

Tables de mortalité *best estimate*

Une approche de crédibilité pour les portefeuilles de petite taille

Yahia Salhi ^{α} Pierre Thérond ^{α, β}

^{α} ISFA - Université Lyon 1

^{β} Galea & Associés

11 novembre 2018



CHAIR OF EXCELLENCE

Data Analytics & Models for Insurance



BNP PARIBAS
CARDIF



GRANDS ÉCOLES D'ACTUARIAAT & GESTION DES RISQUES

FONDATEUR
DE WISDOM
Louis Bachelier



LABORATOIRE
SAF
SCIENCES ACTUARIELLE
& FINANCIÈRE

Université Claude Bernard - Lyon 1

1. Introduction I

Cette présentation est basée sur les travaux suivants :

- ▶ J.-B. Coulomb, Salhi, Y. et Thérond, P.-E.
Adjustment of the Lee-Carter model.
En cours de préparation (2018).
- ▶ Salhi, Y. et Thérond, P.-E.
Age-specific adjustment of graduated mortality.
ASTIN Bulletin (2018) 48(2) 543-569.
- ▶ Salhi, Y., Thérond, P.-E., et Tomas, J.
A credibility approach of the Makeham mortality law.
European Actuarial Journal, (2016) 6(1) :61–96.

1. Introduction II

- ▶ Récemment, l'intérêt des assureurs vie à évaluer leur propre **risque de mortalité** a considérablement augmenté.
- ▶ Les réglementations en matière de prix et de comptabilité exigent des assureurs l'utilisation des tables de mortalité prudentes (art. A132-18 C. Ass.).
- ▶ Les nouvelles réglementations *prudentielles* (Solvabilité II) et comptables (IFRS 17) impose une estimation sans biais du risque de mortalité.
- ▶ Cela a un impact significatif sur la manière de construire les tables de mortalité et donc le calcul des provisions. Une compagnie d'assurance doit :
 - ▶ **mesurer directement le risque biométrique (mortalité / longévité) de ses propres assurés,**
 - ▶ **réévaluer régulièrement ces risques.**

1. Introduction III

- ▶ Néanmoins, un certain nombre d'acteurs se heurtent à des problématiques techniques liées à la **taille** de leurs portefeuilles et leur **hétérogénéité** en termes de garanties
- ▶ Par exemple, en termes de risque en cas de décès, un assureur peut disposer de quelques dizaines de milliers d'assurés bénéficiant de contrats de prévoyance décès, de garanties plancher sur des contrats en unités de comptes et de contrats d'assurance de prêt, etc.
- ▶ Dans de tels contextes, il est **délicat** de construire des tables de mortalité au moyen de **la seule expérience** de chaque type de produit.

1. Introduction IV

- ▶ Suivant les travaux de Bühlmann and Gisler (2005) et Hardy and Panjer (1998), nous proposons une approche de crédibilité qui consiste à revoir, à mesure que de nouvelles observations arrivent, les taux de mortalité basés sur :
 1. Une approche paramétrique
 2. Un lissage semi-paramétrique
- ▶ Un tel ajustement permet d'ajouter une structure à la table de mortalité qui lorsque les portefeuilles sont de taille limitée
- ▶ Il est également utile compte tenu de l'hétérogénéité du coût des garanties en fonction de l'âge.

1.1. Structure des données et notations I

- ▶ Supposons que nous ayons à notre disposition des **statistiques de mortalité par âge** provenant de n portefeuilles.
- ▶ Pour chaque portefeuille $i \in \{1, \dots, n\}$ on observe les décès et les expositions au risque sur une période T_i et une tranche d'âge $[\underline{x}, \bar{x}]$
- ▶ On note $E_{x,t}^i$ et $D_{x,t}^i$ l'**exposition au risque** et les **décès** à l'âge x et l'année $t = 1, \dots, T_i$. On note également

$$D_{x,\bullet}^i = \sum_{t=1}^{T_i} D_{x,t}^i, \quad E_{x,\bullet}^i = \sum_{t=1}^{T_i} E_{x,t}^i, \quad D_{\bullet,t}^i = \sum_{x=\underline{x}}^{\bar{x}} D_{x,t}^i, \quad E_{\bullet,t}^i = \sum_{x=\underline{x}}^{\bar{x}} E_{x,t}^i,$$

- ▶ L'indexation “•” fait référence à la somme sur l'indice d'intérêt.

2.1. La loi de mortalité pour un seul portefeuille I

L'étude de la mortalité au niveau d'un seul portefeuille pose certains problèmes :

Taille de la population : La population assurée est généralement de **petite taille**, ce qui peut biaiser l'estimation de la mortalité.

Profondeur des données : Les statistiques de mortalité par âge disponibles manquent de **profondeur**.

Niveau de mortalité : La mortalité des assurés est sensiblement différentes de la population nationale. Cette dernière ne peut donc être utilisée comme hypothèse de substitution.

2.1. La loi de mortalité pour un seul portefeuille II

- ▶ Nous nous intéressons au comportement, au fil du temps, de la mortalité (ou d'un proxy) au niveau du portefeuille
- ▶ On peut considérer les n portefeuilles comme un sous-ensemble de la population de référence et chaque sous-groupe est donc caractérisée par un profil de risque Θ_i
- ▶ Le niveau relative de la mortalité du portefeuille i par rapport à la mortalité de référence est caractérisé par le profil de risque θ_i , qui est une réalisation de Θ_i
- ▶ Θ_i représente les caractéristiques non observées de la mortalité du portefeuille i (par rapport à la référence). Nous tenons implicitement compte de l'hétérogénéité du profil de mortalité du portefeuille de i .

Approche Paramétrique : Loi de Makeham

3.1. Notations et Hypothèses I

La loi de Makeham (1867) suppose que la force de la mortalité ϕ_x à l'âge atteint x a la forme suivante :

$$\phi_x = A + BC^x, \quad \text{où } A, B \text{ et } C \text{ sont des constantes.}$$

- ▶ Pour la référence ϕ_x^b les paramètres A^b , C^b et B_t^b sont estimés en utilisant les données agrégées, c'est-à-dire $E_{x,\bullet}^\bullet$ et $D_{x,\bullet}^\bullet$.
- ▶ Pour chaque portefeuille i , la "tendance" est incorporée dans le paramètre B^i noté B_t^i

3.1. Notations et Hypothèses II

- ▶ Compte tenu des problématiques spécifiques discutées précédemment, pour chaque portefeuille i , nous ferons les hypothèses suivantes :
 - ▶ La mortalité de base ϕ_x^b est décrite par le modèle de Makeham.
 - ▶ L'effet de l'âge est similaire sur les n portefeuilles. On suppose que le modèle spécifique à l'entreprise partage les mêmes paramètres $A^i = A^b$ et $C^i = C^b$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$
 - ▶ Le paramètre dépendant du temps B_t^i est ajusté à chaque période.
 - ▶ Le seul paramètre qui capture le profil spécifique de mortalité pour le portefeuille est B_t^i , ce qui ne serait *a priori* pas le même d'un portefeuille à un autre en raison de l'hétérogénéité des populations sous-jacentes.

3.1. Notations et Hypothèses III

La force de mortalité pour un portefeuille i est donc décrite par

$$\phi_x^i = A^b + B^i \times (C^b)^x.$$

- ▶ Nous nous intéressons au comportement, au fil du temps, de la variable aléatoire

$$X_t^i = \frac{B_t^i}{B_t^b}.$$

Objectif

- ▶ Compte tenu des données disponibles jusqu'à l'instant T_i , c'est-à-dire X_t^i pour $t = 1, \dots, T_i$, nous cherchons à trouver la meilleure estimation (*best estimate*) de $\mathbb{E}[X_t^i | \Theta_i] = \mu(\Theta_i)$
- ▶ Pour ce faire, nous utilisons la théorie de crédibilité

3.1. Notations et Hypothèses IV

H0 $\text{Var}[\mu(\Theta_i)] = \text{Var}[\Theta_i] := \tau^2$, et $\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta_i)] = \mathbb{E}[\Theta_i] := \sigma^2$

H1 Conditionnellement à Θ_i , les v.a. X_t^i sont indépendantes et

$$\mathbb{E}[X_t^i | \Theta_i] = \mu(\Theta_i) \quad \text{et} \quad \text{Var}(X_t^i | \Theta_i) = \frac{\sigma^2(\Theta)}{\omega_t^i}$$

pour des fonctions $\mu(\Theta_i)$ et $\sigma^2(\Theta_i)$, avec

$$\omega_t^i = \frac{\sum_x (C^b)^x L_{x,t}^i}{\sum_{i,x} (C^b)^x L_{x,t}^i},$$

mesure le poids donné à l'information provenant du portefeuille i à la date t .

H2 Les couples (Θ_i, X_t^i) , (Θ_k, X_t^k) sont i.i.d. pour $k \neq i$.

3.1. Notations et Hypothèses V

- ▶ Pour chaque portefeuille, en raison de l'hypothèse (H2), $\mu(\Theta_i)$ ne dépend que des observations et l'estimateur de crédibilité linéaire est de la forme

$$\mu(\Theta_i) = a_0^i + \sum_{t=1}^{T_i} a_t^i X_t^i,$$

où les coefficients a_t^i sont estimés en minimisant le critère des erreurs quadratiques moyennes.

- ▶ L'estimation de ces paramètres :

$$\widehat{a}_0^i = 1 - \frac{\tau^2 \omega_{\bullet}^i}{\sigma^2 + \tau^2 \omega_{\bullet}^i} \quad \text{and} \quad \widehat{a}_t^i = \frac{\tau^2 \omega_t^i}{\sigma^2 + \tau^2 \omega_{\bullet}^i}, \quad \text{avec} \quad \omega_{\bullet}^i = \sum_{t=1}^{T_i} \omega_t^i.$$

3.1. Notations et Hypothèses VI

- ▶ Ceci conduit à l'estimateur de crédibilité Bühlmann-Straub de $X_{T_i+1}^i$

$$\widehat{X}_{T_i+1}^i(\Theta_i) = \alpha^i X_{\bullet}^i + (1 - \alpha^i), \quad \text{avec } \alpha^i = \omega_{\bullet}^i \tau^2 / (\omega_{\bullet}^i \tau^2 + \sigma^2),$$

et

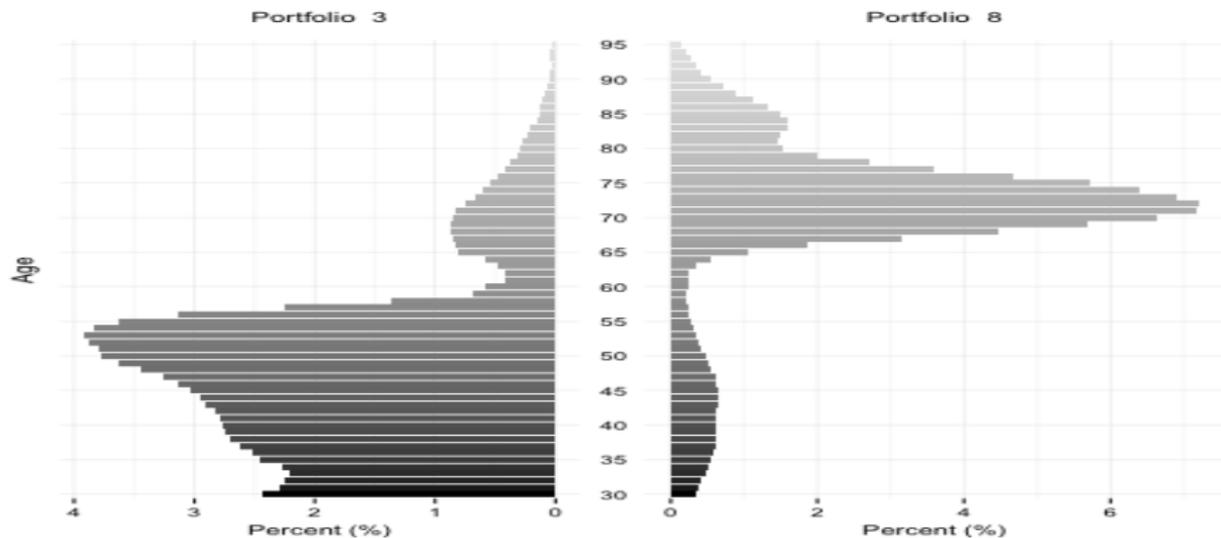
- ▶ $X_{\bullet}^i = (\sum_{t=1}^{T_i} \omega_t^i X_t^i) / \omega_{\bullet}^i$
- ▶ σ^2 / τ^2 représente le facteur de crédibilité

3.2. Application I

- ▶ Les données proviennent d'études menées par l'Institut des Actuaires. Ces études comprennent au total 14 portefeuilles couvrant la période 2007-2011, chaque société fournissant des données pour au moins 4 des 5 années possibles.
- ▶ La tranche d'âge de tous les portefeuilles va de 30 à 95 ans.

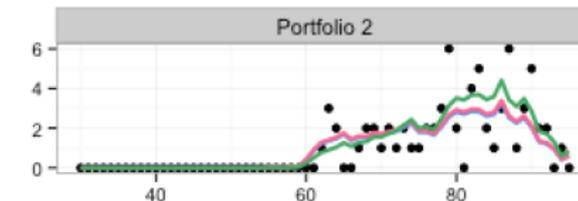
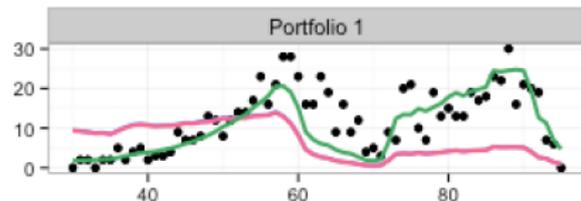
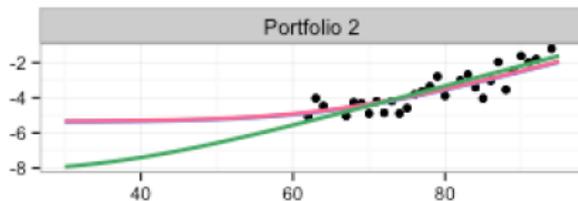
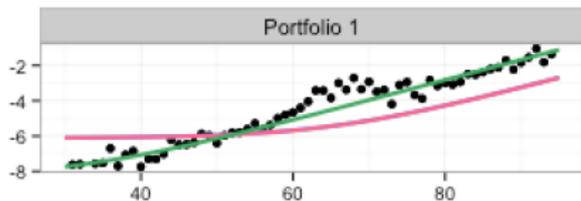
	Période		Âge moyen		Expo. moyenne	Âge moyen au décès	Taille
	Début	Fin	Entrée	Sortie			
P1	01/01/07	12/31/11	36.96	39.74	2.77	68.78	616390
P2	01/01/07	12/31/11	69.3	73.35	4.05	80.34	7589
P3	01/01/07	12/31/10	40.16	43.1	2.94	71.77	80086
P4	01/01/07	12/31/11	37.5	41.13	3.63	54.08	93165
P5	01/01/07	12/31/11	36.9	39.1	2.2	59.31	21540
P6	01/01/07	12/31/10	48.5	52.11	3.62	82.34	847469
P7	01/01/07	12/31/11	66.65	71.29	4.64	73.68	89507
P8	01/01/07	04/13/11	67.51	71.38	3.86	80.72	78650
P9	01/01/07	06/30/11	45.97	49.6	3.62	73.17	1556150
P10	01/01/07	12/31/11	62.97	67.64	4.67	79.77	132990
P11	01/01/07	12/31/11	38.89	42	3.11	56.44	420405
P12	01/01/07	12/31/11	37.05	39.2	2.15	57.41	904020
P13	01/01/07	12/31/11	43.01	46.89	3.88	71.03	848757
P14	01/01/07	12/31/11	50.12	54.16	4.04	72.37	233488

3.2. Application II



3.2. Application III

- ▶ Nous ajustons le modèle de Makeham à la référence pour estimer B_t^b pour chaque année calendaire alors que les paramètres $A_t^b = A_T^b$ et $C_t^b = C_T^b$ tout en fixant (pour chaque t).
- ▶ Nous appliquons le mécanisme de “mise à jour” pour prédire la mortalité de 2011 sur la base des observations jusqu’en 2010 : (Poisson-Gamma, Hardy-Panjer & Makeham-Credibility)



Approche Semi-Paramétrique : Lissage par Vraisemblance Locale

4.1. Notations et Hypothèses I

Supposons que l'intensité ϕ_x^i du portefeuille i est liée à une référence ϕ_x^{ref} de la façon suivante :

$$\phi_x^i = \Theta_i^x \exp[f^i(x)] \phi_x^{\text{ref}},$$

avec

- ▶ f^i est une fonction non spécifiée, lisse et déterministe en âge x .
- ▶ ϕ_x^{ref} est la force de mortalité de référence

Objectif

L'approche consiste à définir dans un premier temps un estimateur de la quantité $\phi_x^i | \Theta_i^x$ puis à prédire la force de mortalité inconditionnelle pour chaque portefeuille i pour chaque âge x de l'âge tout en imposant des hypothèses sur le comportement du profil de risque Θ_i^x .

4.1. Notations et Hypothèses II

- A1** Les vecteurs aléatoires $\Theta^i = (\Theta_{x_1}^i, \dots, \Theta_{x_n}^i)$ sont indépendants entre portefeuilles et âges. De plus, pour $i = 1, \dots, K$, Θ_x^i sont identiquement distribués avec $\mathbb{E}[\Theta^i] = \mathbf{1}_n$ et $\text{Var}(\Theta^i) = \sigma$, où σ est une matrice diagonale avec les éléments σ_x et $\mathbf{1}_n$ est la matrice d'identité.
- A2** Les vecteurs aléatoires (φ^i, Θ^i) , $i = 1, \dots, K$, sont indépendants d'un portefeuille à l'autre
- A3** Conditionnellement à Θ^i , $\phi_{x_1}^i, \dots, \phi_{x_n}^i$ sont indépendants.

4.2. Procédure d'Ajustement et Formule de Crédibilité I

1. Estimation de $\exp[f^i(x)]\phi_x^{\text{ref}}$ en utilisant une procédure de log-vraisemblance locale étant donné l'information à T_i , où f^i est une fonction polynomiale, notée $\widehat{\phi}_x^i$
2. Ensuite, la prédiction de la courbe de mortalité ϕ^i pour $T_i + 1$ (en tant que vecteur) est donnée par (Salhi and Thérond (2017))

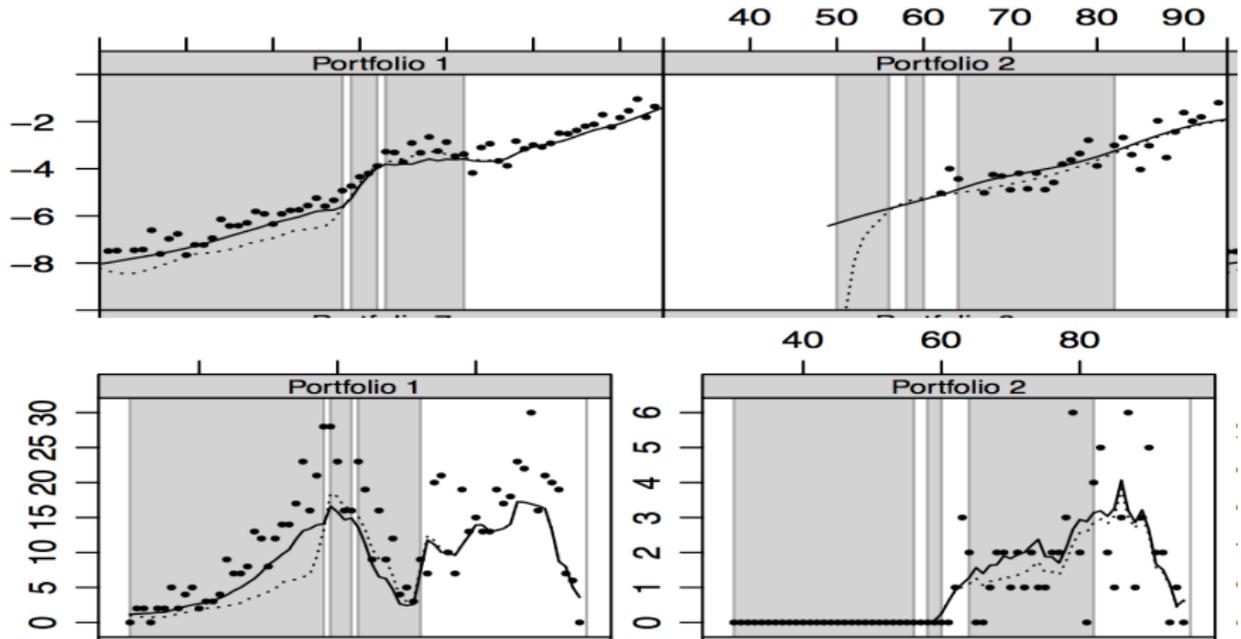
$$\phi_{x, T_i+1}^i = \widetilde{\Theta}_x^i \phi_x^{\text{ref}},$$

avec

$$\widetilde{\Theta}^i = (\mathbf{1}_n - (\phi^{\text{ref}}(\Sigma^i)^{-1} \sigma \phi^{\text{ref}})^T) \mathbf{1}_n + (\phi^{\text{ref}}(\Sigma^i)^{-1} \sigma \phi^{\text{ref}})^T \widehat{\Theta}^i,$$

tel que $\Sigma^i = \text{Var}(\widehat{\phi}^i)$ et $\widehat{\Theta}_x^i = \widehat{\phi}_x^i / \phi_x^{\text{ref}}$.

4.3. Application I



ligne pointillée = lissage & ligne continue = lissage+ajustement

4.3. Application II

Table 3: Tests and quantities summarizing the deviation between the observations and the model

		Hardy-Panjer	Poisson-Gamma	Makeham-Credibility	Smoothed	Smoothed+Adj.
χ^2 MAPE (%) SMR	Portfolio 1	1901.240	1928.680	259.400	357.870	193.967
		102.660	102.000	32.870	3.018	2.349
		1.737	1.756	1.126	1.487	1.385
χ^2 MAPE (%) SMR	Portfolio 2	34.890	33.640	30.940	37.612	31.166
		48.030	49.120	53.990	20.119	20.842
		1.037	1.002	0.905	1.102	0.948

5. Conclusion I

- ▶ Nous avons proposé une procédure de construction et mise à jour des tables de mortalité pour des portefeuilles de petite taille, en utilisant
 - ▶ la loi de Makeham,
 - ▶ Le lissage par vraisemblance locale
- ▶ Le processus de révision proposé intègre la bonne représentation aux différents âges, ce qui est un point crucial compte tenu de la fréquente hétérogénéité du coût des prestations décès en fonction de l'âge
- ▶ La procédure basée sur le lissage local *surperforme* celle utilisant la forme paramétrique de Makeham (trop rigide)

En perspective

- ▶ Application au risque de longévité : Révision des hypothèses d'amélioration de la mortalité mais aussi de niveau

5. Conclusion II

- ▶ Si on considère le modèle classique de Lee-Carter pour un portefeuille i

$$\log \phi_x(t) = \alpha_x^i + \beta_x^i \kappa^i(t)$$

et en imposant :

- ▶ la tendance (externe) $\kappa^i(t) = \kappa^{\text{HMD}}(t)$
- ▶ le niveau α_x^i estimé sur les données
- ▶ l'ajustement de la vitesse de baisse β_x^i en se basant sur l'information provenant des autres portefeuilles

$$\log \phi_x^i = \alpha_x^i + \chi_t^i \beta_x^i \kappa^{\text{HMD}}(t)$$

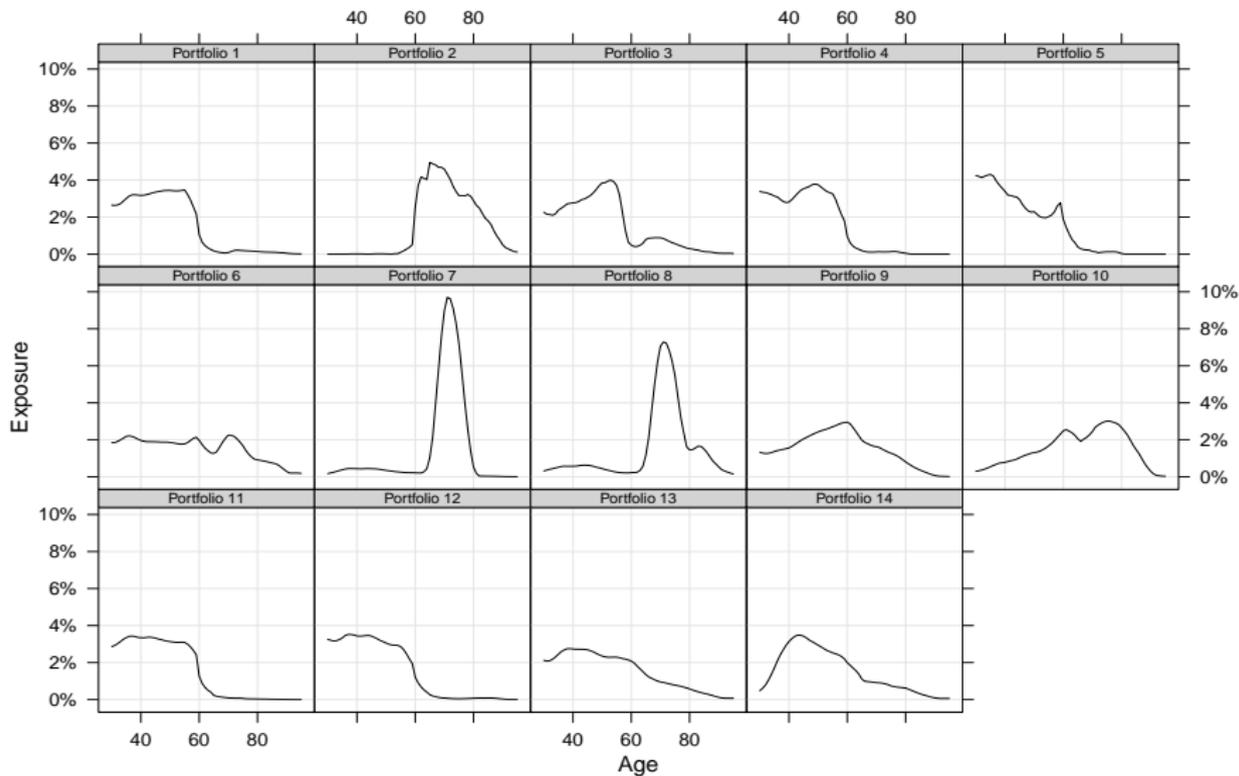
Les travaux sur cette problématique sont en cours

QUESTIONS ?

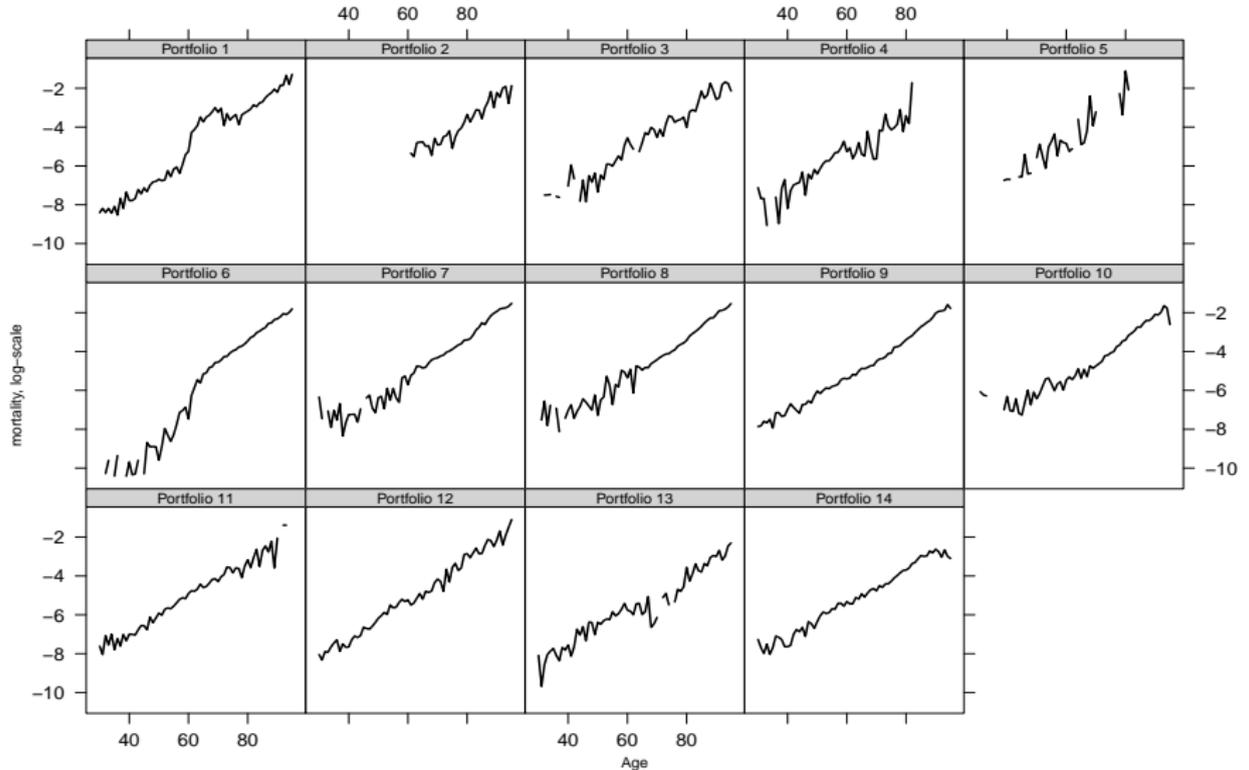
Bibliographie

- Bühlmann, H. and Gisler, A. (2005). *A course in credibility theory and its applications*. Springer.
- Fan, J. and Gijbels, I. (1996). *Local Polynomial Modelling and Its Applications*. Monographs on Statistics and Applied Probability 66. Chapman and Hall.
- Hardy, M. R. and Panjer, H. H. (1998). A credibility approach to mortality risk. *ASTIN Bulletin*, 28(2) :269–283.
- Nielsen, J. and Sandqvist, B. (2000). Credibility weighted hazard estimation. *ASTIN Bulletin*, vol. 35 :405–418.
- Nielsen, J. and Tanggaard, C. (2001). Boundary and bias correction in kernel hazard estimation. *Scandinavian Journal of Statistics*, vol. 28(4) :675–698.
- Planchet, F. and Thérond, P. (2011). *Modélisation statistique des phénomènes de durée - Applications actuarielles*. Assurance Audit Actuariat. Economica Paris.
- Salhi, Y. and Thérond, P.-E. (2018). Age-specific adjustment of graduated mortality. *to appear in ASTIN Bulletin*.
- Salhi, Y., Thérond, P.-E., and Tomas, J. (2016). A credibility approach of the makeham mortality law. *European Actuarial Journal*, 6(1) :61–96.
- Tomas, J., Planchet, F., et al. (2014). Constructing entity specific projected mortality table : adjustment to a reference. *European Actuarial Journal*, 4(2) :247–279.

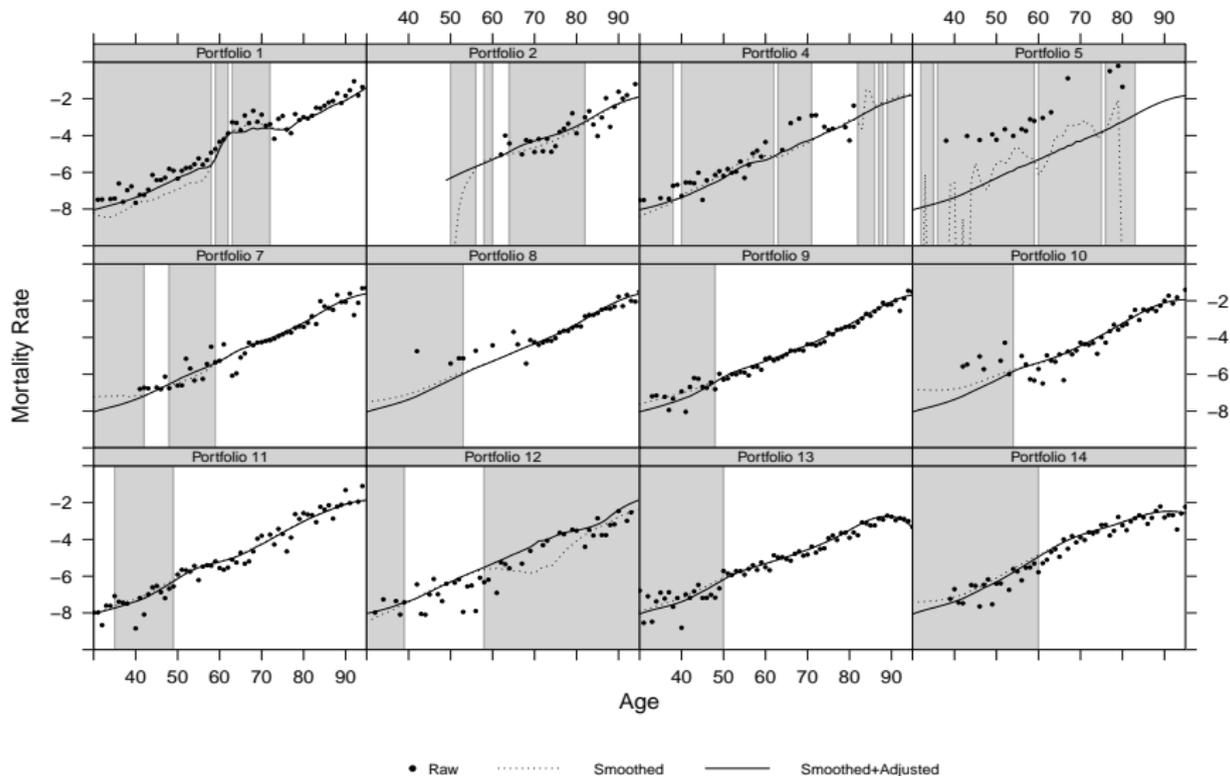
Distribution



Estimation brute par Kaplan-Meier



Lissage par vraisemblance locale et révision | q_x



Lissage par vraisemblance locale et révision | D_x

