CENTRE D'ÉTUDES ACTUARIELLES

Examen d'accès - 22 Septembre 2015

Aucun document autorisé - Calculatrice fournie par le centre d'examen

Les consignes indiquées ci-dessous sont suffisamment explicites pour ne pas laisser de doute quant à leur interprétation. Les personnes surveillant l'examen ne répondront à aucune question relative à ces consignes durant l'épreuve, la bonne compréhension de ces règles faisant elle aussi partie de l'examen.

Cet examen est un questionnaire à choix multiples constitué de 50 questions. Plusieurs réponses sont proposées pour chaque question (ou ensemble de questions). Le nombre de bonnes réponses à une question peut aller de 0 à 5.

Les réponses sont à inscrire sur la feuille jointe, en cochant pour chaque question la (ou les) case(s) correspondant à la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Comptabilisation des points :

- Toute case cochée à tort entraîne une pénalité de 0,5 point. Toute case cochée à raison entraîne une bonification de 1 point (même si d'autres cases dans la même question auraient dû être cochées et ne l'ont pas été). Une case non cochée ne donne ni bonification ni malus. Les seules exceptions à cette règle sont définies au point suivant.

- Certaines sous-questions de type Vrai/Faux ne contiennent que deux propositions de réponse, dont une est forcément exacte. Pour ces questions, une absence de réponse rapporte 0 point. Si la bonne réponse est cochée et que la mauvaise ne l'est pas, +1 point. Si la mauvaise réponse est cochée et que la bonne ne l'est pas, -0,5 point. **Si les deux réponses sont cochées, -0,5 point.** Ces questions de type Vrai/Faux sont clairement indiquées dans le sujet par la mention **Question V/F** les précédant.

Vous disposez après les questions d'une table des valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite.

1 Questions générales

Q 1) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 16.$$

Cette fonction est

A) monotone croissante

B) monotone décroissante

C) croissante sur un intervalle $]-\infty, a]$, décroissante sur $[a, b]$, croissante sur $[b, +\infty[$, où $a < b$ et a, b sont deux réels

D) décroissante sur un intervalle $]-\infty, a]$, croissante sur $[a, b]$, décroissante sur $[b, +\infty[$, où $a < b$ et a, b sont deux réels

E) décroissante sur un intervalle $]-\infty, a]$, puis croissante sur $[a, +\infty[$ pour a réel positif.

Q 2) (suite de la question précédente) La fonction f est

A) convexe

B) concave

C) convexe sur un intervalle $]-\infty, a]$, et concave sur $[a, +\infty[$

D) telle que $f(x) = 0$ admet deux solutions

E) telle que $f(x) = 0$ n'admet pas de solution

Q 3) On considère un parlement dont les élus appartiennent à trois groupes parlementaires appelés A, B, et C. Le groupe A représente 36% de l'assemblée, le groupe B 46,66% des élus. Le groupe C comprend 78 élus. Combien d'élus du groupe B y a-t-il dans cette assemblée ?

A) 209,9

B) 209,8

C) 209

D) 210

E) 209,5

Q 4) On considère le jeu de pile ou face suivant. Il y a trois pièces de monnaie. La pièce 1 fait pile avec probabilité 1/3. La pièce 2 fait pile avec probabilité 1/2. La pièce 3 fait pile avec probabilité 2/3. Le joueur prend une de ces trois pièces au hasard et la lance, la pièce 1 étant tirée au sort avec probabilité 1/4, la pièce 2 avec probabilité 1/4. Quelle est sa probabilité de faire pile ?

A) 0,542

B) 1/2

C) 0,458

D) 2/3

E) 1/4

Q 5) (suite de la question précédente) Si le joueur fait pile, il gagne $X = 2$ euros. Quelle est la variance de la variable aléatoire X ?

A) $0,99$

B) $0,25$

C) 1

D) $-0,25$

E) 2

Q 6) On considère deux événements A et B. On note E^c le complémentaire d'un ensemble E. On définit $C = A \cap B$. On a

A) $P(C^c) = 2 - P(A) - P(B) - P(A^c \cap B^c)$

B) $P(C^c) = P(A) + P(B) - P(A^c \cup B^c)$

C) $P(C^c) = P(A \cup B) - P(A) - P(B)$

D) $P(C^c) = P(A)P(B) - P(A \cap B)$

E) $P(C^c) = P(A)P(B)$

Q 7) On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2^{1/2}}{2} & -\frac{2^{1/2}}{2} \\ \frac{2^{1/2}}{2} & \frac{2^{1/2}}{2} \end{pmatrix}.$$

On note M^t la transposée de M

A) $MM^t = 1$

B) $MM^t = I_2$, où I_2 est la matrice identité en dimension 2

C) $MM^t = 0$

D) $MM^t = -1$

E) $MM^t = -I_2$, où I_2 est la matrice identité en dimension 2

Q 8) (suite de la question précédente) La matrice M est

A) diagonalisable

B) diagonalisable dans une base orthonormale

C) non diagonalisable

D) orthogonale

E) semblable à une matrice réelle triangulaire supérieure

Q 9) On considère une loi de densité (sur $\mathbb{R}$)) $1/(1+x^2)$. Soit X une variable aléatoire admettant cette densité.

A) $E[X] = \pi$

B) $E[X] = \pi/2$

C) $E[X]$ n'est pas définie

D) $E[X] = +\infty$

E) $E[X] = 0$

Q 10) Soit X une variable aléatoire de densité f et de fonction de répartition F (on rappelle que $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$). On définit le taux de risque instantané λ comme suit :

$$\lambda(x) = \lim_{dx \to 0^+} \frac{1}{dx} \mathbb{P}(X \in [x, x + dx] | X \geq x).$$

On a

A) $\lambda(x) = f(x) - F(x)$

B) $\lambda(x) = f(x)/F(x)$

C) $\lambda(x) = f(x)F(x)$

D) $\lambda(x) = f(x)(1 - F(x))$

E) $\lambda(x) = f(x)/(1 - F(x))$

2 Statistique et Analyse des Données

Q 11) Dans un test, on appelle hypothèse nulle l'hypothèse qui consiste à ne rien faire car :

A) un test est toujours incertain

B) on ne peut pas contrôler l'erreur d'accepter à tort cette hypothèse, donc autant choisir une hypothèse dont les conséquences sont faibles

C) l'erreur moyenne qu'on commet dans un test est d'espérance nulle

L'erreur consistant à refuser à tort l'hypothèse nulle est

D) l'erreur de première espèce

E) l'erreur de seconde espèce

Q 12) Il est impossible de poser un test d'hypothèses multiples contre hypothèses multiples car :

A) la détermination de la région critique du test suppose déterminée une loi de probabilités

B) la combinatoire est trop importante

C) le test ne serait pas assez puissant

Dans le cas d'un test d'une hypothèse simple contre des hypothèses multiples, un test UPP (uniformément le plus puissant) est souhaitable car

D) on a l'erreur de seconde espèce la plus faible possible dans tous les cas

E) on peut éliminer certaines des hypothèses multiples et simplifier le problème

Q 13) On effectue une régression pour tenter de prédire le poids d'un ensemble individus en fonction de leur âge et de leur taille, et on obtient le résultat suivant :

	Estimation	$t-$value	$\mathbb{P}(>\|t\|)$
ordonnée à l'origine	-57,1	-3,40	0,004
âge	1,13	1,29	0,22
taille	0,57	4,77	0,0003

Quelles sont les affirmations exactes ?

A) la t-value estime la contribution de la variable au modèle

B) la t-value est la statistique d'un test de Student

C) l'âge est une variable significative du modèle

D) la taille est une variable significative du modèle

E) la t-value permet de tester même si les poids des individus ne suivent pas une variable gaussienne

Q 14) On a mesuré des températures à Paris lors de l'épisode de canicule, et obtenu les valeurs suivantes (en degrés Celsius) :

38,1 – 39,4 – 38,0 – 38,5 – 38,9 – 37,9 – 38,1 – 39,0 – 38,4

On sait par ailleurs que les thermomètres utilisés ont une précision, mesurée par un écart-type, de 0,5 degrés Celsius. Un intervalle de confiance asymptotique à 95% de la température mesurée ce jour-là est :

A) 38,37 – 38,59

B) 38,20 – 38,75

C) 38,15 – 38,80

D) 38,20 – $+\infty$

E) 38,00 – 39,4

Q 15) (suite de la question précédente) On souhaite pourvoir décider si la température t a effectivement dépassé ce jour-là 38,5 degrés Celsius. On pose donc le test :

A) $H_0 :\ t > 38,5$ contre $H_1 : t \leq 38,5$

B) $H_0 :\ t = 38,5$ contre $H_1 : t \leq 38,5$

C) $H_0 :\ t = 38,5$ contre $H_1 : t \neq 38,5$

et (question **V/F**)

D) on accepte H_0

E) on rejette H_0

Q 16) Dans une analyse en composantes principales, une valeur propre associée à un axe principal mesure

A) la déformation lors de la projection sur cet axe

B) l'inertie résiduelle autour de l'axe

C) la variance de la composante principale associée

D) la déformation du nuage dans l'espace

E) la part des corrélations expliquée par l'axe

Q 17) Dans une analyse en composantes principales, on centre

A) le nuage des individus et le nuage des variables

B) seulement le nuage des individus

C) seulement le nuage des variables

de manière à

D) avoir la correspondance entre coordonnée du nuage des individus et axes du nuage des variables

E) les mêmes valeurs propres et vecteurs propres pour les deux nuages

Q 18) L'indépendance des variables se traduit par :

A) toutes les valeurs propres égales en ACP et toutes valeurs propres nulles sauf une en AFC

B) toutes les valeurs propres égales en ACP et en AFC

C) toutes les valeurs propres nulles sauf une en ACP et en AFC

D) toutes les valeurs propres égales à 1 en ACP et en AFC

E) une matrice d'inertie impossible à diagonaliser

(rappel : ACP = Analyse en composantes principales, AFC = analyse factorielle des correspondances)

Q 19) En classification, une stratégie d'agrégation permet :

A) de sélectionner les variables les plus pertinentes

B) de constituer des classes homogènes

C) de comparer des sous-groupes d'individus

Une stratégie d'agrégation repose toujours sur

D) le calcul d'un centre de gravité

E) une mesure de dissimilarité entre individus

Q 20) On peut effectuer une ACP avant une CAH pour :

A) affiner les résultats d'une classification

B) rendre une classification plus robuste

C) identifier les variables les plus discriminantes

D) réduire le nombre de classes

E) classer des observations situées dans un espace non euclidien

(Rappel : CAH = classification ascendante hiérarchique)

3 Mathématiques financières

Q 21) Quel est le montant d'un crédit de 3 ans dont le taux est 2.9% et l'annuité 38 813,60 euros ?

A) 105 000 euros

B) 110 000 euros

C) 120 000 euros

Le coût de ce crédit est de

D) 6 440,79 euros

E) 3 190 euros

Q 22) Quelle est l'annuité d'un crédit de 10 000 au taux de 2.9% d'une durée de 3 ans avec 1 année de différé ?

A) 5 235,18 euros

B) 5 275,26 euros

C) 5 369,87 euros

Le coût de ce crédit est de

D) 635,96 euros

E) 739,75 euros

Q 23) Quels sont les intérêts payés sur un crédit de 25 500 euros sur 5 ans, au taux de 3% ?

A) 2 340,21 euros

B) 2 870,27 euros

C) 2 539,24 euros

Les intérêts payés la 3ème année sont

D) 472,49 euros

E) 673,03 euros

Q 24) Quel est le capital restant dû après la troisième échéance d'un crédit de 100 000 euros au taux de 3.5% sur 5 ans ?

A) 42 074,69 euros

B) 41 087,22 euros

C) 41 928,22 euros

D) 42 088,24 euros

E) 42 928,22 euros

Q 25) L'amortissement du capital de la troisième échéance pour un crédit de 50 000 euros au taux de 3.25% sur une durée de 5 ans est de

A) 9 370,78 euros

B) 9 675,33 euros

C) 9 891,07 euros

D) 10 314,45 euros

E) 10 649,67 euros

Q 26) Donner les annuités 1 et 2 d'un crédit avec annuités à croissance géométrique au taux 10% sur une durée de 5 ans avec un taux d'intérêt de 3% pour un capital de 50 000 euros

A) 8 991,88 euros

B) 10 963,02 euros

C) 9 991,27 euros

D) 9 060,34 euros

E) 12 059,32 euros

Q 27) On considère une combinaison d'un crédit classique de 50 000 euros à taux 2,9% d'une durée de 5 ans, et d'un prêt à taux zéro d'une durée de 5 ans avec différé d'un an et d'un montant de 10 000 euros. Quelle est l'annuité constante correspondante ?

A) 11 855,23 euros

B) 12 520,32 euros

C) 12 857,59 euros

D) 13 120,53 euros

E) 13 652,25 euros

Q 28) Le taux d'un crédit de 5 000 euros sur 5 ans dont l'annuité est 1 083,99 euros est

A) 2,45%

B) 2,55%
C) 2,65%
D) 2,75%
E) 2,85%

Q 29) Quelle est la valeur d'une action payant un dividende de 2 euros sachant le taux long terme à 1,25%, en considérant que le dividende croit de 0,25% par an ?

(**Remarque :** on entend par là que le possesseur de l'action reçoit chaque année une somme appelée dividende, le taux utilisé pour actualiser les flux étant de 1,25%, le premier dividende étant de 2 euros, puis croissant à taux 0,25% d'une année sur l'autre)

A) 180,20 euros
B) 160,40 euros
C) 200,50 euros
D) 170,35 euros
E) 215,44 euros

Q 30) Quelle est la sensibilité (arrondie à la deuxième décimale) d'une obligation au taux de 3.75% de 3 ans de maturité, de valeur nominale 100 ?

(**Remarque :** une obligation de maturité m, de taux t, et de valeur nominale N sert chaque année un coupon de $t \times N$, auquel s'ajoute, la dernière année, le montant nominal. On rappelle également que la sensibilité d'une obligation est égale à $D/(1+t)$, où D est la duration de cette obligation, c'est à dire S/N, où S est la somme des flux financiers actualisés multipliés par la durée séparant l'émission de l'obligation de la date du flux).

A) 3,253
B) 2,788
C) 2,415

La convexité, arrondie à la deuxième décimale, est 10,62. La valeur estimative arrondie au centime près de l'obligation pour une baisse du taux du marché de 0,01% est

(**Remarque :** on rappelle que, le prix d'un produit financier de taux actuariel r, s'approche, en cas de variation de taux du marché vers r', par $P(r') = N(1 + (r - r')\Sigma + \frac{(r-r')^2 C}{2})$, où C désigne la convexité et Σ la sensibilité)

D) 102,84

E) 104,58

4 Econométrie

Q 31) On considère le modèle de régression linéaire

$$Y_t = \sum_{t=1}^{K} \beta_j X_{t,j} + \varepsilon_t,$$

pour $t = 1, ..., T$ et avec $K \leq T$. Les vecteurs $(X_{t,1}, ..., X_{t,K}, \varepsilon_t)_{t=1,...,T}$ sont supposés i.i.d. Quelle(s) hypothèse(s) permet(tent) d'assurer que l'estimateur des moindres carrés ordinaires (m.c.o.) de $B = (\beta_1, ..., \beta_k)$ est sans biais conditionnellement à $\mathbf{X} = (X_{t,j})_{t=1,...,T,j=1,...,K}$?

A) $E[\varepsilon_t|\mathbf{X}] = 0$ pour tout t

B) $Var(\varepsilon_t|\mathbf{X}) = \sigma^2$ pour tout t

C) $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s|\mathbf{X}) = 0$ pour tous t et s tels que $t \neq s$.

En notant par $((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})_{jj}$ le $j-$ème élément diagonal de $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$, et $\hat{\beta}_j$ le $j-$ème coefficient de l'estimateur $\hat{B}$ des moindres carrés, on a

D) $Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X}) = \sigma^2((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})_{jj}$ si les hypothèses ci-dessus sont satisfaites et si $\mathbf{X}$ est de rang K

E) $Var(\hat{\beta}_j|\mathbf{X}) = \sigma^2((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})_{jj}$ si $Var(\varepsilon_t|\mathbf{X}) = \sigma^2$ et si $\mathbf{X}$ est de rang K.

Q 32) (suite question précédente) On fait l'hypothèse supplémentaires que les perturbations sont gaussiennes, indépendantes de $\mathbf{X}$ et de variance σ^2. On note $T_j = (\hat{\beta}_j - \beta_j)/S_{\hat{\beta}_j}$, où $\hat{S}^2_{\hat{\beta}_j}$ est l'estimateur sans biais usuel de la variance de $\hat{\beta}_j$ conditionnellement à $\mathbf{X}$. La variable T_j suit une

A) une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

B) une loi de Student à $T - K$ degrés de liberté

C) une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

On souhaite tester $H_0 : \ \beta_j = 0$ contre $\beta_j \neq 0$. On rejette H_0 au niveau 5% lorsque T_j dépasse une valeur s telle que

D) $\mathbb{P}(Z \geq s) = 0,05$, où Z suit la loi déterminée dans la première partie de la question 32

E) $\mathbb{P}(Z \geq s) = 0,025$ où Z suit la loi déterminée dans la première partie de la question 32

Q 33) On modifie le modèle de la question 31 (en conservant les mêmes hypothèses), en supposant à présent

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{t=1}^{K} \beta_j X_{t,j} + \varepsilon_t.$$

On note

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\beta}_0 - \sum_{t=1}^{K} \hat{\beta}_j X_{t,j},$$

les $\hat{\beta}_j$ désignant les coordonnées de l'estimateur des moindres carrés ordinaires. On note

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t.$$

On a $\bar{\varepsilon} = 0$ car

A) $E[\varepsilon_t | \mathbf{X}] = 0$ pour tout t

B) le modèle comporte une constante

C) les vecteurs $\mathbf{X}_j = (X_{1,j}, ..., X_{T,j})$ sont linéairement indépendants

La v.a.r. $\hat{\varepsilon}_t$ est d'espérance nulle car

D) $E[\varepsilon_t | \mathbf{X}] = 0$

E) le modèle comporte une constante

Q 34) (**Question V/F**) Le coefficient de détermination R^2 associé à l'estimation d'un modèle de régression linéaire est toujours une part de la variance empirique de la variable à expliquer, restituée par le modèle

A) Vrai

B) Faux

On souhaite sélectionner un modèle de régression linéaire parmi un ensemble de modèles linéaires expliquant la même variable. Si le critère de sélection consiste à minimiser la variance résiduelle associée à l'estimateur sans biais de la variance des perturbations, on utilise

C) le coefficient de détermination R^2

D) le coefficient de détermination ajusté (corrigé) R^2

E) le critère d'Akaike (AIC)

Q 35) Soit un modèle de régression linéaire écrit sous forme matricielle $Y = X\beta + \varepsilon$ pour lequel on suppose que l'espérance des perturbations est nulle, la variance des perturbations est constante et que ces perturbations sont non-corrélées.

Question V/F : La non-normalité des perturbations implique que l'estimateur m.c.o. de présente un biais :

A) Vrai

B) Faux

Question V/F : La non-normalité des perturbations implique que la matrice de variance-covariance de l'estimateur des moindres carrés ordinaires de β reste égale à $\sigma^2(X'X)^{-1}$, où σ^2 est la variance des perturbations.

C) Vrai

D) Faux

Q 36) On considère le modèle de régression linéaire associé au modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF) portant sur l'actif Air Liquide. L'indice boursier considéré est le CAC(40). Le modèle a pour expression, pour $t = 1, ..., T$,

$$R(Air\ Liquide)_t = \beta_0 + \beta_t R(CAC)_t + \varepsilon_t,$$

où $R(Air\ Liquide)_t$ (resp. $R(CAC)_t$) représente le rendements quotidiens en clôture à la date t de l'actif Air Liquide (resp. de l'indice CAC 40). On suppose que les hypothèses standard du modèle de régression linéaire (perturbations indépendantes des variables $R(CAC)_t$, caractère gaussien de ces perturbations, indépendance des observations d'une date à l'autre, variance constante de ε_t). Les résultats de l'estimation par les moindres carrés ordinaires (m.c.o.) sont communiqués ci-après.

```
> summary(regression1)

Call:
lm(formula = Yield.AL ~ Yield.CAC, data = yield)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.043810 -0.005101 -0.000048  0.004792  0.050385

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 0.0003862  0.0002875   1.344    0.179
Yield.CAC   0.7777441  0.0193675  40.157   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.008044 on 781 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6737,     Adjusted R-squared:  0.6733
F-statistic:  1613 on 1 and 781 DF,  p-value: < 2.2e-16

> confint(regression1, level = 0.95)
```

"Intercept", "Yield.CAC" et "Yield.AL" représentent respectivement la constante β_0, le rendement du CAC et celui d'Air Liquide.

Question V/F : On souhaite tester $H_0 : \beta_0 = 0$ contre $H_1 : \beta_0 \neq 0$ au niveau $0,05$.

A) On accepte H_0.

B) On rejette H_0.

On souhaite maintenant tester $H_0 : \beta_1 = 1$ contre $H_1 : \beta_1 < 1$. La statistique de test usuelle correspondant à ce test est égale à

C) 40,157

D) -11,476

E) -1,147

Q 37) (suite de la question précédente) On veut calculer un intervalle de confiance bilatéral symétrique au niveau 0,95 pour le paramètre β_1. Cet intervalle est égal à :

A) $[0,77774 \pm 0,03795]$

B) $[0,77774 \pm 0,00137]$

C) $[0,77774 \pm 0,01936]$

D) $[0,77774 \pm 0,03853]$

E) $[0,77774 \pm 0,00073]$

Q 38) (suite de la question précédente) Pour tester $H_0 : \exists \sigma\ t.q.\ Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$ contre H_1 : "$Var(\varepsilon_t)$ dépend de t", on utilise le test de White. On effectue pour cela la regression de

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 R(CAC)_t + \alpha_2 [R(CAC)_t]^2 + u_t,$$

u_t étant le résidu d'espérance nulle. Soit R_e^2 le coefficient de détermination de cette régression. Le test de White consiste à rejeter H_0 si une statistique W est plus grande qu'un seuil s_α dépendant du niveau α du test, où

A) $W = TR_e^2$

B) $W = \sigma^2 R_e^2$

C) $W = \frac{R_e^2}{(T-1)^{-1} \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2}$

Question V/F: Tester H_0 est équivalent à tester $H_0' = \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

D) Vrai

E) Faux

Q 39) On considère un modèle AR (auto-régressif) d'ordre 1,

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t,$$

où ε_t est l'innovation. Le processus est stationnaire si

A) si $|a| > 1$

B) si $|a| < 1$

C) si $a = 1$

D) si $a > 1$

E) si $a < 1$

Q 40) Le tableau 1 situé en annexe présente les résultats d'une estimation d'un modèle AR(34), i.e. du type

$$X_t = A \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-34} \end{pmatrix} + \varepsilon_t,$$

où ε_t est l'innovation, et où on a imposé qu'un certain nombre de coefficients soient égaux à zéro. Si on suppose la normalité des ε_t,

A) chaque coefficient du modèle AR est significativement différent de zéro au niveau $\alpha = 0,08$

B) un des coefficients est nul au niveau $\alpha = 0,08$

C) X_{t-1} tend vers -0,069847 quand t tend vers l'infini

D) X_{t-1} tend vers 0,069847 quand t tend vers l'infini

E) $X_{t-1} = -0,069847$

5 Probabilités

Q 41) On considère trois événements aléatoires A, B et C tels que:

$$A \subseteq B \subseteq C \cdot$$

A) Pour que C soit réalisé, il faut que A le soit

B) $P(A) \leq P(C)$

C) Les événements $\bar{A}$ (le contraire de A) et $\overline{C}$ (le contraire de C) sont incompatibles

D) Les événements $A \cap \overline{B}$ et C sont indépendants

E) $P(C \cap \overline{B}) \leq P(C) - P(A)$.

Q 42) Soit X une variable aléatoire admettant pour fonction de répartition la fonction:

$$F : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \cdot$$

A) $P([X \leq \frac{1}{2}]) = \frac{1}{4}$

B) $P([0 \leq X \leq 1]) = 1$

C) $P([X = 1]) = \frac{1}{4}$

D) La variable aléatoire X possède une densité

E) La variable aléatoire X est discrète.

Q 43) Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1 et $(X_n)_{n\in{}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout n, X_n suive la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{n})$.

A) $E(X_n) = E(X)$

B) $V(X_n) = V(X)$

C) $P([X_n = 1]) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$

D) $\lim_{n \leftarrow +\infty} P([X_n = 0]) = P([X = 0])$

E) $\lim_{n \to +\infty} P([X_n = 0]) = P([X = 1])$.

Q 44) Dans une ville de province, 40% de la population lit le journal. Les habitants ont le choix entre la presse nationale (Le Monde et le Figaro, qui comptent autant de lecteurs l'un que l'autre et sont vendus au même prix), et la presse régionale (L'Éveil et Le Progrès, vendus au même prix, le premier comptant trois fois plus de lecteurs que le second). Personne ne lit plus d'un journal et la presse locale compte deux fois plus de lecteurs que la presse nationale. Un journal national coûte 40% plus cher qu'un journal local. Dans cette ville :

A) 20% des habitants lisent L'Éveil

B) Le Monde et Le Progrès ont autant de lecteurs

C) La presse locale et la presse nationale réalisent le même chiffre d'affaires

D) Si tous les journaux perdent 30% de leurs lecteurs et augmentent leur prix de 30%, ils conservent le même chiffre d'affaires

E) Si la presse locale perdait 30% de ses parts de marché, elle compterait moins de lecteurs que la presse nationale.

Q 45) Une urne contient deux boules noires et deux boules blanches. On effectue des tirages successifs dans cette urne. Lorsque la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne; lorsqu'elle est noire, on ne la remet pas. On note X_1 le numéro du tirage de la première boule noire, X_2 le numéro du tirage de la seconde.

A) $P([X_2 = 2]) = \frac{1}{4}$

B) X_1 suit une loi géométrique

C) X_2 suit une loi binomiale

D) X_1 et X_2 sont indépendantes

E) $E(X_2) = 2$

Q 46) Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle d'espérance égale à $\frac{1}{2}$ ·

A) La variable aléatoire $2X$ suit une loi exponentielle

B) $E(X^2) = \frac{1}{4}$

C) $E(X^3) = \frac{3}{4}$

D) $P([X \geq 1]] = \frac{1}{e^{-2}}$

E) La probabilité conditionnelle $P([X \geq 2]|[X \geq 1]]$ est égale à $\frac{1}{e^{-2}}$

Q 47) Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Y = 1 - 2X$ et $Z = X^2 - X$.

A) Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est égal à -1.

B) Les deux variables Y et X sont indépendantes.

C) La covariance des deux variables aléatoires Y et Z est strictement positive.

D) Les deux variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.

E) Les deux variables aléatoires Z et X sont indépendantes.

Q 48) Soit X une variable aléatoire admettant pour densité de probabilité la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-x^2} \ .$$

A) X suit une loi normale centrée.

B) $c = 2$

C) La variance de X est égale à 2

D) $P([X \geq 0]) = \frac{1}{2\pi}$

E) $P([X \leq 1]) \leq \frac{1}{4}$

Q 49) On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs entières est la fonction

$$g_X : s \longmapsto E(s^X) \ .$$

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ.

A) g_U est une fonction concave

B) $g_{U+V}(s) = \left(g_U(s)\right)^2$

C) $g_U(1) = g_U(1) + g_V(1)$

D) Pour tout s non nul, $g_{U-V}(s) = e^{\lambda(s+s^{-1}-2)}$

E) Pour tout s non nul, $g_{U-V}(s) = e^{(\lambda-\frac{1}{\lambda})(s-1)}$

Q 50) Soit $\alpha > 0$. On considère n (≥ 2) variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ admettant chacune pour densité la fonction

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \alpha\, x^{-\alpha-1} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

On pose $X_{(1)} = \mathrm{Inf}\{X_1, , X_2, \ldots, X_n\}$ et $X_{(n)} = \mathrm{Sup}\{X_1, , X_2, \ldots, X_n\}$.

A) $P([X_{(1)} \leq 2]) \leq P([X_{(n)} \leq 2])$

B) $P([X_{(1)} \geq x]) = \begin{cases} x^{-n\alpha} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

C) X_1 admet une espérance si et seulement si $\alpha < 1$

D) $X_{(1)}$ admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$

E) $X_{(n)}$ admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$.

Dependent Variable: RENDEMENT
Method: Least Squares
Date: 02/26/12 Time: 15:29
Sample (adjusted): 35 1307
Included observations: 1273 after adjustments

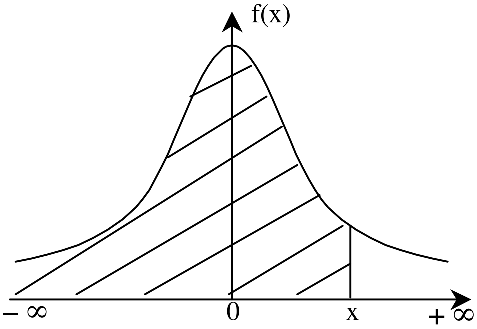
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RENDEMENT(-1)	-0.069847	0.027571	-2.533371	0.0114
RENDEMENT(-2)	-0.065567	0.027620	-2.373867	0.0178
RENDEMENT(-3)	-0.074781	0.027718	-2.697893	0.0071
RENDEMENT(-4)	0.069238	0.027941	2.477960	0.0133
RENDEMENT(-7)	0.049649	0.027667	1.794519	0.0730
RENDEMENT(-9)	-0.084602	0.027564	-3.069313	0.0022
RENDEMENT(-13)	-0.065290	0.027723	-2.355093	0.0187
RENDEMENT(-23)	-0.060000	0.027511	-2.180933	0.0294
RENDEMENT(-26)	0.082800	0.027769	2.981766	0.0029
RENDEMENT(-30)	0.060105	0.027876	2.156184	0.0313
RENDEMENT(-34)	-0.066639	0.027679	-2.407577	0.0162

R-squared	0.059070	Mean dependent var	-0.021978
Adjusted R-squared	0.051615	S.D. dependent var	1.930841
S.E. of regression	1.880351	Akaike info criterion	4.109398
Sum squared resid	4462.081	Schwarz criterion	4.153892
Log likelihood	-2604.632	Hannan-Quinn criter.	4.126109
Durbin-Watson stat	1.988147		

Figure 1: Tableau 1

Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x.



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921