CENTRE D'ÉTUDES ACTUARIELLES

# Examen d'accès - 21 Septembre 2016

Aucun document autorisé - Calculatrice fournie par le centre d'examen

*Les consignes indiquées ci-dessous sont suffisamment explicites pour ne pas laisser de doute quant à leur interprétation. Les personnes surveillant l'examen ne répondront à aucune question relative à ces consignes durant l'épreuve, la bonne compréhension de ces règles faisant elle aussi partie de l'examen.*

Cet examen est un questionnaire à choix multiples constitué de 50 questions. Plusieurs réponses sont proposées pour chaque question (ou ensemble de questions). Le nombre de bonnes réponses à une question peut aller de 0 à 5.

Les réponses sont à inscrire sur la feuille jointe, en cochant pour chaque question la (ou les) case(s) correspondant à la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

**Comptabilisation des points :**

- Toute case cochée à tort entraîne une pénalité de 0,5 point. Toute case cochée à raison entraîne une bonification de 1 point (même si d'autres cases dans la même question auraient dû être cochées et ne l'ont pas été). Une case non cochée ne donne ni bonification ni malus. Les seules exceptions à cette règle sont définies au point suivant.
- Certaines sous-questions de type Vrai/Faux ne contiennent que deux propositions de réponse, dont une est forcément exacte. Pour ces questions, une absence de réponse rapporte 0 point. Si la bonne réponse est cochée et que la mauvaise ne l'est pas, +1 point. Si la mauvaise réponse est cochée et que la bonne ne l'est pas, -0,5 point. **Si les deux réponses sont cochées, -0,5 point.** Ces questions de type Vrai/Faux sont clairement indiquées dans le sujet par la mention **Question V/F** les précédant.

Vous disposez après les questions d'une table des valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite.

# 1 Questions générales

**Q 1)** On considère la fonction $f(x) = \ln(1 + \exp(x))/x$ définie sur $]0, +\infty[$. La limite en 0 de $f$ vaut

A) $+\infty$

B) $-\infty$

C) n'existe pas

D) 0

E) $(\ln 2)/x$

**Q 2)** (suite de la question précédente) La fonction $f$ est

A) décroissante

B) croissante

C) vaut 2 en un unique point $x \in ]0, +\infty[$

D) ne prend jamais la valeur 2 sur $]0, +\infty[$

E) prend au moins 2 fois la valeur 2 sur $]0, +\infty[$

**Q 3)** (suite de la question précédente) On considère la suite récurrente définie par $u_0 = 2016$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite est...

A) décroissante

B) non monotone

C) croissante

D) minorée par 1

E) majorée par 1

**Q 4)** L'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

est

A)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

B) n'existe pas

C)

$$\begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

D)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

E)

$$\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -3/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

**Q 5)** On considère un vecteur $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ de loi normale centrée de matrice de variance-covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

A) Les deux variables sont décorrélées mais pas forcément indépendantes

B) La variable $Y$ a pour variance 4

C) Les deux variables $X$ et $Y$ sont indépendantes

D) La corrélation entre $X$ et $Y$ vaut 1, et celle entre $Y$ et $X$ vaut 4.

E) La corrélation entre $X$ et $Y$ vaut 4, et celle entre $Y$ et $X$ vaut 1.

**Q 6)** Deux candidats d'un jeu télévisé se trouvent face à 3 portes. Derrière l'une d'entre elles (inconnue) se cache une Aston Martin. Derrière les 2 autres, le vide. Le candidat A choisit une porte au hasard. Le candidat B choisit alors une des 2 autres. Le présentateur ouvre la porte choisie par le candidat B, derrière laquelle il n'y a rien. Le candidat A possède alors la possibilité d'ouvrir la porte qu'il avait initialement choisie, ou de choisir la porte restante.

A) En changeant de porte, il a 1 chance sur 2 de gagner la voiture.

B) En changeant de porte, il a 2 chances sur 3 de gagner la voiture.

C) En changeant de porte, il a 1 chance sur 3 de gagner la voiture.

D) En changeant de porte, il a 1 chance sur 4 de gagner la voiture.

E) En changeant de porte, il a 3 chances sur 4 de gagner la voiture.

**Q 7)** On considère une variable $X$ de loi de Poisson de paramètre 4, et la variable $Y = X + 2$. La variance de $Y$ vaut

A) 4
B) 16
C) 6
D) 36
E) 20

**Q 8)** Une matrice réelle symétrique est

A) diagonalisable
B) diagonalisable dans une base orthonormale
C) inversible
D) orthogonale
E) inversible si ses valeurs propres sont strictement positives

**Q 9)** On considère $X_1, ..., X_n$ i.i.d. de même loi qu'une variable $X$ qui possède une espérance $E[X] = m > 0$. On considère $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$. La quantité $1/\bar{X}$

A) a pour espérance $1/m$
B) a une espérance $\leq m$
C) a une espérance $\geq m$
D) converge presque sûrement vers $1/m$ quand $n$ tend vers l'infini
E) peut toujours être approchée convenablement par une variable gaussienne si $n$ est grand

**Q 10)** On considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$, et $Z = E[Y|X]$. Parmi ces assertions, lesquelles sont exactes ?

A) $E[Z] = E[Y|X]$
B) $Var(Z) = Var(Y)$
C) $Var(Z) = Var(Y) + Var(X)$
D) $Var(Z) = Var(Y) - Var(X)$
E) $Var(Z) \leq Var(Y)$

## 2 Probabilités

**Q 11)** On considère trois événements aléatoires $A$, $B$ et $C$ de probabilités strictement comprises entre 0 et 1, tels que:

$$\begin{cases} A \subseteq C \\ B \subseteq C \\ A \cap B = \emptyset \end{cases} .$$

A) $P(C) \geq P(A) + P(B)$.

B) Les événements $A$ et $B$ sont indépendants.

C) Les événements $A$ et $C$ sont indépendants.

D) La probabilité conditionnelle de $B$ sachant $C$ est égale à 1.

E) La probabilité conditionnelle de $C$ sachant $B$ est égale à 1.

**Q 12)** Dans une première urne, se trouvent trois boules blanches et une boule noire; dans une seconde, trois boules noires et une boule blanche.

On choisit au hasard et sans préférence une des deux urnes, puis on effectue deux tirages consécutifs, avec remise, dans l'urne qui a été choisie.

On note $B_1$ l'événement "la première boule tirée est blanche", $B_2$ l'événement "la seconde boule tirée est blanche", et $p$ la probabilité pour que le tirage ait eu lieu dans la première des deux urnes sachant que les deux boules tirées sont blanches.

A) $P(B_1) = 1/2$ .

B) $P(B_1) > P(B_2)$ .

C) $p = 0,9$ .

D) $p = 0,8$ .

E) $p = 0,5$ .

**Q 13)** Soit $X$ une variable aléatoire telle que:

$$P([X > x]) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x+2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases} .$$

A) $P([X > x]) = 0$ pour tout $x < 0$ .

B) $P([X \leq 1]) = 1/2$ .

C) $P([0 < X \leq 2]) = 1/2$ .

D) $P([\,|X-2| \leq 2]) = 1$ .

E) La variable aléatoire $X$ possède une densité.

**Q 14)** Dans cette question, $X, Y$ et $Z$ désignent trois variables aléatoires indépendantes qui suivent chacune la loi de Poisson de paramètre 1.

A) $P([X + Y > 0]) = \big(P([Z > 0])\big)^2$ .

B) $P([X + Y = 0]) = \big(P([Z = 0])\big)^2$ .

C) La loi conditionnelle de $Z$ sachant $X + Y = n$ ($n \in \mathbb{N}$) est une loi de Poisson .

D) La loi conditionnelle de $X$ sachant $X + Y = n$ ($n \in \mathbb{N}$) est une loi de Poisson .

E) Le coefficient de corrélation linéaire de $X + Y$ et $Y + Z$ est égal à $1/2$ .

**Q 15)** Soit $X$ une variable aléatoire d'espérance égale à 1 et de variance égale à 2.

A) $E(2X + 1) = 3$ .

B) $V(2X + 1) = 9$ .

C) $P([\,|X - 1| \geq 2]) \leq 1/2$ .

D) $P([X \geq 3]) \leq 1/2$ .

E) $P([X \geq 1]) = 0$ .

**Q 16)** Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

A) $P([X \leq 1]) = \frac{1}{2}$ .

B) $P([X \leq -1]) = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ .

C) $E(\,|X|\,) = 0$ .

D) $E(X) = E(X^3)$ .

E) $E(X^2) = E(X^4)$ .

**Q 17)** Soit $p \in ]0,1[$. On pose: $q = 1-p$.

On considère une variable aléatoire $X$ telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$P([X = n]) = p\,q^n \ .$$

Pour tout réel $s \in [0,1]$, on pose:

$$g(s) = E[s^X] \ .$$

A) $E(X) = 1/p$ .

B) $g(1) = 1$ .

C) $g'(1) = q/p$ .

D) $g''(1) = E(X^2)$ .

E) La fonction $g$ est convexe sur $[0,1]$ .

**Q 18)** Dans cette question, $X, Y$ et $Z$ désignent trois variables aléatoires indépendantes possédant chacune une densité.

On note $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} X & Y & 0 \\ 0 & Z & 0 \\ 0 & Y & Z \end{pmatrix}$ .

A) Le déterminant de la matrice aléatoire $M$ est $XZ - Y$ .

B) Le déterminant de la matrice aléatoire $N$ est $XZ^2 - XY^2$ .

C) Les matrices $M$ et $N$ ont les mêmes valeurs propres .

D) La probabilité pour que la matrice $M$ soit inversible est égale à 1 .

E) La probabilité pour que la matrice $M$ soit diagonalisable est égale à 1 .

**Q 19)** Soit $n$ un nombre entier supérieur ou égal à 2.

On considère $n$ variables aléatoires indépendantes $U_1, U_2, \ldots, U_n$ suivant chacune la loi uniforme sur le segment $[-1, +1]$.

Pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$, on pose:

$X_i = \mathbf{1}_{U_i \geq 0}$ (variable aléatoire qui vaut 1 lorsque $U_i$ est positive et 0 dans le cas contraire).

A) $E(\sum_{i=1}^n U_i) = 0$ .

B) $V(\sum_{i=1}^n U_i) = \frac{n}{6}$ .

C) La variable aléatoire $\sum_{i=1}^n U_i$ suit une loi uniforme.

D) La variable aléatoire $\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi binomiale.

E) $V(\sum_{i=1}^n X_i) = \frac{n^2}{4}$ .

**Q 20)** (suite de la question **Q 19**)

Pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$, on pose: $Y_i = X_i U_i$ .

A) $Y_i$ est une variable aléatoire discrète.

B) $Y_i$ est une variable à densité.

C) Sous le conditionnement par l'événement $[X_i = 1]$, la variable aléatoire $Y_i$ suit une loi uniforme.

D) $E(\sum_{i=1}^n Y_i) = \frac{n}{2}$ .

E) $V(\sum_{i=1}^n Y_i) = \frac{n}{24}$ .

## 3 Mathématiques financières

**Q 21)** Quel est le taux in fine équivalant à un taux d'escompte de 2% sur une période de 180 jours ?

A) 1,96%

B) 1,98%
C) 2%
D) 2,02%
E) 2,04%

**Q 22)** Quel est le taux de rentabilité d'une action d'une valeur de 180 euros payant un dividende de 5 euros. Le taux de croissance des dividendes est estimé à 0.5%

A) 3,12%
B) 3,19%
C) 3,25%
D) 3,29%
E) 3,31%

**Q 23)** Un crédit de 25000 euros au taux de 3% sur 3 ans. La première annuité est de 8 000 euros. La seconde annuité est de 9000 euros. Quel est le montant de la troisième annuité ?

A) 9560,98 euros
B) 9292,27 euros
C) 9833,15 euros

Le montant total des intérêts est de

D) 1833,15 euros
E) 1560,98 euros

**Q 24)** Un particulier fait 10 placements annuels de 1 000 euros au taux de 2%. Quelle est la valeur de son placement à la fin de la 10ème année ?

A) 11 168,72 euros
B) 9 949,72 euros
C) 11 727,15 euros
D) 10 610,28 euros
E) 12 486,35 euros

**Q 25)** Quel est le montant d'un crédit de 3 ans avec 1 an de différé de remboursement dont le taux est 2% et dont l'annuité est 7 880,26 euros.

A) 10 000 euros

B) 12 500 euros

C) 15 000 euros

Le coût du crédit est :

D) 760,51 euros

E) 953,94 euros

**Q 26)** Quelle est l'annuité d'un crédit de 15 000 euros d'une durée de 3 ans au taux de 1,6% ?

A) 5100,33 euros

B) 5160,85 euros

C) 5201,32 euros

Le coût du crédit est

D) 482,54 euros

E) 603,96 euros

**Q 27)** Un prêt de 20 000 euros sur 3 ans. Les annuités constantes sont de 7 070,61 euros. Le taux du prêt est de

A) 2,5%

B) 3%

C) 3,5%

Le capital restant dû après la 2ème annuité est de

D) 6 864,67 euros

E) 6 660,89 euros

**Q 28)** Un placement monétaire de 1 000 000 euros au taux in fine de 2% vaut 1 005 055,56 euros. Quelle est la durée du placement ?

A) 1 mois

B) 2 mois

C) 3 mois

3 mois plus tard le placement est égal à

D) 1 010 166,67 euros

E) 1 000 972,22 euros

**Q 29)** Un crédit à amortissement constant de 30 000 euros sur 10 ans au taux de 3%. Quel est le montant de la 3ème annuité ?

A) 3 810 euros

B) 3 720 euros

C) 3 620 euros

L'intérêt payé sur ces 3 années est de

D) 2430 euros

E) 2320 euros

**Q 30)** Une obligation zéro coupon d'une valeur nominale 100 euros, de maturité 5 ans a une valeur, avec un taux de marché de 1.25%, de

A) 55,49 euros

B) 62,30 euros

Sa duration est de

C) 2,5

D) 2,75

E) 3

## 4 Statistique et analyse des données

**Q 31)** Estimer le paramètre d'une loi par la méthode des moments suppose que :

A) le paramètre soit une fonction d'un des moments

B) la loi soit une loi normale

C) le nombre de variables du modèle soit très élevé

Un estimateur est sans biais si :

D) son espérance est la vraie valeur inconnue du paramètre

E) il donne systématiquement la meilleure estimation possible

**Q 32)** Un test statistique est dit paramétrique si :

A) la règle de décision comporte des paramètres d'ajustement

B) la règle de décision porte sur des valeurs du paramètre de la loi

Dans un test, on fixe à un niveau donné :

C) l'erreur de première espèce

D) l'erreur de seconde espèce

E) l'erreur de première espèce et l'erreur de seconde espèce

**Q 33)** Faire une estimation par intervalle consiste à :

A) utiliser deux estimateurs au lieu d'un pour encadrer la vraie valeur du paramètre

B) faire varier la valeur du paramètre pour obtenir un intervalle

C) estimer plusieurs paramètres

Les intervalles de confiance pour la loi normale sont très importants car :

D) ils permettent de donner des intervalles de confiance asymptotiques pour toutes les lois pour lesquelles le paramètre est égal à l'espérance (en appliquant le TCL)

E) toutes les variables aléatoires suivent approximativement une loi normale

**Q 34)** On veut savoir à l'aide d'un sondage d'opinion si le candidat A ou le candidat B va être élu. On modélise le choix de chacun des sondés par une loi de Bernoulli de paramètre p, p étant la probabilité que A soit élu. On utilise ensuite une approximation par la loi normale pour obtenir un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95%. Si on observe 52% d'intentions de vote pour le candidat A et le nombre de sondés est 2000, un intervalle de confiance de niveau 95% sera :

A) [0,5195 ; 0,5205]

B) [0,498 ; 0,542]

C) [0,5198 ; 0,5201]

Le choix du quantile utilisé pour calculer l'intervalle est effectué en utilisant les quantiles de la loi normale car

D) l'échantillon est de grande taille

E) la variance n'a pas été estimée

**Q 35)** On effectue un test sur la moyenne dans le cadre de variables suivant des lois normales. Le fait que la variance ne soit pas connue pas estimée :

A) ne modifie pas le test

B) rend le test plus sévère, car on utilise le quantile d'une loi de Student au lieu de celui d'une loi normale

C) rend le test moins sévère, car on utilise le quantile d'une loi de Student au lieu de celui d'une loi normale

D) empêche de poser correctement le test

E) nécessite d'effectuer en parallèle un test sur la variance

**Q 36)** Une analyse factorielle (ACP, AFC, ACM) sur un nuage d'individus a pour objectif de :

A) classer automatiquement des individus

B) expliquer les différences entre les individus par des variables exogènes

C) visualiser au mieux les ressemblances et les différences entre les individus

Il existe différentes méthodes selon :

D) la nature des données (quantitatives, qualitatives)

E) la dispersion du nuage de points

**Q 37)** Dans une analyse factorielle, une valeur propre associée à un axe principal mesure

A) l'inertie expliquée par l'axe

B) l'inertie résiduelle autour de l'axe

C) l'élongation du nuage

Dans le cas d'une analyse en composantes principales, la valeur propre représente en outre :

D) l'espérance de la composante principale associée

E) la variance de la composante principale associée

**Q 38)** Dans une analyse en composantes principales, on analyse deux nuages car :

A) le nuage des variables correspond aux valeurs propres et le nuage des individus aux vecteurs propres

B) ils sont superposables

C) le nuage des variables permet d'interpréter les composantes principales et les axes principaux du nuage des individus

Les deux analyses ont :

D) les mêmes valeurs propres, et des correspondances entre coordonnée du nuage des variables et axes du nuage des individus

E) les mêmes valeurs propres et vecteurs propres

**Q 39)** On utilise la distance du $\chi^2$ en AFC :

A) pour ne pas donner plus d'importance aux modalités les moins fréquentes

B) pour ne pas donner plus d'importance aux modalités les plus fréquentes

C) pour ramener toutes les fréquences à 0,5

Qu'on applique :

D) au tableau disjonctif complet

E) aux tableaux des profils des lignes et des colonnes

**Q 40)** En Classification Ascendante Hiérarchique, une stratégie d'agrégation permet :

A) de constituer des classifications optimales

B) d'agréger au fur et à mesure les groupes les plus semblables

C) de simplifier le problème en excluant a priori des classifications

Le choix d'une stratégie d'agrégation a :

D) un impact sur la vitesse d'exécution de l'algorithme

E) la forme de l'arbre de classification obtenu

## 5 Économétrie

**Q 41)** On considère le modèle de régression linéaire

$$Y_t = \sum_{j=1}^{K} \beta_j X_{t,j} + \varepsilon_t,$$

pour $t = 1, ..., T$ et $K < T$. On observe les $Y_t$ et les $X = (X_{t,j})_{t=1,...,T, j=1,...K}$. On suppose que le rang de la matrice $X$ est égal à $K$. On estime $\beta = (\beta_j)_{j=1,...,K}$ par $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_j)_{j=1,...,J}$ estimateur des moindres carrés ordinaires. Quelle(s) hypothèse(s) parmi celles-ci dessous sont nécessaires pour que $\hat{\beta}$ soit un estimateur sans biais de $\beta$ conditionnellement à $X$ ?

- A) $E[\varepsilon_t|X] = 0$ pour tout $t = 1, ..., T$
- B) $Var(\varepsilon_t|X) = \sigma^2$ (i.e. variance conditionnelle constante) pour tout $t = 1, ..., T$
- C) $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s|X) = 0$ pour tout $(t, s)$ avec $t \neq s$
- D) $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $t = 1, ..., T$
- E) Les $(\varepsilon_t)_{t=1,...,T}$ sont indépendants.

**Q 42)** (Suite de la question précédente) **Question V/F :** On considère le modèle précédent. Le caractère normal des résidus $(\varepsilon_t)_{t=1,...,T}$ est indispensable pour obtenir la convergence de $\hat{\beta}$ vers $\beta$ lorsque $T$ tend vers l'infini.

- A) Vrai
- B) Faux

**Question V/F :** Si les $\varepsilon_t$ sont gaussiens, la distribution de $\hat{\beta}$ sachant $X$ peut être déterminée exactement.

- C) Vrai
- D) Faux

**Q 43)** (Suite de la question précédente) On considère la statistique $U_j$ A partir du modèle présenté en Q1 avec les hypothèses standard, on considère la statistique $U_j = (\hat{\beta}_j - \beta_j)/s_{\hat{\beta}_j}$ où $s^2_{\hat{\beta}_j}$ est l'estimateur standard (sans biais) de $Var(\hat{\beta}_j|X)$. La variable aléatoire $U_j$ est distribuée suivant une loi de Student à $T - K$ degrés de liberté si

A) les $\varepsilon_t$ suivent une $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

B) les $\varepsilon_t$ suivent une $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et elles sont non corrélées

C) les $\varepsilon_t$ sont centrés

On veut tester au niveau $\alpha$ $H_0 : \beta_j = 0$ contre $H_1 : \beta_j \neq 0$. On note par $u_j$ la valeur du ratio $\hat{\beta}_j / s_{\hat{\beta}_j}$. On rejette $H_0$ (au niveau $\alpha$) si

D) $p = \mathbb{P}(Z \geq u_j | H_0) \leq \alpha$ où $Z$ suit une loi de Student à $T - K$ degrés de liberté.

E) $p = \mathbb{P}(|Z| \geq u_j | H_0) \leq \alpha$ où $Z$ suit une loi de Student à $T - K$ degrés de liberté.

**Q 44)** On considère le modèle de régression linéaire avec constante

$$Y_t = \beta_0 + \sum_{j=1}^{K} \beta_j X_{t,j} + \varepsilon_t,$$

pour $t = 1, ..., T$ et $K < T$. On suppose que les $\varepsilon_t$ sont i.i.d. d'espérance nulle et que le rang de $X$ est $K$. À nouveau on considère l'estimateur des moindres carrés $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_j)_{j=0,...,T}$. On note $\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\beta}_0 - \sum_{j=1}^{K} \hat{\beta}_j X_{t,j}$. On a $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t = 0$ car

A) $E[\varepsilon_t | X] = 0$

B) Le modèle comporte une constante ($\beta_0$)

C) Au moins un des $\beta_j$ est non nul

D) Le rang de la matrice $X$ est $K$

E) Les $\varepsilon_t$ sont i.i.d.

**Q 45)** On considère la régression linéaire (avec constante) de la variable "Total" sur la variable "Cac". L'analyse est effectuée via le logiciel R dont la sortie est présentée ci-dessous. Il y a 708 observations. On souhaite tester la significativité du coefficient constant ("intercept" en anglais). La colonne $P(> |t|)$ fournit la probabilité que la valeur absolue d'une variable de Student de 706 degrés de libertés soit plus grande que la valeur présentée dans la colonne "t-value".

Régression m.c.o. du modèle du MEDAF avec R MEDAF

```
Call:
lm(formula = total ~ cac)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-4.27995 -0.58559 -0.06371  0.53750  4.80499
---
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.01606    0.04213   0.381    0.703
cac          0.98043    0.02093  46.853   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ?***? 0.001 ?**? 0.01 ?*? 0.05 ?.? 0.1 ? ? 1

Residual standard error: 1.121 on 706 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.7567,Adjusted R-squared: 0.7563
F-statistic:  2195 on 1 and 706 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Sortie 1: Régression des rendements Total fonction de ceux du CAC40

**Question V/F :** Si on effectue ce test de significativité au niveau 5%, on peut considérer la constante $\alpha$ comme

A) nulle

B) différente de zéro

C) égale à 0,01606

La part de variance restituée par le modèle est

D) 0,7557

E) 0,7563

**Q 46)** (suite de la question précédente) On souhaite tester $H_0 : \beta = 1$ contre $H_1 : \beta < 1$. La statistique du test de Student que l'on peut utiliser pour effectuer ce test est égale à

A) 0,9350

B) -0,9350

C) -0,4645

D) 0,4645

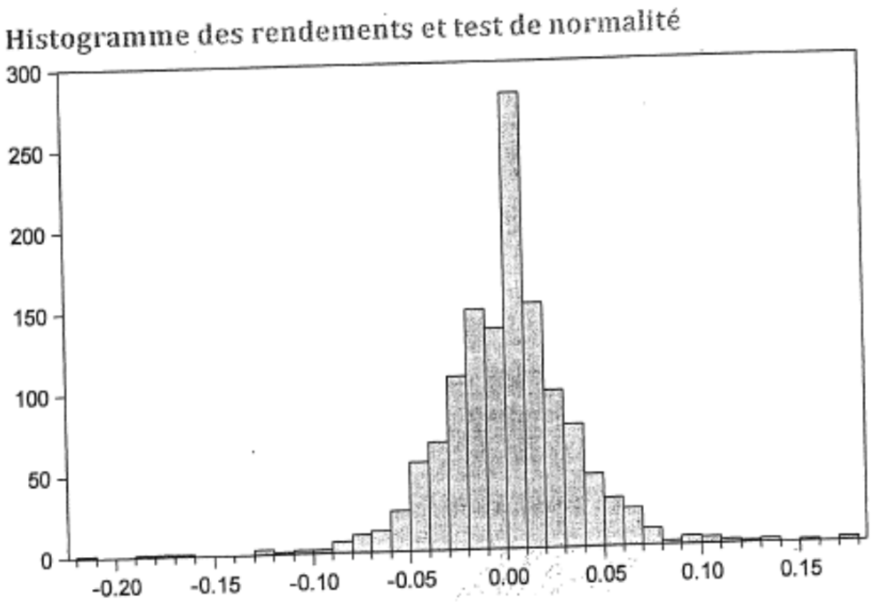
E) 46,853

**Q 47)** On souhaite modéliser les rendements quotidiens (en clôture) d'un actif (notés $R$). Les rendements sont observés sur la période du 05 janvier 2009 au 22 janvier 2014. Les statistiques usuelles et l'histogramme sont communiquées ci-après.

On rappelle que la statistique de Jarque-Bera permet d'effectuer un test sur la normalité d'une v.a.r. $X$ à partir d'un échantillon $(X_1, ..., X_T)$ i.i.d. de même loi que $X$, de réalisation $(x_1, ..., x_T)$. Cette statistique $JB$ est définie par

$$JB = T[\hat{S}/6 + (\hat{K} - 3)^2/24]$$

et elle se comporte sous l'hypothèse nulle comme un $\chi^2$ à 2 degrés de liberté, où $\hat{S}$ et $\hat{K}$ représentent les estimateurs standards du skewness et du kurtosis respectivement. Dans la sortie informatique, la p-value de ce test est notée "Probability".




| | |
|---|---|
| Series: R | |
| Sample 1/05/2009 1/22/2014 | |
| Observations 1313 | |
| Mean | 0.000474 |
| Median | 0.000000 |
| Maximum | 0.178075 |
| Minimum | -0.216528 |
| Std. Dev. | 0.034482 |
| Skewness | -0.150593 |
| Kurtosis | 7.483067 |
| Jarque-Bera | 1104.485 |
| Probability | 0.000000 |

**Question V/F :** Au niveau $\alpha = 0,01$,

A) on accepte $H_0$

B) on rejette $H_0$.

Si on accepte $H_0$ lors d'un tel test au niveau $\alpha = 0,01$,

C) cela veut dire que les variables ne suivent pas une loi normale

D) les variables peuvent suivre une loi normale malgré tout

E) les variables ne sont pas indépendantes

**Q 48)** (suite de la question précédente) On admet que les rendements sont issus d'un processus stochastique à temps discret, stationnaire au second ordre. L'autocorélogramme empirique des rendements $\hat{\rho}_R(h)$, $h = 1, ..., 36$ est présenté ci-après.

Date: 03/08/14 Time: 18:33
Sample: 1/05/2009 1/22/2014
Included observations: 1313

| Autocorrelation | Partial Correlation | | AC | PAC | Q-Stat | Prob |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 0.036 | 0.036 | 1.6872 | 0.194 |
| | | 2 | 0.016 | 0.014 | 2.0094 | 0.366 |
| | | 3 | 0.006 | 0.005 | 2.0513 | 0.562 |
| | | 4 | 0.036 | 0.035 | 3.7251 | 0.444 |
| | | 5 | 0.002 | -0.001 | 3.7283 | 0.589 |
| | | 6 | -0.002 | -0.003 | 3.7319 | 0.713 |
| | | 7 | 0.038 | 0.038 | 5.6731 | 0.578 |
| | | 8 | 0.016 | 0.013 | 6.0291 | 0.644 |
| | | 9 | -0.006 | -0.009 | 6.0836 | 0.732 |
| | | 10 | 0.002 | 0.002 | 6.0877 | 0.808 |
| | | 11 | -0.012 | -0.015 | 6.2873 | 0.854 |
| | | 12 | 0.047 | 0.047 | 9.2358 | 0.683 |
| | | 13 | 0.028 | 0.026 | 10.302 | 0.669 |
| | | 14 | -0.025 | -0.030 | 11.155 | 0.674 |
| | | 15 | 0.066 | 0.067 | 16.950 | 0.322 |
| | | 16 | 0.053 | 0.047 | 20.699 | 0.190 |
| | | 17 | 0.021 | 0.014 | 21.272 | 0.214 |
| | | 18 | -0.051 | -0.051 | 24.723 | 0.133 |
| | | 19 | -0.004 | -0.009 | 24.742 | 0.169 |
| | | 20 | -0.022 | -0.027 | 25.385 | 0.187 |
| | | 21 | -0.006 | -0.002 | 25.427 | 0.229 |
| | | 22 | -0.039 | -0.039 | 27.451 | 0.195 |
| | | 23 | -0.018 | -0.020 | 27.908 | 0.219 |
| | | 24 | 0.026 | 0.028 | 28.843 | 0.226 |
| | | 25 | 0.053 | 0.055 | 32.678 | 0.139 |
| | | 26 | 0.014 | 0.019 | 32.954 | 0.163 |
| | | 27 | 0.019 | 0.016 | 33.433 | 0.183 |
| | | 28 | 0.024 | 0.013 | 34.203 | 0.194 |
| | | 29 | -0.033 | -0.038 | 35.649 | 0.184 |
| | | 30 | 0.020 | 0.025 | 36.162 | 0.203 |
| | | 31 | 0.025 | 0.018 | 37.012 | 0.211 |
| | | 32 | 0.034 | 0.021 | 38.591 | 0.196 |
| | | 33 | -0.025 | -0.023 | 39.431 | 0.204 |
| | | 34 | -0.028 | -0.023 | 40.504 | 0.205 |
| | | 35 | -0.040 | -0.032 | 42.695 | 0.174 |
| | | 36 | -0.001 | 0.002 | 42.696 | 0.205 |

On veut tester l'hypothèse $H_0 : \rho_R(1) = \rho_R(2) = ... = \rho_R(20) = 0$ contre l'hypothèse $H_1$ opposée. La statistique Ljung-Box de ce test est définie par

$$LB(20) = T(T+2)\sum_{h=1}^{20}(\hat{\rho}_R(h))^2/(T-h),$$

où $T$ est le nombre d'observations, ici égal à 1313. Si les rendements sont indépendants, alors la statistique $LB(20)$ suit asymptotiquement, sous $H_0$, un $\chi^2$ à 20 degrés de liberté. Dans la sortie informatique, cette statistique est notée $Q - stat$ et sa $p-$value est notée "Prob".

**Question V/F :**

A) On accepte l'hypothèse nulle $H_0$ au niveau $\alpha = 0,05$

B) On refuse l'hypothèse nulle $H_0$ au niveau $\alpha = 0,05$

On rappelle qu'on peut montrer que si un processus scalaire $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est i.i.d. centré de variance $\sigma^2$, l'estimateur usuel $\hat{\rho}(h)$ de $\rho(h)$, $h \neq 0$ est tel que $\sqrt{T}\hat{\rho}(h)$ suit approximativement une loi $\mathcal{N}(0,1)$. A partir de l'autocorrélogramme ci-dessus, on souhaite tester $H_0$ : $\rho(15) = 0$ contre $H_1$ : $\rho(15) \neq 0$ au niveau $\alpha = 0,05$. On fournit $(1313)^{1/2} = 36,24$.

**Question V/F :**

C) On rejette $H_0$.

D) On ne rejette pas $H_0$.

**Q 49)** Les résultats ci-après présentent l'estimation par moindres carrés ordinaires d'un modèle auto-régressif AR(15), i.e.

$$X_t = \beta_0 + \sum_{j=1}^{15}\beta_j X_{t-j} + \varepsilon_t,$$

où les $\varepsilon_t$ sont i.i.d. centrés. Une nouvelle fois, "Prob" désigne la p-value.

## 2. Détermination des coefficients de l'AR(15)

***Méthode du générale au particulier***

Dependent Variable: R
Method: Least Squares
Date: 03/10/14 Time: 12:23
Sample (adjusted): 1/27/2009 1/22/2014
Included observations: 1298 after adjustments
Convergence achieved after 3 iterations

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 0.000540 | 0.001212 | 0.445259 | 0.6562 |
| AR(1) | 0.038407 | 0.027845 | 1.379328 | 0.1680 |
| AR(2) | 0.013288 | 0.027856 | 0.477022 | 0.6334 |
| AR(3) | -0.002263 | 0.027828 | -0.081321 | 0.9352 |
| AR(4) | 0.034985 | 0.027790 | 1.258912 | 0.2083 |
| AR(5) | -0.002147 | 0.027796 | -0.077256 | 0.9384 |
| AR(6) | -0.005510 | 0.027796 | -0.198229 | 0.8429 |
| AR(7) | 0.040209 | 0.027800 | 1.446363 | 0.1483 |
| AR(8) | 0.009016 | 0.027846 | 0.323764 | 0.7462 |
| AR(9) | -0.008406 | 0.027824 | -0.302117 | 0.7626 |
| AR(10) | 0.002341 | 0.027846 | 0.084061 | 0.9330 |
| AR(11) | -0.017479 | 0.027840 | -0.627859 | 0.5302 |
| AR(12) | 0.047662 | 0.027820 | 1.713249 | 0.0869 |
| AR(13) | 0.025217 | 0.027844 | 0.905651 | 0.3653 |
| AR(14) | -0.033157 | 0.027843 | -1.190867 | 0.2339 |
| AR(15) | 0.067581 | 0.027837 | 2.427709 | 0.0153 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.013169 | Mean dependent var | 0.000541 |
| Adjusted R-squared | 0.001622 | S.D. dependent var | 0.034536 |
| S.E. of regression | 0.034508 | Akaike info criterion | -3.882975 |
| Sum squared resid | 1.526649 | Schwarz criterion | -3.819263 |
| Log likelihood | 2536.051 | Hannan-Quinn criter. | -3.859068 |
| F-statistic | 1.140496 | Durbin-Watson stat | 2.007468 |
| Prob(F-statistic) | 0.314088 | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Inverted AR Roots | .86 | .75-.35i | .75+.35i | .53+.61i |
| | .53-.61i | .28+.73i | .28-.73i | -.04+.85i |
| | -.04-.85i | -.40+.76i | -.40-.76i | -.70-.50i |
| | -.70+.50i | -.83-.17i | -.83+.17i | |

**Question V/F :** Au niveau 0,05, le coefficient $\beta_{15}$ peut être considéré comme non nul.

A) Vrai

B) Faux

**Question V/F :** Au niveau 0,001, le coefficient $\beta_{15}$ peut être considéré comme non nul.

C) Vrai

D) Faux

**Q 50)** On considère un modèle AR (auto-régressif) d'ordre 1,

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t,$$

où $\varepsilon_t$ est l'innovation. Le processus est stationnaire si

A) si $|a| > 1$

B) si $|a| < 1$

C) si $a = 1$

D) si $a > 1$

E) si $a < 1$