



Tables TGH / TGF 05 : Construction

22 mars 2007

Frédéric PLANCHET
WINTER & Associés / ISFA
fplanchet@winter-associes.fr

Les données utilisées

Les données utilisées pour construire la table sont composées d'observations de rentiers sur **19 portefeuilles** (16 en provenance de la FFSA et 3 du CTIP).

Ces observations concernent **700 000** rentes liquidées pour environ 2 millions de lignes au total couvrant la période **1993-2005**.

Compte tenu du volume limité des données disponibles en regard des volumes habituellement utilisés pour la construction des tables prospectives - tables nationales - il a été retenu des *modèles utilisant une référence externe de mortalité* : une solution pour pallier les difficultés associées à des échantillons de taille réduite est en effet de positionner la mortalité du groupe considéré par rapport à une référence externe. Disposant d'un ensemble de tables de moments INSEE (féminine et masculine) historiques et prospectives l'idée est alors de « référencer » les tables du moment d'expérience dans cet ensemble de tables.

La **table prospective INSEE** sous-jacente a été construite sur la base des tables du moment de 1962 à 2000 (cf. SERANT [2005]).



Les données utilisées

Les informations disponibles étaient, pour chaque assuré :

- son sexe
- sa date de naissance (à l'exclusion du jour de naissance dans le mois)
- sa date de liquidation (en cas de liquidation)
- sa date d'adhésion au contrat
- sa date de sortie
- le motif de sortie (décès ou autre)

Pour le contrat lui-même était également demandé :

- l'option de sortie en rente (facultative ou obligatoire)
- la nature du contrat (collectif ou individuel)
- le montant annuel de la rente.

En pratique les informations relatives au contrat n'ont pas été exploitées.

Les tables INSEE sous-jacentes

Les tables INSEE sous-jacentes sont construites à l'aide d'un modèle à splines (*cf.* Serant [2005]).

$$\lg_x(t) = \ln\left(\frac{q_{xt}}{1-q_{xt}}\right) = f(x, \theta_t)$$

La forme retenue pour f est celle d'une **spline cubique** avec des nœuds aux âges 20 ans, 28 ans, 40 ans, 80 ans et 90 ans.

$$f(x, a, b, c, d, e_{20}, e_{28}, e_{40}, e_{80}, e_{90}, t) = a_t + bx + cx^2 + dx^3 \\ + e_{20}(x-20)_+^3 + e_{28}(x-28)_+^3 + e_{40}(x-40)_+^3 + e_{80}(x-80)_+^3 + e_{90}(x-90)_+^3$$

Les estimations sont obtenus via un modèle d'analyse de variance covariance standard ; la série temporelle a_t est ensuite analysée comme dans Lee-Carter pour construire la surface extrapolée.

L'ajustement des taux bruts

Les taux bruts ont été calculés par Kaplan-Meier.

Ils ont été ajustés en les positionnant par rapport aux taux INSEE précédemment construits par Daniel SERANT (*cf. infra*).

avant 40 ans

Aucune donnée n'étant disponible avant 40 ans, il a été retenu sur la plage 0-40 ans les structures INSEE (forme des logits en cloche inversée entre 0 et 20 puis tangente horizontale en 10 (avec minimum) et en 20 (avec inflexion) à peu près stable dans le temps puis structures grosso modo linéaires à partir de 25 ans (ce phénomène étant là encore stable dans le temps).

En raccordant aux tables de place à 40 ans avec une condition C1 (continuité et continuité de la dérivée) on obtient autant de contraintes que de paramètres et donc une solution analytique.

L'ajustement des taux bruts

à partir de 40 ans

A partir de 40 ans, le positionnement est effectué via la régression des logits des taux bruts sur les logits de la table de référence, ce qui conduit formellement au modèle suivant :

$$\lg_x(t) = a_x \lg_x^{ref}(t) + b_x + \varepsilon_{xt}$$

La régression est effectuée sur la plage 1994-2004. Une régression est effectuée pour chaque valeur de x , de 40 à 95 ans.

Les résultats montrent une forte corrélation entre les paramètres a et b (chacun de ces paramètres étant une fonction de l'âge x) ce qui conduit à contraindre le modèle en posant :

$$a_x = \alpha + \beta b_x$$

L'estimation des paramètres est finalement effectuée dans ce contexte (le modèle étant alors non linéaire), sur la plage d'âge 40-95 ans, et pour les années 1994-2004.

La projection des taux de mortalité

Une fois les tables d'expérience ajustée sur la période 1994-2004, sur la plage d'âges 40-95 ans, une extrapolation de la mortalité future est effectuée.

Les paramètres α , β et b obtenus à la section précédente permettent simplement de prolonger les tables de place sur la dimension temporelle pour obtenir les taux prospectifs de 2005 à 2100 en appliquant la formule :

$$\mathbf{lg}_x(t) = (\alpha + \beta b_x) \mathbf{lg}_x^{ref}(t) + b_x$$

L'application directe de cette formule d'extrapolation conduit à des taux de mortalité des assurés supérieurs à la population générale à partir de 2015, ce qui apparaît peu vraisemblable. Il apparaît alors plus raisonnable et plus prudent dès lors qu'une surmortalité « assurés » prospective est observée d'infléchir la mortalité « assurés » pour la conduire à se confondre avec la mortalité nationale.

La projection des taux de mortalité

La dynamique de projection des taux de la table de place a donc été ajustée pour converger progressivement vers les taux de la population générale. En pratique l'écart entre les logits de la population d'assurés et les logits de la population générale :

$$\Delta_x(t) = \lg_x(t) - \lg_x^{ref}(t)$$

a été modélisé de la manière suivante :

$$\Delta_x(t) = -\exp(t \times \theta_x + \rho_x)$$

A l'issue de cette étape, on dispose donc d'un ensemble de tables prospectives de 2005 à 2100, pour la plage d'âges 40-95 ans. Il reste à extrapoler les taux de décès aux âges postérieurs à 95 ans pour finaliser ces tables.

La fermeture des tables

Si l'on ferme chaque table à t fixé, les taux aux grands âges peuvent être incohérents d'une table du moment à l'autre. Il convient d'assurer la cohérence globale des différentes tables du moment aux âges supérieurs à 95 ans. La méthode retenue consiste à réaliser un prolongement sur la base d'une expression analytique, en intégrant des contraintes.

En pratique la première méthode testée a consisté à donner une forme quadratique aux logits aux grands âges en assurant un raccordement de classe C^1 à 95 ans (*i.e.* continuité et dérivabilité à cet âge) et en imposant également la valeur $\frac{1}{2}$ au taux de décès à 110 ans. Ces contraintes définissent les paramètres de la forme quadratique de manière unique.

Toutefois cette méthode laisse subsister certaines incohérences (croisements de taux).

Une version affinée de la méthode a été mise en œuvre, consistant à faire dériver l'âge pivot auquel le taux de décès est égal à $\frac{1}{2}$. Formellement cela conduit à poser pour l'âge pivot :

$$x_p = at + b$$



La fermeture des tables

Les paramètres a et b sont déterminés au moyen d'un critère de type « moindre carrés », sur les âges et les années (la plage d'âge retenue pour cette optimisation étant 85-95 ans). Le modèle précédent appliqué avec les âges pivot dérivant ainsi ne présente plus d'incohérence.

On peut noter qu'une expression polynômiale sur les logits des taux de décès conduit à une forme exponentielle sur les taux de décès.

Remarque : Compte tenu des données utilisées pour la construction, les tables proposent des taux de décès lorsque la condition « âge + génération > 1995 »

Choix techniques et ajustements

Un certain nombre de choix ont été effectués aux différentes étapes de construction des tables, et certains d'entre eux peuvent avoir des conséquences importantes sur les tables obtenus *in fine*.

En premier lieu, les tables construites ici pour les populations d'assurés s'appuient sur des tables élaborées sur la base de données **INSEE**. Ces tables « population générale » sont construites de manière intrinsèque, et le modèle finalement retenu est un **ajustement par splines cubiques**.

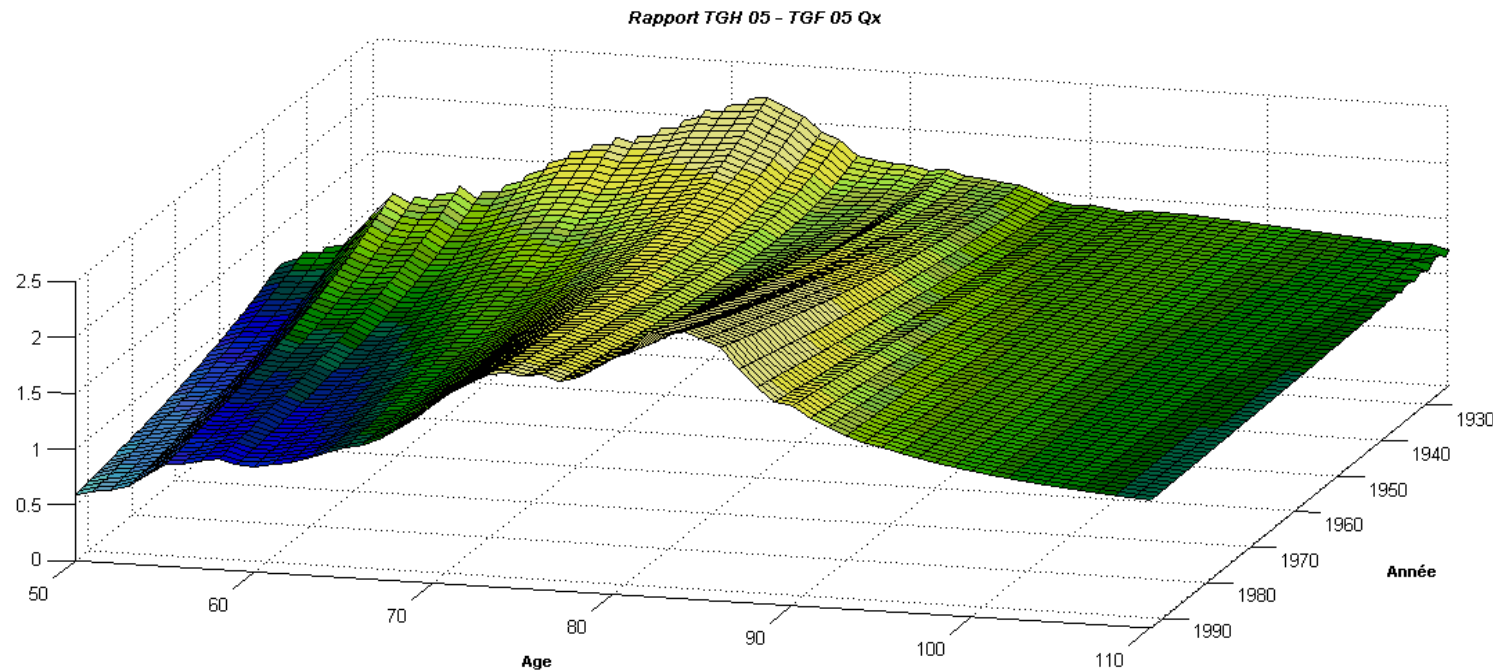
En ce qui concerne la construction des tables de populations d'assurés proprement dites, les choix suivants ont été effectués :

- Les tables brutes de référence utilisées sont constituées directement des tables année par année.
- Avant ajustement, les taux bruts ont été lissés par un **lissage localement Gompertz** d'amplitude 5 ans.

Enfin, à la suite de remarques formulées par l'ACAM, un ajustement de nature non technique a été effectué pour les hommes : les taux de décès issus de la construction décrite ici ont été majorés de 1% de 60 à 94 ans. Cette modification est sans conséquence pratique sur les espérances de vie résiduelles, et reste en tout état de cause d'un ordre inférieur à l'incertitude attachée aux estimations effectuées.

Choix techniques et ajustements

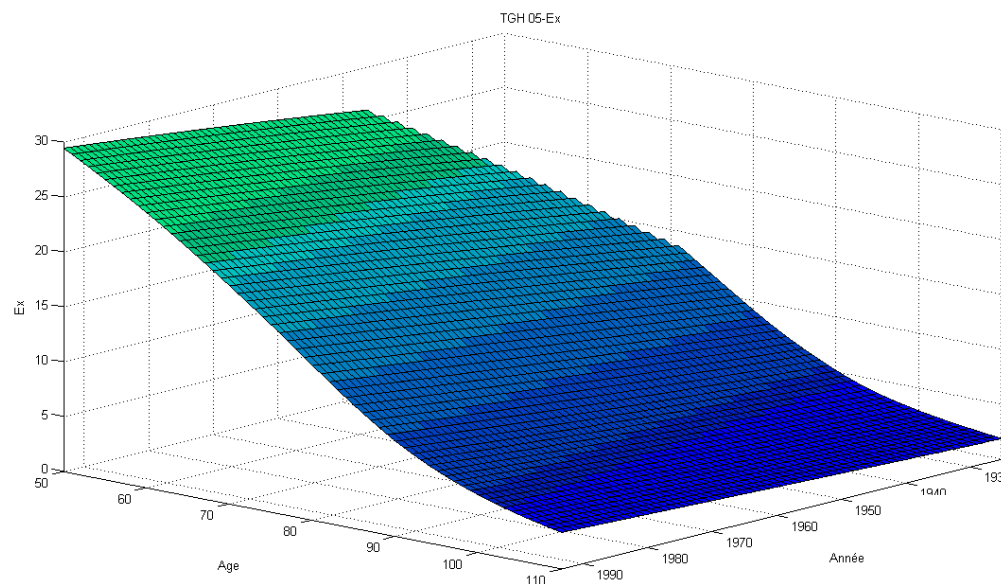
Les règles de construction retenues, et notamment la convergence vers les tables INSEE, ont pour conséquence que lors de la projection on constate des taux de décès pour les hommes qui peuvent devenir inférieurs aux taux féminins :



L'impact sur le provisionnement est négligeable.

Les tables obtenues

Les tables sont présentées en « espérance de vie résiduelle » :

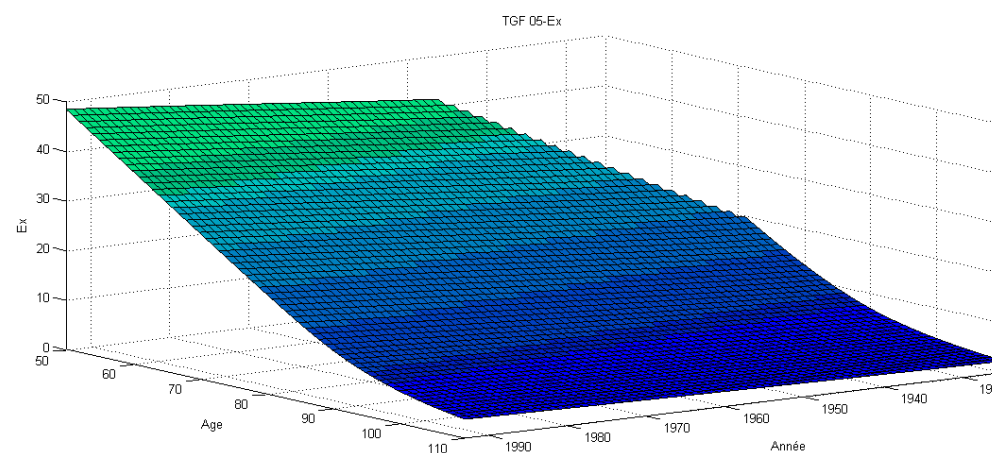


L'espérance de vie à 60 ans passe de 26,8 ans pour la génération 1936 à 36,7 ans pour la génération 2005, soit une augmentation de 37 % ; les rentiers hommes de 60 ans 2006 (génération 1946) ont une espérance de vie résiduelle de 28,4 ans.

(L'espérance de vie à 60 ans issue des TPG 1993 est de 29,6 ans.)

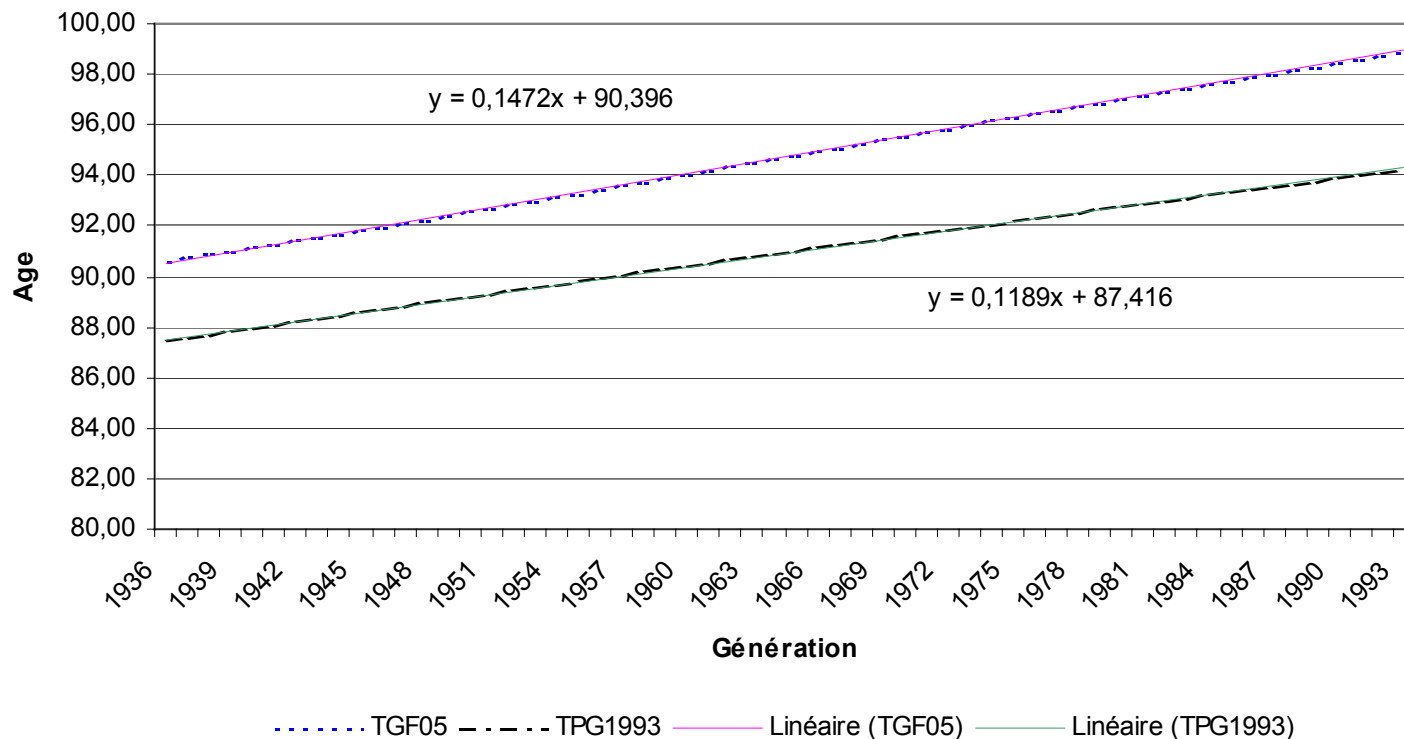
L'espérance de vie à 60 ans passe de 30,6 ans pour la génération 1936 à 40,4 ans pour la génération 2005, soit une augmentation de 32 % ; les rentiers femmes de 60 ans 2006 (génération 1946) ont une espérance de vie résiduelle de 32,0 ans.

(L'espérance de vie à 60 ans issue des TPG 1993 est de 29,6 ans.)



Évolution de l'espérance de vie

Il est possible de reformuler les conséquences du passage des tables TPG 1993 aux tables TGF 05 en rapprochant l'évolution anticipée de l'espérance de vie à 60 ans dans les deux modèles prospectifs. On obtient ainsi :



Conséquence sur les provisions

Le tableau ci-après présente les montants des capitaux constitutifs d'une rente viagère immédiate au 31/12/2005, calculés au taux technique de 2%.

Age	Génération	TPG 1993	Femmes	Femmes / TPG	Hommes	Hommes / TPG
50	1955	26,81647	28,40552	5,9%	26,75507	-0,2%
55	1950	24,26368	25,95575	7,0%	24,07474	-0,8%
60	1945	21,50832	23,30185	8,3%	21,25828	-1,2%
65	1940	18,53412	20,39677	10,0%	18,22126	-1,7%
70	1935	15,39467	17,28922	12,3%	15,08772	-2,0%
75	1930	12,25679	14,08680	14,9%	12,05698	-1,6%
80	1925	9,35194	10,96271	17,2%	9,12890	-2,4%
85	1920	6,88306	8,15548	18,5%	6,64827	-3,4%
90	1915	4,93310	5,89309	19,5%	4,73880	-3,9%
95	1910	3,46780	4,29408	23,8%	3,40109	-1,9%

On constate des majorations significatives pour les femmes, les provisions pour les hommes étant du même ordre que celle obtenues avec les tables actuelles (TPG 1993).

Références bibliographiques

FFSA [2005] *Demande de données relatives aux populations d'assurés*, Document de travail FFSA.

PLANCHET F. [2005] *Tables de mortalité d'expérience pour des portefeuilles de rentiers*, Note méthodologique de l'Institut des Actuaires.

PLANCHET F. [2006] *Construction des tables de mortalité d'expérience pour les portefeuilles de rentiers – présentation de la méthode de construction*, Note méthodologique de l'Institut des Actuaires.

SERANT D. [2005] *Construction de tables prospectives de mortalité*, Document interne FFSA (confidentiel).

TASSIN E. [2006] *Note qualitative sur les tables prospectives IA 2006 masculines et féminines*, Document interne de l'Institut des Actuaires.