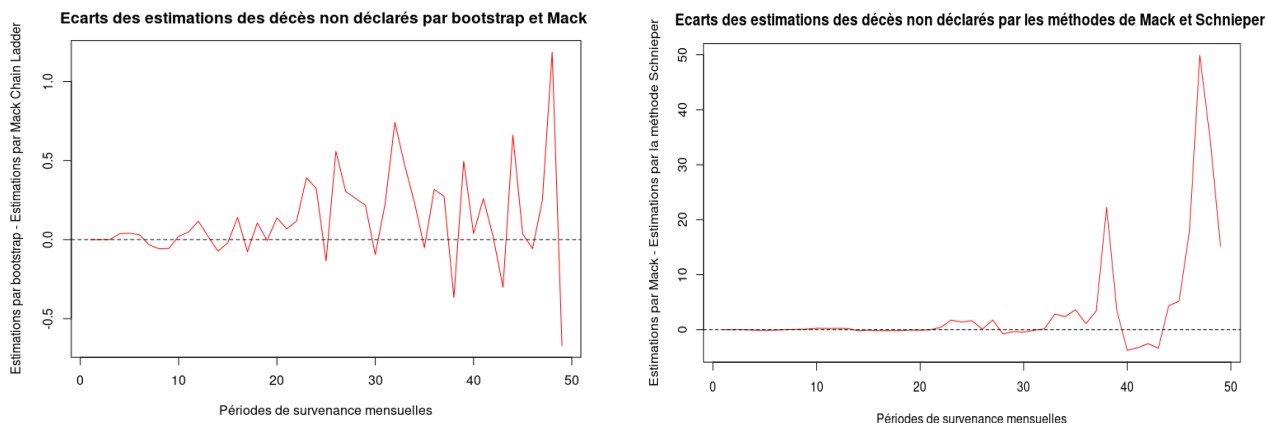


Figure 37 : Différences de prédictions entre les méthodes de provisionnement classiques (Mack et bootstrap à gauche ; Mack et Schnieper à droite)

D'une part, le graphique à gauche confirme que les estimations effectuées selon les principes des approches *bootstrap* et Mack-Chain Ladder sont sensiblement identiques. D'autre part, il est notable que les différences entre les estimations par Mack-Chain Ladder et Schnieper se creusent lorsque les périodes de survie sont récentes. Ceci traduit de l'instabilité des prédictions récentes mais également de la sensibilité de l'approche de Mack aux valeurs extrêmes. En effet, les écarts de prédiction présentent deux pics. Ces grands écarts sont observés pour les périodes de survie $i \in \llbracket 37; 39 \rrbracket$ (mars à mai 2020) et $i \in \llbracket 45; 47 \rrbracket$ (novembre 2020 à janvier 2021) et correspondent aux périodes de surmortalité déclarée pendant la première et la deuxième vague de la pandémie de Covid-19.

On conclut que, de manière générale, les méthodes classiques de provisionnement non-vie produisent des estimations similaires hors périodes exceptionnelles. Ces méthodes seront, dans le prochain chapitre, confrontées à une méthode innovante proposée par Parodi permettant de s'affranchir des triangles de développement.

Chapitre 3 – L’approche Pietro Parodi

3.1 – Principe de l’approche Parodi

3.1.1 Limites des méthodes de provisionnement par triangularisation

L’intégralité des techniques de provisionnement d’IBNR est considérée par Pietro Parodi comme « inadéquates dans un contexte de modélisation précise de la distribution de la sinistralité tardive »²³. En effet, l’agrégation des données par triangularisation cause une perte importante d’informations. Appréciables pour leur simplicité, les méthodes utilisant les triangles de développement ont le défaut de compresser les données de manière irréversible. Selon Parodi, il s’agit là du « péché originel » du provisionnement non-vie.

Par ailleurs, les méthodes de provisionnement par triangularisation sont sensibles aux valeurs extrêmes.

Qui plus est, les méthodes usuelles de provisionnement non-vie et celles de tarification évaluent les sinistres tardifs selon deux cadres distincts. En effet, la tarification adopte une approche tout autre en modélisant d’une part, la fréquence puis, les coûts des sinistres déclarés tardivement. Parodi propose alors une approche de provisionnement cohérente avec celle de la tarification.

3.1.2 Présentation de l’approche de Pietro Parodi

Pietro Parodi propose alors de modéliser le coût et la fréquence des sinistres non-vie déclarés tardivement puis de combiner les modèles par des simulations de Monte Carlo.

Selon lui, cette approche a l’avantage d’améliorer les prédictions et de quantifier l’incertitude des estimations sur la fréquence et le coût des sinistres tardifs. Par ailleurs, lors de la projection des sinistres à l’ultime, cette approche n’implique en aucun cas une agrégation des sinistres.

La démarche proposée par Parodi est réalisable en quatre étapes :

1. Calibrage de la loi suivie par les délais de déclaration empiriques
2. Estimation du nombre de sinistres tardifs et calibrage à une loi de fréquence (loi de Poisson ou loi binomiale négative)
3. Ajustement des coûts de sinistres tardifs observés à une loi statistique
4. Combinaison des lois utilisées pour modéliser la fréquence et le coût par des simulations de Monte Carlo²⁴

²³ Citation traduite extraite de l’abstract de l’ouvrage d’introduction de la méthode Parodi (Parodi, 2013)

²⁴ La méthode de Monte Carlo est conseillée par Parodi. Toutefois, toutes autres méthodes permettant l’obtention de la distribution des coûts des sinistres tardifs sont applicables.

3.1.3 Lien avec l'étude

L'approche décrite ci-dessus sera employée dans le but d'estimer le nombre de décès déclarés tardivement. C'est pourquoi, seules les deux premières étapes seront appliquées dans le cadre de cette étude.

3.2 – Méthodes de calibrage à une loi

Calibrer un échantillon de données à une loi de probabilités consiste à, dans un premier temps, choisir la loi permettant le meilleur ajustement aux données et dans un second temps, estimer le(s) paramètre(s) de ladite distribution.

Le *package* « *fitdistrplus* »²⁵ de la version 3.6.0 du logiciel R sera exploité dans la suite du chapitre 3.

3.2.1 Analyse graphique et statistiques descriptives

Le choix de la distribution paramétrique la plus appropriée pour notre échantillon peut être facilité non seulement par l'analyse graphique des données empiriques (histogramme, fonction de répartition et densité) mais aussi par une analyse statistique.

En effet, l'observation des statistiques descriptives telles que les valeurs minimales et maximales de l'échantillon, la médiane, l'espérance et la variance peuvent faciliter le choix de la distribution paramétrique optimale pour échantillon. De plus, l'étude des paramètres de forme de la distribution (coefficient d'asymétrie et coefficient d'aplatissement) permettent de réduire la liste des distributions candidates.

- **Coefficient d'asymétrie (*skewness*) :**

Le coefficient d'asymétrie représente le moment d'ordre 3 d'une variable aléatoire centrée et réduite. Lorsqu'il est négatif, il traduit une asymétrie causée par une queue de distribution orientée vers la gauche. S'il est positif, la queue de distribution s'étend vers la droite.

Pour un échantillon de données i.i.d tel que $(X_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} \sim X$, l'estimateur sans biais de la *skewness* est égal à :

$$\widehat{sk} = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \times \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \widehat{x}}{\widehat{s}} \right)^3 \quad (3.2.1)$$

- N : nombre d'observations
- \widehat{x} : estimateur non biaisé de l'espérance
- \widehat{s} : estimateur non biaisé de l'écart type

²⁵ Version 1.5 du *package* « *fitdistrplus* »

- **Coefficient d'aplatissement (kurtosis) :**

Le coefficient d'aplatissement représente le moment centré d'ordre 4 d'une variable aléatoire centrée et réduite. Pour une loi normale, le coefficient est nul. Lorsqu'il est positif, la densité de la distribution a une allure pointue. S'il est négatif, la représentation graphique de la densité a une allure aplatie.

Pour un échantillon de données i.i.d $(X_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket} \sim X$, l'estimateur sans biais est égal à :

$$\widehat{kr} = \frac{N(N+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \times \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \hat{x}}{\hat{s}} \right)^4 - \frac{3(N-1)^2}{(N-2)(N-3)} \quad (3.2.2)$$

3.2.2 Méthodes d'estimation paramétrique

Il existe plusieurs méthodes permettant de mener à bien les estimations paramétriques ; les 2 principales seront abordées dans cette partie.

Méthode du maximum de vraisemblance

La fonction vraisemblance de la loi \mathcal{L} s'exprime comme ci-dessous pour un N-échantillon de variables aléatoires indépendantes (X_1, X_2, \dots, X_N) de loi $\mathcal{L}(\theta)$:

$$L_N : (x_1, \dots, x_N ; \theta) \mapsto L_N(x_1, \dots, x_N ; \theta) = \prod_{i=1}^N \mathbb{P}_\theta(\{X_i = x_i\}) \quad (3.2.3)$$

L'estimation des paramètres d'une loi par la méthode du maximum de vraisemblance signifie choisir comme estimateurs les valeurs de ces paramètres qui rendent la fonction vraisemblance maximale ; c'est-à-dire maximiser la probabilité d'observer les données comme réalisation d'un échantillon de la loi de probabilité \mathbb{P}_θ .

Ainsi, l'estimateur du maximum de vraisemblance est défini comme suivant :

$$\theta^* = \text{Argmax}_\theta \{L_N(x_1, \dots, x_N ; \theta)\} \quad (3.2.4)$$

S'il existe, cet estimateur est unique.

Méthode des moments

Le principe de la méthode des moments est d'égaliser les moments théoriques par les moments empiriques correspondants.

Cette approche est souvent adoptée pour sa simplicité. En outre, elle peut être utilisée dans le cadre de l'initialisation des paramètres dans un processus itératif de la méthode du maximum de vraisemblance.

3.2.3 Critères de sélection de lois

Critère d'information d'Akaike (AIC)

Le critère d'information d'Akaike, plus connu par son sigle AIC, est un critère de qualité d'ajustement d'un modèle statistique et est égal à :

$$AIC = -2\log(\tilde{L}) + 2k \quad (3.2.5)$$

Où :

- k : le nombre de paramètres de la loi
- \tilde{L} : la vraisemblance maximisée

Le critère AIC utilise ainsi le maximum de vraisemblance en pénalisant le nombre de paramètres afin de privilégier la parcimonie.

Le modèle optimal est celui résultant du critère AIC le plus faible.

Critère d'information bayésien (BIC)

Le critère d'information bayésien est une dérivée du critère d'ajustement AIC. Toutefois, le BIC pénalise plus sévèrement le sur-paramétrage. Il se calcule comme ci-dessous :

$$BIC = -2\log(\tilde{L}) + k\log(n) \quad (3.2.6)$$

Ici encore, le modèle sélectionné doit minimiser le critère BIC.

Tests d'adéquation à une loi donnée basés sur la fonction de répartition empirique

Le principe des tests d'adéquation à une loi donnée est de décider si un échantillon de données est distribué selon une loi de probabilité déterminée. En fixant le seuil α d'erreur acceptable, le test précise si les écarts observés entre l'échantillon et la distribution théorique sont dus au hasard ou s'ils sont significatifs.

Soient :

- F_0 : fonction de répartition d'une loi donnée
- N : nombre d'observations
- F_N : fonction de répartition empirique
- α : le risque de première espèce (seuil de significativité du seuil). Ici, ce seuil est fixé à 5%.

Les tests d'adéquation à une loi donnée s'écrivent :

$$\mathcal{H}_0 : F_N = F_0$$

$$\mathcal{H}_1 : F_N \neq F_0$$

Distributions continues :

- **Statistique de Kolmogorov- Smirnov (KS) :**

La statistique du test de KS est définie comme suivant :

$$D_N = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_N(x) - F_0(x)| \quad (3.2.7)$$

Ce test consiste à rejeter l'hypothèse \mathcal{H}_0 lorsque $D_N \geq d_{N,1-\alpha}$ en acceptant le risque d'erreur α .

Ce seuil $d_{N,1-\alpha}$ est défini tel que $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}(D_N \geq d_{N,1-\alpha}) \leq \alpha$

La statistique de test mesure l'écart maximal entre la fonction de répartition empirique et celle de la loi de probabilité candidate. Le bon ajustement aux données de la loi choisie se traduit par une faible valeur de la statistique D_N .

- **Statistique de Cramer Von Mises (CVM) :**

Le test Cramer von Mises est sensiblement similaire à celui de Kolmogorov-Smirnov. Toutefois, la valeur de la statistique CVM est la suivante :

$$CVM_N = N \int_{-\infty}^{+\infty} (F_N(x) - F_0(x))^2 f_0(x) dx \quad (3.2.8)$$

Ici encore, la statistique mesure les écarts entre les fonctions de répartition empirique et théorique ; ces écarts se veulent être faibles.

- **Statistique d'Anderson-Darling (AD) :**

Pareillement, le test d'Anderson-Darling repose sur le même principe que le test KS. La statistique AD se définit comme suivant :

$$AD_N = N \int_{-\infty}^{+\infty} (F_N(x) - F_0(x))^2 \times \frac{f_0(x)}{F_0(1 - F_0(x))} dx \quad (3.2.9)$$

Ce test est plus sensible aux écarts dans la queue de distribution que les deux précédents. De la même manière, plus la valeur AD_N est faible, meilleur est l'ajustement de la loi choisie aux données.

Distributions discrètes :

- **Statistique du test du χ^2 :**

Soient :

– N : le nombre d'observations ($N \geq 50$)

– k : le nombre de modalités prises par la variable observée

Notons :

- $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, p_i = \mathbb{P}(X = i)$
- $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, n_i$: le nombre d'observations appartenant à la modalité i

Si $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, Np_i \geq 5$, alors :

$$\xi_N = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i} \quad (3.2.10)$$

Cette statistique mesure la distance relative entre la distribution connue et les observations de l'échantillon. Pareillement, une faible valeur de la statistique témoigne d'un bon ajustement aux données.

3.3 – Modélisation des délais de déclaration

3.3.1 Analyse statistique et ajustement

Dans une démarche de non-agrégation des données selon l'approche Parodi, les délais de déclaration seront étudiés selon un **pas de temps journalier**.

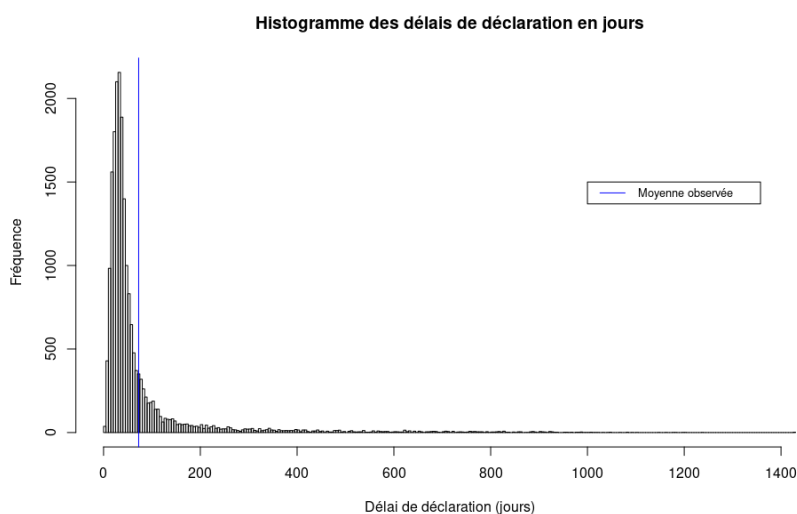


Figure 38 : Histogramme des délais de déclaration (jours)

Min	1 ^{er} quartile	Médiane	Moyenne	3 ^{ème} quartile	Max
2	26	38	72,58	62	1429

Figure 39 : Statistiques descriptives des délais de déclaration (jours)

Même si 75% des décès sont déclarés relativement rapidement (avant un délai de 62 jours), il ne faut surtout pas négliger les délais de déclaration élevés. En effet, dans notre échantillon, le délai maximal observé s'élève à 1492 jours.

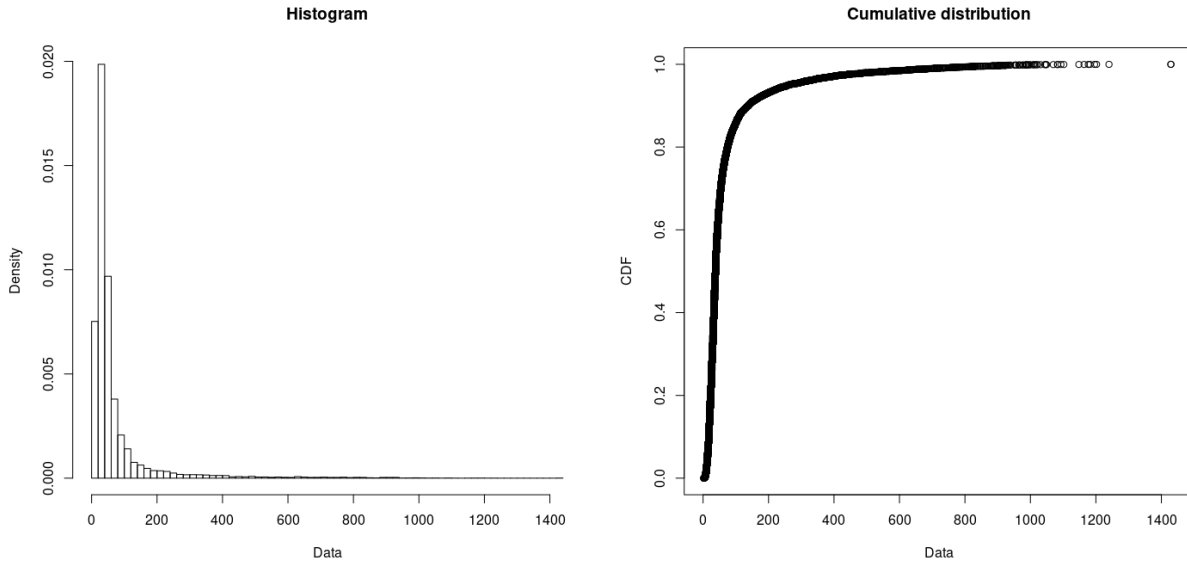


Figure 40 : Densité et fonction de répartition empiriques

La distribution empirique présente une queue légère à droite. Cette observation est confirmée par l'estimation du *skewness* observable ci-dessous.

La fonction *descdist*²⁶ permet l'observation des estimations des coefficients d'aplatissement et d'asymétrie. En plus, elle produit un graphique dit de « *Cullen & Frey* ». Ce type de représentation graphique permet la comparaison des coefficients *skewness* et *kurtosis* de la distribution empirique avec celles théoriques de nombreuses lois. Il s'agira de la première étape d'élimination de lois candidates à la modélisation de l'échantillon étudié.

	\widehat{sk}	\widehat{kr}
Estimation	4,67	29,22

Figure 41 : Estimations des paramètres de forme de la distribution empirique

Sur le graphique *Cullen & Frey*, le couple $(\widehat{sk}^2, \widehat{kr})$ de la distribution empirique est représenté par un point bleu. Parallèlement, on observe les couples $(skewness^2, kurtosis)$ qui caractérisent les lois connues. Si pour certaines lois, ces coefficients prennent une valeur unique (lois normale, uniforme, exponentielle et logistique) ; pour d'autres, ils peuvent varier dans des sous-ensembles de \mathbb{R}^2 et sont représentés par des droites ou des zones grisées.

Dans le but de réduire l'incertitude dans les estimations de \widehat{sk} et \widehat{kr} , l'algorithme du *bootstrap* peut être exécuté. Les estimations bootstrappées sont représentées par le nuage de points jaunes ; ces points seront ici au nombre de 10 000.

²⁶ Fonction *descdist* de la version 1.5 du package « *fitdistrplus* »

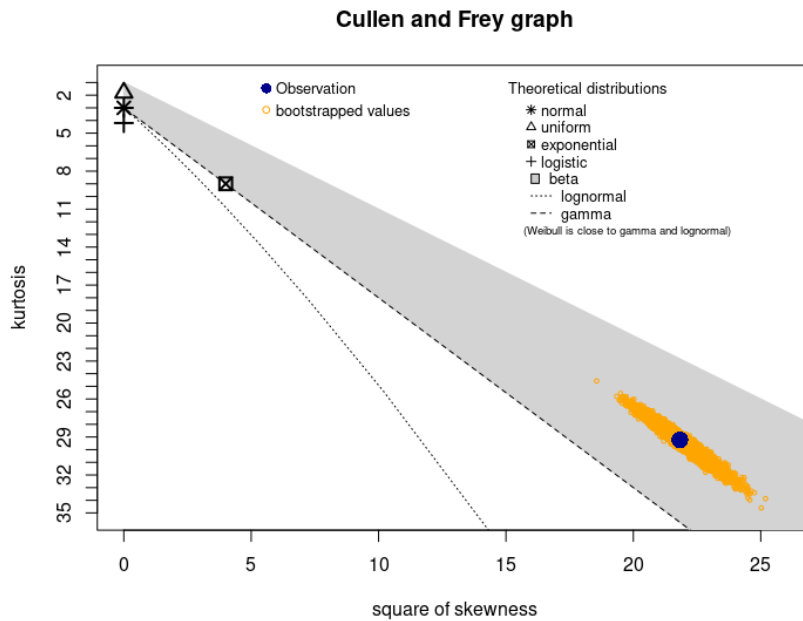


Figure 42 : Graphique de Cullen & Frey des délais de déclarations observés (jours)

Le graphique de *Cullen & Frey* permet de conjecturer de la non-conformité des lois normale, uniforme, exponentielle et logistique à l'étude.

Ainsi, il a été décidé de poursuivre l'étude en examinant l'ajustement à l'échantillon des distributions positives et non bornées à droite des lois Gamma, log-normale et de Weibull. La loi Beta est écartée de l'étude étant donné qu'il s'agit d'une distribution bornée par le sous-ensemble $[0,1]$.

Lois candidates	AIC	BIC	KS	CVM	AD
Gamma	211 281,5	211 297,3	0,19	244,12	1279,16
Log normale	202 160,2	202 176,0	0,11	65,92	374,63
Weibull	211 270,9	211 286,7	0,16	215,05	1224,84

Figure 43 : Comparaison des critères d'ajustement aux lois

Ci-dessus sont répertoriées les valeurs de plusieurs critères d'ajustement à l'échantillon pour les lois candidates et dont les paramètres ont été estimés par la méthode du maximum de vraisemblance.

Selon, l'intégralité des critères de choix mentionnés dans la Figure 38, la loi log-normale est jugée la plus adaptée à nos observations.

Par ailleurs, ce jugement est confirmé par les observations graphiques suivantes. La fonction de répartition de la loi log-normale est la plus similaire à celle empirique parmi les trois distributions. De plus, les diagrammes « quantile-quantile » et « probabilité- probabilité » confirment la conjecture.

Dans la suite du mémoire, **il sera supposé que les délais de déclaration des décès suivent une loi log-normale.**

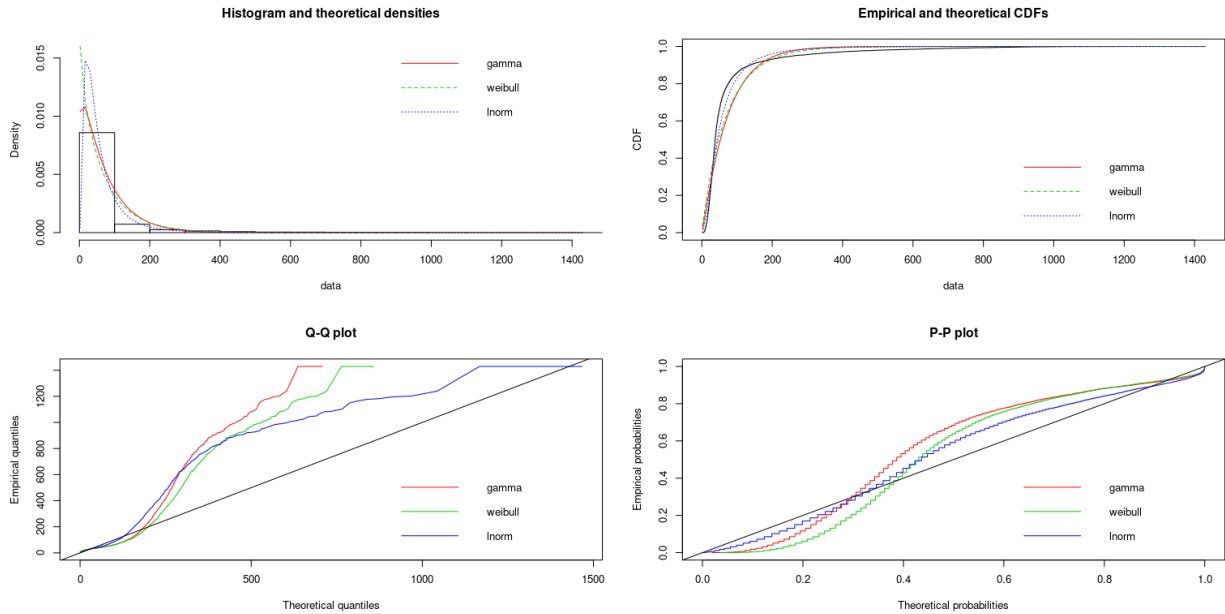


Figure 44 : Critères graphiques d'analyse de la qualité de l'ajustement des lois candidates

La fonction de répartition de la loi log-normale est la suivante :

$$(x, \mu, \sigma) \mapsto]0; +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$$

$$F_X(x, \mu, \sigma) \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad (3.3.1)$$

Où la fonction d'erreur de Gauss est définie par :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (3.3.2)$$

3.3.2 Qualité et incertitude du calibrage de la loi choisie

Méthode d'estimation paramétrique	AIC	BIC	KS	CVM	AD
Maximum de vraisemblance	202 160,2	202 176,0	0,11	65,92	374,63
Méthode des moments			0,15	145,01	858,78

Figure 45 : Choix de la méthode d'estimation paramétrique

À l'unanimité, les statistiques des tests KS, CVM et AD concluent que la méthode d'estimation paramétrique permettant le meilleur ajustement aux données est celle du maximum de vraisemblance.

Paramètres	Estimation	Ecart-type
Espérance (μ)	3,7769601	0,0061265
Ecart-type (σ)	0,8665308	0,0043321

Figure 46 : Estimations des paramètres de la loi log-normale par la méthode du maximum de vraisemblance

Soit T la variable aléatoire du délai de déclaration d'un décès en jours ; T est telle que :

$$T \sim \mathcal{LN}(3,7769601, 0,8665308^2)$$

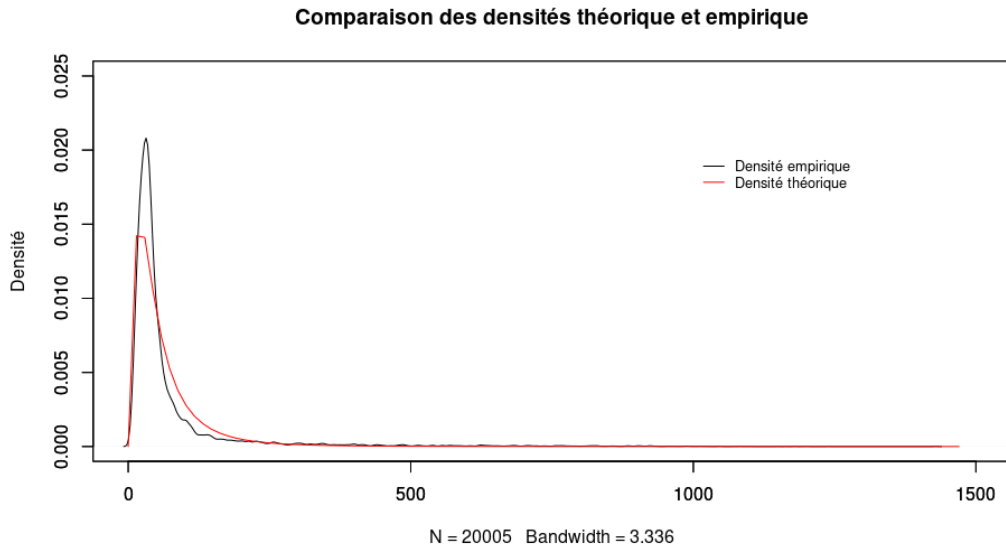


Figure 47 : Analyse de la qualité de l'ajustement de la loi choisie selon les fonctions densité

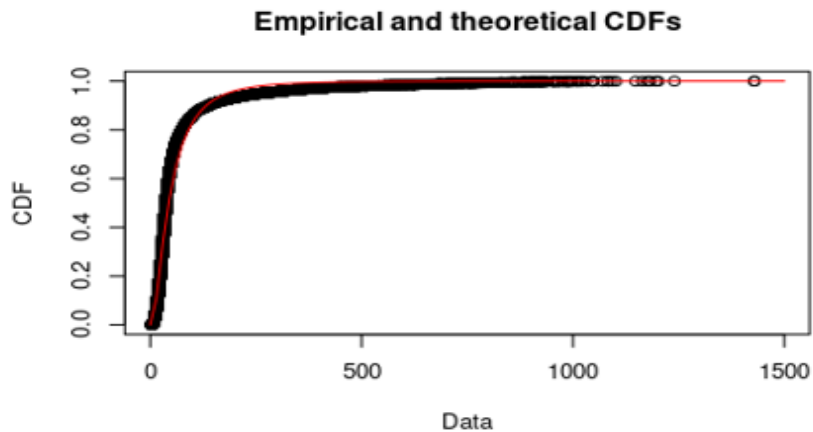


Figure 48 : Analyse de la qualité de l'ajustement de la loi choisie selon les fonctions de répartition

L'observation des fonctions densités des lois empirique et théorique révèle un défaut d'ajustement pour les délais de déclaration courts. La démarche de l'étude n'étant pas la prédiction du nombre de déclarations tardives quotidien mais bien mensuel ; l'étude sera tout de même poursuivie.

En effet, on remarque que lorsque les délais de déclarations sont inférieurs à 60 jours (ou 2 mois), les fonctions densité et de répartition théoriques sont inférieures à celles empiriques

3.3.3 Correction du biais

Dans la partie précédente, les délais de déclaration observés ont été ajustés à la loi la plus adaptée à l'échantillon. Cet échantillon est limité à une fenêtre d'étude de 5 années d'observations. De manière évidente, une telle distribution empirique présente un biais vers les délais de courtes durées. En effet, aucun délai de plus de 5 ans ne peut être observé au sein de cet échantillon.

Dans cette partie, une méthode de correction du biais proposée par Parodi sera détaillée :

Soit :

– T : la variable aléatoire représentant le délai de déclaration d'un décès (jours)

– T_0 : la variable aléatoire représentant le jour de survenance du décès

Ainsi, $T + T_0$ est la variable aléatoire représentant la date de déclaration du décès.

– f_a : la fonction densité de la loi suivie par les délais de déclaration observés sur la période $[0; a]$

– f : la fonction densité de la loi suivie par les délais de déclaration après correction du biais

Dans la partie précédente, le travail a consisté en l'estimation de f_a . Cette fonction peut être définie comme suivant :

$$f_a(t) = \mathbb{P}(T = t | T + T_0 \leq a) \quad (3.3.3)$$

A l'aide du théorème de Bayes, le développement suivant est déduit :

$$f_a(t) = \frac{\mathbb{P}(T + T_0 \leq a | T = t) \times \mathbb{P}(T = t)}{\mathbb{P}(T + T_0 \leq a)} \quad (3.3.4)$$

$$f_a(t) = \frac{\mathbb{P}(T_0 \leq a - t) \times \mathbb{P}(T = t)}{\mathbb{P}(T + T_0 \leq a)} \quad (3.3.5)$$

Par simplicité, il sera supposé que le décès puisse survenir dans l'intervalle $[0; a]$ de manière uniforme. De cette manière, on a :

$$\mathbb{P}(T_0 \leq a - t) = 1 - \frac{t}{a} \quad (3.3.6)$$

Posons $G(a) = \mathbb{P}(T + T_0 \leq a)$

On obtient l'expression suivante de la fonction f_a , car, par définition : $f(t) = \mathbb{P}(T = t)$.

$$f_a(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{a}\right) f(t) \\ G(a) \end{cases} \text{ si } t < a \quad (3.3.7)$$

$$0 \text{ sinon}$$

D'où :

$$\forall t < a, f(t) = \frac{G(a)f_a(t)}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)} \quad (3.3.8)$$

La correction du biais a pour impact d'épaissir la queue de distribution. Plus l'échantillon observé est limité en termes de nombre d'observations et de l'étendue de la période étudiée, plus il est important de réaliser cet ajustement. Ici, l'impact de cette correction devrait être relativement faible étant donné la taille et l'étendue de l'échantillon étudié.

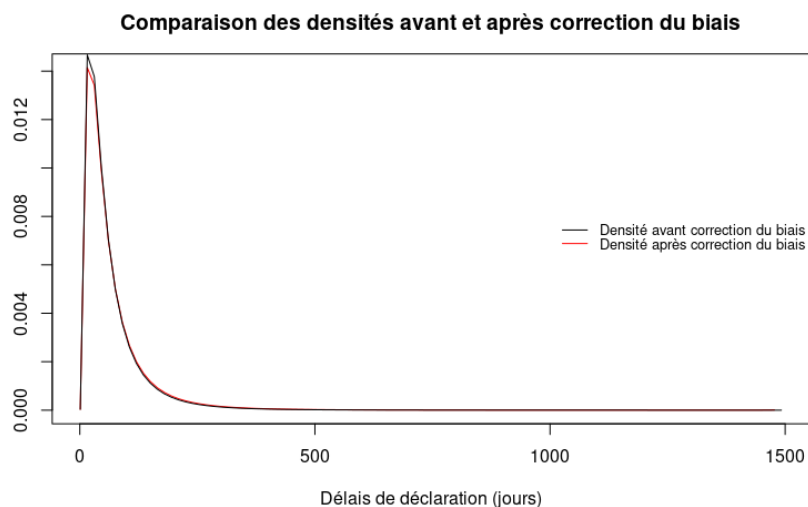


Figure 49 : Comparaison des fonctions densité avant et après correction du biais

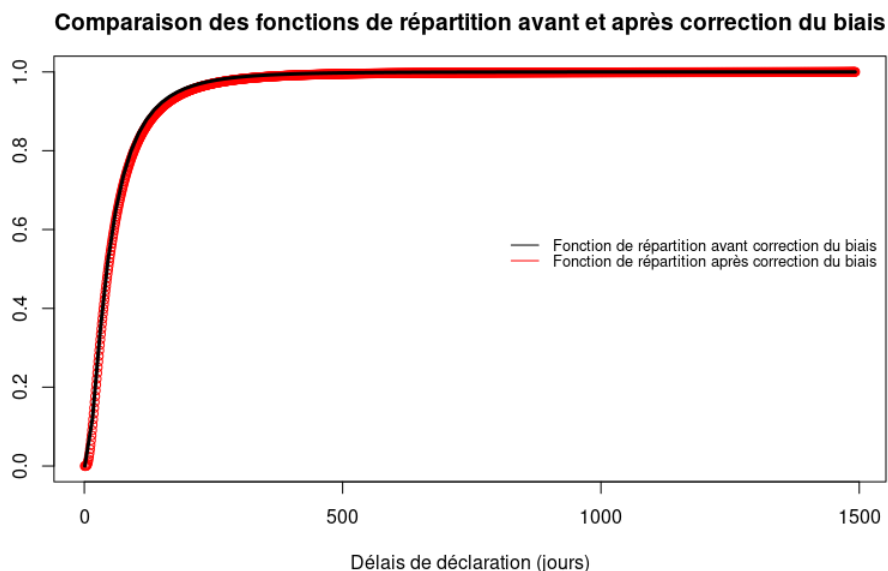


Figure 50 : Comparaison des fonctions de répartition avant et après correction du biais

Comme anticipé, on observe que l'impact de la correction du biais sur la fonction de répartition ou sur la densité de la loi suivie par les délais de déclaration est relativement faible. La distribution des délais de déclaration ayant été corrigée de son biais, l'étape suivante de l'étude consistera en la prédiction du nombre de déclarations tardives attendues.

3.4 – Estimation du nombre de déclarations tardives à l'ultime

3.4.1 Interprétation géométrique de la formule d'estimation du nombre de déclarations tardives

Les notations suivantes, en cohérence avec l'article de Parodi, sont adoptées.

Soit :

- t : date de projection (ultime²⁷)
- v : la fonction densité du nombre de décès
- r_t : nombre de décès déclarés et survenus pendant l'intervalle $[0; t]$ (a priori connu)
- μ_t : nombre de décès survenus pendant l'intervalle $[0; t]$ (inconnu)
- $u_t = \mu_t - r_t$: nombre de déclarations tardives dans l'intervalle $[0; t]$

Le nombre total de décès estimés sur la période $[0; t]$ est :

$$\mathbb{E}(\mu_t) = \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (3.4.1)$$

Le nombre estimé de décès déclarés avant la date t est :

$$\mathbb{E}(r_t) = \int_0^t v(\tau) F(t - \tau) d\tau \quad (3.4.2)$$

De manière générale, le nombre r_t est connu et seule la valeur μ_t reste à estimer. Il sera estimé comme ci-dessous :

$$\hat{\mu}_t = \frac{\int_0^t v(\tau) d\tau}{\int_0^t v(\tau) F(t - \tau) d\tau} \times r_t \quad (3.4.3)$$

Par souci de simplification, Parodi propose de supposer que la probabilité de la survenance d'un décès est uniforme sur la période d'étude. Dans le cadre de l'étude, considérer que la probabilité de survenance d'un décès soit uniforme sur la période d'investigation de cinq années est une hypothèse très forte et non réaliste. C'est n'est qu'en considérant des intervalles de temps plus réduits tels que des périodes mensuelles que cette hypothèse devient plus raisonnable. En adoptant cette hypothèse, l'égalité (3.4.3) devient :

$$\hat{\mu}_t = \frac{t}{\int_0^t F(t - \tau) d\tau} \times r_t \quad (3.4.4)$$

²⁷ *Ultime = Période de survenance du décès + n × mois*

De cette manière, il est possible d'estimer le nombre de déclarations tardives sur l'intervalle $[0; t]$ comme suivant :

$$\hat{u}_t = \frac{t}{\int_0^t F(t - \tau) d\tau} \times r_t - r_t \quad (3.4.5)$$

Il est également possible de devoir projeter à l'ultime t le nombre de décès survenus dans la fenêtre de temps $[0; t']$ avec $t' < t$. Dans ce cas-là, l'estimateur du nombre de décès survenus dans la période $[0; t']$ s'exprime comme suivant :

$$\hat{\mu}_{t'} = \frac{t'}{\int_0^{t'} F(t - \tau) d\tau} \times r_{t'} \quad (3.4.6)$$

Interprétation géométrique

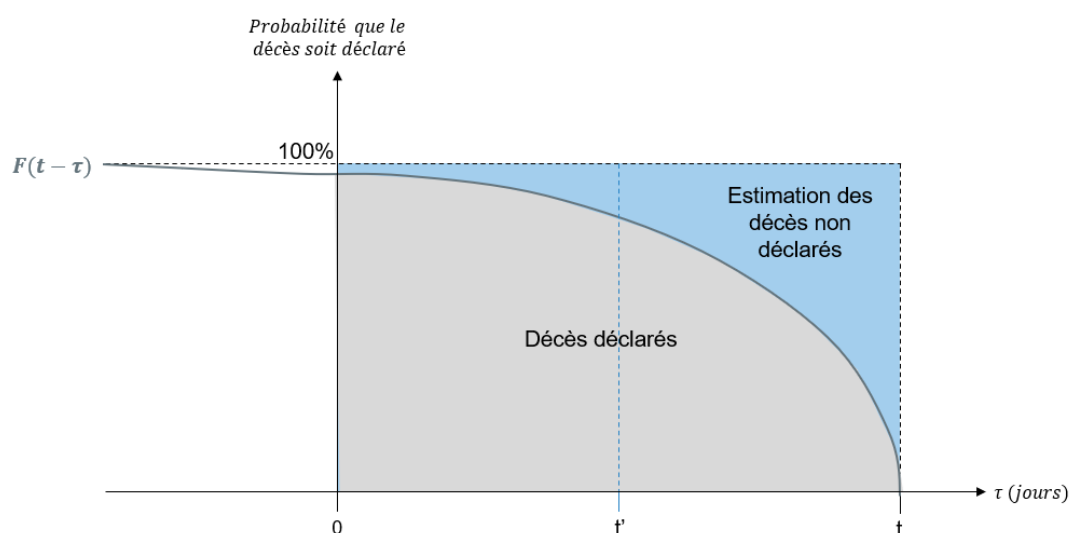


Figure 51 : Interprétation géométrique du calcul d'estimation du nombre de déclarations tardives

L'estimation proposée par la formule (3.4.4) peut être interprétée de manière géométrique. En effet, le numérateur qui correspond au nombre de décès survenus dans l'intervalle $[0; t]$ est représenté ici par le rectangle de longueur t et de largeur 1 en bleu ciel dans le fond du graphique. Le dénominateur, lui incarné par la zone grisée, équivaut au nombre de décès déclarés pendant l'intervalle de temps $[0; t]$. Ainsi, le facteur multiplicatif pour estimer le nombre de décès déclarés à l'ultime est le ratio de ces deux zones.

Pareillement, la formule (3.4.6) a une interprétation géométrique. En effet, le numérateur est représenté par le rectangle de longueur t' et de largeur 1. En ce qui concerne le dénominateur, il correspond à la zone grisée entre la droite verticale en pointillés et la droite des ordonnées.

3.4.2 Cadre discret

De manière générale, le nombre de décès déclarés et survenus pendant l'intervalle de temps $[0; t]$ est connu pour des valeurs discrètes de t .

Les équivalents discrets des formules (3.4.4) et (3.4.6) sont alors proposés.

L'équation (3.4.4) devient :

$$\hat{\mu}_t = \frac{t}{\sum_{k=0}^t F(t-k)} \times r_t \quad (3.4.7)$$

Et l'équation (3.4.6) devient :

$$\hat{\mu}_{t'} = \frac{t'}{\sum_{k=0}^{t'} F(t'-k)} \times r_{t'} \quad (3.4.8)$$

3.4.3 Mesure de l'incertitude par période de survénance

Parodi propose une mesure de l'incertitude du nombre de sinistres tardifs estimés sur une période pouvant être calculée dès lors qu'une loi connue permettant un bon ajustement à la distribution est détectée. Cette mesure sera ainsi adaptée au contexte de l'étude.

Lorsque le nombre de tardifs peut être modélisé par une loi de Poisson, l'écart type de l'estimation est estimé comme ci-dessous :

$$\widehat{se}(\hat{R}_t) = \sqrt{\hat{\mu}_t - r_t} \quad (3.4.9)$$

Lorsque la distribution empirique est sur-dispersée, la formule d'estimation proposée peut d'adapter comme suivant :

$$\widehat{se}(\hat{R}_t) = \sqrt{(1+r)(\hat{\mu}_t - r_t)} \quad (3.4.10)$$

Où r : est le premier paramètre de la loi binomiale négative ($r > 0$)

(3.4.9) et (3.4.10) deviennent, respectivement, les égalités suivantes lorsque le nombre de décès survenus dans l'intervalle $[0; t']$ et non déclarés est estimé.

$$\widehat{se}(\hat{R}_{t'}) = \sqrt{\hat{\mu}_{t'} - r_{t'}} \quad \text{et} \quad \widehat{se}(\hat{R}_{t'}) = \sqrt{(1+r)(\hat{\mu}_{t'} - r_{t'})} \quad (3.4.11) \text{ et } (3.4.12)$$

Toutefois, lorsque les estimations sont réalisées en fragmentant la fenêtre d'étude en plusieurs périodes de survénance, Parodi ne propose pas de mesure de l'erreur de prédiction totale mais uniquement une mesure de l'erreur d'estimation commise par lesdites périodes de survénance.

3.4.4 Résultats et commentaires

Correction du biais	Période	Nombre de jours écoulés	Facteur de projection à l'ultime	Nombres de décès déclarés	Nombre de décès estimés	Nombre de déclarations tardives estimé
Avec	De mars 2017 à mars 2021	1492	1,06	20 005	21 305,00	1300,00
Sans			1,04		20 888,10	883,10

Figure 52 : Estimation du nombre de décès déclarés à l'ultime sur toute la période d'investigation

Si l'hypothèse d'uniformité sous-entendue par la formule (3.4.4) n'est pas raisonnablement applicable sur un intervalle de temps aussi large que cinq années, les résultats présentés ci-dessus ont la qualité de prouver l'importance de la correction du biais dans l'étude. Ces résultats confirment que la correction du biais, compte tenu de la quantité de données qui nous est disponible, peut-être négligée étant donné qu'elle n'augmente que de 2% le nombre de décès estimés.

Ci-dessous sont reportées les estimations de déclarations tardives projetées à l'ultime. L'ultime étant défini comme suivant :

$$\text{Ultime} = \text{Date de survenance} + n \text{ périodes de développement} \quad (3.4.11)$$

Rappelons qu'ici, $n = 49$ et les périodes sont mensuelles.

Période	Nombre de jours écoulés	Facteur de projection à l'ultime	Nombres de décès déclarés	Nombre de décès estimés	Nombre de déclarations tardives estimé	Ecart-type estimé du prédicteur ²⁸ $\widehat{se}(\hat{R}_i)$
mars 2017	31	1,00	474	474	0	0
avril 2017	30	1,00	387	387	0	0
.....
janvier 2021	31	1,40	512	718	207	5,45
février 2021	28	2,02	349	703	354	7,14
mars 2021	31	7,43	126	986	810	10,80
TOTAL	1 470	1,06	20 005	21 211	1 624	
				Moyenne	33,84	
				Variance	16 619,24	
				$\frac{\text{Variance}}{\text{Moyenne}}$	491,08	

Figure 53 : Estimation à l'ultime du nombre de décès survenus par période mensuelle (après correction du biais)

²⁸ Les estimations des écarts-type des prédicteurs sont obtenues à partir de la formule (3.4.10) et de l'estimation du paramètre r de la loi binomiale négative obtenues dans la section 3.5.2.

On remarque que les prédictions sont fortement dispersées car $\frac{Variance}{Moyenne} \gg 1$ et croissent fortement lorsque les périodes de survénance sont récentes.

Qui plus est, projeter jusqu'à l'ultime le nombre de décès déclarés par période mensuelle produit un nombre estimé de déclarations tardives beaucoup plus élevé. De plus, une forte incertitude des estimations est observée pour les périodes récentes. En effet, il s'agit d'un défaut commun aux méthodes de provisionnement non-vie par triangularisation, à cause de l'instabilité numérique, les prédictions du nombre de déclarations tardives des périodes récentes ont une forte volatilité.

Toutefois, en projetant à l'ultime des périodes plus courtes, les hypothèses sous-entendues par le calcul sont plus justifiées ici ; les prédictions ont ainsi plus de sens. Ces résultats seront, ci-après comparés avec les estimations des méthodes employant la triangularisation.

3.4.5 Comparaison des résultats avec les méthodes classiques

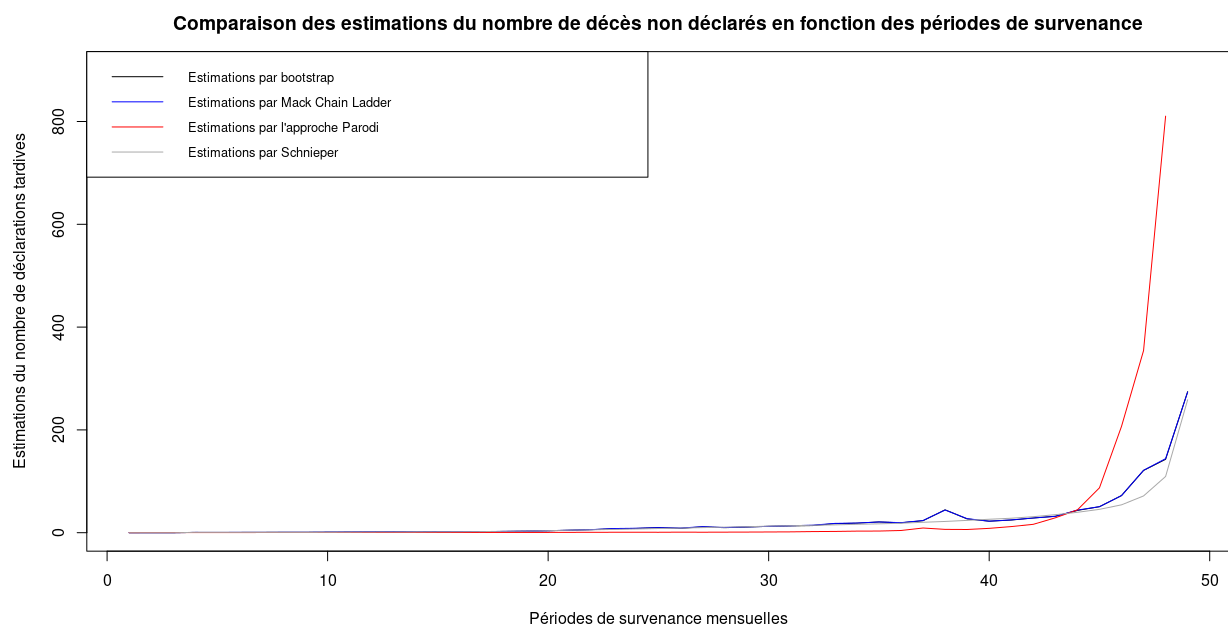


Figure 54 : Comparaison des méthodes d'estimation du nombre de déclarations tardives par période de survénance mensuelle

Si les estimations par les méthodes Chain Ladder et *bootstrap* sont sensiblement identiques, ce n'est pas le cas des estimations réalisées par l'approche Parodi. Malgré une tendance commune de prédictions d'un nombre élevé de tardifs lorsque la période de survénance est récente, les prédictions de la méthode Parodi sont bien plus élevées que celles des méthodes classiques. Dans ce sens, les méthodes de provisionnement classiques sont plus prudentes.

Le chapitre 4 sera dédié au détail des critères qui permettront de choisir la modélisation du nombre de déclarations tardives la plus adaptée.

3.5 – Modélisation du nombre de déclarations tardives

3.5.1 Les lois candidates

Parodi propose d'estimer le nombre de sinistres tardifs par les méthodes usuelles de tarification non-vie. Autrement dit, il conseille l'utilisation de lois discrètes telles que la loi de Poisson ou de la loi binomiale négative. Ainsi, dans le cadre de ce mémoire, le nombre de déclarations tardives sera modélisé par une des lois susmentionnées.

- **Loi de Poisson :**

A l'occasion de la modélisation de la loi du nombre d'occurrences d'événements répétitifs sur des intervalles de temps fixés, la loi de Poisson est souvent privilégiée.

Si X , à valeurs dans \mathbb{R} , suit une loi de Poisson de paramètre λ tel que $\lambda > 0$, alors :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (3.5.1)$$

On note ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et on a la propriété suivante :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda \quad (3.5.2)$$

Ainsi, la loi de Poisson est adoptée lorsque la moyenne et la variance de l'échantillon d'observation sont sensiblement proches.

- **Loi binomiale négative :**

La loi binomiale négative, souvent utilisée dans les modèles de fréquence en tarification non-vie, est une loi à valeurs dans l'ensemble des entiers naturels et dont la variance excède l'espérance.

Si X , à valeurs dans \mathbb{N} , suit une loi binomiale négative (ou loi de Polya) de paramètres r et p tels que $\begin{cases} p \in [0,1] \\ r > 0 \end{cases}$, alors :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k = \frac{\Gamma(k+r)}{k! \Gamma(r)} p^r (1-p)^k \quad (3.5.3)$$

Où Γ est la fonction gamma, définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \forall x \geq 0$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{BN}(r, p)$ et on a la propriété suivante :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r(1-p)}{p} \quad (3.5.4)$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2} \quad (3.5.5)$$

La loi binomiale négative est souvent adoptée en cas de sur-dispersion des données observées. En effet, plus flexible que la loi de Poisson grâce à son deuxième paramètre, elle représente un meilleur choix dans les situations où la variance est plus élevée que la moyenne.

3.5.2 Sélection de la loi et qualité du calibrage

L'objectif de cette partie est de modéliser la distribution empirique du nombre de déclarations tardives estimé par une loi connue.

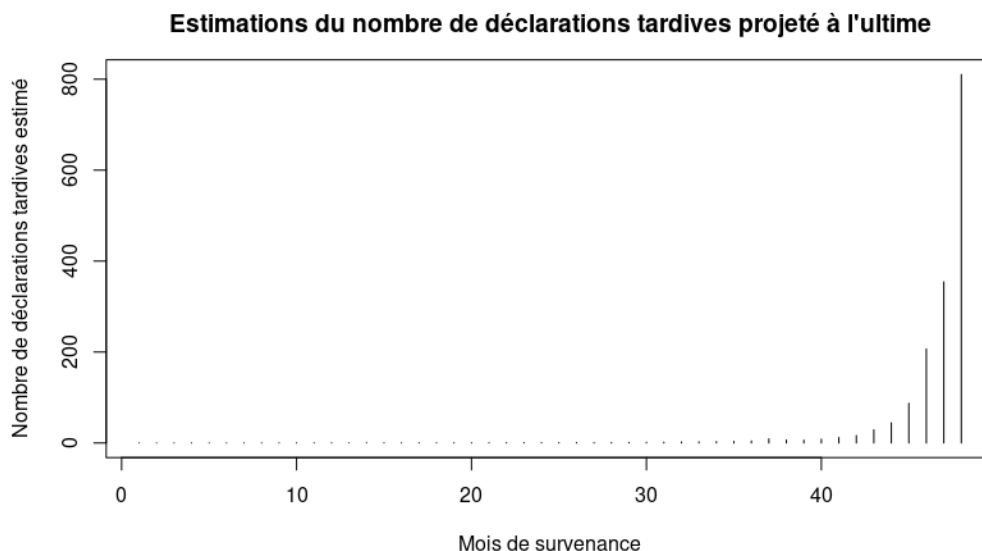


Figure 55 : Nombre estimé de déclarations tardives à l'ultime en fonction du mois de survie

L'analyse graphique révèle que les périodes récentes de survie présentent une estimation du nombre de déclarations tardives plus élevée : il s'agit d'un résultat cohérent avec ce qui était attendu.

Min	1 ^{er} quartile	Médiane	Moyenne	3 ^{ème} quartile	Max
0,17	0,43	0,87	33,84	4,77	810,36

Figure 56 : Statistiques descriptives du nombre de déclarations tardives estimé

$$\frac{\text{Variance}}{\text{Moyenne}} = 491,08 \gg 1$$

L'analyse des statistiques descriptives des estimations témoigne de la sur-dispersion de celles-ci. Par conséquent, la loi binomiale négative sera choisie pour modéliser le nombre de décès déclarés tardivement. **Il sera donc supposé que le nombre de déclarations tardives suit une loi négative binomiale.**

La méthode d'estimation paramétrique sélectionnée sera celle qui permet le meilleur ajustement aux données.

Méthode d'estimation paramétrique	AIC	BIC	Khi-2
Maximum de vraisemblance	290,21	293,95	30,68
Méthode des moments			57,63

Figure 57 : Comparaison des méthodes d'estimation paramétrique

Selon la statistique du χ^2 , la méthode du maximum de vraisemblance est la plus ajustée à la distribution empirique.

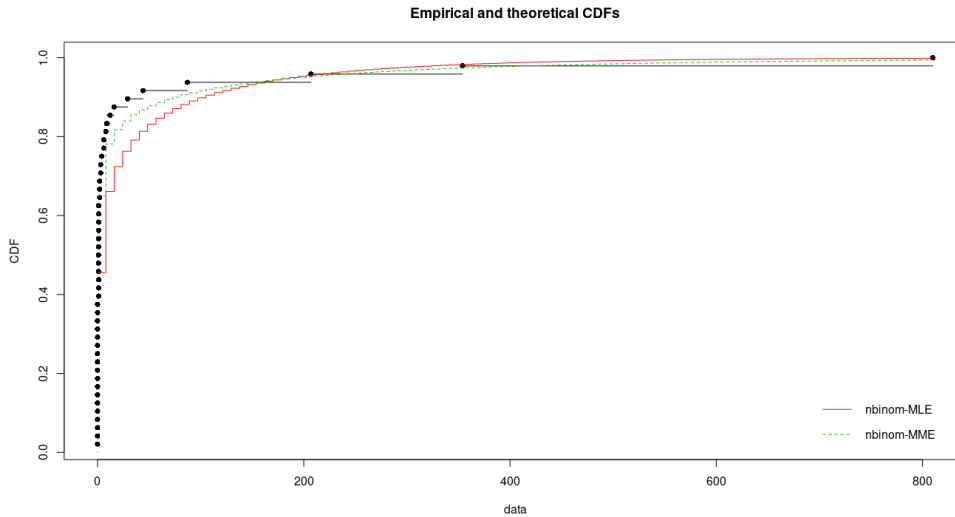


Figure 58 : Choix de la méthode d'estimation paramétrique par analyse graphique des fonctions de répartition (en vert : méthode des moments ; en rouge : méthode du maximum de vraisemblance)

Même si, par analyse graphique, la comparaison des fonctions de répartition semble suggérer que la loi binomiale négative dont les paramètres ont été estimés par la méthode des moments constitue un meilleur ajustement selon ce critère, la méthode du maximum de vraisemblance sera sélectionnée pour la suite de cette étude. En effet, elle a été jugée la plus adaptée selon le critère du χ^2 .

Les paramètres estimés selon la méthode du maximum de vraisemblance sont les suivants :

Paramètres	Estimation	Ecart-type
r	0,1439655	0,02966476
p	0,0042360	

Figure 59 : Estimations des paramètres de la loi binomiale négative par la méthode du maximum de vraisemblance

Soit X la variable correspondant au nombre de déclarations tardives, il est supposé que X soit telle que :

$$X \sim \mathcal{NB}(r = 0,1439655 ; p = 0,0042360)$$

3.6 – Avantages et limites de l’approche Parodi

L’approche proposée par Parodi a l’avantage principal de ne pas générer de pertes d’information par l’agrégation de données. Qui plus est, cette méthode permet d’avoir une meilleure compréhension du risque par l’appréhension des délais de déclaration.

L’approche Parodi possède un avantage primordial pour l’étude : cette méthode permet de s’affranchir de l’hypothèse lourde d’absence d’effet calendaire.

De plus, lorsque le nombre de déclarations pendant la dernière période de survenance est faible, l’impact sur les prédictions est moindre par rapport aux méthodes employant des triangles de développement.

Néanmoins, il s’agit là d’une approche bien plus complexe à mettre en place. En outre, malgré une meilleure compréhension du risque, elle perd l’attrait visuel des triangles de développement qui permettent une visualisation rapide des entrées et des résultats du modèle. Par ailleurs, la méthode introduite par P. Parodi permet seulement de projeter le nombre de déclarations à l’ultime.

En plus, l’approche Parodi impose d’importantes exigences en termes de quantité et de qualité des données d’observations. En effet, les dates de décès et de déclaration exactes (jour, mois et année) doivent être disponible pour chaque décès survenu au sein de la population rentière afin de déduire les délais de déclaration au jour près.

Enfin, cette approche ne propose pas de mesure de l’incertitude à l’ultime des prédictions. Si Parodi avance que cette méthode permet de réduire l’incertitude des prédictions par rapport à celles réalisées par Chain Ladder, ces conclusions ont été tirées après application de sa méthode sur des jeux de données artificiels. En effet, valider ce modèle de provisionnement est une tâche complexe étant donné, qu’en pratique, il faut attendre de longues périodes pour non seulement comparer le niveau des prédictions réalisées avec la réalité mais aussi valider la distribution suivie par le nombre de déclarations tardives. Voilà pourquoi, dans le but de tester la légitimité et la performance prédictive d’une telle méthode, Pietro Parodi a utilisé des jeux de données artificiels sensés répliquer au plus proches des situations réalistes.

L’approche proposée par Parodi sera confrontée, dans le chapitre suivant, aux méthodes usuelles. En effet, le modèle le plus adapté au contexte sera sélectionné selon certains critères qui seront développés dans le chapitre 4.

Chapitre 4 – Critères de sélection du modèle

De nombreux modèles d'estimation du nombre de déclarations tardives ont été employés et il relève de l'actuaire de choisir la meilleure méthode. Selon les mots de Hans Bühlmann « Le provisionnement n'est pas un problème de modélisation complexe et sophistiqué, mais plutôt un exercice de sélection de modèle »²⁹. Des critères permettant d'aider à la décision seront développés dans ce chapitre.

4.1 – Les mesures d'incertitude

4.1.1 Mesure d'incertitude à une période

La stabilité des estimations du nombre de déclarations à l'ultime en fonction de l'information détenue peut constituer un premier critère de sélection du modèle.

Au moment des prédictions, l'information possédée peut être caractérisée par la tribu \mathcal{D}_n :

$$\mathcal{D}_n = \{C_{i,j} \mid (i,j) \leq n-1\} \quad (4.1.1)$$

Et, l'information connue relative à la fenêtre d'étude à la période suivante sera caractérisée par la tribu \mathcal{D}_{n+1} :

$$\mathcal{D}_{n+1} = \{C_{i,j} \mid i \leq n-1, (i,j) \leq n\} \quad (4.1.2)$$

Notons $C_{i,\infty}$: le nombre de décès estimés et survenus pendant la période i avec une vision à l'ultime

L'incertitude à une période (ici, mensuelle) est la variabilité de ce prédicteur entre les estimations réalisées avec les informations \mathcal{D}_n et \mathcal{D}_{n+1} .

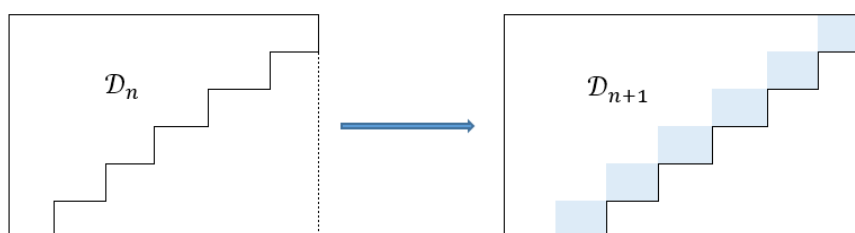


Figure 60 : Illustration de la notion de CDR

La notion de *Claims Development Result* (CDR) est ainsi introduite comme suit :

$$CDR_i(n+1) = \mathbb{E}(C_{i,\infty} \mid \mathcal{D}_n) - \mathbb{E}(C_{i,\infty} \mid \mathcal{D}_{n+1}) \quad (4.1.3)$$

²⁹ Citation de Hans Bühlmann issue de la postface de l'ouvrage « Mathématiques de l'assurance non-vie – Tome II : Tarification et provisionnement » (Denuit & Charpentier, 2009)

On a aussi :

$$CDR_i(n+1) = \mathbb{E}(R_i|\mathcal{D}_n) - (X_{i,n-i} + \mathbb{E}(R_i|\mathcal{D}_{n+1})) \quad (4.1.4)$$

Notons $\hat{C}_{i,\infty}^n$: le prédicteur du nombre de décès survenus pendant la période i à l'aide des informations de la tribu \mathcal{D}_n .

Lorsque les informations nécessaires sont disponibles, on calcule le CDR de la période i comme suivant :

$$CDR(n+1) = \hat{C}_{i,\infty}^n - \hat{C}_{i,\infty}^{n+1} \quad (4.1.5)$$

Dans le cadre de cette étude, quatre mois de données observées hors du périmètre d'investigation sont disponibles. La mesure d'incertitude suivante sera choisie :

$$\text{Mesure de l'incertitude à } k \text{ périodes} = \sum_{i=0}^{n-1} CDR(n+k)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (\hat{C}_{i,\infty}^n - \hat{C}_{i,\infty}^{n+k})^2 \quad (4.1.6)$$

Le modèle est jugé meilleur lorsque l'incertitude à k périodes est faible.

Remarque : Il a été décidé d'élever les CDR_i à la puissance 2 afin d'éviter les compensations des écarts positifs et négatifs.

Les résultats obtenus selon les diverses méthodes sont récapitulés ci-dessous :

Méthodes	k=1	k=2	k=3	k=4
<i>Bootstrap</i>	6 010,54	5 180,78	3 714,61	3 563,49
Mack-Chain Ladder	5 916,87	4 975,45	3 546,66	3 504,82
Parodi	29 533,62	46 980,50	57 786,75	64 059,93
Schnieper	2 282,78	3 346,45	3 454,79	3 854,56

Figure 61 : Résultats des mesures d'incertitude à 1,2,3 et 4 périodes pour les différents modèles de provisionnement

Les mesures d'incertitude à 1,2 et 3 périodes concluent que la méthode Schnieper est le modèle le plus adapté à l'étude. Toutefois, la mesure d'incertitude à 4 mois juge que la méthode Mack-Chain Ladder est plus appropriée.

4.1.2 Mesure d'incertitude à un an

En imposant une vision du risque à un an, la directive Solvabilité II rend nécessaire l'estimation de l'incertitude des prédictions des modèles avec un horizon d'un an. Merz et Wüthrich ont ainsi introduit une méthode³⁰, permettant la mesure de la volatilité à un an de l'estimateur \hat{R} .

Cette méthode emploie également la notion de CDR mais dans ce cadre, cette variable a pour but de mesurer la variabilité du prédicteur d'une année à l'autre. Il s'agit d'une approche adaptant la mesure

³⁰ Méthode introduite par l'article « *Modelling the Claims Development Result for Solvency Purposes* » (Merz & Wüthrich, 2008)

d'erreur de prédiction à l'ultime du modèle Mack-Chain Ladder, appliquée avec un pas de temps annuel, à un horizon d'une période soit un an.

Dans le contexte de notre étude où les périodes sont mensuelles, cette méthode ne pourra malheureusement pas être appliquée.

4.1.3 Mesure d'incertitude à l'ultime

L'incertitude à l'ultime sera également prise en compte dans la décision de sélection de modèle de provisionnement. Cette mesure donnant une vision long terme de l'incertitude a déjà été détaillée dans les sections 2.3 et 2.4 pour les méthodes gravitant autour de Chain Ladder et au sein de l'Annexe 3 pour la méthode Schnieper.

Les résultats sont résumés ci-dessous :

Méthodes	Incertitude à l'ultime	Incertitude relative (%)
<i>Bootstrap</i>	104,62	9,30%
Mack-Chain Ladder	105,30	9,32%
Parodi	Pas de mesure de l'erreur de prédiction totale	✘
Schnieper	126,23	12,98%

Figure 62 : Mesure d'incertitude à l'ultime

$$\text{Incertitude relative (\%)} = \frac{\text{Incertitude à l'ultime}}{\hat{R}} \quad (4.1.7)$$

Ici, encore l'incertitude relative se veut être faible.

La méthode *bootstrap* a été sélectionnée selon le critère d'incertitude à l'ultime.

Jusqu'ici, les critères développés jugeaient la qualité prédictive des modèles. Toutefois, il est possible de juger de la qualité d'un modèle avec une vision rétrospective ; c'est d'ailleurs cette approche qui sera abordée dans la partie 4.2.

4.2 – Backtesting : une mesure de sélection du modèle relative aux données historiques

Denuit et Charpentier proposent, dans leur ouvrage « Mathématiques de l'assurance non-vie – Tome II : Tarification et provisionnement », un critère de sélection de modèle purement fondé sur les données historiques.

Cette méthode consiste à souligner l'écart des prédictions sur les estimations faites dans le passé et les observations des données historiques.

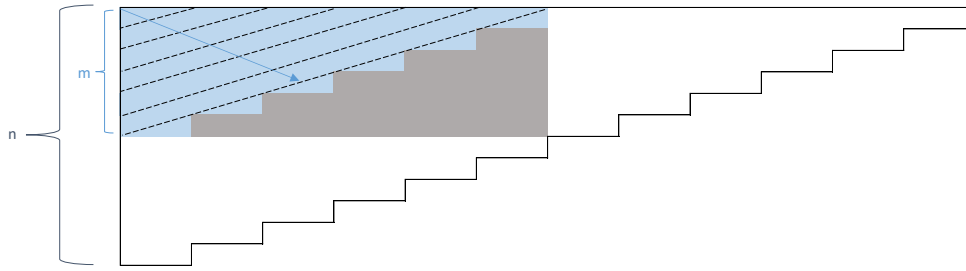


Figure 63 : Illustration du critère de backtesting (SSE) de Denuit & Charpentier

Il s'agit de choisir un sous-triangle (bleu ciel) inclus dans le triangle d'origine et de le compléter à l'aide d'une des méthodes de provisionnement étudiée. La partie grisée est le sous triangle complété avec ladite méthode qui sera comparée avec les vraies données (connues).

Afin d'améliorer cet outil de comparaison, les erreurs de prédictions historiques seront calculées sur de nombreux sous-triangles. Il a été choisi d'appliquer cet outil sur l'intégralité des sous-triangles dont la taille de la base m est comprise entre $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (soit 12 et 24 ici).

La somme des carrés des erreurs estimées sera calculée comme suivant :

$$SSE = \sum_{m=\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=m-i-1}^{m-1} (\hat{C}_{i,j} - C_{i,j})^2 \quad (4.2.1)$$

Le meilleur modèle est celui qui minimise la somme des carrés des erreurs (SSE).

Les résultats obtenus selon les diverses méthodes sont :

Méthodes	SSE
Bootstrap	1 531 448,18
Mack-Chain Ladder	1 515 865,34
Parodi	✘
Schnieper	834 295,53

Figure 64 : Résultats du critère SSE des méthodes

Le critère proposé par Denuit et Charpentier juge, de loin, le modèle Schnieper comme étant le meilleur. Notons toutefois que, comme mentionné précédemment, ce critère est exclusivement fondé sur les données historiques ; ainsi, un modèle sur-paramétré avec de mauvaises qualités prédictives pourrait être jugé bon selon ce critère. Voilà pourquoi, il est important de considérer de nombreux critères de décision dans la sélection d'un modèle. Le choix du modèle réalisé dans la section suivante prendra ainsi en compte l'intégralité des critères mentionnés au sein de ce chapitre.

4.3 – Conclusion

La sélection du modèle de provisionnement doit prendre en compte de nombreux critères tels que les contraintes réglementaires, les objectifs de la compagnie, la facilité d'implémentation et également le respect de critères semblables à ceux détaillés dans les parties précédentes.

Dans un premier temps, les modèles Chain Ladder et *bootstrap* sont très simples à implémenter sur R grâce au *package* « *ChainLadder* ». Le modèle Schnieper, lui, peut assez aisément être implémenté sur une feuille de calcul Excel. Toutefois, l'approche Parodi est extrêmement coûteuse en termes de temps de calcul.

Par ailleurs, selon la directive Solvabilité II, le provisionnement *Best Estimate* doit refléter la réalité du contrat étudié. Néanmoins, Solvabilité II demeure une norme prudentielle. Ainsi, sélectionner le modèle le plus prudent, qui est ici le modèle Schnieper, semble être le plus raisonnable.

En outre, la directive Solvabilité II encourage les organismes à réduire l'incertitude des prédictions de provisions à constituer. Ainsi, le modèle sélectionné doit non seulement minimiser l'incertitude mais également garantir la simplicité de calcul des incertitudes.

De plus, le modèle Schnieper a été jugé le modèle le plus adapté pour 4 des 6 critères développés dans les parties précédentes. Au total, il est jugé meilleur modèle par 6 critères sur les 9 :

Critère	Mack Chain Ladder	Bootstrap	Schnieper	Parodi
CDR k=1	5 916,87	6 010,54	2 282,78	29 533,62
CDR k=2	4 975,45	5 180,78	3 346,45	46 980,50
CDR k=3	3 546,66	3 714,61	3 454,79	57 786,75
CDR k=4	3 504,82	3 563,49	3 854,56	64 059,93
Incertitude à l'ultime	105,30	104,62	126,23	Pas de mesure de l'erreur de prédiction totale
SSE	1 515 865,34	1 531 448,18	834 295,53	Calcul impossible
Facilité d'implémentation	++	++	+	-
Facilité de mesure de l'incertitude	++	++	+	-
Prudence	+	+	++	-
TOTAL	3	3	6	0

Figure 65 : Critères de sélection du modèle de provisionnement

En plus d'être la meilleure méthode parmi les quatre examinées, la méthode de Schnieper présente des qualités prédictives remarquables et adaptées au contexte de l'étude. En effet, l'observation de la volatilité des prédictions à une ou plusieurs périodes a révélé les très faibles erreurs d'estimations commises par le modèle. De manière générale, lesdites erreurs de prédiction ont souligné le caractère prudent du modèle car il sous-estime le nombre de décès déclarés, à une date donnée.

Le modèle de provisionnement sélectionné pour la suite de l'étude sera donc le modèle Schnieper.

L'étude peut alors se poursuivre et permettre une réflexion quant à la meilleure manière d'implémenter les déclarations tardives dans le processus d'évaluation sous Solvabilité II.

Chapitre 5 – Implémentation dans l'évaluation sous Solvabilité II

Ce chapitre est l'occasion de proposer une réflexion sur la méthode de prise en compte des déclarations tardives dans le provisionnement *Best Estimate* et du calcul du $SCR_{long\acute{e}vit\acute{e}}$. La prise en compte de ce volet devra pouvoir être aisément réalisable à partir des outils présents au sein de la compagnie sans trop complexifier le processus d'évaluation. Une approche simple à mettre en place et avec de bonnes performances prédictives sera privilégiée.

Pour des raisons de confidentialité, les valeurs numériques résultant de l'activité de Partner Re ont été modifiées et seules celles relatives au « Traité A » seront développées par la suite.

5.1 – Choix de modélisation

5.1.1 Ajustement pour déclarations tardives

À une date d'évaluation t , le niveau des provisions *Best Estimate* des swaps de longévité est calculé comme suit :

$$BEL_t = VAP Prestations_t + VAP Frais_t - VA Primes_t \quad (5.1.1)$$

Avec :

- $VAP Frais_t = \alpha \times VAP Prestations_t$
- α : une constante estimée et ajustée annuellement selon les valeurs du marché par l'équipe *Reserving - Consolidation*.
Dans le cadre de cette étude, cette constante aura la valeur de 1,34%.

La prise en compte des déclarations tardives de décès constitue un ajustement du provisionnement *Best Estimate* actuel.

Il semble ainsi pertinent de modéliser cet ajustement comme ci-dessous :

$$VAP Prestations_{ajust\acute{e},t} = VAP Prestations_t - Ajustement\ pour\ d\acute{e}clarations\ tardives_t \quad (5.1.2)$$

Notons $\hat{\Gamma}_t$: l'estimateur de l'ajustement pour déclarations tardives $_t$

La suite de l'étude consistera à choisir la méthode d'estimation de l'ajustement à appliquer afin de pouvoir prendre en compte les déclarations tardives de décès.

5.1.2 Approche employant des *model points*

Les *model points* sont des polices fictives représentant un sous-groupe déterminé de la population bénéficiaire appelée « *cluster* ». Aux premiers abords, l'approche qu'il semble falloir adopter est la projection des prestations liées à ces *model points*. Pour cela, les estimations du nombre de déclarations tardives en fonction des périodes de survenance i doivent être décomposées par *cluster*.

Si cette méthode est adoptée, le calcul de l'ajustement à appliquer pour les polices célibataires s'effectuera comme suit :

$$\hat{\Gamma}_{t, \text{single lives}} = \sum_{k \in \text{clusters}} \text{Nombre de déclarations tardives estimé}_k \times VAP \text{ Prestations}_{t,k} \quad (5.1.3)$$

Où :

- $VAP \text{ Prestations}_{t,k}$: VAP des prestations à verser au *model point* k à la date d'évaluation t .
- $\text{Nombre de déclarations estimé}_k$: Nombre estimé de décès survenus pendant la période d'investigation et déclarés des polices du *cluster* k .

En ce qui concerne les polices « *Lives 1* » vivant en ménage, après leur décès, leur conjoint devient bénéficiaire d'une rente viagère dont les arrrages équivalent à un pourcentage de ceux du défunt. Pour ces cas-ci, l'ajustement se formulera comme ci-dessous :

$$\hat{\Gamma}_{t, \text{joint lives}} = \sum_{k \in \text{clusters}} \text{Nombre de déclarations tardives estimé}_k \times \beta \times VAP \text{ Prestations}_{t,k} \quad (5.1.4)$$

Où : $(1 - \beta)$ est le pourcentage des arrrages perçus par les polices « *Lives 2* » après le décès de leur conjoint.

Ainsi, l'ajustement à appliquer aux provisions *Best Estimate* serait le suivant :

$$\hat{\Gamma}_t = \hat{\Gamma}_{t, \text{single lives}} + \hat{\Gamma}_{t, \text{joint lives}} \quad (5.1.5)$$

La méthode de prise en compte des déclarations tardives de décès dans le provisionnement *Best Estimate* doit être le fruit d'un compromis entre la praticité de ladite méthode et la fidélité des prédictions à la réalité. La méthode présentée susmentionnée implique la construction de *model points* représentatifs de sous-populations du bloc de bénéficiaires. Plus les *model points* seront nombreux pour pouvoir représenter des sous-groupes homogènes de la population bénéficiaires, plus les projections des flux à verser reflèteront le comportement du portefeuille global.

Toutefois, la population de rentiers réassurée par le Traité A est particulièrement grande et hétérogène. En effet, à la date d'évaluation t choisie pour cette étude, plus de 75 000 polices reçoivent

des annuités. Et ces polices bénéficiaires ont des profils extrêmement variés notamment en termes de :

- Montants de rente perçus
- Age des bénéficiaires
- Types de bénéficiaire (membres (« *Life 1* ») ou dépendants (« *Life 2* »))
- Statut marital des bénéficiaires
- Etat de santé des bénéficiaires

Ceci suggère qu'un nombre de *clusters* importants devrait être créé afin de représenter la population totale le plus fidèlement possible. Toutefois, la tâche d'estimation du nombre de déclarations tardives, qui a été menée dans les chapitres précédents, devra être réalisée sur la population de chacun des *clusters* ; l'étude sera donc menée *k* fois.

Il s'agit là d'une méthode bien trop chronophage pour être intégrée dans le processus d'évaluation Solvabilité II. Ainsi, une approche simplifiée sera proposée dans la section suivante.

5.1.3 Approche simplifiée

L'approche que l'on qualifiera de « simplifiée » consistera à amplifier la mortalité déclarée pour tenir compte des éventuelles déclarations tardives.

Les notations suivantes seront adoptées :

- $VAP Prestations_{D\acute{e}c\grave{e}s\ d\acute{e}clar\acute{e}s,t}$: la VAP des prestations des polices dont le décès a été déclaré au cours de la période d'évaluation (mensuelle) *t*
- ω_i : Proportion des décès survenus pendant la période *i* et déclarés
- $\hat{\eta}_i = \frac{C_{i,n-i-1}}{\hat{C}_{i,n-1}} - 1$: Coefficient³¹ de l'amplification à appliquer sur la mortalité observée pour une période de survenance *i* afin de tenir compte des déclarations tardives attendues.

Cette approche simplifiée consiste à estimer l'ajustement pour déclarations tardives $\hat{\Gamma}_t$ comme détaillé ci-après :

$$\hat{\Gamma}_t = VAP Prestations_{D\acute{e}c\grave{e}s\ d\acute{e}clar\acute{e}s,t} \times \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \times \hat{\eta}_i \quad (5.1.6)$$

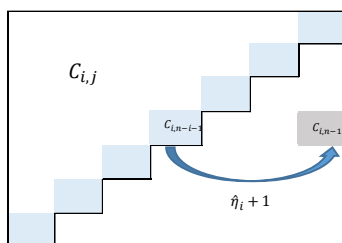


Figure 66 : Illustration de la modélisation de l'ajustement pour déclarations tardives par l'approche simplifiée

³¹ Estimé selon la méthode de provisionnement sélectionnée ; ici, il s'agit de l'approche Schnieper.

Avantages de l'approche simplifiée

Cette méthode simplifiée présente l'avantage d'être relativement aisée et prompte à appliquer à partir des outils disponibles en entreprise.

Qui plus est, l'amplification de l'expérience observée permet de capter la spécificité des mouvements de flux de prestations observés pour les swaps de longévité offrant une option de réversion. En effet, dans la première approche proposée, le traitement distinct des polices célibataires et des polices avec conjoint était nécessaire.

Limites de l'approche simplifiée

Cette approche reste une simplification et sa légitimité peut facilement être remise en cause si une période calendaire présente un nombre de déclarations de décès anormalement extrême ou que la mortalité déclarée n'est pas représentative de l'hétérogénéité de la population rentière.

5.1.4 Résultats et sensibilité à la méthode de provisionnement

Les résultats suivants sont obtenus grâce au modèle d'évaluation *Best Estimate* du « Traité A » implémenté sur le logiciel Risk Agility Financial Modeler (RAFM).

Calcul de la **VAP Prestations**_{Décès déclarés, Mars 2021} :

La différence entre les VAP des prestations à verser aux populations de rentiers survivants à la fin du mois de février 2021 et à la fin du mois de mars 2021, actualisées à la même date, constitue l'ajustement à réaliser pour traduire l'évolution démographique **déclarée**. Ainsi, cette quantité sera amplifiée afin de traduire l'ajustement à réaliser pour refléter l'évolution démographique estimée mais non encore déclarée.

Proportion du risque de longévité cédé par
la cédante via le Traité A

$$VAP\ Prestations_{Mars\ 2021} = 1\ 089\ 995\ 820 \times 42,5\% = 463,25\ mGBP$$

Notons $VAP\ Prestations_{Mars\ 2021}^{Pop : Février\ 2021}$: la VAP des prestations à verser aux rentiers déclarés survivants à la fin du mois de février 2021 et évaluée à la fin du mois de mars 2021.

On a :

$$VAP\ Prestations_{Mars\ 2021}^{Pop : Février\ 2021} = 1\ 101\ 566\ 214 \times 42,5\% = 468,17\ mGBP$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} VAP\ Prestations_{Décès\ déclarés, Mars\ 2021} &= VAP\ Prestations_{Mars\ 2021}^{Pop : Février\ 2021} - VAP\ Prestations_{Mars\ 2021} \\ &= 4,92\ mGBP \end{aligned}$$

Selon les différentes méthodes, le coefficient à multiplier par $VAP Prestations_{Décès\ déclarés,t}$ vaut :

Méthode de provisionnement	$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \times \hat{\eta}_i$
<i>Bootstrap</i>	93,31%
Chain Ladder	93,28%
Parodi	261,10%
Schnieper	84,03%

Figure 67 : Valeur du coefficient multiplicatif utilisé dans l'estimation de l'ajustement à appliquer pour prendre en compte les déclarations tardives

Ici, encore on observe que les méthodes gravitant autour de l'approche Chain Ladder, si elles avaient été choisies, auraient engendré un ajustement relativement similaire. La méthode Schnieper résulte de l'ajustement le plus prudent tandis que l'approche Parodi produit, de loin, l'ajustement le plus significatif.

L'impact de la prise en compte des déclarations tardives dans le provisionnement *Best Estimate* par l'approche simplifiée proposée peut être observé ci-dessous :

Méthode	Ajustement pour les déclarations tardives $\hat{\Gamma}_{Mars\ 2021}$	$VAP Prestations_{ajustée,Mars\ 2021}$	Impact relatif de l'ajustement (%)
Schnieper	4,13	459,12	- 0,89%

Figure 68 : Impact de l'ajustement pour déclarations tardives sur la VAP des prestations (mGBP)

Si cette correction n'engendre qu'un ajustement relatif de 0,89%, elle représente tout de même une diminution des estimations de plus de 4 millions de livres sterling. Il s'agit là d'un résultat avec l'ordre de grandeur attendu. En effet, l'objectif de cette étude est de se rapprocher des prévisions *Best Estimate* : un faible impact relatif signifie que les évaluations passées étaient, tout de même, relativement proches d'évaluations réalisées sous le principe du *Best Estimate*. Mais compte tenu du volume des flux étudiés, même un faible impact relatif a un effet considérable.

Les calculs ont été réalisés avec l'ensemble des méthodes de prédiction mentionnées aux chapitres 3 et 4 dans le but de mesurer la sensibilité de l'impact de l'ajustement au choix de la méthode de provisionnement adoptée.

Méthode	$\hat{\Gamma}_{Mars\ 2021}$	Impact relatif de l'ajustement (%) ³²	$VAP Prestations_{ajustée,Mars\ 2021}$	Sensibilité à la méthode de provisionnement
<i>Bootstrap</i>	4 588 536	-0,99%	458 659 687	-0,10%
Chain Ladder	4 587 033	- 0,99%	458 661 191	-0,10%
Parodi	12 839 511	-2,77%	450 408 711	-1,90%
Schnieper	4 131 901	-0,89%	459 116 322	

Figure 69 : Sensibilité à la méthode de provisionnement de l'impact de l'ajustement de $VAP Prestations_{Mars\ 2021}$ (GBP)

³² Impact relatif à l'ajustement_t = $\frac{VAP Prestations_{ajustée,t} - VAP Prestations_t}{VAP Prestations_t}$

Les méthodes gravitant autour de la méthode Chain Ladder (Mack-Chain Ladder et *bootstrap*) engendrent des ajustements sensiblement similaires à ceux calculés par Schnieper ; ils ne sont que 0,10% plus faibles. La méthode Parodi génère les résultats les moins prudents et les plus éloignés de ceux produits par Schnieper ; ils sont 1,90% plus faibles. Ainsi, même la méthode générant la plus grande correction ne réduit que de 2,77% la VAP des prestations à verser.

5.2 – Impact sur l'évaluation des swaps de longévité sous Solvabilité II

5.2.1 Impact sur le niveau des provisions *Best Estimate*

La section suivante permettra de mesurer l'impact de l'ajustement pour déclarations tardives sur le niveau des provisions *Best Estimate*.

On a :

$$\widehat{BEL}_{ajusté,Mars\ 2021} = \overbrace{VAP\ Prestations_{ajustée,Mars\ 2021}}^{VAP\ Prestations_{Mars\ 2021} - \hat{\Gamma}_{Mars\ 2021}} + VAP\ Frais_{ajustée,Mars\ 2021} - VA\ Primes_{Mars\ 2021} \quad (5.2.1)$$

$$\begin{aligned} VA\ Primes_{Mars\ 2021} &= 1\ 467\ 705\ 715 \times 42,5\% \\ &= 623,78\ mGBP \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VAP\ Prestations_{ajustée,Mars\ 2021} &= VAP\ Prestations_{Mars\ 2021} - \hat{\Gamma}_{Mars\ 2021} \\ &= 463\ 248\ 223 - 4\ 131\ 901 \\ &= 459,12\ mGBP \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VAP\ Frais_{ajustée,Mars\ 2021} &= \alpha \times VAP\ Prestations_{ajustée,Mars\ 2021} \\ &= 1,34\% \times 459\ 116\ 322 \\ &= 6,15\ mGBP \end{aligned}$$

Le niveau des provisions *Best Estimate* ajustées pour prendre en compte les déclarations tardives est ainsi obtenu ci-dessous :

$$\widehat{BEL}_{ajusté,Mars\ 2021} = -158\ 506\ 448\ GBP$$

$BEL_{Mars\ 2021}$	$\widehat{BEL}_{ajusté,Mars\ 2021}$	Impact de l'ajustement
-154,32	-158,51	-2,71%

Figure 70 : Impact de l'ajustement sur le BEL (mGBP)

La prise en compte des déclarations tardives dans le provisionnement *Best Estimate* aboutit à une baisse de 2,71% du niveau des provisions, représentant un montant élevé proche de 4,2mGBP.

Méthode de provisionnement	$\widehat{BEL}_{ajusté, Mars\ 2021}$	Sensibilité à la méthode de provisionnement
<i>Bootstrap</i>	(158 969 202)	-0,29%
Chain Ladder	(158 967 679)	-0,29%
Parodi	(167 330 741)	-5,57%
Schnieper	(158 506 448)	

Figure 71 : Sensibilité du BEL ajusté à la méthode de provisionnement sélectionnée (GBP)

Ici encore, on remarque que les écarts entre les résultats obtenus par les méthodes gravitant autour de Chain Ladder et la méthode de Schnieper sont très faibles (autour de -0,29%).

En ce qui concerne, l'approche Parodi, si elle avait été sélectionnée elle aurait généré un $\widehat{BEL}_{ajusté, Mars\ 2021}$ 5,57% plus faible que celui le BEL corrigé par la méthode Schnieper.

5.2.2 Impact sur le $SCR_{longévité}$

Comme cela a été explicité dans l'Annexe 5, l'exigence en capital du risque longévité est « égale à la perte de fonds propres de base résultant de la baisse soudaine permanente de 20 % des taux de mortalité utilisés pour le calcul des provisions techniques »³³.

Ce besoin en capital est évalué par une approche de la variation de la NAV, correspondant aux actifs diminués des engagements *Best Estimate*, avec et sans une baisse de 20% de la mortalité. Ainsi, le $SCR_{longévité}$ est évalué comme suit, à une date d'évaluation t :

$$\Delta NAV_t = \underbrace{(A_t - BEL_t)}_{NAV_t} - \underbrace{(A_{avec\ choc,t} - BEL_{avec\ choc,t})}_{NAV_{avec\ choc,t}} \quad (5.2.2)$$

Où :

- A_t : les actifs valorisés à la date d'évaluation t
- $A_{avec\ choc,t}$: les actifs valorisés à la date d'évaluation t en considérant le choc biométrique
- $BEL_{avec\ choc,t}$: le niveau des provisions *Best Estimate*, évalué à la date t et dans le scénario de baisse des taux de mortalité de 20%.

Afin de permettre le calcul du BEL_t , une hypothèse simplificatrice consistant à considérer qu'une baisse de la mortalité peut être négligée dans l'évaluation des actifs est utilisée et on a :

$$\Delta NAV_t = BEL_{avec\ choc,t} - BEL_t \quad (5.2.3)$$

³³ Article 138 du Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014

En réalité, par la formule standard et les coefficients de corrélation entre les SCR des sous-modules de risques, l'effet d'une baisse de la mortalité dans l'évaluation des actifs est pris en compte dans le calcul du $SCR_{de\ base}$.

Le $SCR_{longévité}$ est ainsi calculé, à une date d'évaluation t , à partir de l'approche de la variation de la NAV comme suit :

$$SCR_{longévité,t} = \max(0 ; \Delta NAV) = BEL_{avec\ choc,t} - BEL_t \quad (5.2.4)$$

$$SCR_{longévité,t} = (VAP\ Prestations_{avec\ choc,t} + VAP\ Frais_t - VA\ Primes_t) - (VAP\ Prestations_t + VAP\ Frais_t - VA\ Primes_t) \quad (5.2.5)$$

Ainsi, on en déduit :

$$SCR_{longévité\ ajusté,t} = (VAP\ \widehat{Prestations}_{ajustée,avec\ choc,t} + VAP\ \widehat{Frais}_{ajustée,t} - VA\ Primes_t) - (VAP\ \widehat{Prestations}_{ajustée,t} + VAP\ \widehat{Frais}_{ajustée,t} - VA\ Primes_t) \quad (5.2.6)$$

$VAP\ \widehat{Prestations}_{ajustée,avec\ choc,t}$ est la valeur probable, à la date d'évaluation t , des prestations à verser en prenant en compte les déclarations tardives et dans l'hypothèse que les taux de mortalité baissent soudainement et de manière permanente de 20%.

Toutefois, on a l'égalité (5.1.2) :

$$VAP\ \widehat{Prestations}_{ajustée,t} = VAP\ Prestations_t - \hat{\Gamma}_t$$

Ainsi,

$$VAP\ \widehat{Prestations}_{ajustée,avec\ choc,t} = VAP\ Prestations_{avec\ choc,t} - \hat{\Gamma}_{avec\ choc,t} \quad (5.2.7)$$

Or, l'estimateur $\hat{\Gamma}_t$ ne possède pas de composantes sur lesquelles un choc biométrique pourrait être appliqué ; une réflexion sera menée afin de pouvoir apprécier $\Gamma_{avec\ choc,t}$. Les options envisagées seront détaillées ci-dessous :

Propositions d'estimation de $\Gamma_{avec\ choc,t}$:

➤ **Méthode 1** - l'approche proportionnelle :

La première méthode consiste à supposer que l'impact d'une baisse des taux de mortalité de 20% serait proportionnel à l'impact observé sur la VAP des prestations à verser.

Dans ce cas, l'estimateur suivant serait adopté :

$$\hat{\Gamma}_{avec\ choc,t}^{(1)} = \hat{\Gamma}_t \times \frac{VAP\ Prestations_{avec\ choc,t}}{VAP\ Prestations_t} \quad (5.2.8)$$

➤ **Méthode 2** - l'approche prudente :

Cette seconde approche consiste à, par prudence, ne pas appliquer de choc biométrique sur la composante $\hat{\Gamma}_{avec\ choc,t}$. On choisirait alors l'estimateur ci-dessous :

$$\hat{\Gamma}_{avec\ choc,t}^{(2)} = \hat{\Gamma}_t \quad (5.2.9)$$

Selon la méthode d'estimation de $\Gamma_{avec\ choc,t}$, l'ajustement du $SCR_{long\acute{e}vit\acute{e}}$ pour prendre en compte les d\(^{e}clarations tardives a l'impact suivant :

M\(^{e}thode d'estimation de $\Gamma_{avec\ choc,t}$	$SCR_{long\acute{e}vit\acute{e},Mars\ 2021}$	$\widehat{SCR}_{long\acute{e}vit\acute{e},ajust\acute{e},Mars\ 2021}$	Impact de l'ajustement
Proportionnelle	64,93	63,80	-1,75%
Prudente	64,93	64,45	-0,75%

Figure 72 : Impact de l'ajustement pour d\(^{e}clarations tardives sur le SCR long\(^{e}vit\(^{e}) (en mGBP)

L'adoption de l'approche proportionnelle pour approcher $\widehat{\Gamma}_{avec\ choc,t}$ engendrerait, un $\widehat{SCR}_{long\acute{e}vit\acute{e},ajust\acute{e},Mars\ 2021}$ plus faible de -0,65mGBP que $\widehat{SCR}^{(2)}_{long\acute{e}vit\acute{e},ajust\acute{e},Mars\ 2021}$. Les \(\acute{e}valuations \(\acute{e}tant men\(^{e}es sous les r\(^{e}gulations de la norme prudentielle Solvabilit\(^{e}) II, l'approche la plus prudente sera adopt\(^{e}e. La suite de l'\(\acute{e}tude sera alors men\(^{e}e en employant l'approche prudente d'estimation de $\Gamma_{avec\ choc,t}$.

L'ajustement pour d\(^{e}clarations tardives appliqu\(^{e}e en employant cette m\(^{e}thode engendre ainsi la baisse du besoin de capital relatif au risque de long\(^{e}vit\(^{e}) li\(^{e}) au Trait\(^{e}) A de 0,75% ; ce qui repr\(^{e}sent\(^{e})e un peu plus de 0,48mGBP.

M\(^{e}thode de provisionnement	$\widehat{SCR}^{(2)}_{long\acute{e}vit\acute{e},ajust\acute{e},Mars\ 2021}$ (approche prudente d'estimation de $\Gamma_{avec\ choc,t}$)	Sensibilit\(^{e}) au mod\(^{e}le de provisionnement
Bootstrap	64 393 997	-0,08%
Chain Ladder	64 394 173	-0,08%
Parodi	63 423 045	-1,59%
Schnieper	64 447 733	

Figure 73 : Sensibilit\(^{e}) du SCR long\(^{e}vit\(^{e}) ajust\(^{e}) au mod\(^{e}le de provisionnement s\(^{e}lectionn\(^{e}e avec l'approche prudente d'estimation de $\Gamma_{avec\ choc,t}$ (GBP)

Par ailleurs, on remarque que si une des m\(^{e}thodes employant l'approche Chain Ladder avait \(\acute{e}t\(^{e}) employ\(^{e}e, l'impact sur le $SCR_{long\acute{e}vit\acute{e}}$ aurait \(\acute{e}t\(^{e}) tr\(^{e}s fortement similaires. Toutefois, la m\(^{e}thode Parodi, beaucoup moins prudente que les autres, aurait r\(^{e}duit le $SCR_{long\acute{e}vit\acute{e}}$ d'environ 3,6mGBP.

5.2.3 Impact sur l'évaluation des passifs du bilan prudentiel

La prise en compte des déclarations tardives engendrera à la fois une réduction du niveau de provisions *Best Estimate* et une baisse de l'exigence de capital lié au risque de longévité ; par conséquent le niveau du MCR sera également ajusté à la baisse³⁴. Ces capitaux libérés permettront l'approvisionnement des fonds propres.

De plus, la non prise en compte des déclarations tardives dans le processus d'évaluation Solvabilité II surestimait le risque auquel la compagnie de réassurance était réellement soumise. Ainsi, la marge de risque, représentant le coût de transfert du risque d'assurance de la compagnie dans sa globalité à un tiers organisme sera également ajustée à la baisse. Encore une fois, cet ajustement alimentera les capitaux excédentaires de PartnerRe.

Dans le périmètre d'étude du « Traité A », à la date d'évaluation $t = \text{Mars } 2021$, cet ajustement d'évaluation a permis la libération de près de 4,2 mGBP anciennement affecté au BEL et la diminution du $SCR_{de\ base}$. Si ces impacts sont déjà conséquents lorsque l'étude n'est menée que sur ce périmètre limité, les déclarations tardives de décès seront dorénavant prises en compte dans l'évaluation de tous les swaps de longévité détenus par PartnerRe. Le portefeuille de Partner Re est composé de douze traités de swaps de longévité cédant le risque de longévité de diverses cédantes ayant des cadences et des processus de confirmation de décès différents.

Cet ajustement du processus d'évaluation permettra le déblocage de montants conséquents de capitaux, qui pourront par la suite être, entres autres, alloués à la souscription de nouvelles affaires.

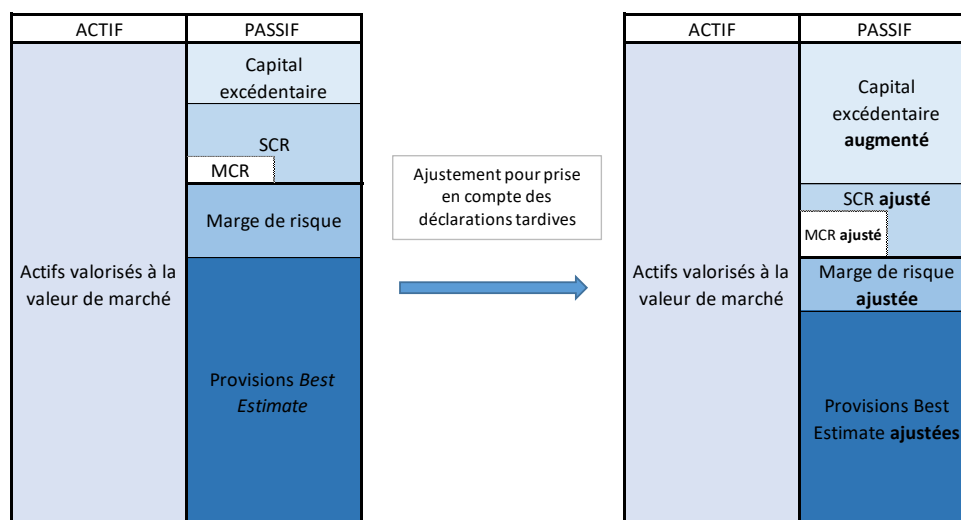


Figure 74 : Impact de la prise en compte des déclarations tardives sur le bilan prudentiel sous Solvabilité II

³⁴ Le lien entre le SCR et MCR est détaillé dans l'Annexe 6

Conclusion

L'objectif de ce mémoire était de se questionner sur le meilleur moyen de prendre en compte les déclarations tardives dans l'évaluation des swaps de longévité sous Solvabilité II. Les tables de mortalité générationnelles utilisées dans la modélisation des swaps de longévité ne permettant pas de réaliser de prédictions fiables sur la mortalité à court-terme ; la mortalité de la population bénéficiaire pendant les périodes passées a été estimée à partir de celle déclarée.

L'étude a débuté avec l'estimation du nombre de déclarations tardives par des méthodes de provisionnement non-vie usuelles. Dans un premier temps, des méthodes gravitant autour de la méthode Chain Ladder ont été employées : Mack et *bootstrap*.

Par la suite, le modèle de Schnieper a été appliqué car plus adapté aux contextes dans lesquels les déclarations tardives sont courantes. Par ailleurs, ce modèle a permis de refléter une des caractéristiques de la couverture des swaps de longévité. En effet, même si dans le cadre de cette étude, l'exposition au risque n'a pu qu'être estimée, elle permet de traduire que la population bénéficiaire rétrécit globalement.

L'étude s'est poursuivie avec l'application d'une méthode de provisionnement permettant de s'affranchir des triangles de développement. En effet, l'application de l'approche Parodi à l'étude consiste en l'estimation de la loi suivie par les délais de déclarations empiriques afin de prédire le nombre de déclarations tardives. Le graphique de « *Cullen & Frey* » et les statistiques descriptives ont permis la sélection de la loi log-normale et de la méthode du maximum de vraisemblance comme méthode d'estimation paramétrique pour la modélisation des délais de déclarations. Les estimations du nombre de déclarations à l'ultime réalisées par la formule de Parodi étant sur-dispersée ; elles ont été modélisées par une loi binomiale négative.

La sélection du modèle de provisionnement le plus adapté au contexte étudié a été facilitée par l'emploi de critères tels que le *backtesting*, la mesure de la qualité prédictive du modèle, la mesure de l'incertitude à l'ultime mais également des conditions de prudence et de facilité d'implémentation. Ceux-ci ont conclu en la sélection du modèle de Schnieper.

Enfin, l'étude a permis une réflexion sur la meilleure méthode de prise en compte des déclarations tardives de décès dans le provisionnement *Best Estimate*. La méthode consistant en la projection des engagements liés aux rentes viagères de *model points* représentant des sous-groupes homogènes de la population bénéficiaire étant trop chronophage en termes d'implémentation, une approche simplifiée a été mise en place. La méthode adoptée consiste en l'amplification des engagements liés aux polices dont le décès a été déclaré afin de prendre en compte les éventuelles déclarations tardives de décès à venir. Sur le périmètre d'évaluation du Traité A, l'implémentation de cette méthode a permis de libérer un montant de capital auparavant immobilisé équivalent à 2,71% du niveau des provisions *Best Estimate*.

De plus, la prise en compte des déclarations tardives a permis une réduction du besoin en capital lié au risque de longévité du Traité A correspondant à une baisse de 0,75% du $SCR_{longévité}$. Ainsi, l'impact de cette modification du processus d'évaluation à l'échelle de l'ensemble des traités des swaps de longévité de Partner Re engendrera la libération de montants de capitaux importants qui pourront,

par la suite, être consacrés à la souscription de nouvelles affaires ou être employés dans une démarche d'optimisation du capital via des investissements.

Cette problématique nécessiterait d'être traitée à l'aide de méthodes de modélisation moins limitées. En effet, même si les hypothèses du modèle ont été validées, la légitimité des résultats peut être remise en cause étant donné que le modèle de Schnieper suppose une absence d'effet calendaire. Il conviendrait de poursuivre l'étude dans le but de pouvoir s'affranchir de cette hypothèse fort contraignante. Par ailleurs, des travaux futurs pourraient également tendre à l'amélioration des hypothèses de mortalité *Best Estimate* actuelles, constituées de probabilités de décès annuelles mensualisées. En effet, l'introduction d'effets de saisonnalité dans les tables de mortalité générationnelles par l'emploi de taux de mortalité trimestriels ou biannuels pourrait affiner les prédictions démographiques afin qu'elles soient plus précises sur le court terme. Dans ce cas, elles pourraient être employées à des fins d'estimation de nombre de déclarations tardives de décès.

Bibliographie

- Agbobli, K. D. (2016). *Régime de rentes viagères : Transfert du risque de longévité*. Mémoire d'actuaire, Paris.
- Behan, D. F. (2012). *Measurement of Incurred but Unreported Deaths in Life Settlements*. ARCH 2013.1 Proceedings.
- Besse, P. (s.d.). Tests non paramétriques., (pp. 1-6). Support de cours, Université de Toulouse.
- Boukobza, F., & Ma, K. (2020). *Introduction à Solvabilité II*. Support de cours DUAS 2020/2021, Université de Strasbourg.
- Courbage, C. (2014). Le transfert du risque de longévité est en plein essor. *Le Temps*.
- Delignette-Muller, M.-L., & C, D. (2015). fitdistrplus: An R Package for Fitting Distributions. *Journal of Statistical Software*, pp. 1-34.
- Denuit, M., & Charpentier, A. (2009, Décembre 7). Mathématiques de l'assurance non-vie - Tome II : Tarification et provisionnement. *Economica*, pp. 354-355.
- (2009). *Directive 2009/138/CE du parlement européen et du conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II)*. Texte réglementaire.
- Dupuy, H. (2018). Retraite : les Français préfèrent une sortie en capital plutôt qu'une rente. *Les Echos*.
- England, P. (2002). Stochastic claims reserving in general insurance. *British Actuarial Journal* 8, pp. 53-56.
- Gesmann, M. (2021). *Statistical Methods and Models for Claims Reserving in General*. Package 'ChainLadder'.
- Kamega, A. (2015). *Introduction à Solvabilité 2 - Applications de mesure des risques*. Support de cours EURIA, Université de Brest.
- Laloum, L. (2021). *Approche hybride au calcul de la provision IBNR : méthode de fréquence/coût pour l'estimation des sinistres tardifs*. Mémoire d'actuaire, Paris.
- Liu, H., & Verrall, R. (2009). *Predictive distributions for reserves which separate true IBNR and IBNER claims*. Rapport de recherche, Cass Business School City University, Londres.
- Luginsland, M. (2014). Risque longévité : les vertus du swap. *L'argus de l'assurance*.
- Mack, T. (1993). Distribution-free calculation of the standard error of Chain Ladder reserve estimates. *Astin Bulletin, Vol 23, n°2*, pp. 1-14.
- Mack, T. (1994). Measuring the variability of Chain Ladder Reserve Estimates. *Casualty Actuarial Society Forum*, pp. 1-82.
- Merz, M., & Wüthrich, M. (2008). *Modelling the claims development result for solvency purposes*. Rapport de recherche, Université technique de Vienne.

Parodi, P. (2013). *Triangle-free reserving : a non-traditionnal framework for estimating reserves and reserve uncertainty*. Rapport de recherche, Londres.

Piat, V. (2020). *Provisionnement non-vie*. Support de cours DUAS 2020/2021, Université de Strasbourg.

(2015). *Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014 complétant la directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II)*. Texte réglementaire.

Schnieper, R. (1991). Separating the IBNR and IBNER Claims. *Astin Bulletin*, Vol 21, n°1, pp. 111-127.

Smoch, L. (2016). *Tests paramétriques et non paramétriques*. Support de cours, Dunkerque.

Logiciel R – Version 3.6.0

Logiciel Excel – Version 16.0.13801.20830

Logiciel Risk Agility Financial Modeler – Version 2.6

Table des figures

Figure 1 : Bilan prudentiel simplifié dans le cadre de Solvabilité II	27
Figure 2 : Modules de risque pris en compte dans le calcul du SCR de base	29
Figure 3 : Matrice de corrélation à employer dans le calcul du capital de solvabilité requis de base selon la formule standard	29
Figure 4 : Evolution démographique par tranche d'âges en Grande Bretagne (Source : PopulationPyramid.net – 2021).....	32
Figure 5 : Estimation de l'évolution de l'espérance de vie au Royaume-Uni (Source : ONS – 2018) ...	32
Figure 6 : Organigramme des solutions de transfert du risque de longévité	33
Figure 7 : Fonctionnement d'un swap de longévité	34
Figure 8 : Définition du délai de déclaration (en mois)	36
Figure 9 : Impact de la non prise en compte des déclarations tardives de décès sur la projection de la population rentière.....	36
Figure 10 : Présentation du traité étudié.....	38
Figure 11 : Analyse graphique de la base de données étudiée (sexe des rentiers à gauche ; type de rentiers à droite).....	39
Figure 12 : Analyse graphique de la base de données étudiée (âge des rentiers à gauche ; montants des annuités à droite)	39
Figure 13 : Statistiques descriptives des âges des rentiers déclarés vivants en mars 2021	39
Figure 14 : Statistiques descriptives des montants des rentes mensuelles des bénéficiaires déclarés vivants en mars 2021 (GBP)	39
Figure 15: Proportion du nombre de décès survenus au mois de mars 2017 et déclarés en fonction du délai de déclaration (mois)	40
Figure 16 : Proportion des décès déclarés et survenus dans la période d'étude en fonction du délai de déclaration	41
Figure 17 : Statistiques descriptives des délais de déclaration de décès (mois)	41
Figure 18 : Triangle de développement du nombre de décès déclarés (cumulés).....	43
Figure 19 : Etape 1 de la méthode du bootstrap	49
Figure 20 : Etape 2 de la méthode du bootstrap	50
Figure 21 : Etape 4 de la méthode du bootstrap	50
Figure 22 : Etape 5 de la méthode du bootstrap	51
Figure 23 : Etape 6 de la méthode du bootstrap	51
Figure 24 : Dispersion des coefficients de développement individuels par période de développement	55
Figure 25: Coefficients de variation des facteurs de développement individuels en fonction des périodes de développement (mensuelles)	55
Figure 26 : $C_{(i,j+1)}$ en fonction de $C_{(i,j)}$ avec j fixé - Alignement des couples.....	56
Figure 27 : Tests de corrélation entre les couples ($C_{(i,j)}$, $C_{(i,j+1)}$) avec j fixé et alpha = 5%	56
Figure 28 : Densités empiriques des couples ($C_{(i,j+1)}$, $C_{(i,j)}$) _i avec j fixé.....	57
Figure 29 : Résultats des tests de validation des hypothèses (H1) (à droite) et (H2) (à gauche)	58
Figure 30 : $r_{(i,j)}$ en fonction de $C_{(i,j)}$ avec j fixé – Recherche de tendance	59
Figure 31 : Estimation du nombre de déclarations tardives (ligne continue) par la méthode de Mack et erreurs de prédictions (ronds)	59
Figure 32 : Estimations du nombre de déclarations tardives (ligne continue) par bootstrap et erreurs de prédictions (ronds).....	60

Figure 33 : Validation de la première hypothèse de la version stochastique du modèle de Schnieper	61
Figure 34 : Estimations du nombre de déclarations tardives par la méthode Schnieper (ligne continue) et exposition au risque (bleu ciel) par période de survenance mensuelle	62
Figure 35 : Comparaison des résultats des méthodes de provisionnement classiques	63
Figure 36 : Comparaison des estimations du nombre de décès non déclarés par période de survenance (mensuelle)	63
Figure 37 : Différences de prédictions entre les méthodes de provisionnement classiques (Mack et bootstrap à gauche ; Mack et Schnieper à droite).....	64
Figure 38 : Histogramme des délais de déclaration (jours)	70
Figure 39 : Statistiques descriptives des délais de déclaration (jours)	70
Figure 40 : Densité et fonction de répartition empiriques	71
Figure 41 : Estimations des paramètres de forme de la distribution empirique.....	71
Figure 42 : Graphique de Cullen & Frey des délais de déclarations observés (jours).....	72
Figure 43 : Comparaison des critères d'ajustement aux lois	72
Figure 44 : Critères graphiques d'analyse de la qualité de l'ajustement des lois candidates	73
Figure 45 : Choix de la méthode d'estimation paramétrique.....	73
Figure 46 : Estimations des paramètres de la loi log-normale par la méthode du maximum de vraisemblance	73
Figure 47 : Analyse de la qualité de l'ajustement de la loi choisie selon les fonctions densité.....	74
Figure 48 : Analyse de la qualité de l'ajustement de la loi choisie selon les fonctions de répartition .	74
Figure 49 : Comparaison des fonctions densité avant et après correction du biais.....	76
Figure 50 : Comparaison des fonctions de répartition avant et après correction du biais	76
Figure 51 : Interprétation géométrique du calcul d'estimation du nombre de déclarations tardives.	78
Figure 52 : Estimation du nombre de décès déclarés à l'ultime sur toute la période d'investigation .	80
Figure 53 : Estimation à l'ultime du nombre de décès survenus par période mensuelle (après correction du biais).....	80
Figure 54 : Comparaison des méthodes d'estimation du nombre de déclarations tardives par période de survenance mensuelle	81
Figure 55 : Nombre estimé de déclarations tardives à l'ultime en fonction du mois de survenance ..	83
Figure 56 : Statistiques descriptives du nombre de déclarations tardives estimé	83
Figure 57 : Comparaison des méthodes d'estimation paramétrique	83
Figure 58 : Choix de la méthode d'estimation paramétrique par analyse graphique des fonctions de répartition (en vert : méthode des moments ; en rouge : méthode du maximum de vraisemblance)	84
Figure 59 : Estimations des paramètres de la loi binomiale négative par la méthode du maximum de vraisemblance	84
Figure 60 : Illustration de la notion de CDR	86
Figure 61 : Résultats des mesures d'incertitude à 1,2,3 et 4 périodes pour les différents modèles de provisionnement.....	87
Figure 62 : Mesure d'incertitude à l'ultime	88
Figure 63 : Illustration du critère de backtesting (SSE) de Denuit & Charpentier	89
Figure 64 : Résultats du critère SSE des méthodes.....	89
Figure 65 : Critères de sélection du modèle de provisionnement.....	90
Figure 66 : Illustration de la modélisation de l'ajustement pour déclarations tardives par l'approche simplifiée.....	93
Figure 67 : Valeur du coefficient multiplicatif utilisé dans l'estimation de l'ajustement à appliquer pour prendre en compte les déclarations tardives	95
Figure 68 : Impact de l'ajustement pour déclarations tardives sur la VAP des prestations (mGBP)....	95

Figure 69 : Sensibilité à la méthode de provisionnement de l'impact de l'ajustement de <i>VAP PrestationsMars 2021</i> (GBP).....	95
Figure 70 : Impact de l'ajustement sur le BEL (mGBP)	96
Figure 71 : Sensibilité du BEL ajusté à la méthode de provisionnement sélectionnée (GBP)	97
Figure 72 : Impact de l'ajustement pour déclarations tardives sur le SCR longévité (en mGBP)	99
Figure 73 : Sensibilité du SCR longévité ajusté au modèle de provisionnement sélectionnée avec l'approche prudente d'estimation de Γ avec choc, t (GBP)	99
Figure 74 : Impact de la prise en compte des déclarations tardives sur le bilan prudentiel sous Solvabilité II.....	100
Figure 75 : Validation de la deuxième hypothèse de la version stochastique du modèle de Schnieper	114
Figure 76 : Comparaison des estimations du nombre de décès déclarés avec les observations à quatre dates d'évaluation par période de survénance	115
Figure 78 : Matrice de corrélation des sous-modules du risque de souscription en vie	116

Annexe 1 : Test d'absence d'effet calendaire

Ce test, proposé en 1994 par Mack³⁵, consiste en l'étude des facteurs de développement individuels afin de déceler d'éventuelles tendances sur les diagonales du triangle de développement du nombre de décès déclarés. Ce test est utilisé afin de juger de l'indépendance des périodes de survenance.

Pour chaque colonne du triangle de développement agrégé, les $(f_{i,j})_i$ seront comparés à leur médiane. Si l'hypothèse d'indépendance des périodes de survenance est vérifiée alors, les valeurs de $(f_{i,j})_i$ doivent être réparties de manière aléatoire.

Les facteurs de développement individuels prennent les valeurs suivantes :

$$\forall (i,j) \text{ tel que } i + j \leq n - 2, \quad f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \quad (A1.1)$$

La notation suivante est adoptée pour désigner la médiane d'une colonne j :

$$\forall j \in \llbracket 0, n - 2 \rrbracket, \quad med_j = \text{médiane}(f_{0,j}, f_{1,j}, \dots, f_{n-1,j}) \quad (A1.2)$$

Un triangle A est construit. Les éléments du triangle sont notés $(a_{i,j})_{i,j}$ et sont définis tels que :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 0, n - 2 \rrbracket^2, \quad \begin{cases} \text{si } f_{i,j} < med_j ; a_{i,j} = S \\ \text{si } f_{i,j} > med_j ; a_{i,j} = L \\ \text{si } f_{i,j} = med_j ; a_{i,j} = 0 \end{cases} \quad (A1.3)$$

Les diagonales se définissent telles que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n - 2 \rrbracket, \quad D_k = \{f_{k,0}, f_{k-1,1}, \dots, f_{1,k-1}, f_{0,k}\} \quad (A1.4)$$

Notons, pour chaque diagonale :

$$\forall k \in \llbracket 0, n - 2 \rrbracket, \quad \begin{cases} L_k : \text{le nombre de } L \text{ sur la diagonale } k \text{ du triangle } A \\ S_k : \text{le nombre de } S \text{ sur la diagonale } k \text{ du triangle } A \end{cases} \quad (A1.5)$$

Par la suite, la variable $Z_k = \min(L_k, S_k)$ est définie $\forall k \in \llbracket 1, n - 2 \rrbracket$. En théorie, en l'absence d'effet calendaire : $Z_k \cong \frac{L_k + S_k}{2}$.

³⁵ Ce test a été introduit dans la publication intitulée "Measuring the variability of Chain Ladder Reserve Estimates" (Mack, 1994)

En posant $n_k = L_k + S_k$ et $m_k = \left\lfloor \frac{n_k - 1}{2} \right\rfloor$, Mack a démontré les égalités suivantes :

$$\mathbb{E}(Z_k) = \frac{n_k}{2} - \left(\frac{n_k - 1}{m_k} \right) \times \frac{n_k}{2^{n_k}} \quad (A1.6)$$

$$\mathbb{V}(Z_k) = \frac{n_k(n_k - 1)}{4} - \left(\frac{n_k - 1}{m_k} \right) \times \frac{n_k(n_k - 1)}{2^{n_k}} + \mathbb{E}(Z_k) - (\mathbb{E}(Z_k))^2 \quad (A1.7)$$

La variable Z telle que $Z = \sum_{k=1}^{n-2} Z_k$ est introduite ; son espérance et sa variance sont calculables comme ci-dessous :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{E}(Z_k) \quad (A1.8)$$

$$\mathbb{V}(Z) = \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{V}(Z_k) \quad (A1.9)$$

Sous l'hypothèse que la variable Z suive une loi normale, le test conclut à une absence d'effet calendaire et ainsi à l'indépendance des périodes de survénance des décès lorsque la variable Z appartient à l'intervalle de confiance à 95% ci-dessous :

$$IC_{95\%} = \left[\mathbb{E}(Z) - 1,96 \times \sqrt{\mathbb{V}(Z)} ; \mathbb{E}(Z) + 1,96 \times \sqrt{\mathbb{V}(Z)} \right] \quad (A1.10)$$

Annexe 2 : Test de corrélation entre facteurs de développement individuels

Le coefficient de corrélation de Spearman sera appliqué aux colonnes consécutives du triangle des facteurs de développement individuels.

Pour chaque colonne j , notons :

T_j : le coefficient de corrélation de Spearman de la colonne j

Néanmoins, choisir de ne considérer que les colonnes consécutives des facteurs de développement serait s'exposer à l'accumulation des erreurs de probabilités. Ainsi, Mack propose de considérer le triangle dans son ensemble.

Mack introduit la variable T prenant en compte les corrélations de toutes les colonnes du triangle de facteurs de développement individuels en les pondérant :

$$T = \frac{\sum_{j=1}^{n-3} (n-j) \times T_j}{\sum_{j=1}^{n-3} (n-j)} = \sum_{j=1}^{n-3} \frac{n-j}{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} \times T_j \quad (A2.1)$$

De plus, il calcule les deux premiers moments de cette variable T :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{j=1}^{n-3} \mathbb{E}(T_j) = 0 \quad (A2.2)$$

$$\mathbb{V}(T) = \frac{2}{(n-2)(n-3)} \quad (A2.3)$$

Enfin, Mack propose un intervalle de confiance avec un seuil α égal à 50% étant donné qu'il s'agit d'un test visant à détecter les corrélations dans une partie importante du triangle. En supposant que T suive une loi normale centrée, on a l'intervalle de confiance suivant :

$$IC_{50\%} = \left[-\frac{0,67}{\sqrt{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}}; \frac{0,67}{\sqrt{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}} \right] \quad (A2.4)$$

Si la variable T appartient à cet intervalle de confiance à 50%, le test conclut que l'hypothèse (H2) est vérifiée.

Annexe 3 : Version stochastique du modèle de Schnieper

Présentation de la méthode

Dans le chapitre 4 de leur article intitulé « *Predictive distributions for reserves which separate true IBNR and IBNER claims* », Liu et Verrall ont proposé une version stochastique de la méthode Schnieper. Cette version stochastique propose une mesure de l'erreur de prédiction totale à l'ultime du modèle développé par Schnieper en 1991³⁶.

Les notations introduites dans le chapitre 2 de ce mémoire sont conservées.

Cette version du modèle repose sur les trois hypothèses fondamentales suivantes :

(H1') Il existe des facteurs positifs ou nuls $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ tels que $\forall(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$:

$$\mathbb{E}(N_{i,j} | H_{i+j}) = E_i \lambda_j$$

Il existe des facteurs réels $(\delta_0, \dots, \delta_{n-1})$ tels que $\forall(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \times \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\mathbb{E}(D_{i,j} | H_{i+j}) = C_{i,j-1} \delta_j$$

(H2') Il existe des facteurs positifs ou nuls $(\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1})$ tels que $\forall(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$:

$$\mathbb{V}(N_{i,j} | H_{i+j}) = E_i \sigma_j^2$$

Il existe des facteurs réels $(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})$ tels que $\forall(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \times \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\mathbb{V}(D_{i,j} | H_{i+j}) = C_{i,j-1} \tau_j^2$$

(H3') Indépendance des périodes de survenance

$\forall i \neq k, \{N_{i,j}, D_{i,j} \mid j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ et $\{N_{k,j}, D_{k,j} \mid j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ sont indépendants

Remarques :

- La première hypothèse de cette version stochastique du modèle regroupe les hypothèses (H1) et (H2) émises par Schnieper en 1991.
- Les hypothèses supplémentaires se rapportent aux deuxièmes moments des variables $(N_{i,j}, D_{i,j})$. En effet, les deux conditions de (H2') fixent des contraintes sur les variances conditionnelles.

³⁶ Modèle introduit par l'article « *Separating true IBNR and IBNER claims* » (Schnieper, 1991)

Si les hypothèses susmentionnées sont respectées, l'erreur quadratique moyenne des prédictions peut être estimée comme suivant :

$$mse\widehat{p}(\widehat{R} | H_{n-1}) \approx \mathbb{V}(R|H_{n-1}) + \mathbb{V}(\widehat{R}|H_{n-1}) \quad (A3.1)$$

Grâce à cette approximation, il est possible d'estimer l'erreur quadratique moyenne des prédictions comme ci-dessous :

$$\widehat{mse\widehat{p}}(\widehat{R} | H_{n-1}) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=0}^{n-1} C_{i,n-1} | C_{i,k}\right) + \mathbb{V}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \widehat{C}_{i,n-1}\right) \quad (A3.2)$$

$$\widehat{mse\widehat{p}}(\widehat{R} | H_{n-1}) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{V}(C_{i,n-1} | C_{i,k})}_{A3.4} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{V}(\widehat{C}_{i,n-1})}_{A3.5} + 2 \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{s=i}^{n-1} \underbrace{Cov(\widehat{C}_{i,n-1}, \widehat{C}_{s,n-1})}_{A3.6} \quad (A3.3)$$

Posons $k = n - i + 1$

Les trois formules récursives suivantes permettent d'obtenir une formule fermée utilisable dans le but d'estimer $mse\widehat{p}(\widehat{R} | H_{n-1})$.

Soient $(i, k, s) \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket^3$:

$$\mathbb{V}(C_{i,n-1} | C_{i,k}) = \tau_{n-1}^2 \mathbb{E}(C_{n-2} | C_{i,k}) + E_i \sigma_{n-1}^2 + (1 - \delta_{n-1})^2 \mathbb{V}(C_{i,n-2} | C_{i,k}) \quad (A3.4)$$

$$\mathbb{V}(C_{i,k} | C_{i,k}) = 0$$

$$\mathbb{V}(\widehat{C}_{i,n-1}) = \widehat{C}_{i,n-2}^2 \mathbb{V}(\widehat{\delta}_{n-1}) + (1 - \widehat{\delta}_{n-1})^2 \mathbb{V}(\widehat{C}_{i,n-2}) + \mathbb{V}(\widehat{\delta}_{n-1}) \mathbb{V}(\widehat{C}_{i,n-2}) + E_i^2 \mathbb{V}(\widehat{\lambda}_{n-1}) \quad (A3.5)$$

$$Cov(\widehat{C}_{i,n-1}, \widehat{C}_{s,n-1}) = \mathbb{V}(\widehat{\delta}_{n-1}) (Cov(\widehat{C}_{i,n-2}, \widehat{C}_{s,n-2}) + \widehat{C}_{i,n-2} \widehat{C}_{s,n-2}) + [\mathbb{E}(1 - \widehat{\delta}_{n-1})]^2 Cov(\widehat{C}_{i,n-2}, \widehat{C}_{s,n-2}) + E_i E_s \mathbb{V}(\widehat{\lambda}_{n-1}) \quad (A3.6)$$

Enfin, l'expression de l'erreur de prédiction globale à l'ultime est la suivante :

$$\begin{aligned}
\widehat{mse}_p(\hat{R} | H_{n-1}) &= \sum_{i=0}^{n-1} ((1 - \delta_{n-1})^2 \mathbb{V}(C_{i,n-2} | C_{i,k}) + \tau_{n-1}^2 \times \mathbb{E}(C_{i,n-2} | C_{i,k}) + E_i \sigma_{n-1}^2) \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} (\hat{C}_{i,n-2} \mathbb{V}(\hat{\delta}_{n-1}) + (1 - \delta_{n-1})^2 \mathbb{V}(\hat{C}_{i,n-2}) + \mathbb{V}(\hat{\delta}_{n-1}) \mathbb{V}(\hat{C}_{i,n-2}) + E_i^2 \mathbb{V}(\hat{\lambda}_{n-1})) \\
&+ 2 \sum_{t=0}^{n-2} \sum_{s=t+1}^{n-1} (\mathbb{V}(\hat{\delta}_{n-1}) \{Cov(\hat{C}_{t,n-2}; \hat{C}_{s,n-2} | C_{t,n-t-1}, C_{s,n-s-1}) + (\hat{C}_{t,n-2} \times \hat{C}_{s,n-s-1})\} \\
&\quad + (\mathbb{E}[1 - \hat{\delta}_{n-1}]^2 Cov(\hat{C}_{t,n-2}; \hat{C}_{s,n-2}) + E_t E_s \mathbb{V}(\hat{\lambda}_{n-1}))
\end{aligned} \tag{A3.7}$$

Dans le cadre de l'étude, cette formule est fortement simplifiée et on obtient :

$$\begin{aligned}
\widehat{mse}_p(\hat{R} | H_{n-1}) &= \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbb{V}(C_{i,n-2} | C_{i,k}) + E_i \sigma_{n-1}^2) + \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbb{V}(\hat{C}_{i,n-2}) + E_i^2 \mathbb{V}(\hat{\lambda}_{n-1})) \\
&+ 2 \sum_{t=0}^{n-2} \sum_{s=t+1}^{n-1} (Cov(\hat{C}_{t,n-2}; \hat{C}_{s,n-2}) + E_t E_s \mathbb{V}(\hat{\lambda}_{n-1}))
\end{aligned} \tag{A3.8}$$

Validation des hypothèses

➤ Première hypothèse :

La partie de (H1') concernant l'espérance conditionnelle des $(N_{i,j})_{i,j}$ suggère une relation de proportionnalité au sein des couples $(N_{i,j}, E_i)_i$ pour une période de développement j fixée. Le respect de cette hypothèse a déjà été vérifié par analyse graphique dans la section 2.6.4.

➤ Deuxième hypothèse :

De même, la partie de l'hypothèse (H2') concernant la variance conditionnelle des $(N_{i,j})_{i,j}$ peut être vérifiée graphiquement.

Si (H1') et (H2') sont vérifiées, les résidus standardisés sont définis comme ci-dessous :

$$r_{i,j}^{Schnieper} = \frac{N_{i,j} - E_i \lambda_j}{\sqrt{E_i}} \tag{A3.9}$$

De cette manière, il est possible de valider (H2') en s'assurant graphiquement que les couples $(N_{i,j}, r_{i,j}^{Schnieper})_i$ ne présentent aucune tendance particulière.

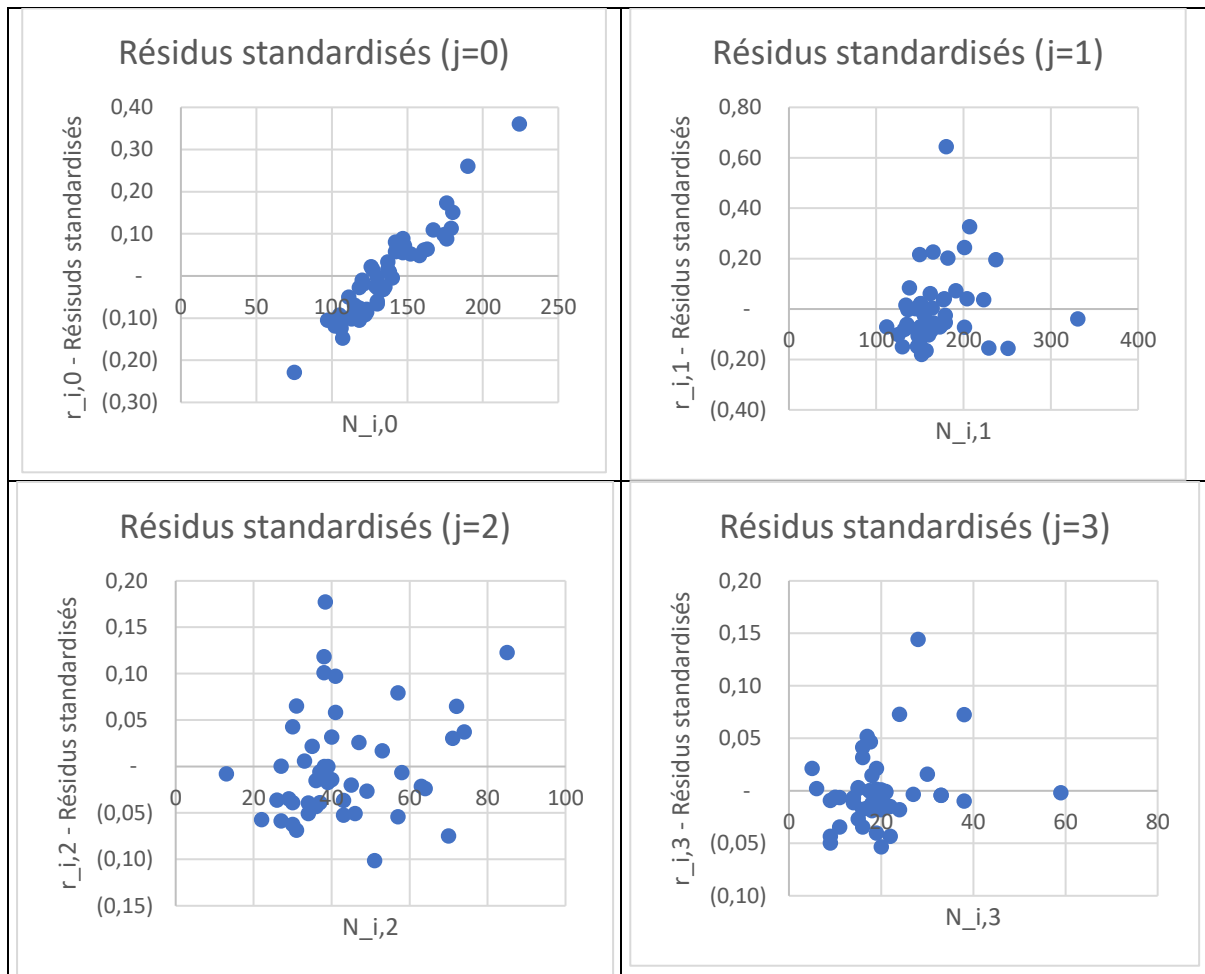


Figure 75 : Validation de la deuxième hypothèse de la version stochastique du modèle de Schnieper

Lorsque $j = 0$, on observe une claire relation de corrélation positive dans le couple des variables $(N_{i,j}, r_{i,j}^{Schnieper})_i$. Toutefois, excepté cette première période de développement, aucune tendance particulière n'est observée dans les graphiques ci-dessus. On considèrera que cette hypothèse est globalement respectée.

➤ Troisième hypothèse :

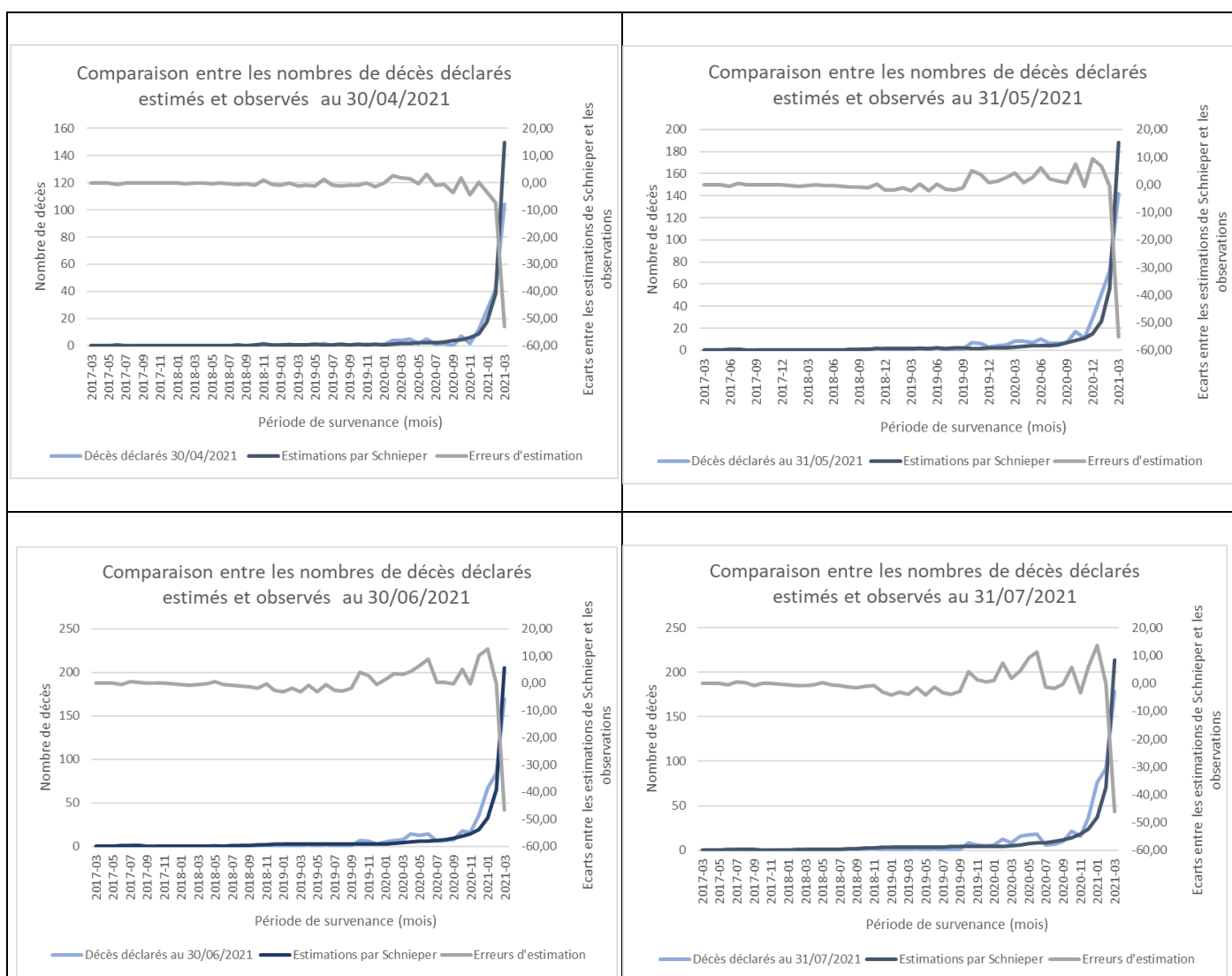
Le travail de validation de l'hypothèse d'indépendance des périodes de survénance a déjà été mené précédemment au sein de ce mémoire.³⁷

³⁷ Ces travaux ont été détaillés dans les sections 2.6.1 et 2.6.2 du mémoire

Annexe 4 : Qualité prédictive du modèle de Schnieper

Le modèle de Schnieper a été sélectionné comme modèle d'estimation du nombre de décès non encore déclaré. En effet, il est particulièrement adapté au contexte de l'étude ; les graphiques ci-dessous soulignent les faibles erreurs de prédiction commises par le modèle.

Par ailleurs, cette méthode a tendance à sous-estimer le nombre de déclarations de décès ; il reste ainsi prudent.



	Au 31/03/2021	Au 30/04/2021	Au 31/05/2021	Au 30/06/2021	Au 31/07/2021
Nombre de décès déclarés	20 005	20 228	20 413	20 504	20 557
Estimations du nombre de décès déclarés par Schnieper		20 237,33	20 379,29	20 452,72	20 508,44
Erreurs de prédictions		9,33	-33,71	-51,28	-48,54

Figure 76 : Comparaison des estimations du nombre de décès déclarés avec les observations à quatre dates d'évaluation

Annexe 5 : Calcul de l'exigence de capital du risque de souscription vie : le SCR_{life}

Selon la formule standard, l'exigence du capital du risque de souscription vie doit être calculé comme ci-dessous :

$$SCR_{life} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j} \quad (A5.1)$$

Où :

- $Corr_{i,j}$: le facteur de corrélation entre les risques des sous-modules i et j évoqué dans la figure 71 ci-dessous.
- SCR_i : l'exigence de capital correspondant à l'un des sept sous-modules du SCR_{life} .

Les sept sous-modules du SCR_{life} sont les suivants :

- $SCR_{mortalité}$: l'exigence de capital correspondant au sous-module « risque de mortalité ».
- $SCR_{longévité}$: l'exigence de capital correspondant au sous-module « risque de longévité ». Elle est « égale à la perte de fonds propres de base [...] résultant de la baisse soudaine permanente de 20 % des taux de mortalité utilisés pour le calcul des provisions techniques. »³⁸.
- $SCR_{incap, inval}$: l'exigence de capital correspondant au sous-module « risque de d'invalidité et de morbidité ».
- $SCR_{cessation}$: l'exigence de capital correspondant au sous-module « risque de cessation ».
- $SCR_{dépenses, vie}$: l'exigence de capital correspondant au sous-module « risque de dépenses en vie ».
- $SCR_{révision}$: l'exigence de capital correspondant au sous-module « risque de révision ».
- $SCR_{catastrophe, vie}$: l'exigence de capital correspondant au sous-module « risque de catastrophe en vie ».

$i \backslash j$	Mortalité	Longévité	Invalidité	Dépenses en vie	Révision	Cessation	Catastrophe en vie
Mortalité	1	- 0,25	0,25	0,25	0	0	0,25
Longévité	- 0,25	1	0	0,25	0,25	0,25	0
Invalidité	0,25	0	1	0,5	0	0	0,25
Dépenses en vie	0,25	0,25	0,5	1	0,5	0,5	0,25
Révision	0	0,25	0	0,5	1	0	0
Cessation	0	0,25	0	0,5	0	1	0,25
Catastrophe en vie	0,25	0	0,25	0,25	0	0,25	1

Figure 77 : Matrice de corrélation des sous-modules du risque de souscription en vie³⁹

³⁸ Citation de l'article 138 paragraphe 1 (Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014 complétant la directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II), 2015)

³⁹ Source : article 136 du règlement délégué (UE) 2015/35

Annexe 6 : Calcul du minimum de capital requis : le MCR

Selon la formule standard, le minimum de capital requis se calcule comme suit :

$$MCR = \max(MCR_{combined} ; AMCR) \quad (A6.1)^{40}$$

Où :

- $MCR_{combined}$: le minimum de capital requis combiné⁴¹. Il se calcule comme suivant :

$$MCR_{combined} = \min(\max(MCR_{linear}; 0,25 \times SCR) ; 0,45 \times SCR) \quad (A6.2)$$

- MCR_{linear} : le minimum de capital requis linéaire⁴²
Il est défini comme ci-après :

$$MCR_{linear} = MCR_{linear,life} + MCR_{linear,non\ life} \quad (A6.3)$$

- $MCR_{linear,life}$: le terme de la formule linéaire pour les engagements d'assurance et de réassurance vie.
 - $MCR_{linear,non\ life}$: le terme de la formule linéaire pour les engagements d'assurance et de réassurance non-vie.
- $AMCR$: le seuil plancher absolu du minimum de capital requis

Selon les formules précédentes, le MCR et le SCR varient dans le même sens. En effet, selon (A6.2), lorsque le SCR décroît, le $MCR_{combined}$ décroît également et par conséquent MCR aussi.

Annexe 7 : Calcul de la marge de risque selon la formule standard

L'article 36 du règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014 définit la formule permettant le calcul de la marge de risque pour l'intégralité du portefeuille d'un organisme d'assurance ou de réassurance. Cette formule est la suivante :

$$RM = CoC \times \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_t}{(1 + r_{t+1})^{t+1}} \quad (A7.1)$$

Où :

- CoC : le taux de coût du capital
- SCR_t : la valeur du SCR après t années
- r_{t+1} : le taux d'intérêt sans risque de base pour l'échéance à $t + 1$ années

⁴⁰ Formule définie à l'article 248 paragraphe 1 du règlement délégué (UE) 2015/35

⁴¹ Définition à l'article 248 paragraphe 2 du règlement délégué (UE) 2015/35

⁴² Définition à l'article 249 du règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014

