

Choix du générateur de nombres aléatoires au sein du Générateur de Scénarios Economiques

Hervé Andrès

Milliman

**Pierre-Edouard
Arrouy**

Milliman

Samy Collier

BNP Paribas Cardif

Alexandre Moulti

BNP Paribas Cardif

Introduction

- La valorisation d'un bilan d'assurance est un exercice complexe qui nécessite l'utilisation de scénarios économiques stochastiques risque-neutre.
- Divers tests doivent être effectués: **tests martingales** sur les scénarios économiques et **contrôle de l'écart de convergence du modèle ALM**.
- En pratique, **le nombre de scénarios économiques à prendre en compte est limité** → il est nécessaire de développer des techniques pour s'assurer de la convergence du **Best Estimate** (BE) et de la **valeur actuelle des profits futurs** (PVFP).
- Une solution possible consiste à améliorer le **générateur de nombres aléatoires** (RNG) utilisé pour générer les scénarios économiques stochastiques.

Agenda

- 1. Les générateurs de nombres aléatoires (RNG) à la lumière des exigences réglementaires**
- 2. Analyse des méthodes d'accélération de la convergence au sein d'un générateur de scénarios économiques (GSE)**
 - a) Vue d'ensemble des méthodes possibles pour la réduction de l'écart de convergence*
 - b) Présentation des principales familles de RNG et de leurs avantages / inconvénients*
 - c) Présentation d'un RNG hybride et comparaison numérique par rapport à d'autres RNG*
- 3. Etude de cas :**
 - a) Etude ALM*
 - b) Etude sur la valorisation d'un produit structuré*
- 4. Perspectives sur la validation des scénarios stochastiques**

1. Les générateurs de nombres aléatoires (RNG) à la lumière des exigences réglementaires

- Le générateur de nombres aléatoires (RNG) est un **élément clé** des générateurs de scénarios économiques (GSE) car c'est lui qui permet d'introduire de la **stochasticité** dans les simulations des facteurs de risque du GSE (taux nominaux, inflation, actions, crédit, etc.).
- A ce titre, la directive Solvabilité II exige des assureurs et des réassureurs qu'ils soient en mesure de prouver que leur RNG est conforme:

« Insurance and reinsurance undertakings should ensure that (pseudo) random number generators used in an ESG are properly tested. » — EIOPA Guideline 59 on the valuation of technical provisions - Random and pseudo random number generators

1. Les générateurs de nombres aléatoires (RNG) à la lumière des exigences réglementaires

- Evaluer la conformité d'un RNG consiste notamment à vérifier les conditions suivantes :
 - Les simulations respectent les **distributions théoriques** associées aux modèles utilisés
 - Les facteurs de risques simulés sont **correctement corrélés**
 - Les scénarios sont **indépendants**
 - Les résultats de simulation sont **reproductibles**
- Ces conditions ne sont **pas suffisantes** → il est possible que **certains tests de validation échouent malgré des schémas numériques de simulation efficaces**
- C'est pourquoi des **techniques d'accélération de la convergence** sont mises en place par les acteurs du marché.

1. Les générateurs de nombres aléatoires (RNG) à la lumière des exigences réglementaires

- « Dans le cadre d'une valorisation Monte-Carlo, **le nombre de tirages (ici de scénarios) utilisés influe directement sur la précision du calcul**, qui peut varier d'un exercice à l'autre suivant l'évolution des conditions économiques et notamment des conditions de volatilité. »
« Par ailleurs, des **méthodes de réduction de variance** appropriées, comme les variables antithétiques, permettent de **réduire l'incertitude entourant la valeur du BE** à nombre de scénarios constant. »
→ Révèle le caractère bénéfique des RNG qui améliorent la convergence des estimateurs Monte Carlo à nombre de simulations fixé.
- « Certains organismes recourent à des ajustements pour corriger artificiellement des erreurs observées en sortie du GSE. Il s'agit en particulier de méthodes de **moment matching d'ordre 1** (correction de l'erreur de martingalité) ou d'ordre 2 (correction de l'erreur de cohérence avec les données de marché). Outre les **biais statistiques** qu'ils introduisent pour compenser les erreurs en sortie de GSE, ces ajustements conduisent à neutraliser l'erreur observée. Dès lors, les tests réalisés après application de ces **méthodes ne permettent plus de détecter d'éventuels problèmes critiques du GSE**, les signes de leur éventuelle existence ayant été effacés. »
→ L'utilisation de RNG à discrétion faible permet d'éviter ce type de traitement défavorable

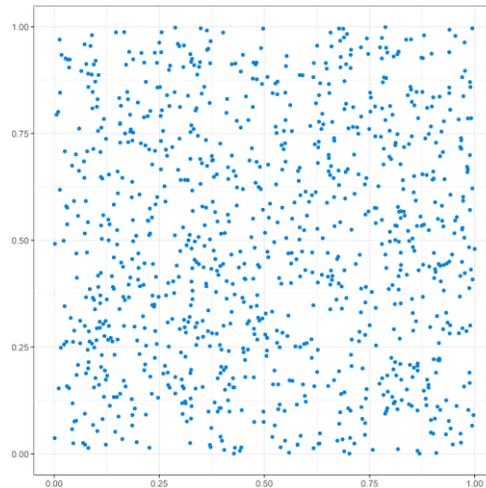
2.a Vue d'ensemble des méthodes possibles pour la réduction de l'écart de convergence

	Principe et remarques	Avantages	Inconvénients
Réduction de variance	<ul style="list-style-type: none"> Objectif de réduire la vitesse $O(1/\sqrt{N})$ de convergence des méthodes de Monte Carlo. Principales techniques : variables antithétiques ou variables de contrôle. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Variables antithétiques: facile à implémenter. ✓ Variables de contrôle: potentiel de forte réduction de la variance. 	<ul style="list-style-type: none"> ✗ Variables antithétiques: gain en vitesse de convergence pas toujours significatif. ✗ Variables de contrôle: difficile à mettre en place.
Seed picking	<ul style="list-style-type: none"> Consiste à choisir la graine du RNG donnant les meilleurs tests de validation / écart de convergence. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Facile à implémenter pour un nombre limité de graines testées. 	<ul style="list-style-type: none"> ✗ Coûteux en temps de calcul ✗ Potentielle dégradation des propriétés des nombres aléatoires
Moment matching adjustment (MMA)	<ul style="list-style-type: none"> Retraitement des simulations pour obtenir des erreurs martingales exactement égales à 0. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Garantie que les tests martingales passent systématiquement. 	<ul style="list-style-type: none"> ✗ Perte de l'indépendance des simulations ✗ Potentiellement autres tests de validation dégradés.

2.b Présentation des principales familles de RNG et de leurs avantages / inconvénients

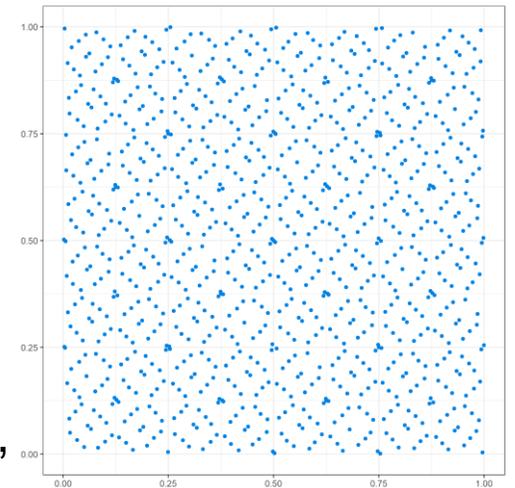
RNG pseudo-aléatoire

- Suites **déterministes** de nombres qui « ont l'air » aléatoires.
- Objectif: **ressembler à des réalisations indépendantes de la loi uniforme** sur $[0,1]$.
- Exemples de générateurs pseudo-aléatoires :
générateur congruentiel linéaire, Wichmann–Hill, Mersenne-Twister, ...



RNG quasi-aléatoire

- Suites déterministes de nombres qui **remplissent l'espace $[0,1]^d$ de la manière la plus homogène possible**.
- La proportion de nombres quasi-aléatoires dans n'importe quelle sous-espace de $[0,1]^d$ est proche du volume de ce sous-espace.
- Exemples de générateurs quasi-aléatoires: Faure, Torus, Sobol, ...



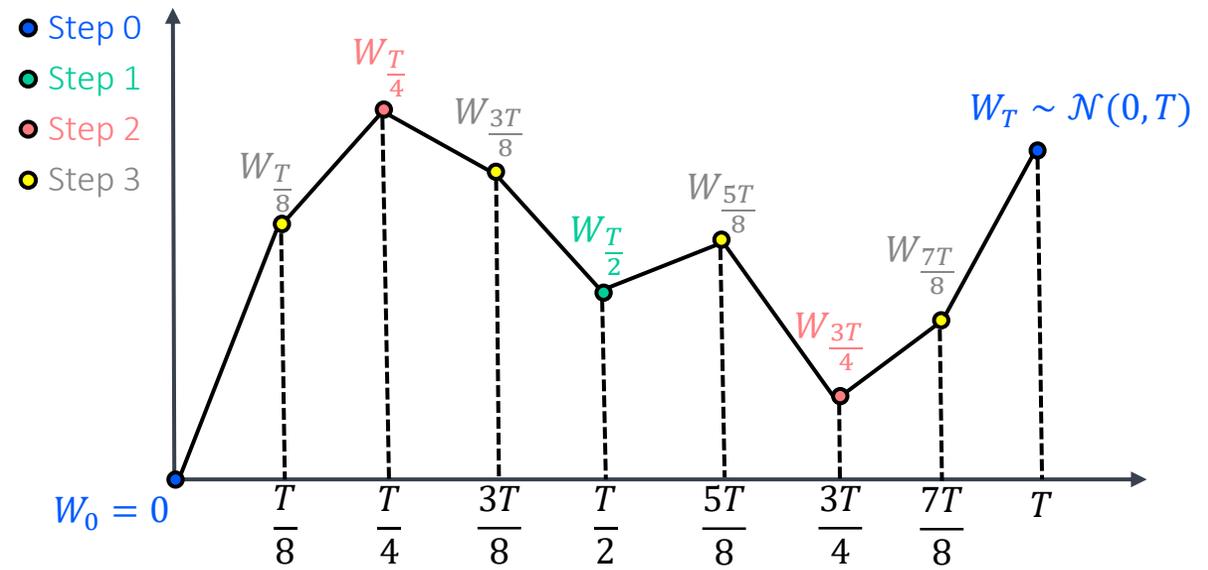
2.b Présentation des principales familles de RNG et de leurs avantages / inconvénients

	RNG pseudo-aléatoire	RNG quasi-aléatoire
Avantages	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Loi forte des grands nombres et le théorème central limite applicables. ✓ Possibilité de calculer des intervalles de confiance sur les estimateurs Monte Carlo. ✓ Indépendance de la vitesse de convergence par rapport à la dimension 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Vitesse de convergence théorique plus rapide: $O\left(\frac{(\log N)^d}{N}\right)$.
Inconvénients	<ul style="list-style-type: none"> ✗ Vitesse de convergence: $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \rightarrow$ trop lent lorsque le nombre de simulations est limité. 	<ul style="list-style-type: none"> ✗ Dégradation de la vitesse de convergence lorsque la dimension d augmente. ✗ Impossibilité d'obtenir un intervalle de confiance sur les estimateurs

2.c Présentation d'un RNG hybride et comparaison numérique par rapport à d'autres RNG

- Un **RNG hybride** mélange les nombres pseudo- et quasi-aléatoires.
- Nous présentons ici un tel RNG reposant sur les 3 ingrédients suivants:

1. Un **RNG quasi-aléatoire**
2. Une méthode de **pont brownien** pour garantir **une dimension faible** pour le RNG quasi-aléatoire.
3. Une **randomisation** du RNG quasi-aléatoire à partir de nombres **pseudo-aléatoires**



Exemple de pont brownien

2.c Présentation d'un RNG hybride et comparaison numérique par rapport à d'autres RNG

- Evaluation de la performance du RNG hybride basée sur une table de scénarios risque-neutre :
 - **1000 scénarios**
 - **16 facteurs de risques**
 - Horizon de projection de **60 ans** avec un pas de temps **mensuel**

La dimension du problème est $60 \times 12 \times 16 = \mathbf{11520}$

- La métrique de comparaison utilisée est la racine de la moyenne des écarts relatifs au carré (**RMSRE**) intégrant tous les tests martingales et les tests de *repricing*:

$$RMSRE = \sqrt{\frac{1}{|\mathcal{J}|} \sum_{i \in \mathcal{J}} \left(\frac{\hat{E}_i - E_i}{E_i} \right)^2}$$

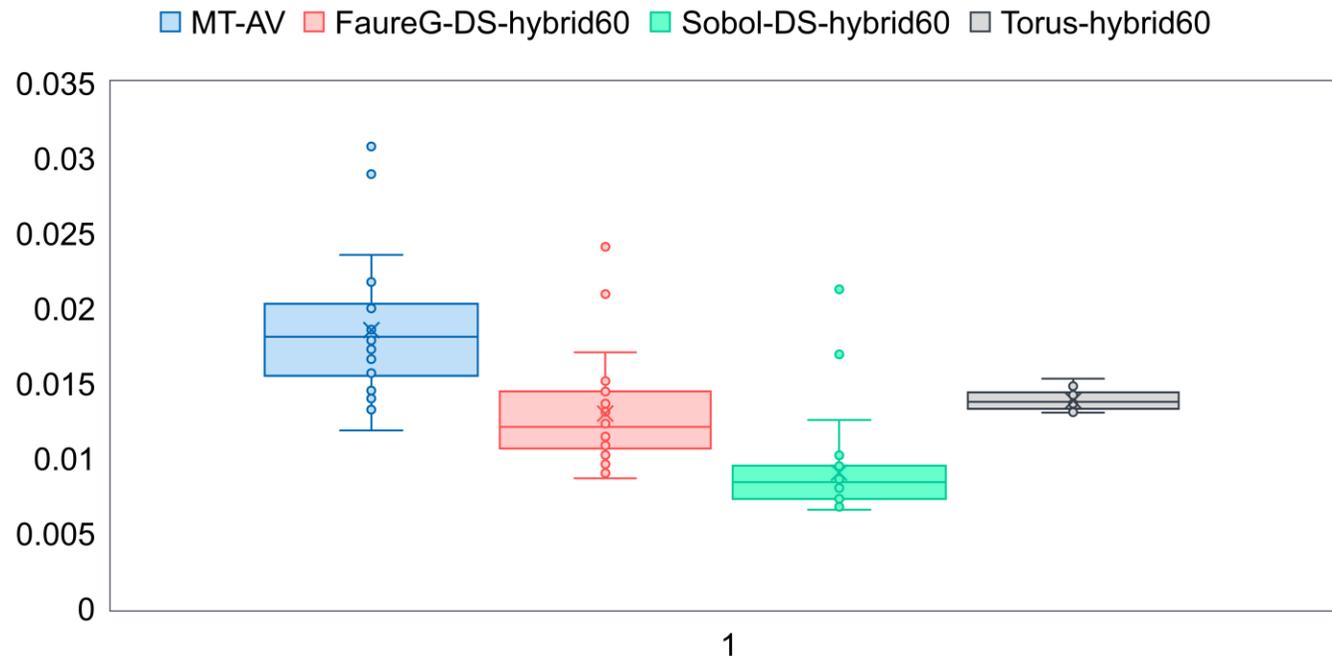
Ensemble des tests martingales et des tests de repricing

Estimateur Monte Carlo

Valeur théorique

2.c Présentation d'un RNG hybride et comparaison numérique par rapport à d'autres RNG

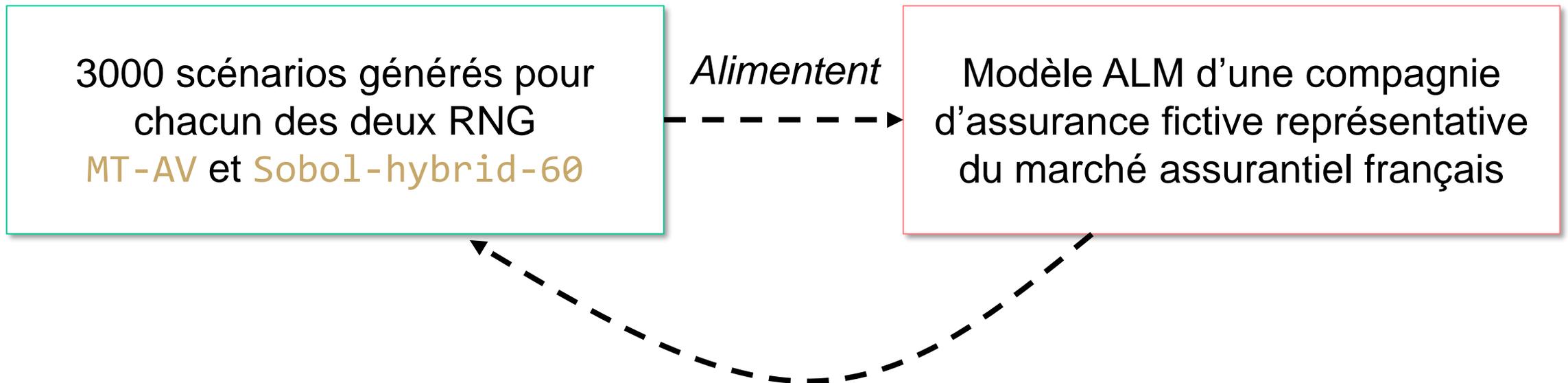
La RMSRE est calculée pour 30 graines différentes :



- Les **3 RNG hybrides** donnent de meilleurs résultats que le RNG pseudo-aléatoire (**MT-AV**: Mersenne-Twister avec variables antithétiques).
- Le RNG hybride basé sur la suite de **Sobol** (**Sobol-DS-hybrid60**) est le **meilleur parmi les 3**.

3.a Etude de cas – Impacts ALM

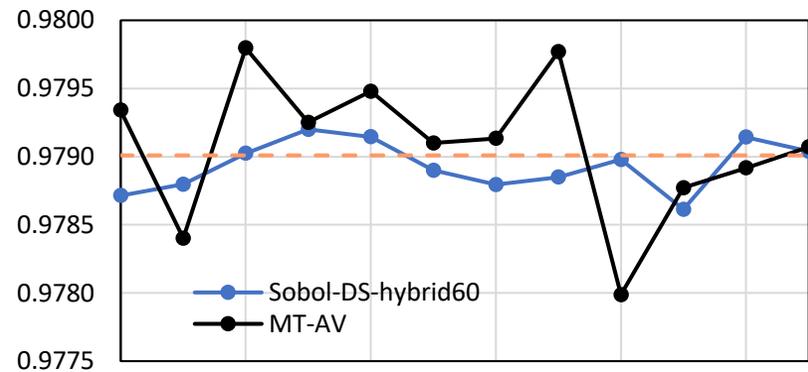
Cette section présente l'impact du choix du RNG sur 3 indicateurs ALM : le **BEL**, la **VIF** et **l'écart de convergence**.



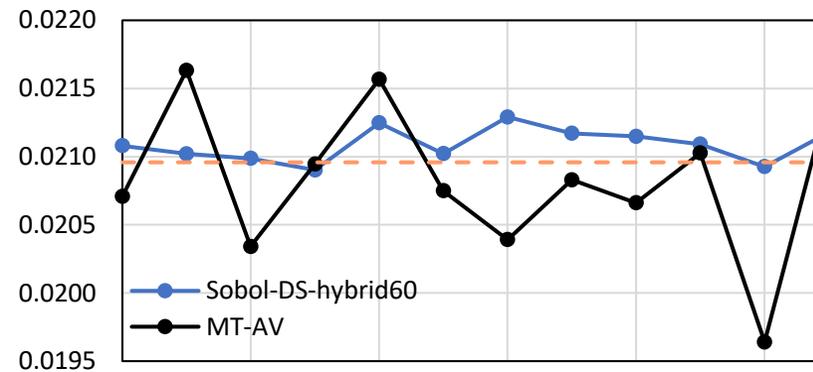
*L'expérience est répétée pour 12 graines afin
d'évaluer la sensibilité à celles-ci.*

3.a Etude de cas – Impacts ALM

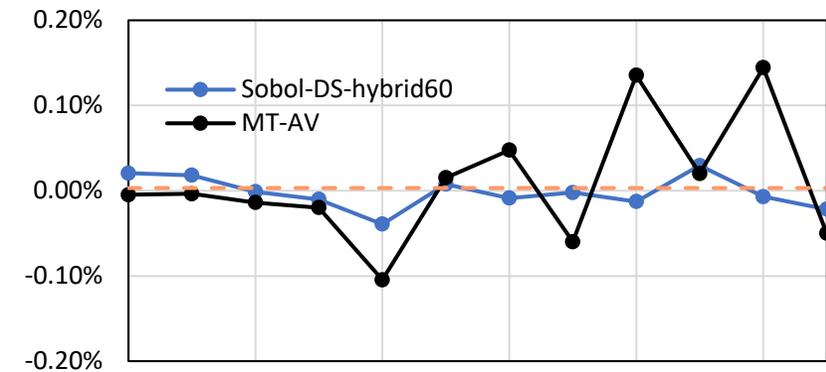
Best Estimate (BE)



Value of In-Force (VIF)



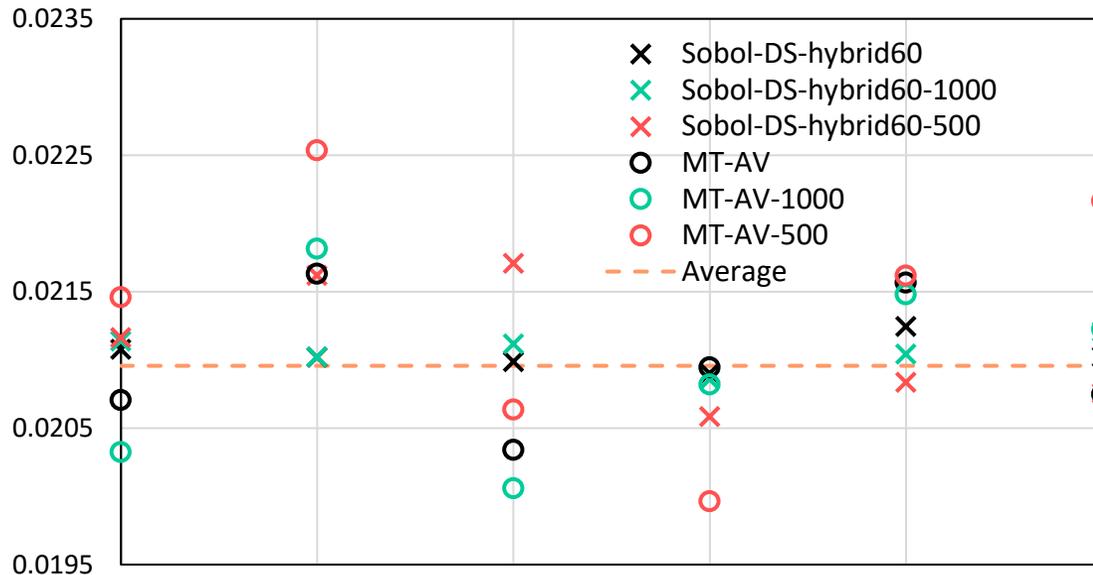
Ecart de convergence



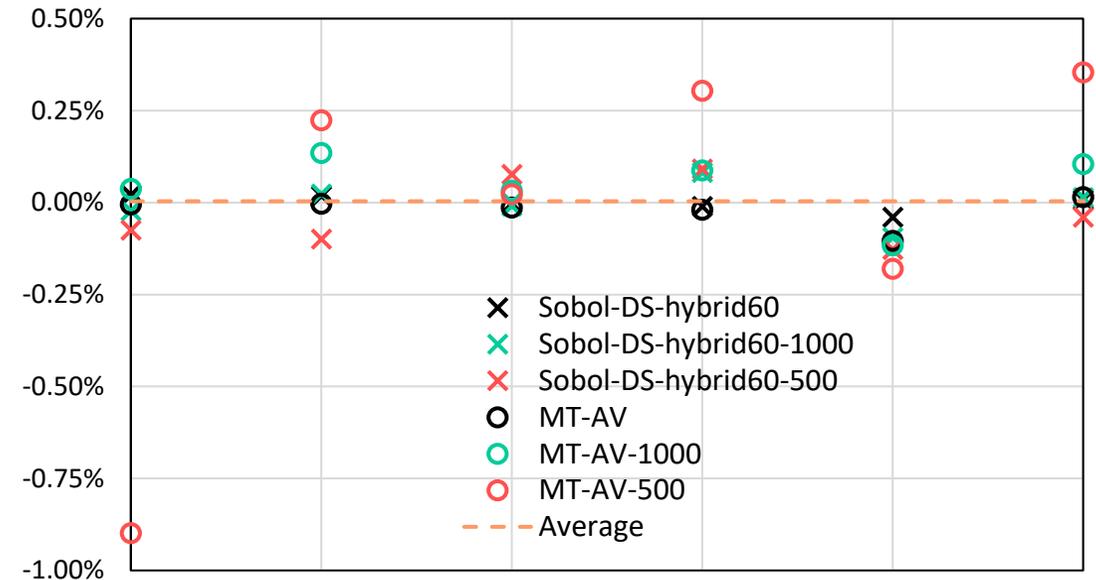
- Le RNG hybride est **plus stable** pour l'évaluation du BE, de la VIF et de l'écart de convergence.
- Les valeurs du BE et de la VIF obtenues avec le RNG hybride sont **plus proches de la valeur moyenne** (obtenue en moyennant sur toutes les graines pour les 2 méthodes).
- L'écart de convergence est **plus proche de la valeur cible de 0**.

3.a Etude de cas – Impacts ALM

Value of In-Force (VIF)

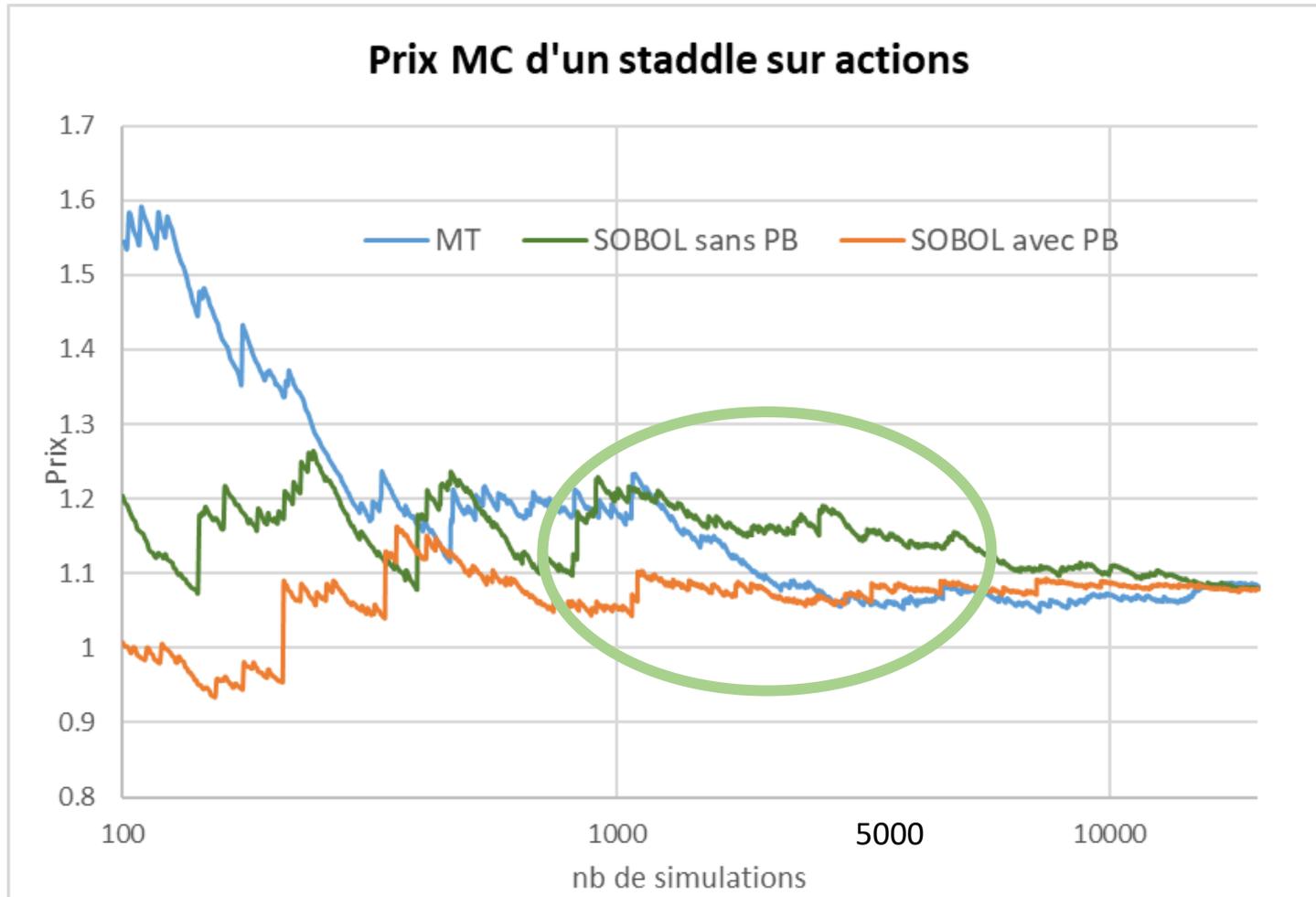


Ecart de convergence



- Deux sensibilités **au nombre de simulations** (500 et 1000) sont réalisées.
- Le RNG hybride apparait **plus stable** à la réduction du nombre de simulations. En particulier on note que le RNG hybride avec 1000 simulations a des performances équivalentes au RNG **MT-AV** avec 3000 simulations.

3.b Etude de cas – Etude sur la valorisation d'un produit structuré



L'utilisation de Sobol avec PB permet de réduire par 10 le nombre de simulations

1000 simulations avec sobol PB sont équivalentes en précisions à 10 000 avec MT

D= 520
40 années x 13 facteurs de risque

Sobol sans PB perd ses avantages à cause de la dimension élevée

D= 12480
40 années x 24 pas par an x 13 facteurs de risque

4. Perspectives sur la validation des scénarios stochastiques

Constat d'une hétérogénéité des pratiques de validation des scénarios stochastiques → Quelles sont celles qui permettent de **distinguer la convergence** de manière cohérente et interprétable ?

On peut distinguer 2 concepts:

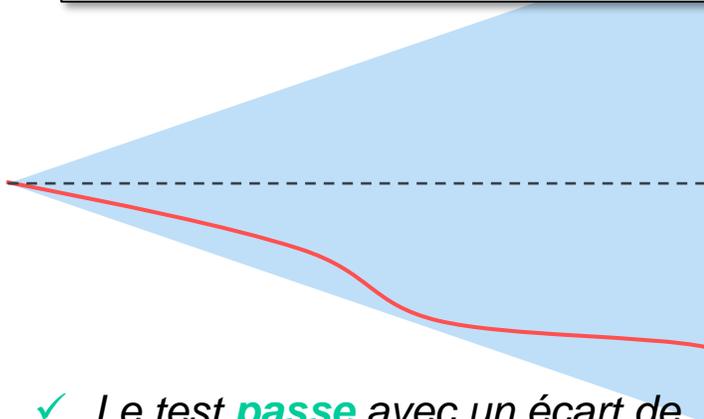
1. **Intervalle de confiance « modèle »** : intervalle de confiance **fourni par le modèle stochastique** utilisé pour la simulation.
 - ✓ Indépendance au RNG considéré.
 - Objectif de valider la **plausibilité statistique** des déviations par rapport à la moyenne empirique à la lumière du modèle utilisé.
2. **Erreur d'estimation** : **incertitude sur l'estimateur de la moyenne** empirique
 - ✗ Dépendance au RNG considéré.
 - Pour les RNG quasi-aléatoires, **cette erreur d'estimation est significativement réduite**.
 - Cette erreur d'estimation pourrait être estimée via des techniques de bootstrap qui sont coûteuses en temps de calcul.

4. Perspectives sur la validation des scénarios stochastiques

1

RNG pseudo-aléatoire

Intervalle de confiance basé sur
l'erreur d'estimation

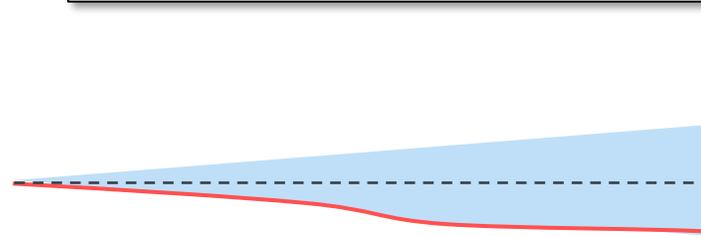


✓ Le test **passé** avec un écart de convergence important

2

RNG quasi-aléatoire

Intervalle de confiance basé sur
l'erreur d'estimation

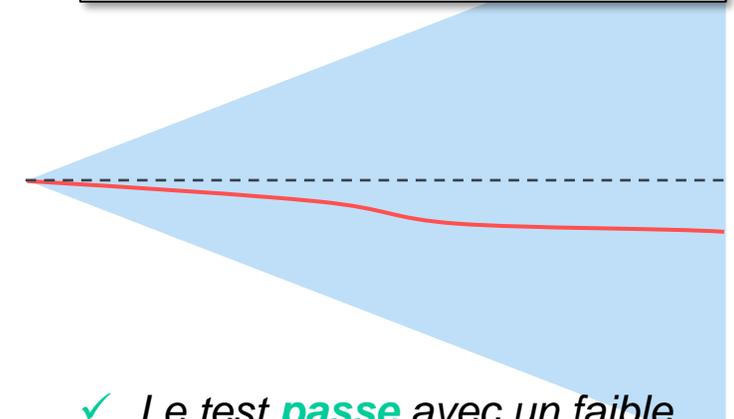


✗ Le test **échoue** avec un faible écart de convergence

3

RNG quasi-aléatoire

Intervalle de confiance « modèle »



✓ Le test **passé** avec un faible écart de convergence

- L'amélioration du RNG implique **réduction de l'IC basé sur l'erreur d'estimation**.
- ✗ Dans ce cas, utiliser l'erreur d'estimation revient à **imposer des seuils plus restreints** alors que les estimateurs Monte Carlo sont plus précis.
- ✓ L'utilisation de l'intervalle de confiance « modèle » offre **contrainte plus souple** et **indépendante** de la méthode de génération des nombres aléatoires.