



Institut de Statistique de l'Université Pierre et Marie Curie

Etude du risque de base d'un Cat Bond basé sur un indice de marché

Par Octave DJEKADOM

GIE AXA

PLAN

- **Le cadre d'étude**
 - Titrisation et Cat Bonds
 - Zones CRESTA et classification *Lines of Business*
 - PERILS AG
- **Le risque de base du Cat Bond Calypso**
 - Le Cat Bonds Calypso d'AXA
 - Modélisation du problème et première approche
- **Résultats du Reset 2015**
 - Hypothèses et paramétrage
 - Résultats
- **Tests de sensibilité**
 - Sensibilité aux paramètres
 - Le test du décalage temporel
 - Le test de granularité

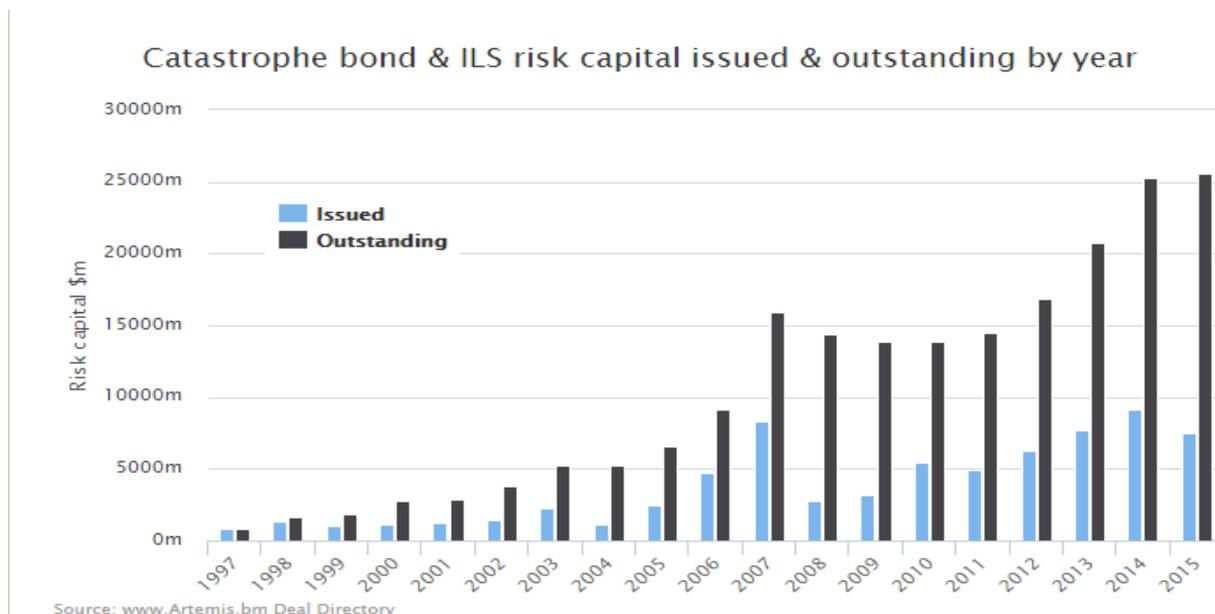


Le cadre d'étude

Titrisation et Cat Bonds

- **Outil de transfert de risques**

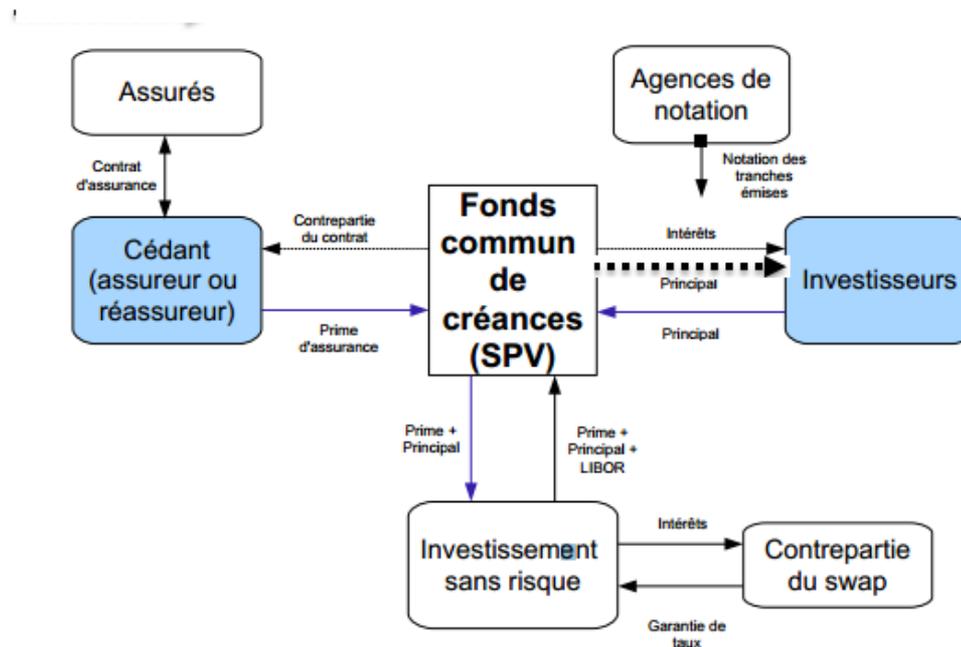
- Rendre des éléments du passif en titres liquides
- Couverture des tranches hautes d'un programme de réassurance
- Multiples avantages
- Développement croissant



Titrisation et Cat Bonds

- **Les Cat Bonds**

- Cat Bonds : type d'ILS fonctionnant comme une obligation



- SPV → absence de risque de contrepartie
- Investissements peu risqués et swap garantissant un taux fixe autour des taux LIBOR

Titrisation et Cat Bonds

- **Plusieurs types de Cat Bonds :**
 - indemnitaires
 - paramétriques
 - indiciels
- **risque de base = Ecart pertes calculées/pertes réelles**
- **Nécessité d'une gestion prudente**

Zones CRESTA et classification LoB

- **Les CRESTA (*Catastrophe Risk Evaluation and Standardizing Target Accumulations*)**
 - Standards géographiques en termes d'expositions Cat
 - Meilleure lecture des pertes et expositions
 - Uniformisation des pratiques entre les différents acteurs (courtiers, réassureurs...)

- **Les LoB (*Lines of Business*)**
 - Type de risque couvert
 - 6 LoB disponibles
 - Classification importante dans le cadre d'une modélisation Cat

PERILS AG

- **Reporting Cat à l'échelle européenne**
- **Collecter, agréger et publier les données**
- **Publications de PERILS**
 - Données d'exposition marché : *PERILS Industry Exposure Database*
 - Données de pertes marché : *PERILS Industry Loss Index*
- **Périmètre**
 - Pays 11 : France, Belgique, Royaume-Uni, etc.
 - Risques couverts : Tempête, inondations (Royaume-Uni et Italie), tremblement de terre (Italie)
 - 4 lobs : *Agricultural, Industrial, Commercial et Residential*



Le risque de base du Cat Bond Calypso

Le Cat Bond Calypso

- **Deux Tranches de Cat Bonds émis en 2013 :**
 - Tranche A – Nominal 185 M€ : 410 M€ XS 1700 M€, Maturité 4 ans
 - Tranche B – Nominal 165 M€ : 890 XS 2110 M€, Maturité 3 ans
- **Protection contre le risque tempête**
- **Déclencheur : *PERILS Industry Loss Index***
 - Granularité : *CRESTA x LoB*
 - Indemnisations sur base de pertes synthétiques via les *payout factors annuels*
- **Pertes synthétiques :**

Pertes synthétiques = $\sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$ avec :

p nombre de *CRESTA x LoB*

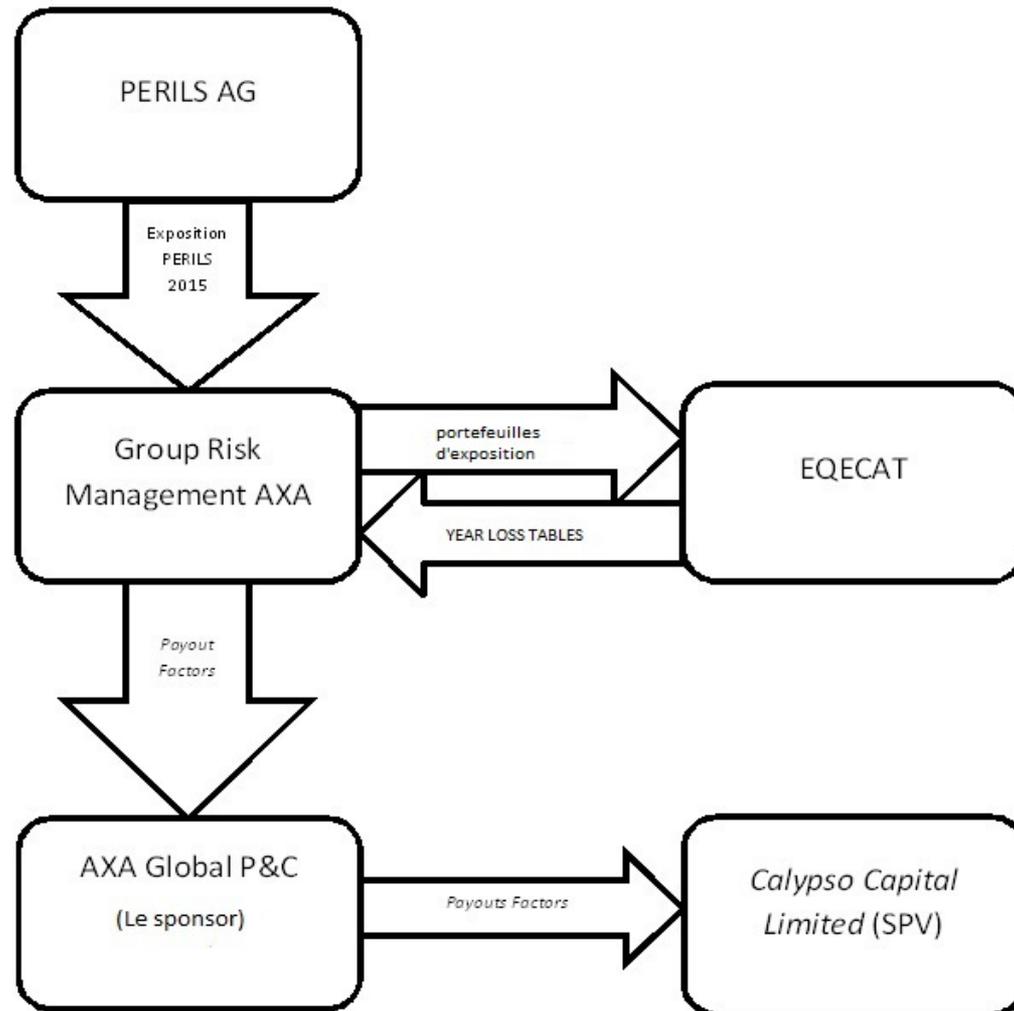
λ_i *payout factor du CRESTA x LoB*

P_i *perte marché PERILS*

Le Cat Bond Calypso

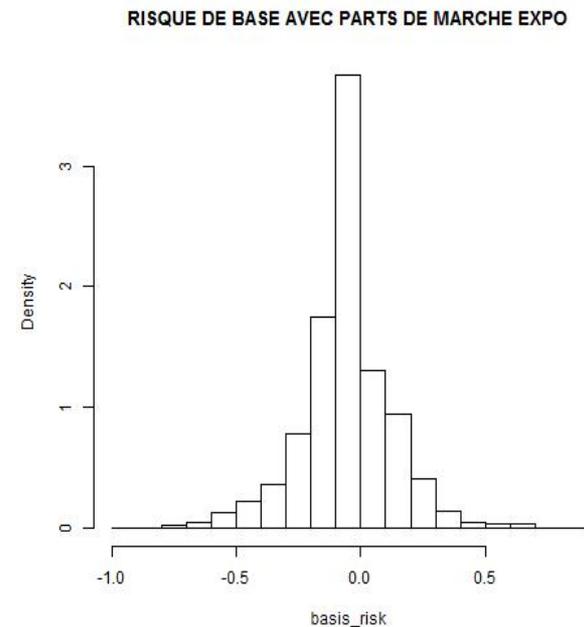
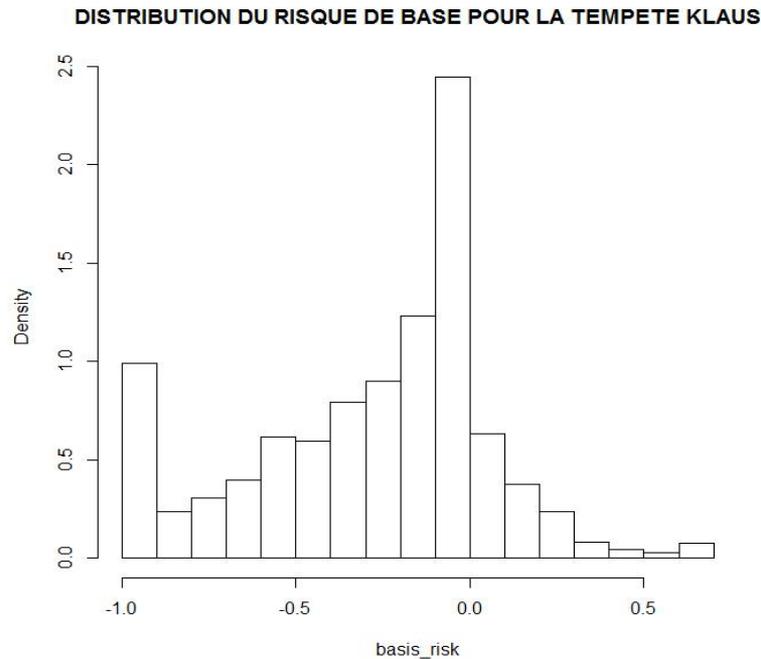
- **Risque de base = Pertes synthétiques – Pertes réelles**
 - Sources : qualité des données, variabilité des taux de change, engagement/désengagement d'une position
 - Enjeux : risque de sous-indemnisation, optimalité de la couverture, coût du risque, centralisation du risque de base.
- **Renouvellement des *payout factors* : reset**

Le Cat Bond Calypso



Modélisation du problème et première approche

- **Alternatives au choix des *payoffs factors*** : Les données de pertes et d'historique de tempêtes



Modélisation du problème et première approches

- **Formellement**

$$\begin{array}{c} \text{AXA} \\ \left(\begin{array}{c} \text{perte}_1 \\ \vdots \\ \text{perte}_n \end{array} \right) \end{array} = \begin{array}{c} \text{PERILS} \\ \left(\begin{array}{ccc} \text{perte}_1^1 & \cdot & \text{perte}_1^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{perte}_n^1 & \cdots & \text{perte}_n^p \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \text{PAYOUTSFACTORS} \\ \left(\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{array} \right) \end{array} + \begin{array}{c} \text{ECARTS} \\ \left(\begin{array}{c} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{array} \right) \end{array}$$

- **Limites du modèle de régression linéaire simple**
 - Contraintes sur les *payout factors*
 - Faible nombre d'observation
- **Reformulation en problème d'optimisation non-linéaire sous contraintes**

Modélisation du problème et première approche

- **Fonction objectif**

$$f = \min_{D \rightarrow R^+} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (\lambda_j P_{ij} - A_{ij})^2 \quad \text{avec}$$

D domaine de R^p des λ vérifiant les contraintes.

- **F convexe \rightarrow critère essentiel de convergence**
- **Algorithme L-BFGS-B**
 - Algorithme de descente
 - Adaptée aux problèmes en grande dimension
 - Implémentée dans la plupart des logiciels



Résultats du Reset 2015

Hypothèses et paramétrage

- Regroupement des deux classes de Cat Bonds : 1300 XS 1700
- Regroupement des LoB en deux : *Residential* et *Non-Residential*
- Calcul net de réassurance

$$RB = \min(1300, \max(S - 1700, 0)) - \min(1300, \max(A - 1700, 0)) / 1300$$

Avec S perte synthétique et A perte réelle

- Contraintes sur les *payout factors* $\lambda \downarrow i \in [\lambda \downarrow 0 \uparrow i - 25\%, \lambda \downarrow 0 \uparrow i + 25\%]$

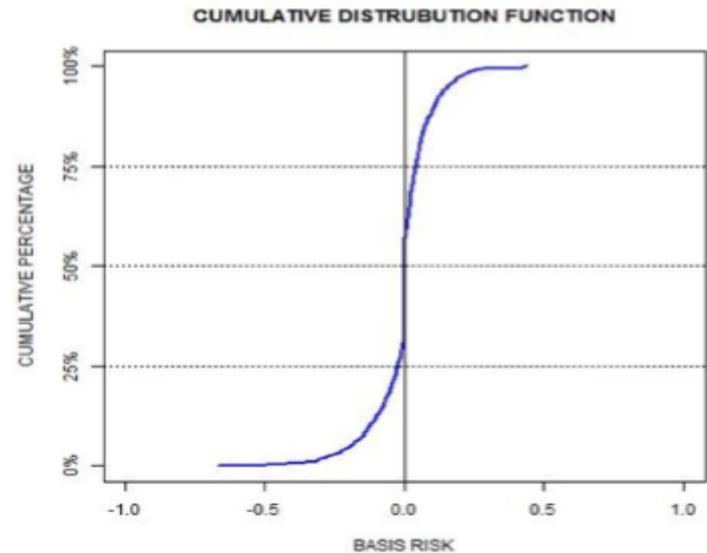
avec $\lambda \downarrow 0$ *payout factor*

- **Facteurs correctifs post-optimisation :**
 - Coefficient d'ajustement : réplication de la vision interne du risque
 - Facteur de projection : dynamique des expositions

Résultats

- Résultats post-optimisation

$\overline{\mathbb{E}(RB)}$	-0,07%
$\mathbb{E}(RB \overline{RB} < 0)$	-10,22%
$\overline{\sigma}(RB)$	10,49%
$\mathbb{Q}_{RB}(0, 25)$	-2,33%
$Me(RB)$	0%
$\mathbb{Q}_{RB}(0, 75)$	4,16%
$Max(RB)$	43,54%
$Min(RB)$	-66,58%



- Risque de centré
- Limitations des cas extrêmes
- Résultats en accord avec les expositions

Résultats

- Réduction des cas extrêmes sur les CRESTA x Lob sensibles
- Résultats

$\overline{\mathbb{E}(RB)}$	0,48%
$\overline{\mathbb{E}(RB RB < 0)}$	-10,28%
$\overline{\sigma(RB)}$	10,39%
$Q_{RB}(0,25)$	-1,52%
$Me(RB)$	0%
$Q_{RB}(0,75)$	4,71%
$Max(RB)$	50,17%
$Min(RB)$	-58,38%

- Cout du risque de base (formule standard) : 108 M€

Sensibilité aux paramètres

- **Application du facteur correctif de taux de change**
 - Vision la plus proche possible de l'année de couverture
 - Fixation des taux par AXA à l'avance
 - Quantifier l'impact du décalage entre le taux PERILS et le taux AXA sur le risque de base
- **Utilisation de taux *forward* de plusieurs maturités**
- **Résultats**

Maturité/Indicateur	taux spot	taux 6 mois	taux 12 mois	taux 18 mois
$\overline{\mathbb{E}(RB)}$	-0,08%	-0,07 %	-0,07%	-0,06 %
$\mathbb{E}(RB RB < 0)$	-10,25 %	-10,24%	-10,22%	-10,26 %
$\overline{\sigma(RB)}$	10,49%	10,49%	10,49 %	10,50%
$Q_{RB}(0, 25)$	-2,36%	-2,34%	-2,33%	-2,34%
$Me(RB)$	0%	0%	0%	0%
$Q_{RB}(0, 75)$	4,22%	4,19 %	4,16%	4,21%
$Max(RB)$	43,54%	43,54%	43,54%	43,54%
$Min(RB)$	-66,04%	-66,28%	-66,58%	-66,96%

Sensibilité aux paramètres

- **Coefficient d'ajustement**
 - Répliquer la vision AXA du risque
- **Calcul en comparant les rapports des OEP à la priorité et au plafond du Cat Bond**
- **Nécessité de quantifier l'impact du paramètre sur le risque de base**
- **Résultats**

Coeff. ajust. /Indicateur	92%	94%	95%	98%
$\mathbb{E}(RB)$	0,48%	0,46 %	0,45%	0,40 %
$\mathbb{E}(RB RB < 0)$	-10,28 %	-10,25%	-10,32%	-10,29 %
$\sigma(RB)$	10,39%	10,54%	10,62 %	10,96%
$Q_{RB}(0, 25)$	-2,36%	-1,52%	-1,46%	-1,48%
$Me(RB)$	0%	0%	0%	0%
$Q_{RB}(0, 75)$	4,71%	4,65 %	4,58%	4,64%
$Max(RB)$	50,17%	51,26%	51,81%	53,45%
$Min(RB)$	-58,38%	-59,65%	-60,28%	-57,66%

Le test du décalage temporel

- **Le décalage temporel (situation standard)**
 - Données AXA du portefeuille marché : données à N-1
 - Données portefeuille AXA : N
- **But : Rapprocher les mêmes données AXA**
 - Données AXA du portefeuille marché : données à N-1
 - Données portefeuille AXA : N-1
- **Résultats**

Indicateur	Avec REN 2015	Avec REN 2016 (situation standard)
$\overline{\mathbb{E}(RB)}$	0,96%	1,34 %
$\overline{\mathbb{E}(RB RB < 0)}$	-9,96%	-10,27%
$\overline{\sigma(RB)}$	12,46%	12,62%
$Q_{RB}(0, 25)$	-3,35%	-2,65%
$Me(RB)$	0%	0%
$Q_{RB}(0, 75)$	5,43%	6,34 %
$Max(RB)$	60,73%	72,19%
$Min(RB)$	-61,95%	-52,73%

Le test de granularité

- **Portefeuille marché du Reset**

$$HYBRIDE = PERILS - AXA_{CRESTA} + AXA_{codepostal}$$

- **But : avoir les expositions les plus précises possibles**
- **Test : Utiliser le portefeuille PERILS (avec AXA au CRESTA)**
 - Quantifier l'impact de changement de granularité sur le risque de base
- **Résultats**

Indicateur	Avec PERILS	Avec l'HYBRIDE (situation standard)
$\overline{\mathbb{E}(RB)}$	0,72%	1,34 %
$\mathbb{E}(RB RB < 0)$	-10,04%	-10,27%
$\overline{\sigma}(RB)$	13,16%	12,62%
$Q_{RB}(0, 25)$	-3,53%	-2,65%
$Me(RB)$	0%	0%
$Q_{RB}(0, 75)$	5,59%	6,34 %
$Max(RB)$	72,30%	72,19%
$Min(RB)$	-52,62%	-52,73%

Conclusion

- **Gestion du risque de base : enjeu majeur**
- **Méthodologie d'étude globalement satisfaisante**
- **Importance du choix de paramétrage**
- **Perspectives**
 - Risque de base non-modélisé
 - Plusieurs formalisations mathématiques