

Institut de Science Financière et d'Assurances  
Cabinet SPAC Actuaire

**Mémoire d'actuaire**

*Tuteur en entreprise : Brigitte Ecary*  
*Tuteur pédagogique : Alexis Bienvenue*

---

## **Modélisation des comportements de départ à la retraite lors de la modification du régime**

---

**Diaz Thomas**

Paris, le 7 novembre 2012

## Résumé

---

Mots-clés : Modèle comportemental - Retraite - Réformes - Microsimulation - Théorie de l'Utilité - Préférence pour le loisir - Stock and Wise - Comportements de départs

---

Les récentes évolutions législatives du régime général de retraite français ont bouleversé les contraintes régissant les flux de départs à la retraite. L'objectif de ce mémoire est la modélisation des nouveaux comportements de départ induits par ces réformes.

La construction du modèle repose sur l'observation d'une caisse de retraite ayant subi des réformes similaires à celles du régime général. L'allongement des durées de cotisations ainsi que l'apparition de la surcote et de la décote sont venues modifier l'appréciation que les agents se faisaient de leur pension. L'observation de ces premières modifications de comportements pose les bases de la création du modèle.

La méthode de projection retenue est celle des microsimulations car elle permet d'atteindre le niveau de finesse désiré dans la reproduction des comportements. Le modèle s'articule autour du taux de remplacement, celui-ci offrant une synthèse satisfaisante des modifications du régime. Avant la révision du régime, ce taux atteignait un maximum, le taux plein. Au sein des modules comportementaux existants<sup>1</sup>, celui-ci pouvait servir de repère à la modélisation, il permettait entre autre de calibrer le coefficient de préférence pour le loisir. L'apparition de la surcote a libéré ce taux, et le choix du coefficient est devenu moins évident. En effet, la possibilité perçue par les agents de pouvoir surcoter plus tard est venue bouleverser ce mécanisme.

Le modèle construit ici permet, pour chaque individu, de définir un taux de remplacement "objectif", autour duquel il sera incité à liquider. Ce modèle présente l'avantage de fonctionner même en présence de surcote. Pour plus de précision dans la modélisation, il a été ajouté à cette logique long-terme une sensibilité aux mouvements dans la pension à court-terme. Enfin, la très forte influence de la décote a été prise en compte. Tout d'abord implicitement puisqu'elle vient minorer le taux de remplacement. Mais il a également été construit un processus de "réticence à la décote" venant dégrader l'appréciation que se fait l'agent de son taux de remplacement en présence de décote.

Les paramètres du modèles sont estimés à l'aide des premiers départs observés sur la population du régime. Le choix de ces paramètres est interprété en terme de comportements. Enfin, leur évolution permet de donner une interprétation des changements de comportements lors de la modification du régime et de proposer une projection des départs à moyen-terme.

---

1. [BACHELET M., BEFFY M. et BLANCHET D.]

## Abstract

---

Keywords : Behavioural Model - Retirement - Reform - Microsimulations - Utility Theory - Preference for leisure - Stock and Wise - Retirement Behavior

---

Recent reforms in the French retiring policy framework have led to a shake up of the retirement rates. This memoire aims to model the new retiring behaviors following these reforms.

The data used here comes from a major private company pension fund. The study of its retirement rates paved the way for the model's building. We focused on three specific changes in the retirement policy : the increase in the required contribution period, and the establishment of a discount and a premium rate.

As to ensure a satisfactory level of accuracy in the behaviors' modeling, we chose to compute the projections using microsimulations. The model is based on the retirement replacement rate, which provides a synthesis of the pension scheme changes. Before the review of the scheme, this rate would reach a maximum. This full pension rate would help to build models as it provided a range to determine the individual's preferences for leisure. But the discount and the premium establishment freed the replacement rate, thus impeding this mechanism.

In our model, a "target replacement rate" can be defined for each individual. This parameter provides incentive for retirement around the chosen rate. In order to increase furthermore the accuracy of the behaviors' modelization, a short-sighted sensitivity to close pension curve bumps has been added. Finally, strong reluctance to retire with a discounted replacement rate has been modelized with a particular process that can be individualized.

The model individualized parameters are estimated for the simulated retirements to fit the data. These parameters are then interpreted in terms of behaviors and their evolution hence conveys trends in the changing behaviors' pattern. These results finally allow to provide a medium term retirements projection.

## Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier Brigitte Ecary, Présidente de SPAC Actuaires et directrice de ce mémoire, pour sa disponibilité, sa patience, et pour m'avoir fait profiter de son expérience tout au long de la rédaction de ce mémoire.

J'adresse aussi mes remerciements à Olivier Seguin, associé du cabinet SPAC Actuaires sans qui le fonctionnement du régime serait resté obscur à mes yeux.

Merci également à Alexis Bienvenue, enseignant chercheur à l'Université Lyon I, pour ses précieux conseils.

Je remercie également Jean-Michel Clément pour ses nombreuses relectures.

Un grand merci à toute l'équipe de la SPAC pour l'ambiance conviviale et animée qui a rendu la rédaction de ce mémoire plus agréable.

Enfin, mes derniers remerciements vont à mes proches pour leur soutien obstiné durant toute la rédaction de ce mémoire.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Micro simulation et Segmentation de la population - Généralités</b>	<b>8</b>
<b>1</b>	<b>Choix d'une méthode de modélisation : la Microsimulation</b>	<b>9</b>
1.1	Présentation de la microsimulation . . . . .	9
1.2	La microsimulation comme méthode de modélisation pour l'étude . . . . .	11
1.2.1	Mise en regard avec la méthode de macro-projection . . . . .	11
1.2.2	La microsimulation plus adaptée à l'étude . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Choix d'une méthode de segmentation : l'Analyse en composantes principales</b>	<b>13</b>
2.1	Motivation . . . . .	13
2.2	L'Analyse en Composantes Principales . . . . .	14
2.2.1	Idée . . . . .	14
2.2.2	Construction des composante principales . . . . .	17
2.2.3	Interprétation des résultats . . . . .	22
<b>II</b>	<b>Présentation du régime et description des premiers comportements de départ</b>	<b>26</b>
<b>1</b>	<b>Description du régime</b>	<b>27</b>
1.1	Le régime avant les réformes . . . . .	27
1.1.1	Les règles de base . . . . .	28
1.1.2	Les avantages . . . . .	28
1.2	Les réformes . . . . .	29
1.2.1	Augmentations de durées et suppression d'avantages . . . . .	29
1.2.2	Instauration de la surcote . . . . .	30
1.2.3	Instauration de la décote . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Présentation des données</b>	<b>32</b>
2.1	Sélection des données utilisables . . . . .	32
2.2	Analyse des départs . . . . .	33
2.2.1	Taux de liquidation . . . . .	33
2.2.2	Taux de remplacements . . . . .	34
2.2.3	Surcote . . . . .	34
2.2.4	Décote . . . . .	40

<b>3</b>	<b>Segmentation de la population</b>	<b>44</b>
3.1	Sélection des variables de segmentation . . . . .	44
3.2	Construction et analyse des strates . . . . .	51
3.2.1	Construction des strates . . . . .	51
3.2.2	Analyse des strates par ACP . . . . .	54
3.3	Analyse des départs par strates . . . . .	67
3.3.1	Taux de liquidation . . . . .	67
3.3.2	Taux de remplacement . . . . .	70
3.3.3	Surcote . . . . .	73
3.3.4	Décote . . . . .	75
	<b>Résumé de l'analyse des comportements</b>	<b>78</b>
<b>III</b>	<b>Modélisation de la décision d'entrée en retraite</b>	<b>80</b>
<b>1</b>	<b>Présentation du modèle de base</b>	<b>81</b>
1.1	« Rester actif » ou « Partir à la retraite » : un choix d'option . . . . .	81
1.2	Le modèle de base . . . . .	82
1.2.1	Théorie de l'utilité espérée . . . . .	82
1.2.2	Utilité totale . . . . .	83
1.2.3	Détermination de l'âge de départ du salarié . . . . .	85
1.2.4	Fonctions d'utilité dans le modèle de base . . . . .	87
1.3	Etude du lien entre coefficient de préférence pour le loisir et taux de remplacement . . . . .	91
1.3.1	Interprétation du coefficient de préférence pour le loisir . . . . .	91
1.3.2	Coefficient de préférence pour le loisir optimal et taux plein . . . . .	91
1.3.3	Le problème posé par la surcote . . . . .	96
<b>2</b>	<b>Création du modèle</b>	<b>98</b>
2.1	Idée . . . . .	98
2.1.1	Analyse des départs autour du taux plein historique . . . . .	99
2.1.2	Ossature du modèle : Processus de remplacement objectif . . . . .	100
2.2	Le modèle : Processus de remplacement flottant . . . . .	104
2.2.1	Introduction de l'aléa . . . . .	104
2.2.2	Introduction d'une vision à court-terme . . . . .	107
2.2.3	Prise en compte de la décote et de la surcote dans le modèle . . . . .	114
<b>IV</b>	<b>Résultats</b>	<b>116</b>
<b>1</b>	<b>Adaptation des paramètres du modèle aux données</b>	<b>117</b>
1.1	Données DOD 2009 . . . . .	118
1.2	Données DOD 2010 . . . . .	125
1.3	Données DOD 2011 . . . . .	133
1.4	Projection des départs à moyen-terme . . . . .	138
	<b>Bibliographie</b>	<b>143</b>

<b>Annexes</b>	<b>144</b>
<b>A ACP : code R</b>	<b>144</b>
<b>B Microsimulation : code Visual Basic</b>	<b>159</b>

## Introduction

*"Le fait pour tout salarié d'atteindre un certain âge ou de pouvoir prétendre à la retraite n'entraîne pas la rupture automatique de son contrat de travail. Toute disposition conventionnelle ou clause du contrat de travail contraire est nulle."*<sup>2</sup>

Les évolutions législatives menées depuis 2003 ont abouti il y a deux ans à l'adoption de la loi du 9 novembre 2010 "portant réforme des retraites". Maintenant, la mise à la retraite d'office par l'employeur des salariés âgés de moins de soixante-dix ans est interdite. Cette réforme finit de relâcher les contraintes qui pouvaient influencer les flux de départ à la retraite du secteur privé français. Désormais, ceux-ci seront exclusivement déterminés par les décisions des salariés. Ce mémoire a pour but de modéliser ces processus de décisions.

Nous nous intéresserons ici à la population d'une caisse de retraite ayant subi des réformes similaire à celles du régime général. Outre l'interdiction de mise à la retraite, deux points de ces réformes retiendront notre attention, la mise en place d'un mécanisme de surcote, et l'apparition plus tardive de son symétrique, la décote. Ces deux outils nous ont semblé particulièrement intéressants puisqu'ils renforcent la notion de "choix" de l'âge de départ, les salariés devant choisir entre travailler pour optimiser leur rente ou partir. Leur apparition vient de plus modifier un élément essentiel de notre future modélisation, le "taux de remplacement". La construction d'un module comportemental constituera en effet le coeur de ce mémoire. Ce module aura pour but de reproduire les comportements de départs à la retraite en modélisant la perception que chaque individu a de sa pension. Cela nous permettra également de traduire l'impact des réformes comme l'application d'un choc sur cette perception.

Une première partie à visée générale dégagera les principales caractéristiques de la microsimulation et justifiera de ce fait son utilisation au sein de l'étude. Nous en profiterons également pour introduire une méthode d'analyse de données qui nous sera utile plus tard, l'ACP<sup>3</sup>. Nous nous intéresserons ensuite à l'étude des premiers comportements de départs observables. Cette partie devra nous permettre de sélectionner les variables influant les décisions de départ. L'ensemble de ces analyses servira à la création d'un module comportemental capable de simuler les comportements de départs à la retraite des salariés. Grâce aux données dont nous disposons, nous pourrions déterminer les paramètres du modèle permettant de reproduire les liquidations observées durant la mise en place des réformes. L'évolution de ces paramètres au cours du temps nous permettra enfin de modéliser l'impact de la modification du régime sur les comportements des individus et de proposer une projection des départs à moyen-terme.

---

2. extrait de la synthèse de la loi n°2010-1330 "portant réforme des retraites".

3. l'Analyse en Composante Principale



Première partie

Micro simulation et  
Segmentation de la population -  
Généralités

# Chapitre 1

## Choix d'une méthode de modélisation : la Microsimulation

### 1.1 Présentation de la microsimulation

La microsimulation est une méthode de projection généralement utilisée pour la modélisation de phénomènes économiques et sociaux<sup>1</sup>. Sa caractéristique principale réside dans le fait qu'elle traite l'information sous forme de micro-unités. Chacune de ces unités élémentaires est décrite par un ensemble de variables. La projection se fait par la simulation du vieillissement de ces entités le long de la durée nécessaire à l'étude.

Pour plus de clarté, considérons un exemple classique de microsimulation, le modèle PRISME<sup>2</sup>). Mis en place par la CNAV<sup>3</sup>, ce modèle a pour but d'analyser, sur la base d'un échantillon d'affiliés, l'évolution de la situation des retraités du secteur privé français. Les micro-unités de ce modèle sont les individus. Les variables afférentes à ces entités sont nombreuses, on peut notamment citer les carrières salariales et les situations familiales des individus. Le modèle simule les transformations de ces situations individuelles au cours du temps (mariage, divorce, licenciement, départ à la retraite...). Les sorties du modèles sont les « biographies » simulées des individus, elles sont ensuite agrégées et font l'objet d'études statistiques. On comprend bien à travers cet exemple la démarche propre à la microsimulation : partir des comportements individuels pour connaître le fonctionnement d'ensemble d'un système.

Le vieillissement des micro-unités est simulé en effectuant des changements sur l'ensemble de leurs variables. Ces évolutions peuvent découler de relations déterministes ou de lois de probabilité. Un exemple de transformation déterministe est l'incrémentement de l'âge de l'individu. Les événements non déterministes sont modélisés

---

1. [VAN IMHOFF et POST]

2. [POUBELLE V.]

3. Caisse Nationale d'Assurance Vieillesse

grâce à la méthode de Monte Carlo que nous rappelons brièvement ci-après :

Méthode de Monte-Carlo :

On considère un individu d'âge  $x$ . Ici, seuls deux événements sont possibles :

1. « l'individu est décédé à l'âge  $x$  » avec la probabilité  $q_x$
2. « l'individu n'est pas décédé à l'âge  $x$  » avec la probabilité  $1 - q_x$

La méthode de Monte Carlo consiste alors à générer une réalisation  $z$  d'une variable aléatoire  $Z$  uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$  et à la comparer aux probabilités de réalisation des événements précédents. Formellement :

Si  $z < q_x$  alors on décide que l'évènement « l'individu est décédé durant l'année  $x$  » s'est réalisé (on a bien  $\mathbb{P}[z < q_x] = q_x$  car  $Z \sim U[0, 1]$ ). Dans le cas contraire, l'individu est considéré comme vivant (on a bien  $\mathbb{P}[z \geq q_x] = 1 - q_x$  car  $Z \sim U[0, 1]$ ).

Cette procédure est répétée pour tout évènement jugé nécessaire à l'étude. On comprend donc l'importance de décrire tous les évènements déterministes et de probabiliser tous les évènements non déterministes que l'on souhaite modéliser. La procédure de vieillissement est ainsi répétée jusqu'à atteindre la fin de durée de l'étude pour chaque micro-unité. Il convient enfin d'assurer un accès aux caractéristiques et évolutions de ces individus afin d'en faciliter l'étude statistique ultérieure.

## 1.2 La microsimulation comme méthode de modélisation pour l'étude

Pour mettre en avant l'intérêt de la microsimulation dans l'élaboration du modèle, il convient de la confronter à l'autre méthode classique de projection, la méthode de macro-projection.

### 1.2.1 Mise en regard avec la méthode de macro-projection

Le paragraphe précédent nous a permis de saisir la caractéristique principale de la microsimulation : représenter des entités de bas niveau afin de tirer des conclusions qui s'appliquent à un niveau d'agrégation supérieur. C'est précisément ce qui la différencie des modèles agrégés. En effet, chez ces derniers, les variables explicatives représentent déjà des propriétés collectives. Pour plus de clarté, nous décrivons brièvement ci-dessous le principe des méthodes de macro-projection :

#### Macro-projection : exemple explicatif

Le principe de la macro-projection est de calculer les évolutions en utilisant des taux agrégés sur des grandeurs macro-démographiques. Considérons le cas d'une projection de population en groupe fermé. Les seuls événements qui nous intéressent ici sont les décès au sein du groupe. On suppose donc disposer de taux de mortalité ventilés par âge et par sexe. Pour appliquer ces taux, il faudra connaître les effectifs de chaque couple âge/sexe. Il faut donc également ventiler notre population en classes selon ces mêmes critères. La projection consiste ensuite à calculer l'évolution de ces groupes à chaque année de projection selon le principe suivant :

Les effectifs de chaque classe d'âge  $i$  de l'année  $n$  sont calculés comme les effectifs de la classe d'âge  $i-1$  de l'année  $n-1$  diminués du nombre de décès, calculé à partir du taux de mortalité et de l'effectif de la classe.

On voit alors apparaître un des inconvénients de cette méthode sur les populations d'effectif très important, la croissance très rapide du nombre de classes avec l'augmentation du nombre de variables. Reprenons notre exemple précédent et supposons maintenant que nous disposons des taux de mortalité ventilés non seulement par âge et par sexe, mais aussi par catégorie socioprofessionnelle (CSP). Pour effectuer la macro-projection, il nous faut alors disposer des effectifs par triplet âge/sexe/CSP ce qui augmente considérablement le nombre de classes. Ainsi, si l'on disposait des taux de mortalité pour des âges allant de 0 à 100 ans, l'exemple précédent nécessitait la création de  $100 \times 2 = 200$  classes, mais avec l'apparition des CSP, ce chiffre serait multiplié par trois ou quatre (par le nombre de CSP considérées).

Nous avons considéré ici un exemple très simple, avec très peu de variables. Néanmoins, l'on comprend bien qu'une forte augmentation du nombre de ces dernières

engendrerait un nombre de classes extrêmement important. Il ne serait alors pas plus coûteux d'avoir recours à un modèle de microsimulation.

### 1.2.2 La microsimulation plus adaptée à l'étude

Dans notre cas, il aurait été soit très difficile soit très imprécis de mettre en œuvre une méthode agrégée pour estimer l'âge de départ à la retraite des salariés. En effet, comme nous le verrons plus loin, le simple calcul de la pension dépend d'une dizaine de paramètres (salaire, nombre d'enfants avant réforme, nombre d'enfants après réforme, ancienneté, nature des services...). Il aurait donc été très difficile de créer suffisamment de classes pour représenter fidèlement cette population. À l'inverse, simplifier le modèle en regroupant les individus à l'intérieur de classes plus larges aurait pu mener à une très mauvaise estimation des pensions. Cette simplification aurait mené à de très fortes approximations puisque le niveau de pension est déterminant dans le choix de l'âge de départ à la retraite.

De par sa nature, l'utilisation de la méthode agrégée n'aurait pas non plus permis la simulation de parcours atypiques. En effet, cette méthode interdit la réalisation d'évènements extrêmes puisqu'elle repose sur l'utilisation de taux moyens. Elle nous aurait donc amenés à négliger une somme de cas particuliers qui pourraient se révéler intéressants à étudier.

Enfin, il faut rappeler l'objectif de ce mémoire. Nous voulons étudier les comportements de départs à la retraite dans le cadre d'un changement d'environnement. Or, on peut sans trop s'avancer considérer que la perception qu'ont les agents de leur vie en tant qu'actif et en tant que retraité diffère d'un individu à l'autre. La microsimulation nous permet ici d'individualiser ces comportements. Nous essaierons en effet de personnaliser la perception que chaque individu a de ces deux phases de vie. Ceci nous permettra également de modéliser l'impact de la modification du régime comme l'application d'un choc sur cette perception. C'est ce choc, et la manière dont il s'opère selon les individus qu'il nous sera particulièrement intéressant d'étudier. Cette étude nécessite donc un niveau de granularité que seule la microsimulation peut nous permettre d'atteindre.

## Chapitre 2

# Choix d'une méthode de segmentation : l'Analyse en composantes principales

### 2.1 Motivation

La segmentation que nous effectuerons plus bas aura pour objectif de constituer des groupes dont le comportement de départ sera le plus homogène possible. Elle devra également être réalisable avec des variables accessibles avant le calcul de la pension. Nous avons donc choisi d'utiliser l'analyse en composante principales car cette méthode va nous permettre de mettre en évidence les variables cachées responsables de l'hétérogénéité des comportements de départ.

## 2.2 L'Analyse en Composantes Principales

### 2.2.1 Idée

Soit  $N$  variables aléatoires  $(X_1, \dots, X_N)$

On note  $\mathcal{M}$  la matrice des  $K$  réalisations de ces variables aléatoires :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,N} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \cdots & X_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{K,1} & X_{K,2} & \cdots & X_{N,K} \end{pmatrix}$$

Le but de l'analyse en composantes principales est de résumer l'information contenue dans la matrice  $\mathcal{M}$  à l'aide de  $q < N$  nouveaux descripteurs. Ces descripteurs sont les composantes principales.

#### Exemple 1 :

Géométriquement, on peut associer chaque individu  $e_i$  à un point de l'espace des variables  $\mathbb{R}^N$ . Choisir  $q = 2$  revient alors à projeter le nuage de points formé par les individus sur le plan formé par les deux axes expliquant le mieux la forme du nuage. Le premier axe ira dans le sens de l'allongement maximal du nuage afin que la projection des points sur cet axe conserve au mieux la distance entre eux (cf figure 2.1). Il passera par le centre de gravité du nuage de points. Le second axe sera fixé selon le même principe mais avec de plus la contrainte d'être orthogonal au premier (cf figure 2.2).

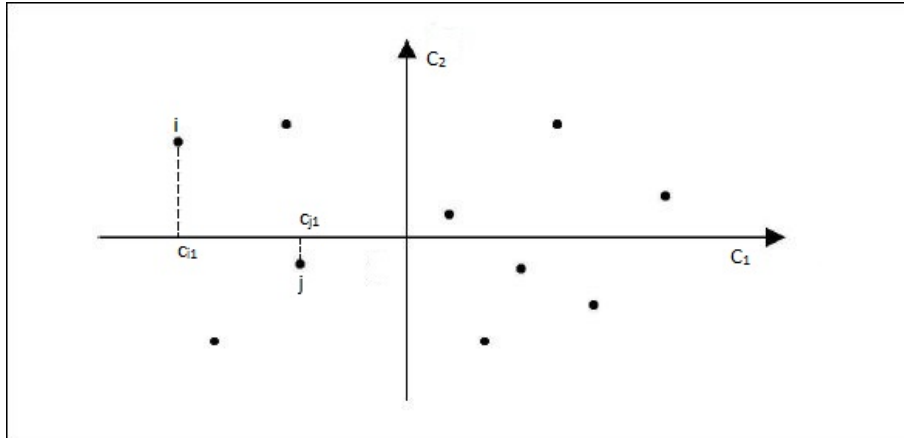


FIGURE 2.1 – Projection du nuage de points sur le premier plan factoriel

Remarque (sur la figure 2.1) :

- L'axe  $C_1$  est bien construit tel que les projections  $(c_{i1})_{i=1,\dots,K}$  soient les plus dispersées possible. On va construire ensuite  $C_2$  selon le même critère mais avec de plus la contrainte d'orthogonalité avec  $C_1$ .

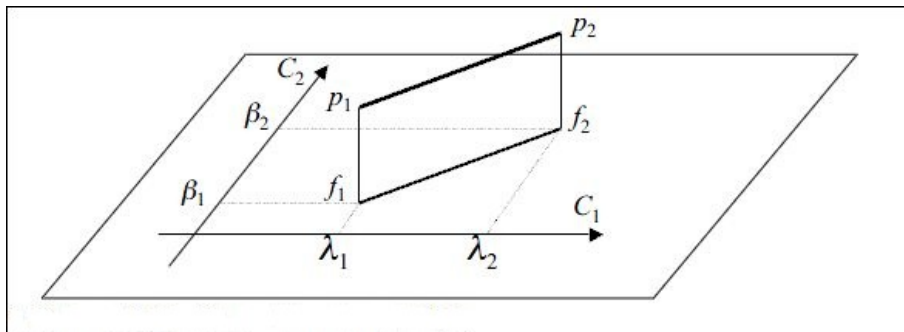


FIGURE 2.2 – Projection du nuage de points sur le premier plan factoriel avec perspective (tiré de [GONZALEZ P.-L.])

Remarque (sur la figure 2.2) :

- On a voulu que :
  - $C_1$  soit tel que la moyenne des  $d^2(\lambda_i, \lambda_{i'})$  soit maximale.
  - $C_2$  soit orthogonal à  $C_1$  et tel que la moyenne des  $d^2(\beta_i, \beta_{i'})$  soit maximale.
- On a donc construit le plan tel que  $d^2(f_i, f_{i'})$  soit maximum.



### Exemple 2 :

Considérons une entreprise, au sein de laquelle les employés ont deux sources de rémunération, les salaires de base et les primes. En appliquant l'ACP au tableau des rémunérations, on créera un premier axe représentatif de la moyenne par employé issue de ces deux types de rémunération. C'est cet axe qui résumera au mieux la variabilité des rémunérations selon les salariés. En continuant l'analyse des résultats, on s'intéressa aussi au second axe, qui ordonnera les employés selon l'ampleur de leurs écarts entre les deux types de rémunération, et indépendamment du premier axe. L'intérêt de la méthode d'ACP s'impose avec plus de force en étendant cette analyse à plus de variables. En ajoutant par exemple pour chaque salarié sa CSP et son ancienneté, la méthode fournira deux nouvelles valeurs, selon deux nouveaux axes, chacun étant indépendant des autres.

### Remarque :

- *Il est important de choisir  $q$  selon le niveau de précision souhaité pour l'analyse. En effet, les derniers axes d'une ACP apportent peu d'information sur le plan statistique : ils ont néanmoins l'avantage de mettre en évidence quelques individus au profil singulier. Il n'existe pas de procédure systématique pour fixer ce nombre puisqu'il dépend essentiellement de l'utilisation que l'on compte faire de l'analyse. Nous verrons néanmoins dans la suite quels critères peuvent être considérés pour aider à fixer ce nombre.*

## 2.2.2 Construction des composante principales

### Quelques Notations et définitions préliminaires

Reprenons la matrice  $\mathcal{M}$  définie plus haut :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,N} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \cdots & X_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_{K,1} & X_{K,2} & \cdots & X_{N,K} \end{pmatrix}$$

Notations : On note

- .  $\bar{X}_i$  la moyenne empirique de la variable aléatoire  $X_i$ .
- .  $\hat{\sigma}_i$  l'écart type empirique de la variable aléatoire  $X_i$

Si les valeurs prises par les variables sont très élevées, le point O correspondant au vecteur de coordonnées toutes nulles n'est pas forcément une origine satisfaisante. On préférera donc prendre comme origine le centre de gravité du nuage. Pour ce, on définit un système de pondération des individus :

Définitions :

- . Pour  $i = 1, \dots, K$  on définit  $p_i =$  poids de l'individu  $i$  tel que  $\sum_{i=1}^K p_i = 1$
- . On définit la matrice diagonale  $\mathcal{D}$  des poids :

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p_K \end{pmatrix}$$

Remarque importante :

- Dans toute la suite de ce mémoire, on suppose que les réalisations sont équipondérées, i.e.  $\forall i = 1, \dots, K, p_i = 1/K \Rightarrow \mathcal{D} = 1/K \cdot \mathbb{I}$  où  $\mathbb{I}$  matrice identité de dimension  $K \times K$ .

On peut maintenant définir le centre de gravité du nuage de points.

Définition :

. le centre de gravité du nuage de points formé par les coordonnées des individus dans l'espace des variables est défini par :

$$g = {}^t\mathcal{M} * \mathcal{D} * \mathbf{1}_{\mathbb{R}^K}$$

où  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^K}$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^K$  dont toutes les composantes valent 1.

Définitions : On définit

. la matrice centrée  $\bar{\mathcal{M}}$

$$\bar{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} X_{1,1} - \bar{X}_1 & X_{1,2} - \bar{X}_2 & \cdots & X_{1,N} - \bar{X}_N \\ X_{2,1} - \bar{X}_1 & X_{2,2} - \bar{X}_2 & \cdots & X_{2,N} - \bar{X}_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{K,1} - \bar{X}_1 & X_{K,2} - \bar{X}_2 & \cdots & X_{K,N} - \bar{X}_N \end{pmatrix}$$

. et la matrice centrée réduite  $\tilde{\mathcal{M}}$

$$\tilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \frac{X_{1,1} - \bar{X}_1}{\hat{\sigma}_1} & \frac{X_{1,2} - \bar{X}_2}{\hat{\sigma}_2} & \cdots & \frac{X_{1,N} - \bar{X}_N}{\hat{\sigma}_N} \\ \frac{X_{2,1} - \bar{X}_1}{\hat{\sigma}_1} & \frac{X_{2,2} - \bar{X}_2}{\hat{\sigma}_2} & \cdots & \frac{X_{2,N} - \bar{X}_N}{\hat{\sigma}_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{X_{K,1} - \bar{X}_1}{\hat{\sigma}_1} & \frac{X_{K,2} - \bar{X}_2}{\hat{\sigma}_2} & \cdots & \frac{X_{K,N} - \bar{X}_N}{\hat{\sigma}_N} \end{pmatrix}$$

Remarques :

- Si l'on ne réduit pas la matrice  $\mathcal{M}$ , le risque est qu'une variable à forte variance «tire» tout l'effet de l'ACP à elle. En réduisant  $\mathcal{M}$ , on prend cependant le risque qu'un bruit se retrouve avec une variance apparente égale à celle d'une variable informative.
- Grâce à ces deux transformations de  $\mathcal{M}$ , on retrouve facilement les matrices de variance-covariance et de corrélations des variables.

Définitions :

Soit  $Cor$  et  $Cov$  respectivement les matrices des corélations et de variance-covariance empiriques des variables  $X_1, \dots, X_N$ . On a :

$$Cov = \frac{1}{K} \cdot {}^t \bar{\mathcal{M}} \cdot \bar{\mathcal{M}}$$
$$Cor = \frac{1}{K} \cdot {}^t \tilde{\mathcal{M}} \cdot \tilde{\mathcal{M}}$$

Propriété 2.1 :

. On rappelle une propriété de la matrice  $Cov$  intéressante pour la suite :

$Cov$  est symétrique, semi-définie positive (i.e.  $\forall x \in \mathbb{R}^N \ x' \cdot Cov \cdot x \geq 0$ )

$\Rightarrow$  Il existe une **base orthonormée** dans laquelle la matrice  $Cov$  est **diagonale**.

Remarques :

- Lorsque la matrice  $Cov$  est diagonale, on a alors  $tr(Cov) = \sigma$ , la variance totale du nuage de points.

### Construction de la première composante

On note  $u$  le vecteur directeur de la première composante que l'on veut construire. Comme nous l'avons vu plus haut, nous cherchons à construire un vecteur  $u$  tel que la projection du nuage sur  $u$  ait une variance maximale.

La projection  $\Pi_u$  du nuage de points (centré) des individus sur  $u$  s'écrit :

$$\Pi_u(\bar{\mathcal{M}}) = \bar{\mathcal{M}} \cdot u$$

Sa variance empirique est égale à :

$$\mathbb{V}(\Pi_u(\bar{\mathcal{M}})) = {}^t u \cdot Cov \cdot u$$

On veut maximiser cette variance. Nous souhaitons de plus que nos composantes principales forment un repère orthonormé, nous imposons donc que  $u$  soit un vecteur unitaire.

On doit donc résoudre le programme d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \max_{u \in \mathbb{R}^N} \quad & {}^t u \cdot \text{Cov} \cdot u \\ \text{s.c.} \quad & \|u\| = 1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

D'où le Lagrangien associé :  $\mathcal{L}_u(\alpha) = {}^t u \cdot \text{Cov} \cdot u + \alpha \cdot (1 - u \cdot {}^t u)$

Les solutions possibles de (2.1) sont solutions de :  $\nabla \mathcal{L}(\alpha) = 0$

Or,

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{L}_u(\alpha) &= 2 \cdot \text{Cov} \cdot u + 2 \cdot \alpha \cdot u \\ &= 0 \\ \Leftrightarrow \text{Cov} \cdot u &= \alpha \cdot u \end{aligned} \tag{2.2}$$

Les solutions  $v$  du programme de maximisation sont donc de la forme :  $\text{Cov} \cdot v = \alpha \cdot v$

Or, on a rappelé plus haut (propriété 2.1) que la matrice  $\text{Cov}$ . était diagonalisable. **L'ensemble des solutions possibles est donc l'ensemble des vecteurs propres  $v_i$  de  $\text{Cov}$  associés aux valeurs propres  $\lambda_i$ .**

Remarque :

– La matrice  $\text{Cov}$ . étant par nature symétrique définie positive, ses valeurs propres sont réelles positives. Dans la suite nous indiquons les valeurs propres dans l'ordre décroissant  $\lambda_1 > \dots > \lambda_N$

Pour trouver  $u$ , il reste à choisir le vecteur propre maximisant  ${}^t u \cdot \text{Cov} \cdot u$

Or,  ${}^t u \cdot \text{Cov} \cdot u = {}^t u \cdot \lambda \cdot u$

D'où

$$\begin{aligned} \max_{u \in v.p.deCov} \quad & {}^t u \cdot \text{Cov} \cdot u = \max_{\lambda_i \ i=1, \dots, N} \quad {}^t u \cdot \lambda_i \cdot u \\ &= \max_{\lambda_i \ i=1, \dots, N} \quad \lambda_i \cdot \|u\| \\ &= \max_{\lambda_i \ i=1, \dots, N} \quad \lambda_i \\ &= \lambda_1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

On a donc finalement :

$$\max_{u \in \mathbb{R}^N} {}^t u \cdot \text{Cov} \cdot u = \lambda_1 \quad (2.4)$$

Il suffit donc de projeter les données sur le vecteur propre de  $\text{Cov}$  ayant la valeur propre  $\lambda_1$  la plus élevée.

Remarque :

- *La variance de la projection du nuage sur la première composante est donc égale à la valeur propre la plus élevée de la matrice de covariance. Cette valeur représente la part de variance expliquée par la composante.*

### Construction des autres composantes

Comme la matrice de variance-covariance est symétrique définie positive, les vecteurs propres ont pu être choisis orthonormés (Propriété 2.1). On trouve donc le deuxième axe facilement.

La deuxième composante est portée par un vecteur directeur  $v$  orthogonal à  $u$  et sur lequel la projection du nuage est de variance maximale.

$$v = \max_{w \in \mathbb{R}^N} {}^t w \cdot \text{Cov} \cdot w \quad (2.5)$$

*s.c.*  $\|w\| = 1$  et  $w \perp u$

$v$  est donc le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_2$ .

On procède par un raisonnement identique pour déterminer les composantes manquantes. Les composantes principales sont donc les vecteurs propres de la matrice  $\text{Cov}$  de variance-covariance des variables  $X_1, \dots, X_N$ .

Remarque :

- *On voit apparaître ici un critère de choix pour  $q$  : le critère global. Il mesure la part de variance expliquée par les composantes. Comme nous l'avons fait remarquer précédemment, la composante  $i$  explique  $\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i}$  pourcents de la variance.*

*On considère de même que  $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sum_{i=1}^N \lambda_i}$  est la part d'inertie expliquée par le plan que définissent les deux premiers axes principaux.*

*On a en effet par définition, dans le cas où la matrice de variance-covariance*

*Cov* est diagonale :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{Cov}) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i \\ &= \sigma, \text{ la variance totale du nuage de points} \end{aligned} \quad (2.6)$$

- Dans le cas d’une analyse sur données centrées-réduites, on a  $\sigma = N$ .

### 2.2.3 Interprétation des résultats

Afin d’interpréter convenablement les résultats, il faut tout d’abord choisir le nombre  $q$  de composantes principales à retenir. Ce nombre doit être choisi de manière à obtenir un résumé suffisamment précis de l’information contenue dans le tableau initial. Comme nous l’avons vu précédemment, la qualité de la représentation des données par  $q$  axes s’évalue en ajoutant les pourcentages de variance expliqués par chacun des axes. Le but est donc de trouver un équilibre permettant d’expliquer le plus de variance possible avec le moins d’axes possibles. Le choix de  $q$  ne peut donc pas être effectué selon une procédure systématique. On distingue néanmoins certains critères :

- retenir autant d’axes qu’il le faut pour atteindre le seuil de variance expliquée désiré (80% par exemple)
- observer la cassure de la courbe des valeurs propres<sup>1</sup>
- retenir les valeurs propres supérieures à 1 (dans le cas d’une analyse sur données centrées-réduites)

**Définition :** Plan Factoriel

Un plan factoriel est un repère du plan défini par deux des  $q$  axes factoriels retenus.

Une fois le nombre d’axes choisi, on s’intéresse aux projections des variables et des individus sur ceux-ci. Pour cela, on projette chaque nuage de points (variables et individus) sur les plans factoriels. Ainsi, si l’on a retenu trois composantes, on tracera trois graphiques pour chaque nuage : le nuage projeté sur le premier plan factoriel formé des deux premières composantes, puis sur les deux plans restants formés des autres combinaisons possibles des composantes. L’examen des plans factoriels permettra dans un premier temps de donner un sens aux nouvelles variables que constituent les axes. Cette étude permettra ensuite de visualiser les corrélations entre les variables et d’identifier les groupes d’individus ayant pris des valeurs proches sur certaines d’entre elles. Nous décrivons brièvement ci-après les deux types d’interprétation graphique des correspondances composantes-variables et composantes-individus.

---

1. [CASIN P.]

## Représentation des variables

**Définition :** Cercle des corrélations

Le cercle des corrélations défini par deux composantes principales est la représentation graphique des variables en fonction de leurs coefficients de corrélation avec les composantes principales

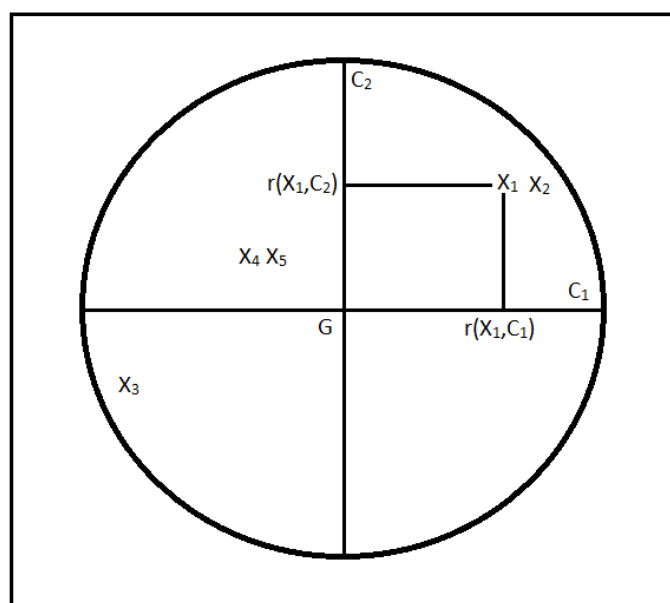


FIGURE 2.3 – Cercle des corrélations

On comprend donc grâce à la définition, que plus une variable sera projetée vers le bord du cercle, mieux elle sera représentée (ici <sup>2</sup>  $X_3$ ). Par ailleurs, on montre <sup>3</sup> que le cosinus de l'angle entre deux point-variables est égal au coefficient de corrélation linéaire entre ces variables. Ainsi, deux variables bien représentées et proches l'une de l'autre seront corrélées positivement (ici  $X_2$  et  $X_1$ ) tandis que deux variables qui s'opposent seront corrélées négativement (ici  $X_2$  et  $X_3$ ). Une orthogonalité entre deux variables traduit l'absence de corrélation linéaire. Le cercle des corrélations permet donc, par le repérage des variables correspondant aux coefficients les plus élevés de dégager une interprétation des facteurs.

On peut également calculer la contribution apportée par les variables à chaque axe. Considérons la  $k^{eme}$  composante, soit  $x_{ik}$  la valeur de la composante pour la  $k^{eme}$  variable.

---

2. figure 2.3 pages suivante

3. [CASIN P.]



On a : 
$$\sum_{i=1}^N x_{ik}^2 = \lambda_k$$

**Définition :** la contribution de la variable  $X_i$  à la composante k est définie par :

$$contrib_{X_i} = \frac{(x_{ik})^2}{\lambda_k}$$

### Représentation des individus

Une fois la signification des axes dégagée, on peut étudier la projection du nuage des individus sur le plan factoriel. L'interprétation du graphique est alors assez intuitive, les significations des axes ayant été dégagées au point précédent. Ainsi, plus un individu sera représenté proche d'un axe et loin sur celui-ci, plus il aura les caractéristiques décrites par cette composante. La lecture de ce graphique nécessite cependant quelques précautions.

En effet, pour éviter les erreurs de perspective, il faut aussi s'assurer que la représentation des individus sur les plans principaux est de bonne qualité. Pour un individu  $e_i$ , on montre<sup>4</sup> que l'on peut mesurer cette qualité à l'aide du cosinus de l'angle  $\theta$  formé par le plan principal et le vecteur défini par l'individu  $e_i$ . Lorsqu'un individu est sur le plan factoriel, l'angle défini est alors nul, ce qui entraîne un  $\cos^2\theta$  égal à 1. Au contraire, un individu orthogonal à chacun des axes du plan factoriel aura un  $\cos^2\theta$  nul. Tous les individus occupant des positions intermédiaires entre ces deux extrémités auront un  $\cos^2\theta$  compris entre 0 et 1, d'autant plus proche de 1 que l'individu est bien représenté par sa projection sur le plan (voir figure 2.4) .

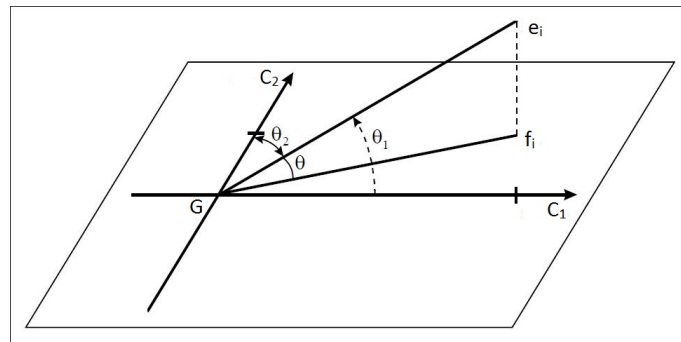


FIGURE 2.4 – Projection de l'individu  $e_i$  sur le plan factoriel

4. [CASIN P.]

Il est aussi intéressant de calculer pour chaque axe la contribution apportée par les divers individus à cet axe. Considérons la  $k^{eme}$  composante, soit  $c_{ik}$  la valeur de la composante pour le  $k^{eme}$  individu.

$$\text{On a }^5 : \sum_{i=1}^N \frac{c_{ik}^2}{N} = \lambda_k$$

**Définition :** la contribution de l'individu  $e_i$  à la composante  $k$  est définie par :

$$\text{contrib}_{e_i} = \frac{(c_{ik})^2}{N} \cdot \frac{1}{\lambda_k}$$

Remarques :

- Il n'est pas forcément souhaitable qu'un individu ait une contribution excessive car il pourrait représenter un facteur d'instabilité.
- Néanmoins, les individus ayant une bonne contribution sont ceux qui favorisent la détermination de l'axe. Ils peuvent donc être très utiles pour déterminer la signification des composantes. En effet ce sont en général les points extrêmes d'un axe qui ont la plus forte contribution pour ce dernier car ce sont eux qui donnent une forme particulièrement allongée au nuage.

---

5. [CASIN P.]

## Deuxième partie

# Présentation du régime et description des premiers comportements de départ

# Chapitre 1

## Description du régime

### 1.1 Le régime avant les réformes

Afin de mettre en évidence les bouleversements opérés par les différentes réformes sur le régime, nous en décrivons ici le fonctionnement avant réforme.

Auparavant, nous informons le lecteur que dans l'entreprise que nous étudions, le travail est divisé en deux grandes catégories, le service Actif et le service Sédentaire. La première catégorie, que nous noterons SA correspond à des travaux difficiles, pénibles, ou nécessitant un éloignement du domicile. La seconde, que nous noterons SS représente tous les autres types de travaux, en général ceux étant effectués dans un bureau. Nous verrons plus bas comment cette distinction modifie le calcul de la pension des salariés.

### 1.1.1 Les règles de base

L'âge d'ouverture des droits <sup>1</sup>, c'est à dire l'âge à partir duquel les individus avaient le droit de liquider leur retraite était fixé à 60 ans.

Le mode de calcul de la pension était le suivant :

**Définition :** en notant  $Pension_i$  la pension de l'individu  $i$  au temps  $t$  :

$$Pension_i^t = KP_i^t * AS_i^t$$

Avec :

- $KP_i^t$  le "taux de remplacement" de  $i$  au temps  $t$
- $AS_i^t$  l'assiette de salaire de  $i$  au temps  $t$

L'assiette de salaire était tout simplement le dernier salaire perçu par l'individu avant la liquidation de sa pension.

Concernant le mode de calcul du taux de remplacement, on notait deux caractéristiques importantes :

- il était croissant de 2% par année de service
- il était plafonné à 75%

**Notation :** Dans la suite, nous appellerons plus généralement "taux de remplacement" d'un individu  $i$  au temps  $t$  la quantité :

$$Taux\ de\ remplacement_i^t = \frac{Pension_i^t}{AS_i^t}$$

### 1.1.2 Les avantages

À ces règles de bases s'ajoutaient ensuite les "majorations de durée" et les "anticipations". Ces avantages jouaient sur deux paramètres, le taux de remplacement et l'âge d'ouverture des droits. Les "majorations de durée" venaient augmenter le KP en ajoutant des années de service fictives aux individus. Les "anticipations" baissaient l'âge d'ouverture des droits des agents. L'obtention de ces avantages dépendait de deux critères, le nombre d'années de services actifs, et le nombre d'enfants élevés (pour les femmes uniquement).

---

1. Dans la suite l'âge d'ouverture des droits sera noté AOD. Nous noterons également DOD la date d'ouverture des droits i.e. la date à laquelle l'AOD est atteint.

Afin de donner un ordre de grandeur de ces avantages, nous en proposons ici un résumé très succinct :

		Majorations de durée	Anticipation de l'AOD
Pour enfants élevés (ne concerne que les femmes)	minimum maximum	1 an illimité <sup>2</sup>	1 an 3 ans
Pour service Actif	minimum maximum	1 trimestre illimité <sup>2</sup>	1 an 5 ans
Enfants élevés + Service Actifs		Cumul autorisé	Cumul autorisé, et sous certaines conditions, suppression de l'AOD

## 1.2 Les réformes

Les réformes ont été mises en place pour faire face à l'interdiction de mise à la retraite ainsi qu'au vieillissement de la population du régime. Elles ont résulté en l'augmentation des durées de cotisation et l'instauration d'un système de surcote/décote.

### 1.2.1 Augmentations de durées et suppression d'avantages

Tout d'abord, le point essentiel de la réforme a été l'interdiction de la mise à la retraite d'office des salariés par l'employeur.

Le mode de calcul du KP a également été modifié :

**Définition :** Pour un individu  $i$  au temps  $t$ , on a désormais :

$$KP_i^t = \text{Min} \left( \frac{\text{durée liquidée}_i^t}{\text{durée requise}_{DOD_i}}, 75\% \right)$$

Avec :

- *durée liquidée* <sub>$i$</sub>  <sup>$t$</sup>  la durée travaillée dans l'entreprise par l'individu  $i$  au temps  $t$
- *durée requise* <sub>$DOD_i$</sub>  une durée dépendant de la DOD de l'individu

2. Attention : dépend du nombre d'enfants (ou du SA) donc limité par le nombre d'enfants qu'il est possible d'élever dans une vie (ou le nombre d'années travaillées en service actif).

Remarques :

- *Le taux de remplacement avant surcote et majorations est toujours limité à 75%. Nous appellerons ce taux le "taux plein".*
- *La durée requise est la durée de service nécessaire pour l'obtention du taux plein.*
- *La durée requise est fixée par le régime. On comprend donc que l'ajustement de cette variable va permettre de relever les durées de cotisations.*

La dernière remarque est en effet vérifiée. Le régime a fixé un tableau d'évolution de la durée requise en fonction des DOD des agents. Cette variable sera donc progressivement relevée jusqu'à atteindre 166 trimestres pour les agents dont l'ouverture des droits sera postérieure au 01/07/2018.

Un autre mécanisme permettant d'augmenter à coup sûr les durées de cotisation des agents réside dans l'augmentation de l'âge d'ouverture des droits. La réforme 2010 a donc relevé progressivement cet âge jusqu'à ce qu'il atteigne 62 ans pour les générations postérieures à 1961.

Enfin, les réformes ont prévu la suppression de certains avantages que nous avons décrits plus haut, mais ces suppressions auront pour la plupart des effets postérieurs à notre étude. On note de plus que les anticipations pour service actifs ont été conservés, mais seront plus difficiles à obtenir.

## 1.2.2 Instauration de la surcote

Pour augmenter les durées de cotisations, le régime a aussi mis en place une mesure incitative, la surcote. Pour l'atteindre, il faut remplir plusieurs conditions :

- Avoir travaillé après le 1er juillet 2008
- Avoir travaillé après 60 ans
- Avoir travaillé au-delà de la durée requise

La surcote est de 1.25% et s'intègre au calcul de la pension comme suit (avec les mêmes notations que précédemment) :

$$Pension_i = KP_i^t * AS_i^t * (1 + surcote_i^t)$$

Cette formule nous permet de voir la surcote comme un prolongement du taux de remplacement. En effet, une fois que le KP a atteint son maximum, la surcote prend le relais et permet aux salariés qui continuent à travailler de continuer à augmenter leur pension. Si cette interprétation se révélait exacte, elle impliquerait entre autres que le "taux plein" perdrait de son importance puisqu'il ne serait qu'une étape dans la progression du nouveau taux formé par le couple KP/surcote.

Il convient toutefois de nuancer cette interprétation. Elle n'est pertinente que si le temps de latence entre l'atteinte du taux plein et le début de la surcote est bref. Nous verrons même plus tard que la distance de la surcote à l'âge d'ouverture des droits

peut lui aussi se révéler décourageant. D'une manière générale, l'étude de données effectuée plus bas nous permettra de fixer les comportements des individus face à la surcote.

### 1.2.3 Instauration de la décote

Toujours dans l'objectif d'augmenter les durées de cotisation, le régime a mis en place une mesure dissuasive, la décote. À l'inverse de la surcote, elle se présente comme un coefficient minorateur venant sanctionner les individus n'ayant pas validé la durée requise à leur date d'ouverture des droits. Plus précisément, elle dépend de plusieurs paramètres :

- La durée travaillée par l'agent détermine son nombre de trimestres manquants et s'il doit décoter ou non.
- La DOD de l'agent détermine le coefficient de décote.
- La DOD et l'AOD déterminent l'âge d'annulation de la décote (noté AAD).
- Le minimum entre son nombre de trimestres manquants et le nombre de trimestres le séparant de son AAD sera appliqué à son coefficient de décote et fournira son taux de décote.

La date d'ouverture des droits est ici déterminante car elle permet d'installer progressivement la décote dans le régime. En effet, les coefficients de décote et les âges d'annulation seront progressivement relevés jusqu'en 2020. À ce jour, la décote ne concerne que les agents dont la date d'ouverture des droits est postérieure à juillet 2010, elle est de 0.125% par trimestre manquant et pour 4 trimestres au maximum.

La décote s'intègre au calcul de la pension de la même manière que la surcote. On a donc désormais :

$$Pension_i = (1 - décote_i^t) * KP_i^t * AS_i^t * (1 + surcote_i^t)$$

Alors que la surcote intervenait après le taux plein, en prolongement du chemin du KP, la décote apparaît à l'âge d'ouverture des droits et vient réduire le taux de remplacement. L'interprétation effectuée plus haut concernant le coefficient de surcote ne peut donc pas être appliquée ici. Un des principaux objectifs de l'étude de données qui va suivre sera de saisir les comportements des individus face à ce coefficient. Plus précisément, nous essaierons de savoir si la perception du taux de remplacement est altérée en présence de décote.



## Chapitre 2

# Présentation des données

### 2.1 Sélection des données utilisables

L'objet de cette étude étant de modéliser les comportements de départ à la retraite, nous ne pouvions pas utiliser les données antérieure à 2008. En effet, avant la réforme, près de 80% des salariés de l'entreprise que nous étudions ici étaient mis à la retraite d'office au moment de leur ouverture des droits. Nous limiterons donc notre étude aux salariés ayant une date d'ouverture des droits postérieure au 01/07/2008.

Afin de faciliter l'analyse des départs, nous avons ensuite découpé cette population selon leur date d'ouverture des droits. Ce découpage nous a paru d'autant plus pertinent que chaque échantillon pourra ainsi permettre d'analyser différentes étapes des réformes. Les groupes sont les suivants :

Libellé	DOD des individus du groupe	Départs observables sur <sup>1</sup>
DOD 2009	du 01/07/2008 au 30/06/2009	2 ans
DOD 2010	du 01/07/2009 au 30/06/2010	1 an
DOD 2011	du 01/07/2010 au 30/06/2011	1 trimestre

Puis, afin d'avoir une vision des effectifs sur une durée un peu plus longue, nous avons procédé à un second échantillonnage beaucoup plus restrictif. Ces échantillons seront rarement utilisés dans l'étude du fait de leur petite taille, ils ont été formé suivant le découpage suivant :

Libellé	DOD des individus du groupe	Départs observables sur <sup>1</sup>
DOD 2009 T1	du 01/07/2008 au 30/09/2008	2 ans et 3 trimestres
DOD 2010 T1	du 01/07/2009 au 30/09/2009	1 an et 3 trimestres
DOD 2011 T1	du 01/07/20010 au 30/09/2010	3 trimestres

---

1. en raison des données disponibles

## 2.2 Analyse des départs

Nous allons maintenant nous attacher à décrire les premiers comportements de départ observables. L'analyse menée dans cette partie aura pour but de mettre en évidence les évolutions de comportements dus aux réformes. Nous essaierons également de rechercher quelles sont plus précisément les variables responsables de ces évolutions

### 2.2.1 Taux de liquidation

Commençons par observer les taux de liquidation cumulés de nos six échantillons.

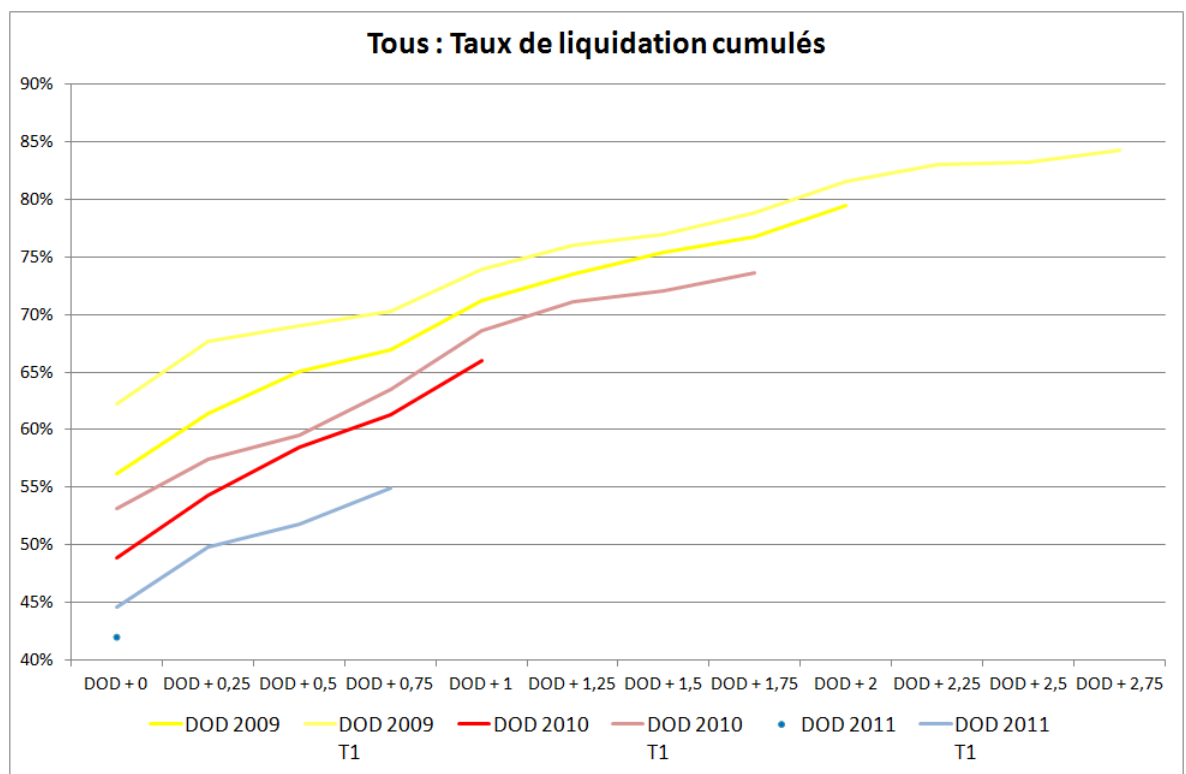


FIGURE 2.1 – Taux de liquidation cumulés des six échantillons

On remarque tout d'abord une nette baisse des taux de liquidation le long des années d'ouverture des droits. On peut penser que ces baisses sont dues aux différentes réformes du régime. En effet, à chaque échantillon correspond une augmentation de la durée requise. De plus, l'année 2011 a été marquée par l'apparition de la décote, ralentissant encore plus fortement l'obtention du taux plein. Il semble donc que le rôle joué par le taux de remplacement soit déterminant dans l'étude des comportements de départ.

Pour plus de précision, observons les taux de remplacement en fonction des liquidations.

## 2.2.2 Taux de remplacements

Ce graphique nous montre les moyennes des taux de remplacements à chaque trimestre. Ces taux sont ventilés par individu resté ou ayant liquidé.

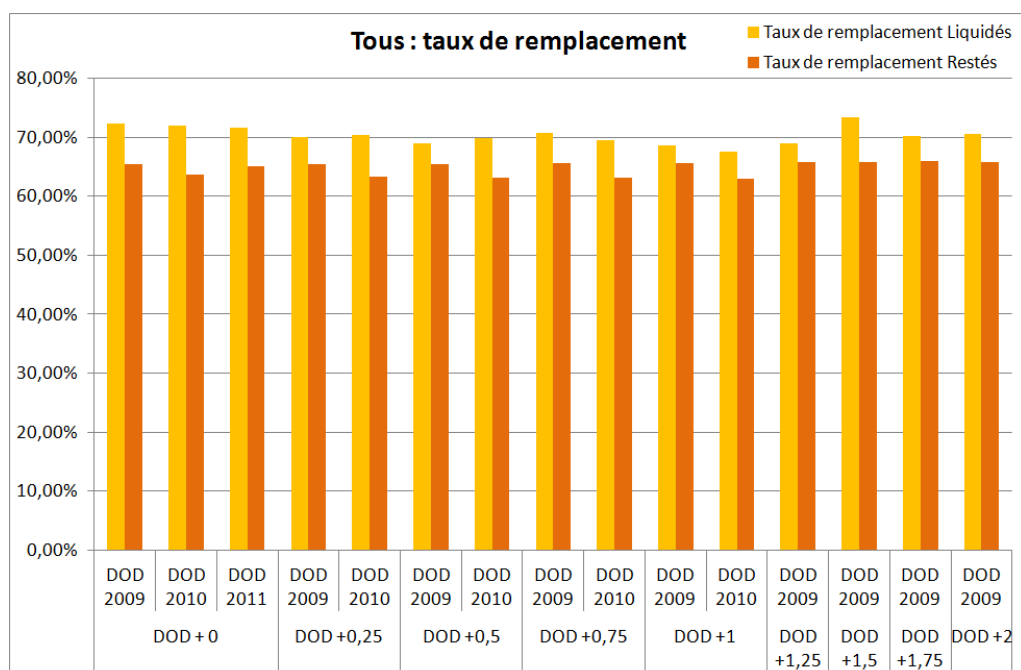


FIGURE 2.2 – Taux de remplacement des effectifs ventilés liquidés/restés

L'hypothèse avancée plus haut semble se confirmer, les liquidations ont une moyenne de taux de remplacement toujours supérieure à celle des agents restés. Ce graphique ne représentant toutefois que des moyennes, il est encore trop tôt pour savoir exactement quel est le taux de remplacement déclenchant le départ. Ces taux sont à analyser avec prudence et doivent être mis en regard avec les effectifs associées. Nous les rappelons dans le graphique 2.3 ci-après.

## 2.2.3 Surcote

Lors de la description des réformes, nous nous étions interrogés concernant le comportement des individus face au coefficient de surcote. Nous avons émis l'hypothèse que sa présence pouvait être perçue comme un prolongement naturel du taux de remplacement. En d'autres termes, il nous semblait que l'effet joué par la surcote sur

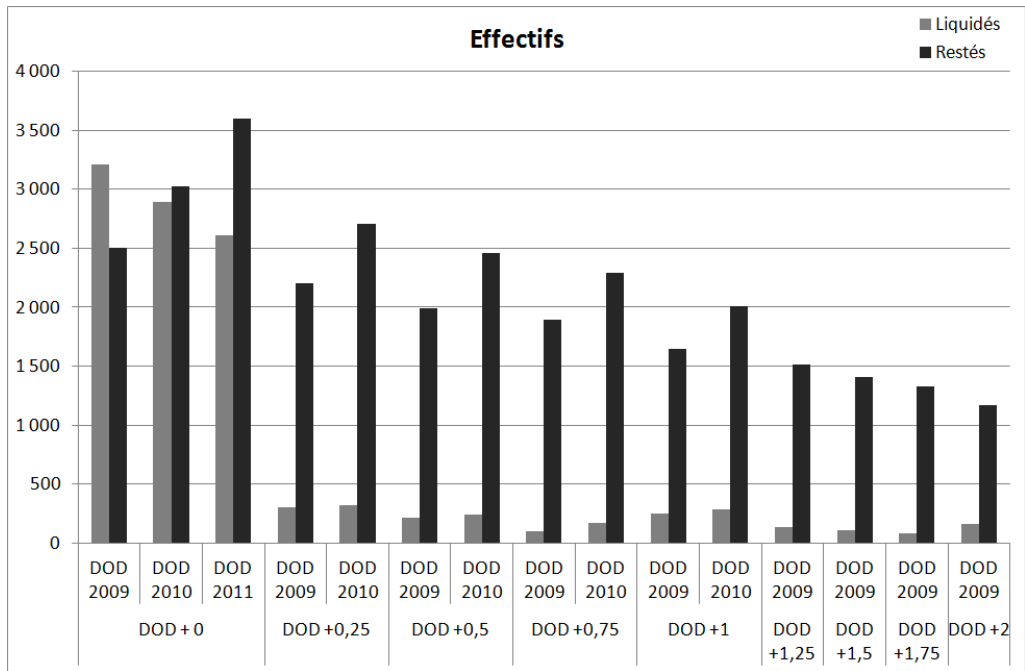


FIGURE 2.3 – Effectifs ventilés liquidés/restés

le comportement d'un agent se résumerait à l'effet d'une augmentation du taux de remplacement, mais ne l'inciterait pas forcément à rester plus longtemps.

Commençons par observer les taux de liquidation instantanés de notre population surcotante. Ces taux sont égaux, pour chaque trimestre, au rapport entre les effectifs susceptibles de liquider et ceux ayant effectivement liquidé.

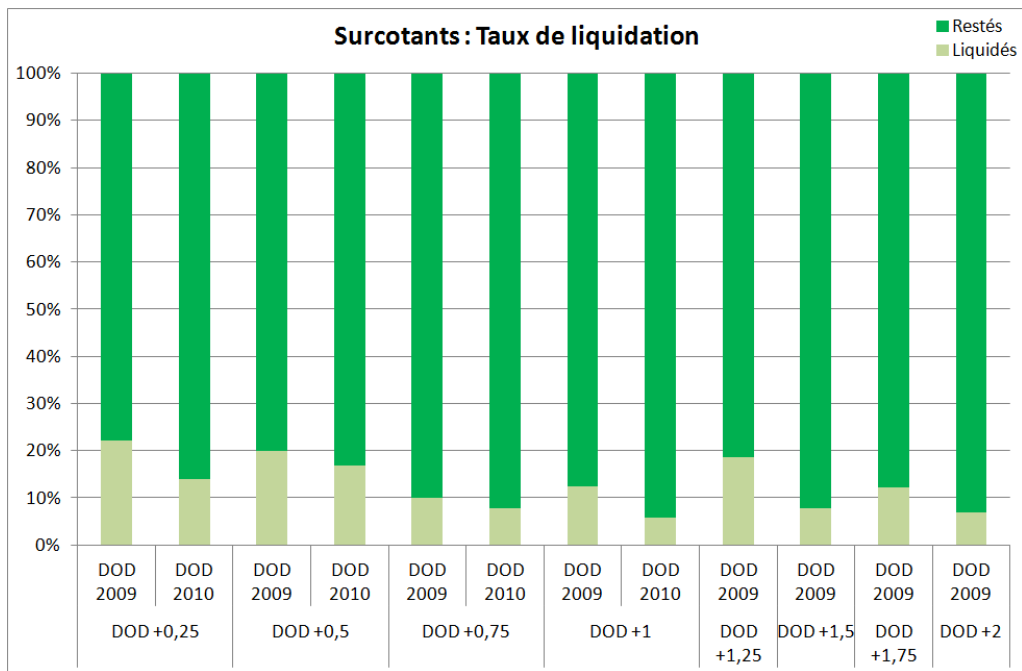


FIGURE 2.4 – Taux de liquidation instantanés de la population surcotante

Etant donné les très faibles effectifs de surcotants, ces taux sont à considérer avec une grande prudence.

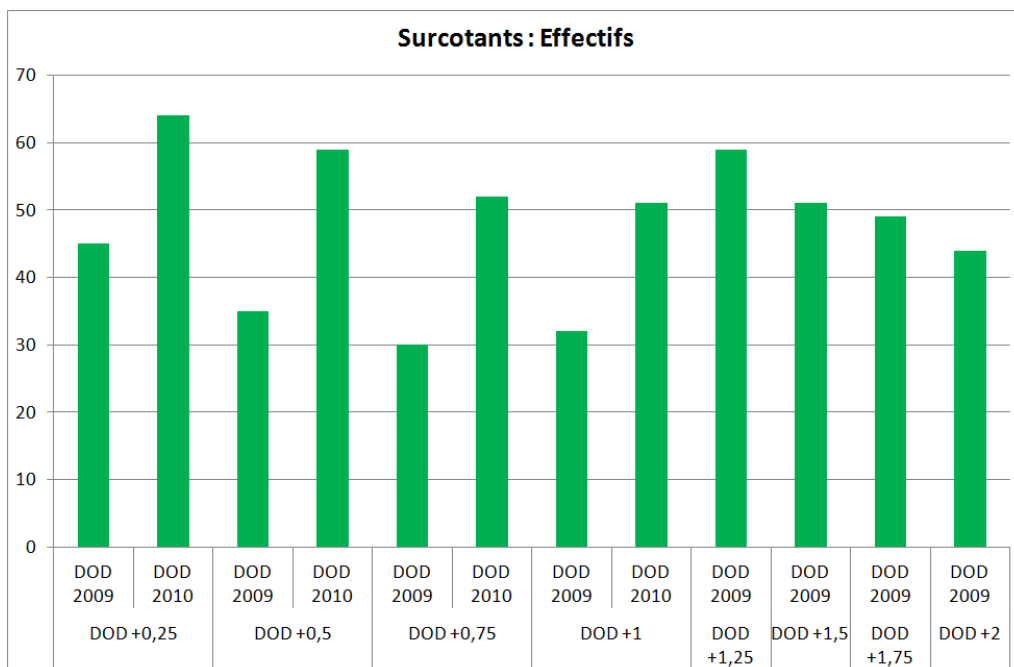


FIGURE 2.5 – Effectifs de la population surcotante

Pour y voir plus clair, comparons maintenant les taux de liquidations de nos surcotants à ceux du reste de la population.

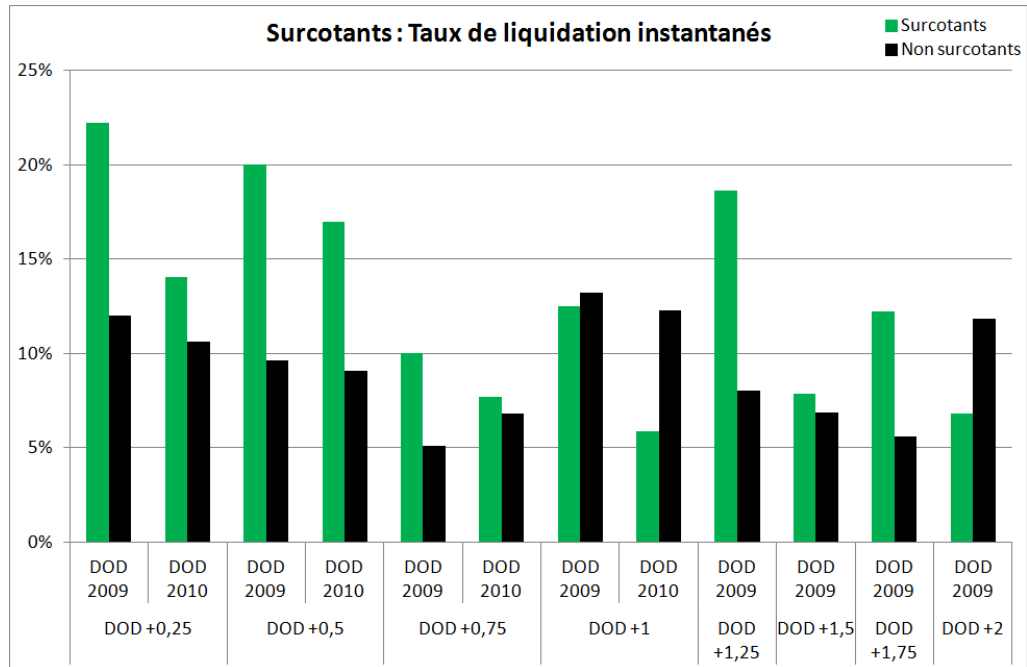


FIGURE 2.6 – Taux de liquidation instantané des surcotants et comparaison avec ceux du reste de la population

On remarque que les taux de liquidation de nos surcotants sont en général supérieurs à ceux du reste de la population. Ceci ne nous permet pas d'affirmer que nous avons raison de douter des vertus incitatives de la surcote. En effet, ces taux de liquidation ne sont vraiment pas stables. Regardons si ces variations peuvent s'expliquer grâce au niveau des surcotes (graphe 2.7 page suivante).

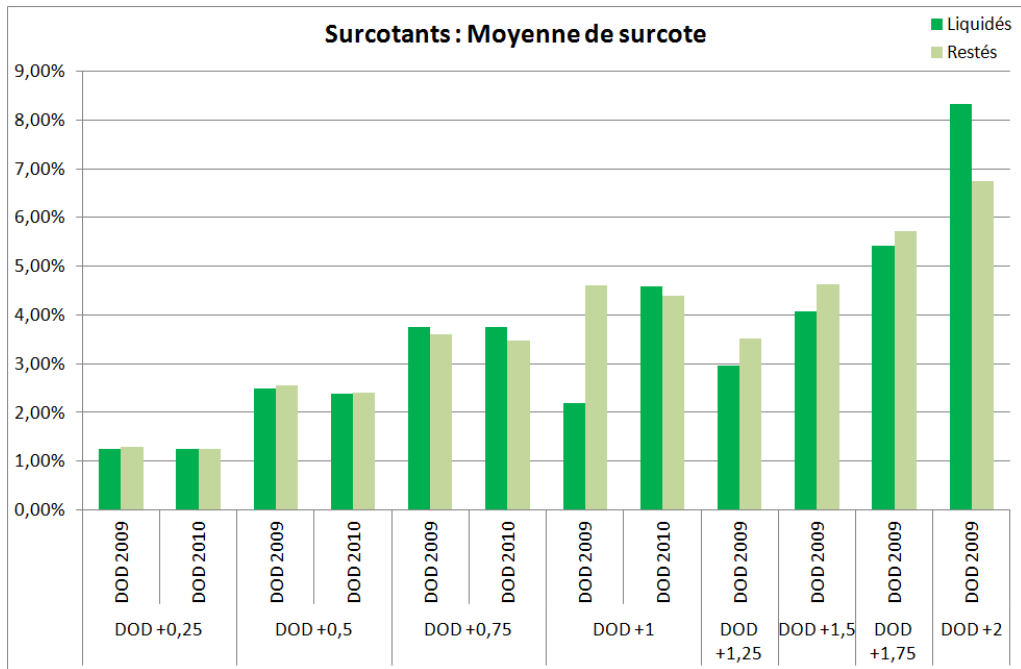


FIGURE 2.7 – Moyennes de surcote de la population surcotante

On ne remarque pas de différence particulière entre les niveaux de surcote des agents restés et de ceux ayant liquidé. Le niveau de surcote ne semble donc pas être un facteur déterminant dans la décision de départ des surcotants. Peut-être est-ce parce que notre hypothèse était exacte. C'est à dire que ce n'est pas la surcote en elle-même qui influence le départ, mais c'est à quelle hauteur elle vient compléter le KP. Pour vérifier cela, regardons les taux de remplacement des surcotants à la liquidation (graphe 2.8 page suivante).

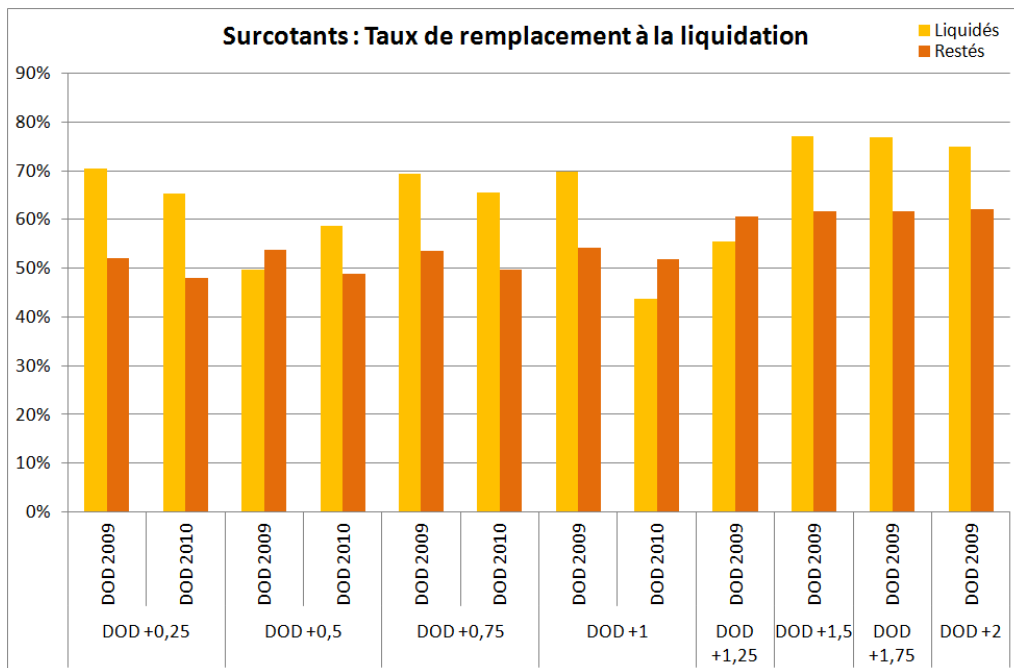


FIGURE 2.8 – Moyennes des taux de remplacement de la population surcotante

Tout d’abord, on remarque que dans l’ensemble, les taux de remplacement des agents liquidant leur pension sont supérieurs à ceux qui ont décidé de rester. Mais jusqu’à DOD+1, ces taux sont un peu chaotiques, on ne trouve pas d’ordre clair. C’est parce que les effectifs des surcotants commencent à se stabiliser à ce moment là.

Pour plus de précision, intéressons-nous donc aux taux de remplacement DOD2009 à partir de DOD+1,25. En DOD+1,25, on voit que la moyenne des taux de remplacement ne passe pas la barre des 65% qui semblait être déterminante dans le choix de départ du graphe 2.2, il semble alors que le départ soit plus un choix personnel qu’une décision influencée par le taux de remplacement puisque la moitié est restée et l’autre est partie Or, à partir de DOD+1,5, la barre des 65% est franchie, et l’on retrouve bien les comportements du graphe 2.2. Il semblerait donc que ce ne soit pas le niveau de surcote qui déclenche le départ, mais bien le niveau du KP affecté de la surcote. En résumé, les comportements des agents sont les mêmes qu’ils soient surcotants ou non, c’est leur niveau de taux de remplacement qui influence leur décision de départ.

On pourrait avoir l’impression de n’avoir rien montré tellement cette analyse semble évidente. En effet, à niveau de pension égal, pourquoi les comportements des agents seraient différents s’ils surcotent ? Nous allons voir que cette évidence n’en est plus forcément une en présence de décote.



## 2.2.4 Décote

Commençons par observer les effectifs de la population décotante

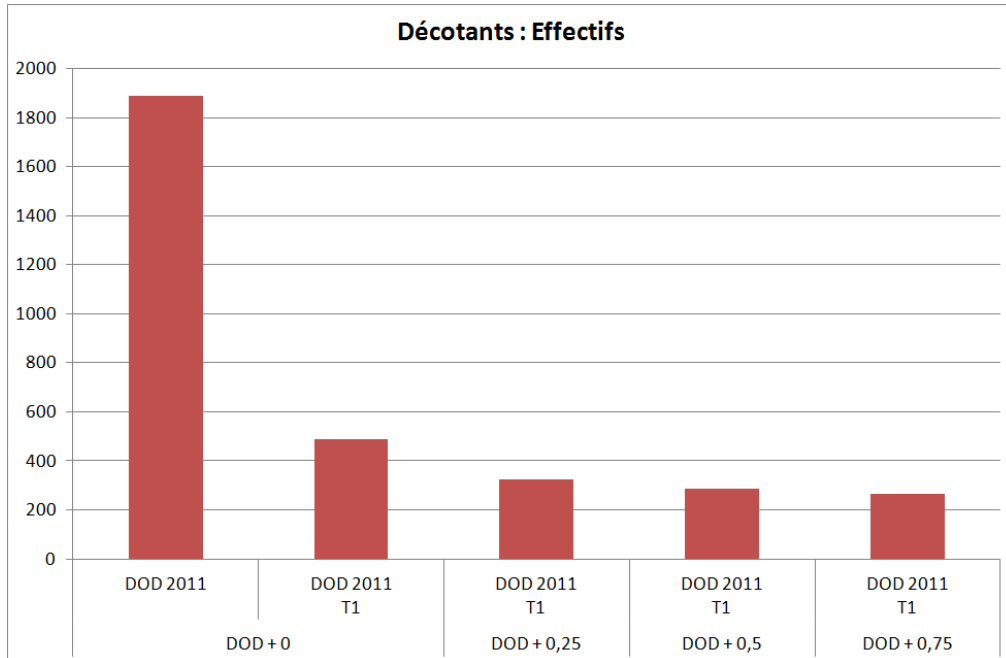


FIGURE 2.9 – Effectifs de la population décotante

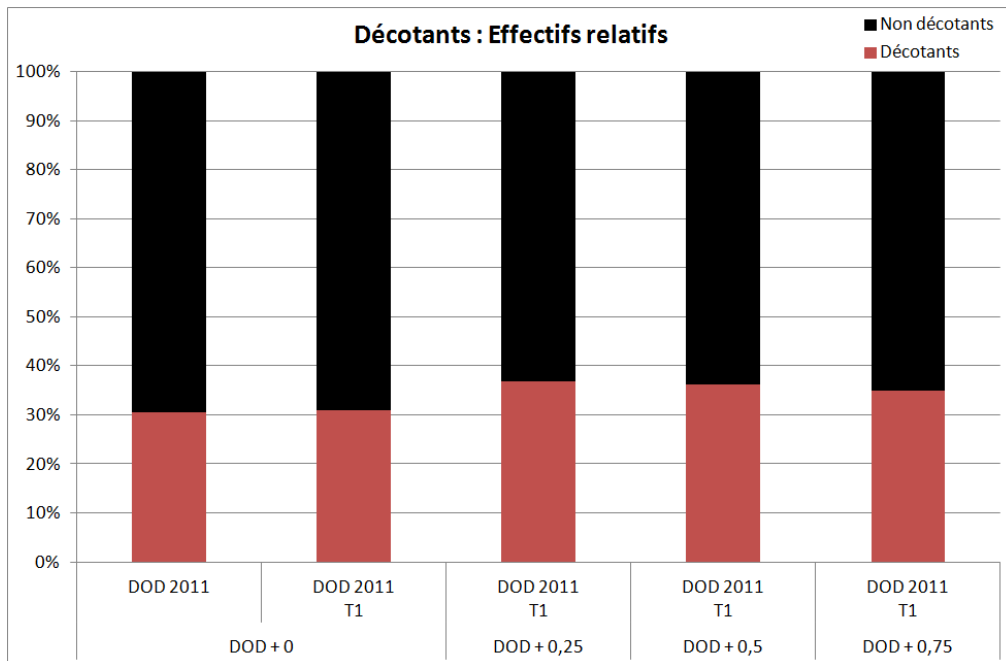


FIGURE 2.10 – Taux de décotants

On remarque tout d'abord que la décote concerne beaucoup plus de personnes que la surcote. De plus, les effectifs concernés sont en proportion stable le long des années d'ouverture des droits. Leur étude sera donc plus aisée.

Observons maintenant les taux de liquidation de cette population et comparons les à ceux du reste des effectifs.

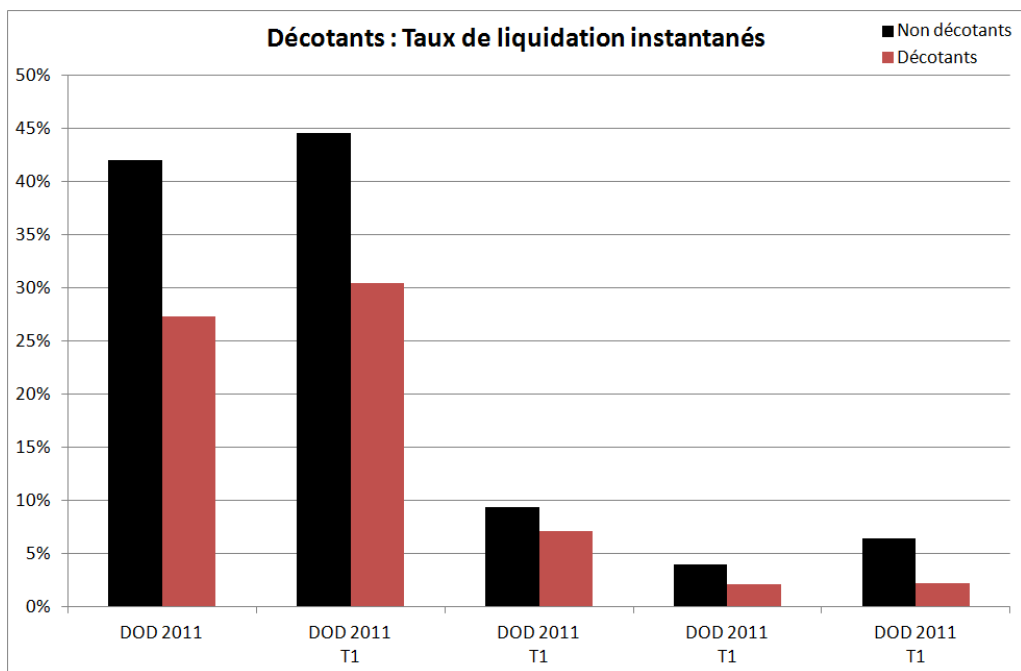


FIGURE 2.11 – Taux de liquidation de la population décotante et comparaison avec ceux du reste de la population

Les taux de liquidation des décotants sont nettement inférieurs à ceux du reste de la population. La décote venant baisser les taux de remplacement, ce résultat confirme une fois de plus l'importance de ce taux dans les décisions de départ. Mais ce que nous voulons vraiment savoir concernant la décote, c'est si elle joue un rôle encore plus important que celui de minorant du KP aux yeux des agents. Nous voulons savoir si elle altère leur perception du taux de remplacement.

Vérifions tout d'abord si ce ne serait pas le niveau de décote qui serait déterminant dans les choix de départ (graphe 2.12 page suivante)

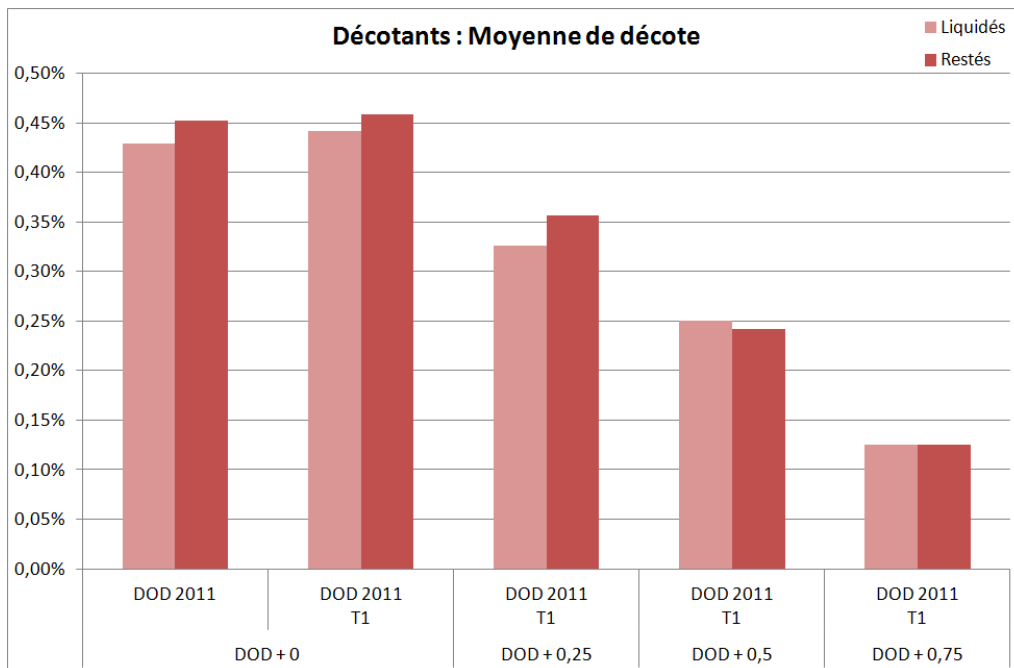


FIGURE 2.12 – Moyenne de décote de la population décotante

On ne voit pas apparaître de différence marquante entre les niveaux de décote des restés et des liquidés, nous allons donc nous intéresser aux niveaux des taux de remplacement.

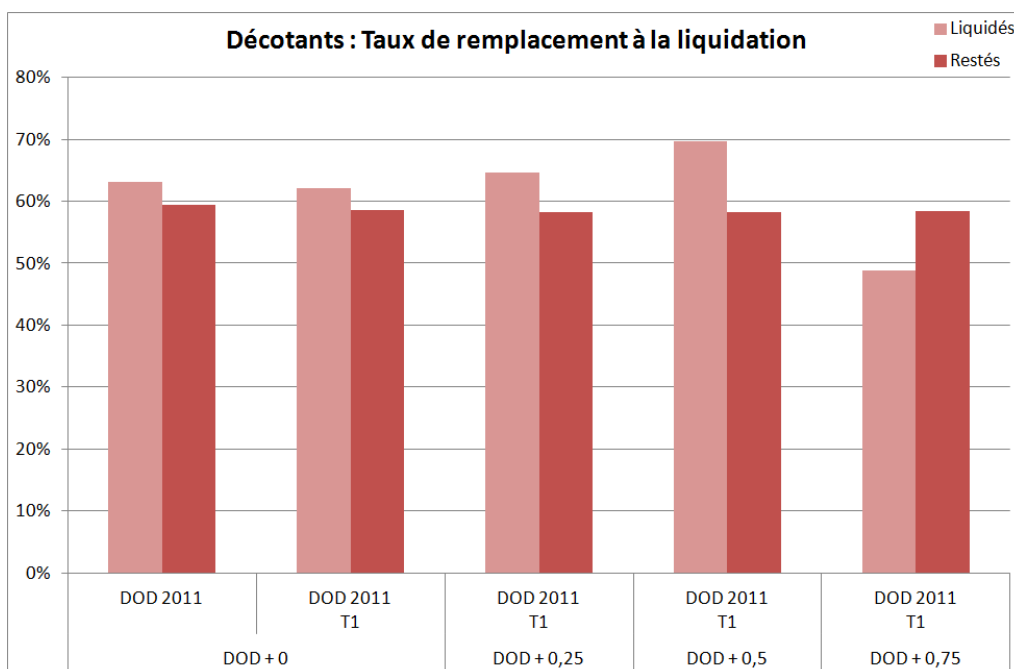


FIGURE 2.13 – Taux de remplacement de la population décotante

Même si un certain ordre semble être respecté, on ne reconnaît pas exactement les motifs du graphe 2.2. Ce constat laisse donc penser que les perceptions des taux de remplacements pourraient être biaisés par l'apparition de la décote.

Afin de nous en assurer, nous allons donc étudier les taux de liquidation instantanés par taux de remplacement.

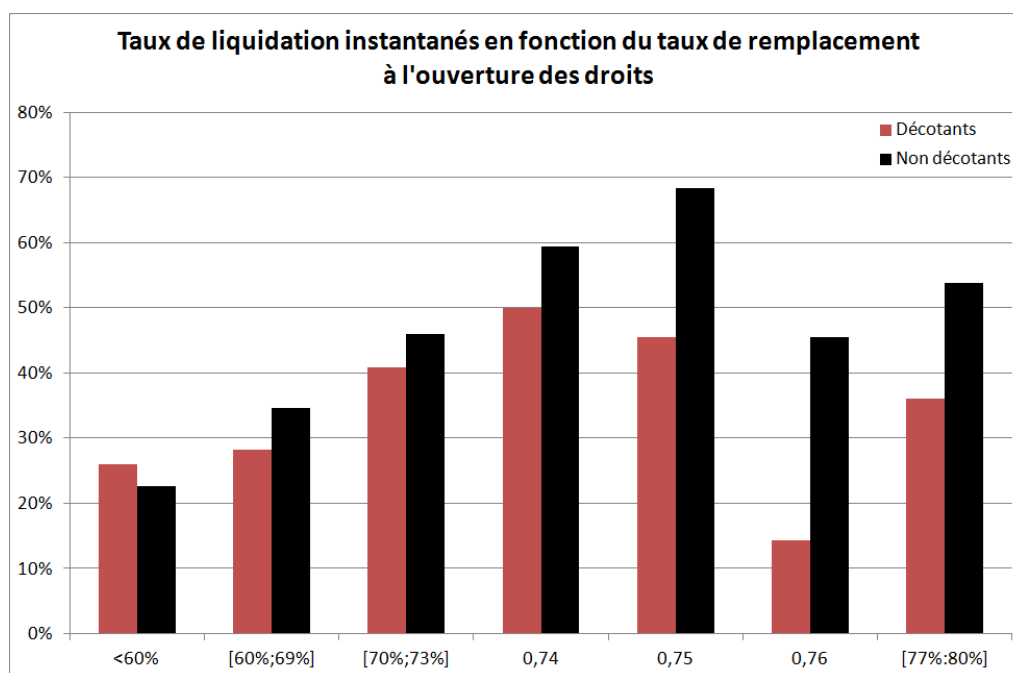


FIGURE 2.14 – Comparaison des taux de liquidation à l'ouverture des droits des décotants avec ceux du reste de la population en fonction du taux de remplacement

Manifestement, les taux de liquidation des décotants sont bien inférieurs aux autres, et cette différence est encore plus marquée pour les taux de remplacement élevés. Notre intuition est donc vérifiée, la décote modifie la perception qu'ont les agents du taux de remplacement. En effet, même à taux de remplacement égal, un agent décotant aura moins envie de liquider qu'un agent non décotants. Le pouvoir dissuasif de la décote est donc extrêmement puissant.

## Chapitre 3

# Segmentation de la population

L'analyse effectuée précédemment nous a permis de mettre en évidence l'influence du mode de calcul de la pension dans les comportements de départ. Afin de faciliter notre modélisation, nous voulons maintenant segmenter notre population grâce à des variables accessibles avant le calcul de la pension. Cette segmentation devra permettre la construction de groupes dont les comportements de départ seront le plus homogène possible. Nous pourrions ainsi affiner notre modèle, mais cette construction permettra également une segmentation des actifs aisée et rapide dans le cas d'une projection à grande échelle. Nous rappelons en effet que ce mémoire se concentre sur la modélisation des comportements de départ, mais il doit laisser la possibilité d'une véritable microsimulation sur l'ensemble de la population du régime et sur des durées beaucoup plus importantes

### 3.1 Sélection des variables de segmentation

Commençons tout d'abord par sélectionner un des six échantillons présentés plus haut. Celui-ci doit posséder l'effectif le plus élevé possible et permettre d'observer des comportements de départ le plus loin possible dans le temps. Nous retenons donc l'échantillon DOD 2009.

Remarque :

- *Ce choix présente un autre avantage. C'est cette population qui s'est vue offrir en premier le choix de partir à la retraite quand elle le souhaitait. Il est donc intéressant d'observer quels ont été les choix (peut-être alors un peu timides) des individus face à cette nouvelle possibilité. Le travail de modélisation consistera donc également à caractériser l'évolution (à "grossir le trait") de ces tendances.*

La méthode choisie pour effectuer notre découpage est l'Analyse en Composantes Principales. Cette méthode ayant fait l'objet d'une présentation dans les généralités, nous ferons ici directement référence à des résultats issus de cette présentation. Le lecteur pourra s'y reporter pour toute interrogation d'ordre technique.

La première étape de notre segmentation consiste à préparer les données pour l'ACP. Nous voulons repérer des variables influençant les comportements de départs. En d'autres termes, si l'on regroupe dans un tableau les individus par date de départ, nous voudrions connaître les différences caractérisant la formation de ces groupes. L'utilisation de l'ACP sur ce tableau sera donc appropriée puisqu'elle nous permettra de mettre en évidence les variables cachées (i.e. les composantes) responsables de l'hétérogénéité entre les groupes.

Nous avons donc construit un tableau de la forme suivante :

	Variable 1	...	Variable N
Individus groupe 1	<i>Moyenne de la variable 1 dans le groupe 1</i>	...	<i>Moyenne de la variable N dans le groupe 1</i>
...	...	...	...
Individus groupe K	<i>Moyenne de la variable 1 dans le groupe K</i>	...	<i>Moyenne de la variable N dans le groupe K</i>

Nous détaillons les groupes d'individus ci-dessous :

Libellé	Description des groupes
X0	Individus ayant liquidé dans le trimestre de leur ouverture de droits
X0.25	Individus ayant liquidé dans le 2 <sup>me</sup> trimestre suivant leur ouverture de droits
X0.5	Individus ayant liquidé dans le 3 <sup>me</sup> trimestre suivant leur ouverture de droits
...	...
inconnu	Individus dont la date de liquidation n'est pas encore connue

Nous détaillons les variables ci-après (voir page suivante) :

Libellé	Description des variables	Format
Sexe	Sexe des individus	1 = Hommes 2 = Femmes
nbenfref	Nombre d'enfants avant réforme	-
Tx_SS	Taux de travail sédentaire	de 0 à 1
COLL_ACTUEL	Collège au moment de la liquidation	1=Ouvriers 2=ETAM 3=Cadres
Salaire	Assiette de Salaire	Annuelle, en euros
KP DOD.0 <sup>2</sup>	Taux de remplacement à l'ouverture des droits	de 0 à 1
Gain KP DOD.i <sup>2</sup>	Gain de taux de remplacement i années après ouverture des droits	Gain additif
Surcote DOD.0	Coefficient de surcote à l'ouverture des droits	de 0 à 1
Gain Surcote DOD.i	Gain de surcote i années après ouverture des droits	Gain additif

Une première ACP sur notre tableau nous donne les résultats suivants (figures 3.1 et 3.2 page suivante) :

---

2. Notation ambiguë à corriger

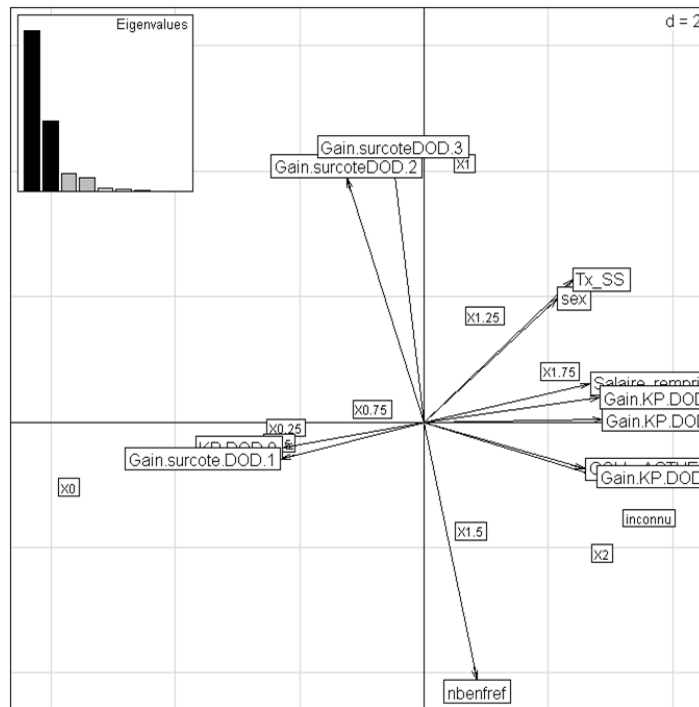


FIGURE 3.1 – Représentation des variables et des individus sur le premier plan factoriel

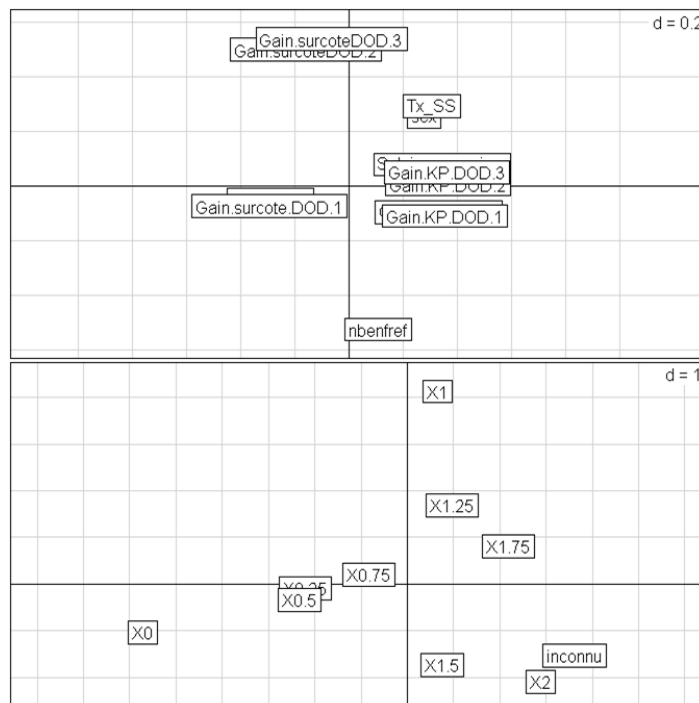


FIGURE 3.2 – Haut : Représentation des variables. Bas : Représentation des individus



Premièrement, on peut voir en haut à gauche de la figure 3.1 que le pourcentage de variance expliqué par les deux premiers axes semble satisfaisant, il est en effet de l'ordre de 80%. Notre analyse pourra donc se limiter à l'étude des deux premiers axes. La seconde chose que l'on remarque, c'est que l'on n'y voit pas très clair. En effet, de nombreuses variables semblent corrélées entre elles et forment donc des amas sur le plan. Nous allons procéder à la suppression de certaines d'entre elles. Les gains de taux de remplacement sont naturellement corrélés négativement avec le taux de remplacement à l'ouverture des droits, il semble en effet logique que plus le taux de remplacement est élevé, et moins les gains le sont. Ils constituent donc une information redondante que nous allons supprimer. Enfin, il est appréciable de remarquer que les individus sont bien éparpillés sur le plan, notamment X0, X1 et inconnu, ce qui signifie que l'ACP a mis en avant des différences de structures entre ces groupes.

Procédons maintenant à l'ACP sur le tableau duquel on a oté les gains de taux de remplacement (figures 3.3 et 3.4) :

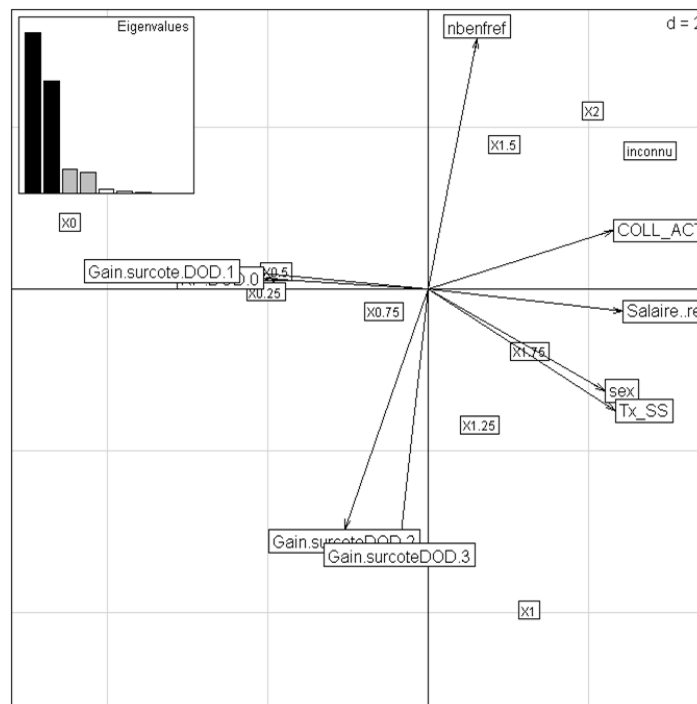


FIGURE 3.3 – Représentation des variables et des individus sur le premier plan factoriel

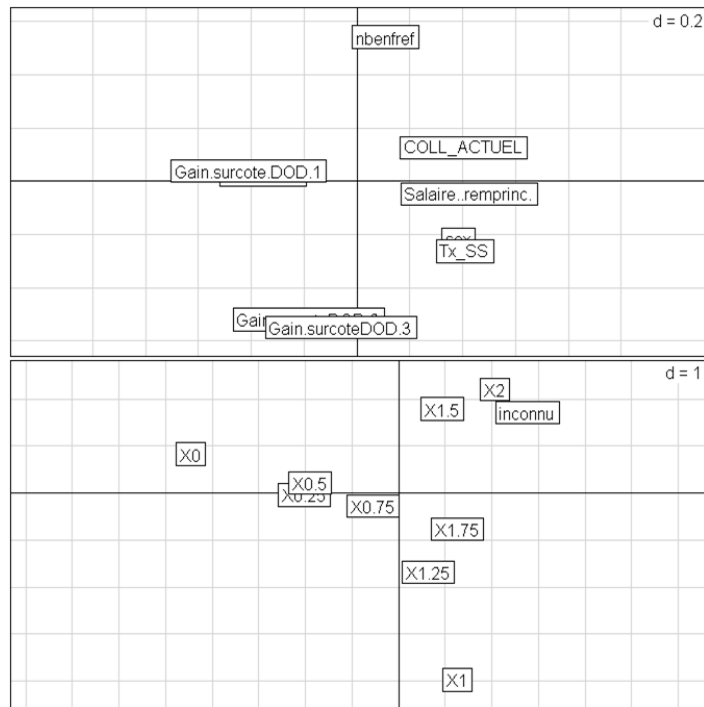


FIGURE 3.4 – Haut : Représentation des variables. Bas : Représentation des individus

Les gains surcote DOD+i sont difficilement interprétables, par exemple le gain surcote DOD+1 est très éloigné des départs en DOD+1. De plus, ces gains n'affectent pas la population homogènement, puisqu'il faut remplir certaines conditions pour bénéficier de la surcote, ils pourraient donc nous induire en erreur dans la construction de nos grandes classes. On pourrait en effet craindre qu'ils ne représentent une catégorie au lieu de représenter un comportement. Dans le doute, nous allons donc pour l'instant les enlever.

On obtient les résultats suivants (figures 3.5 et 3.6 page suivante) :

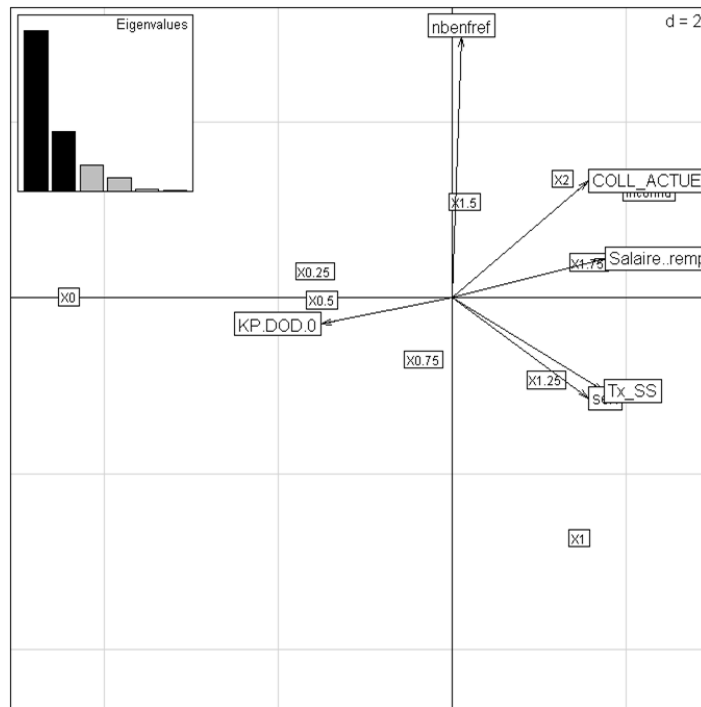


FIGURE 3.5 – Représentation des variables et des individus sur le premier plan factoriel

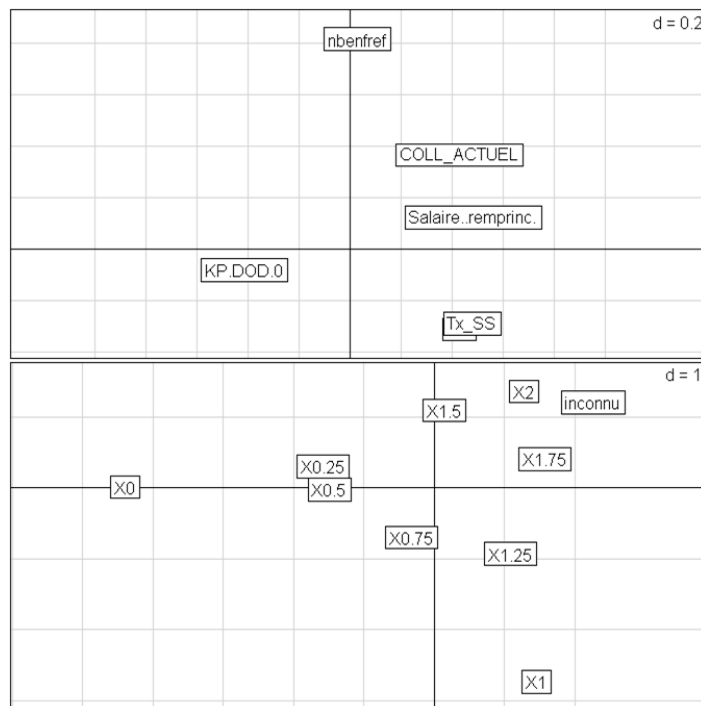


FIGURE 3.6 – Haut : Représentation des variables. Bas : Représentation des individus

Ce choix de variable semble judicieux. En effet, les individus sont bien étalés sur le premier plan factoriel et les variables ne s'entassent presque pas<sup>1</sup>. Il nous faut maintenant interpréter l'étalement de nos individus.

On peut commencer par remarquer que le premier axe semble essentiel puisqu'il sépare les départs inférieurs à 1 an des autres. Il oppose la variable KPDOD.0 aux variables salaire et collège. Le fait qu'il soit formé à droite par ces deux dernières variables nous permet de l'interpréter comme étant l'axe des richesses. Nous rappelons ici que les groupes que nous voulons former doivent dépendre de variables accessibles sans calculer la pension. Le fait que le taux de remplacement à l'ouverture des droits soit négativement corrélé aux richesses nous arrange puisque nous avons vu qu'il jouait un rôle important dans les décisions de départ. Nous ne pouvons néanmoins pas le retenir comme une variable constitutive de nos groupes pour la raison rappelée juste avant.

Le deuxième axe est construit par les variables sexe, nombre d'enfants et Tx\_SS. Cet axe nous semble plus difficile à interpréter. Nous nous contenterons donc ici de noter que nos groupes devront tenir compte des sexes des individus ainsi que de leur activité<sup>2</sup>. Le nombre d'enfants n'est pas retenu dans la constitution des groupes car nous ne pouvons pas prendre en compte de trop nombreuses variables. De plus, nous rappelons que seules les femmes peuvent bénéficier d'avantages liés à leur nombre d'enfants, on peut donc penser que le fait de tenir compte du sexe dans notre segmentation tiendra implicitement compte de la variable nombre d'enfants.

## 3.2 Construction et analyse des strates

### 3.2.1 Construction des strates

La partie précédente nous a permis de dégager trois variables responsables de l'hétérogénéité des comportements de départ à la retraite. Ces variables, le niveau de richesse, l'activité au sein de l'entreprise et le sexe présentent l'avantage d'être accessibles sans calculer la pension. Il nous faut maintenant constituer des groupes respectant ces contraintes tout en tenant compte des spécificités du régime. Nous avons donc choisi de créer un groupe contenant toutes les femmes, celles-ci bénéficiant d'avantages particuliers. Nous avons ensuite regroupé les hommes bénéficiant des plus importantes anticipations pour service actif dans le groupe "Actif". Ceux ne bénéficiant d'aucune anticipation ont été placés dans le groupe "Sédentaire". Enfin, le reste des hommes constitue le groupe "Mixte". Afin de vérifier que ce découpage tient bien compte des variables choisies dans la partie précédente, nous avons ventilé notre tableau de données par ces nouveaux groupes. Plus précisément, nous avons reconstruit notre précédent tableau avec les groupes suivants :

---

1. on remarque tout de même que les variables sexe et Tx\_SS sont au même endroit  
2. au sens sédentaire ou active

Libellé	Description des groupes
Actif 0	Individus a appartenant au groupe "Actif" et ayant liquidé dans le trimestre de leur ouverture de droits
Actif 0.25	Individus a appartenant au groupe "Actif" et ayant liquidé dans le 2 <sup>me</sup> trimestre suivant leur ouverture de droits
...	...
Actif inconnu	Individus appartenant au groupe "Actif" et dont la date de liquidation n'est pas encore connue
Sédentaire 0	Individus a appartenant au groupe "Sédentaire" et ayant liquidé dans le trimestre de leur ouverture de droits
Sédentaire 0.25	Individus a appartenant au groupe "Sédentaire" et ayant liquidé dans le 2 <sup>me</sup> trimestre suivant leur ouverture de droits
...	...
Sédentaire inconnu	Individus appartenant au groupe "Sédentaire" et dont la date de liquidation n'est pas encore connue
Mixte 0	Individus a appartenant au groupe "Mixte" et ayant liquidé dans le trimestre de leur ouverture de droits
Mixte 0.25	Individus a appartenant au groupe "Mixte" et ayant liquidé dans le 2 <sup>me</sup> trimestre suivant leur ouverture de droits
...	...
Mixte inconnu	Individus appartenant au groupe "Mixte" et dont la date de liquidation n'est pas encore connue
Femme 0	Individus a appartenant au groupe "Femme" et ayant liquidé dans le trimestre de leur ouverture de droits
Femme 0.25	Individus a appartenant au groupe "Femme" et ayant liquidé dans le 2 <sup>me</sup> trimestre suivant leur ouverture de droits
...	...
Femme inconnu	Individus appartenant au groupe "Femme" et dont la date de liquidation n'est pas encore connue

Dans un but purement illustratif, nous lui avons appliqué une ACP, pour voir si celle-ci séparait bien nos nouveaux groupes, ce qui confirmerait que notre segmentation était judicieuse.

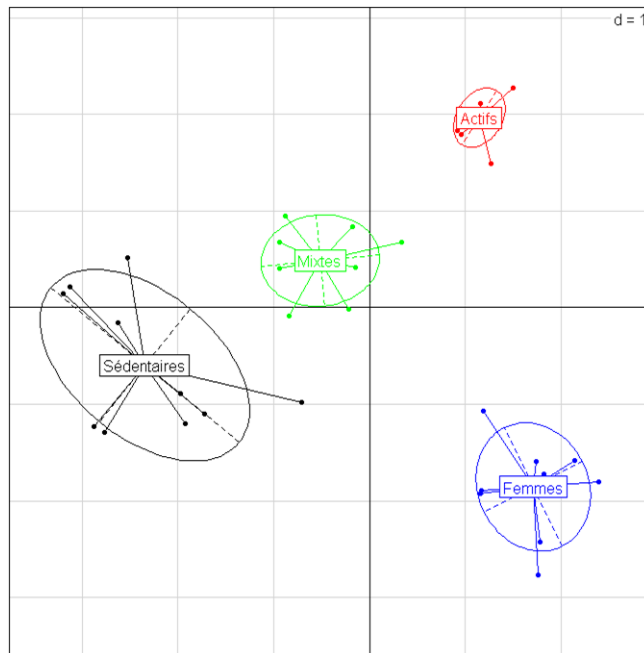


FIGURE 3.7 – Représentation des individus sur le premier plan factoriel avec regroupement des individus par classe

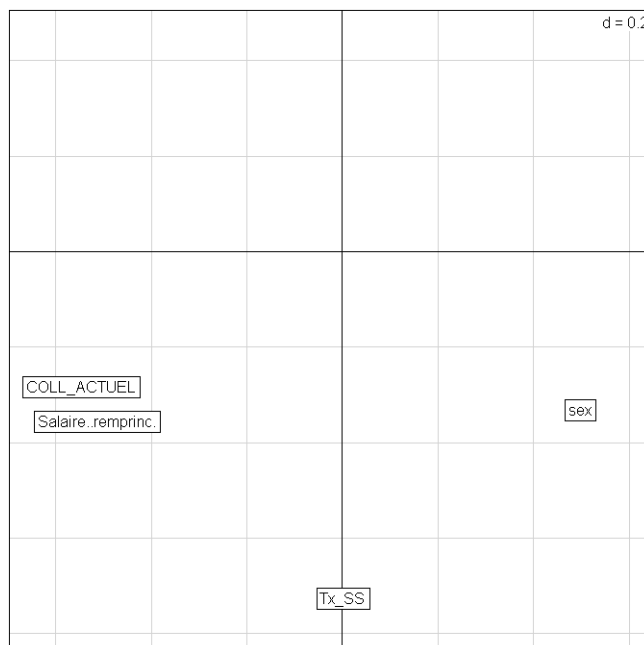


FIGURE 3.8 – Représentation des variables

Nos groupes sont clairement séparés. Notre segmentation est donc satisfaisante. Notre travail va maintenant consister à expliquer les dispersion à l'intérieur de chacun de ces groupes.

### **3.2.2 Analyse des strates par ACP**

#### **Les Actifs**

L'agrégation des actifs par délai de sortie nous donne les résultats suivants :

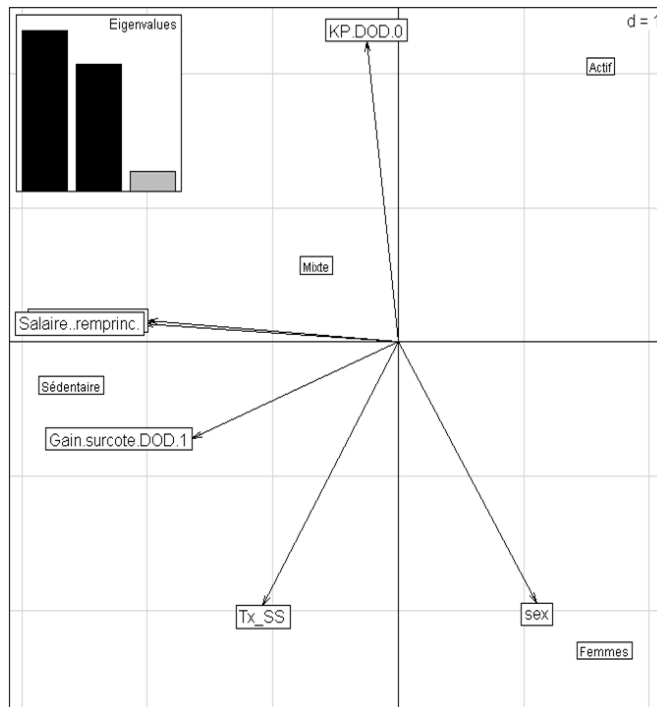


FIGURE 3.9 – Actifs : Représentation des variables et des individus

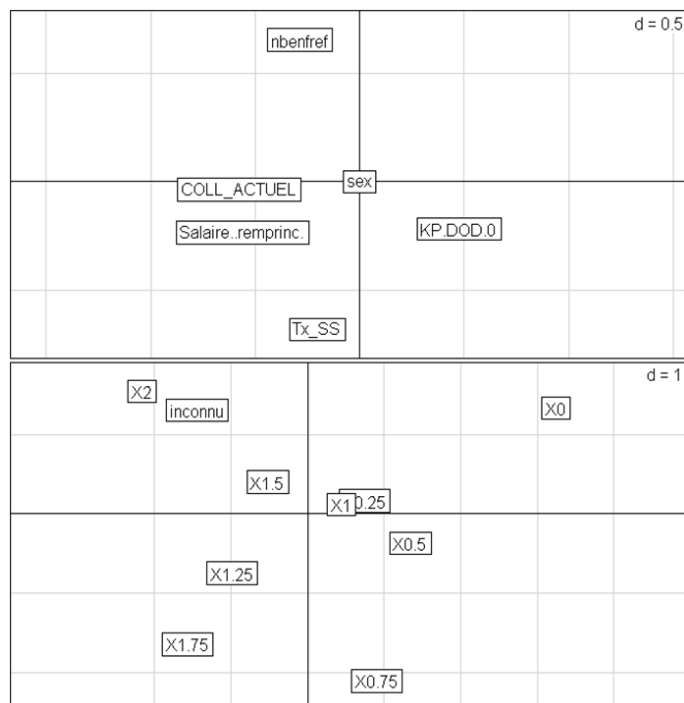


FIGURE 3.10 – Haut : Représentation des variables. Bas : Représentation des individus



Nous n'avons pas intégré les gains de surcote dans cette analyse car ils ne concernaient pas les actifs, ceux-ci ayant un âge d'ouverture des droits inférieur à 60 ans. On remarque que l'axe 1 oppose le taux de remplacement aux richesses. L'axe 2 est quant à lui représentatif des différences de taux de service sédentaire et du nombre d'enfants entre les différents groupes. Cette dispersion n'étant en réalité pas intéressante puisque très faible parmi les actifs, nous ne retiendrons que l'analyse de l'axe 1. Les agents ayant un taux de remplacement élevé à l'ouverture des droits (et n'ayant donc ici pas un haut niveau de richesse) partent immédiatement. Ensuite, le taux de remplacement (et le niveau de richesse) diminue progressivement jusqu'à atteindre son minimum pour les agents dont le départ n'est pas encore connu. On remarquera tout de même que les individus partis au bout d'un an sont légèrement décalés vers la droite. Il sera intéressant de voir si cette anomalie nous gênera plus tard lors de la modélisation.

Pour illustrer notre interprétation, nous avons pour certaines variables regroupé nos point individus en deux classes. La première contiendra les individus dont la valeur de cette variable est supérieure à la moyenne, et la seconde contiendra les autres :

Classes en fonction de la variables taux de remplacement à l'ouverture des droits :

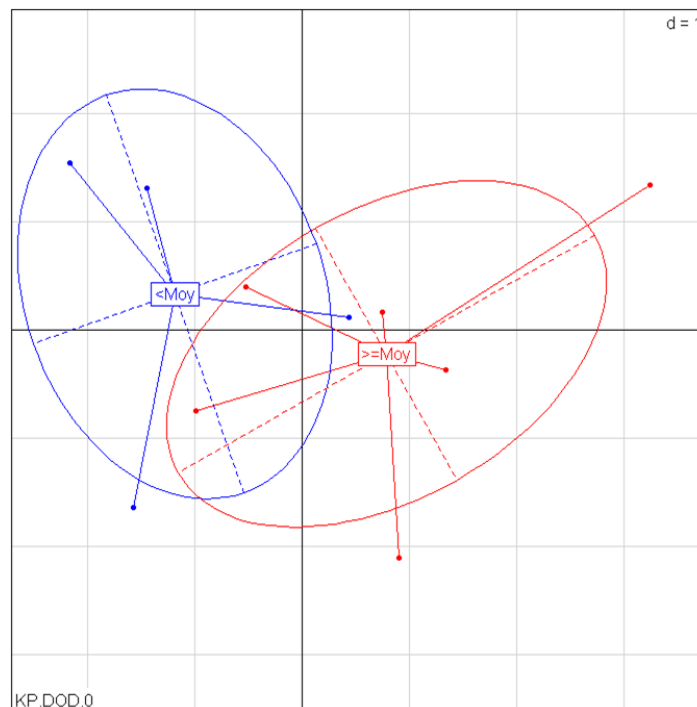


FIGURE 3.11 – Actifs : Classes en fonction de la variable taux de remplacement à l'ouverture des droits

Notre interprétation est confirmée même si l'on voit bien ici que le point-individu 1 n'est pas à sa place.

Classes en fonction de la variable salaire :

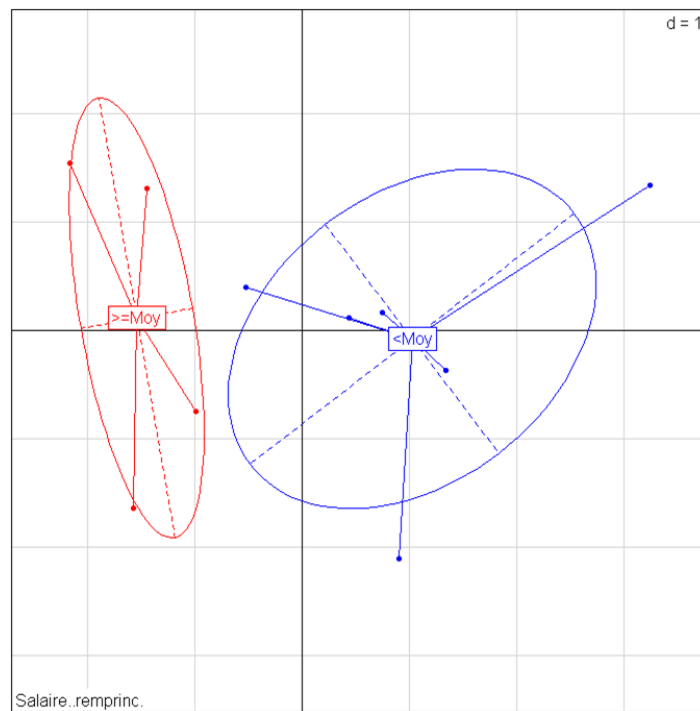


FIGURE 3.12 – Actifs : Classes en fonction de la variables salaire

## Les Sédentaires

L'aggrégation des sédentaires par délai de sortie nous donne les résultats suivants (figures 3.13 et 3.14) :

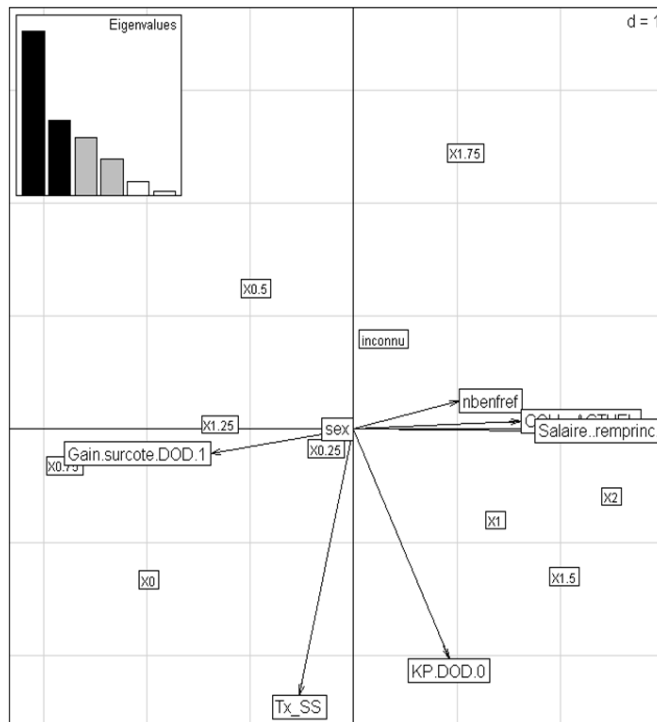


FIGURE 3.13 – Sédentaires : Représentation des variables et des individus

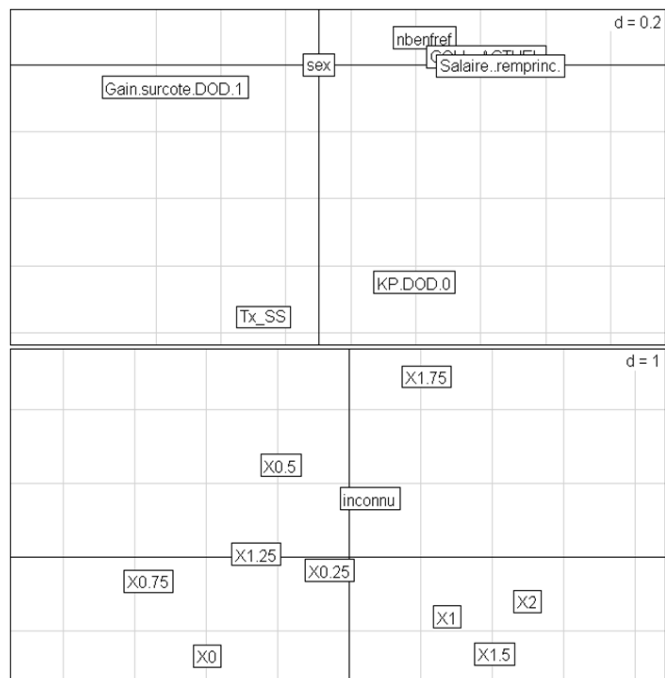


FIGURE 3.14 – Haut : Représentation des variables. Bas : Représentation des individus

Nous avons ajouté le gain de surcote à la liste des variables car de nombreuses personnes sont concernées chez les sédentaires. Nous n'avons laissé que le gain surcote DOD+1 car les gains de surcote étaient tous corrélés, il suffit donc à l'interprétation.

On remarque que l'axe 1 est celui des richesses car il étale de gauche à droite les individus du salaire le moins élevé au plus élevé. L'axe 2 est celui du taux de remplacement, les individus sont répartis de bas en haut du taux de remplacement le plus fort au plus faible.

Compte tenu du faible nombre d'agents par classes, nous ne pouvons interpréter avec fiabilité que les individus partis dans leur premier trimestre et ceux dont la date de départ n'est pas connue.

On remarque surtout que les départs en 0 sont des agents au faible niveau de richesse et au taux de remplacement élevé (en bas à gauche du graphique). Toujours à gauche, mais plus haut, les autres agents au faible niveau de richesse mais au taux de remplacement moins élevé sont partis un peu plus tard dans l'année (départs en 0,25 ainsi qu'en 0,5 et ,075). On note une exception : 1,25. A l'inverse sur le coté droit du graphique les agents ayant un taux de remplacement élevé mais ayant également un niveau de richesse élevé ont tout de même attendu entre 1 et 2 ans pour partir. Les agents dont la date de départ est inconnue ont un taux de remplacement faible mais un niveau de richesse légèrement supérieur à la moyenne.

Cette interprétation est confirmée par les graphes suivants :

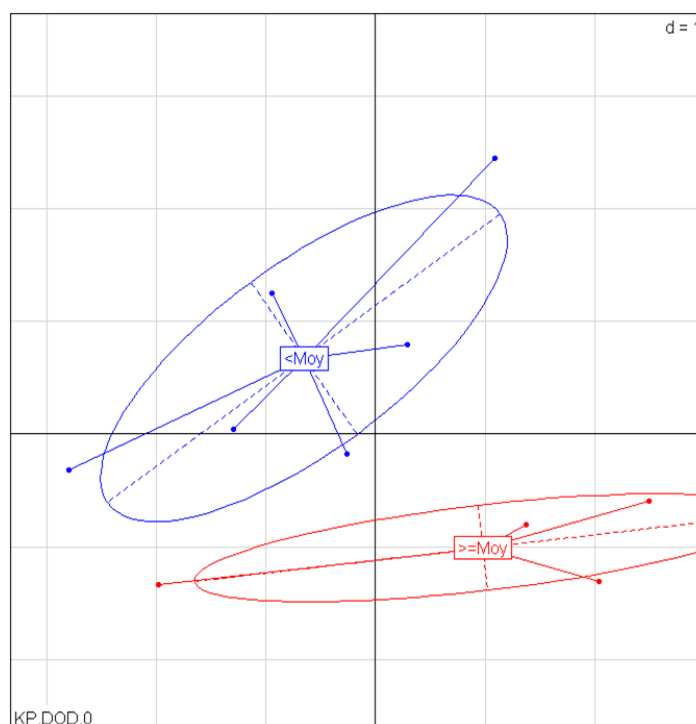


FIGURE 3.15 – Sédentaires : Classes en fonction de la variables taux de remplacement à l'ouverture des droits

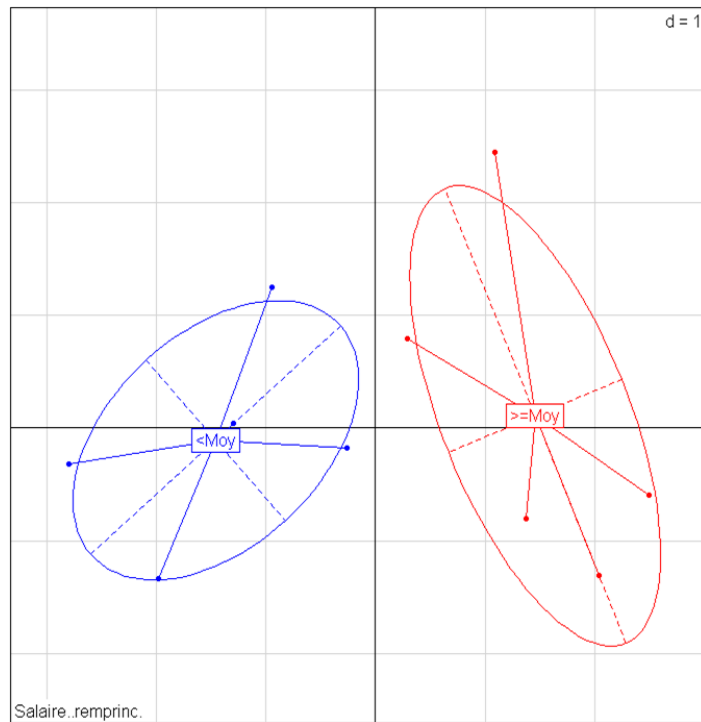


FIGURE 3.16 – Sédentaires : Classes en fonction de la variables salaire

### Les Femmes

L'agrégation des Femmes par délai de sortie nous donne les résultats suivants (figures 3.17 et 3.18) :

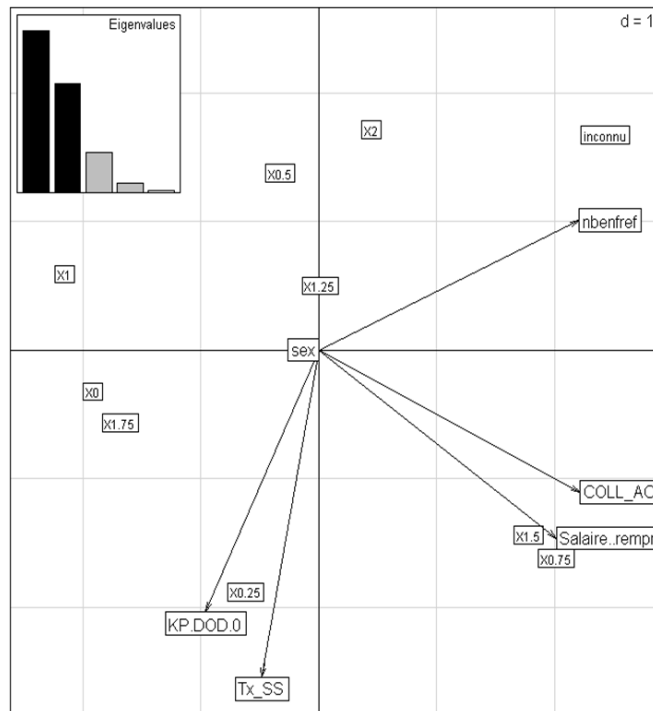


FIGURE 3.17 – Femmes : Représentation des variables et des individus

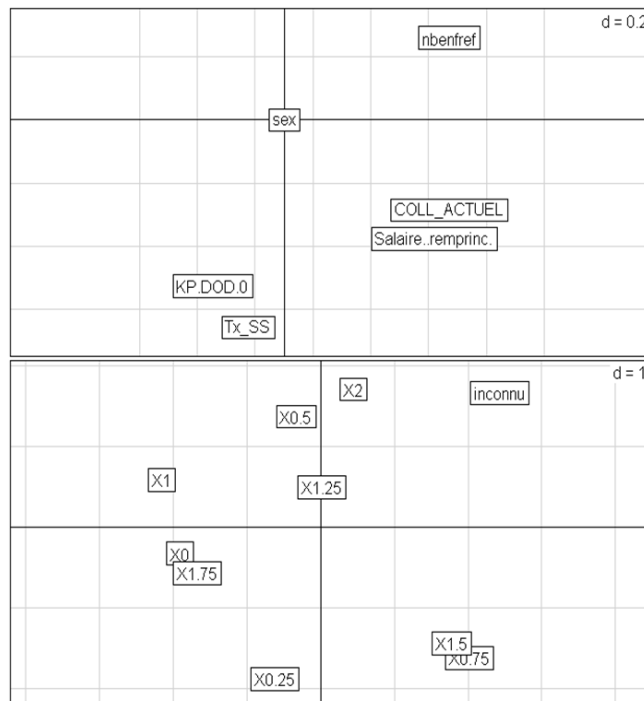


FIGURE 3.18 – Haut : Représentation des variables. Bas : Représentation des individus

Cette ACP est moins facile à interpréter car elle ne répartit pas les individus par ordre de départ, on remarque par exemple que les individus notés X0 sont proches des X1,75. Seuls les agents dont la date de départ est inconnue sont isolés comme on le souhaiterait. Il semble que ce soit la variable nombre d'enfants qui soit responsable de cet isolement.

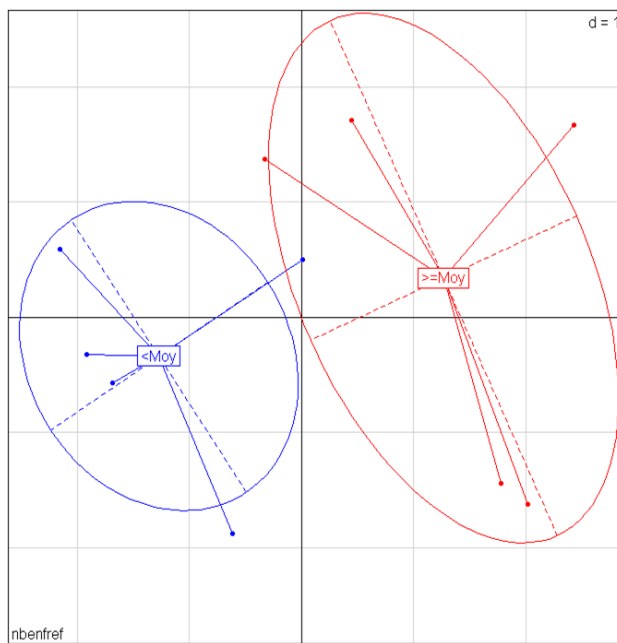


FIGURE 3.19 – Femmes : Classes en fonction de la variable nombre d'enfants

En effet, les enfants donnent droit à des bonifications réduisant l'âge d'ouverture des droits, ce sont donc les femmes avec de nombreux enfants qui ont une ouverture des droits précoce et qui restent cotiser jusqu'à atteindre un âge "normal" de liquidation. On peut également appliquer ce raisonnement à la variable Tx\_SS.

Ces deux variables (nombre d'enfants et taux SS) ont en fait déformé l'ACP que nous avons pris l'habitude de voir. On remarque en effet en traçant nos classes<sup>3</sup> que les groupes d'individus dont le taux de remplacement est inférieur à la moyenne sont les agents partis après plus d'un an (1 et 1,25 et 2 et inconnu). Seuls les agents partis en 1,5 et 1,75 ne suivent pas cette logique du fait de leurs bonifications pour enfants. Du point de vue des richesses, on retrouve bien notre découpage des analyses précédentes, les agents les plus riches partant plus tard (à l'exception de 2).

3. figures 3.20 et 3.21 page suivante

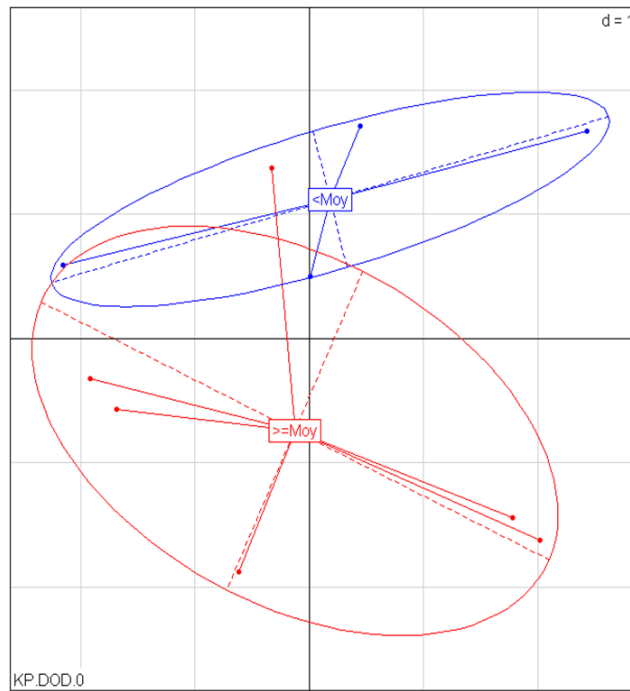


FIGURE 3.20 – Femmes : Classes en fonction de la variables taux de remplacement à l’ouverture des droits

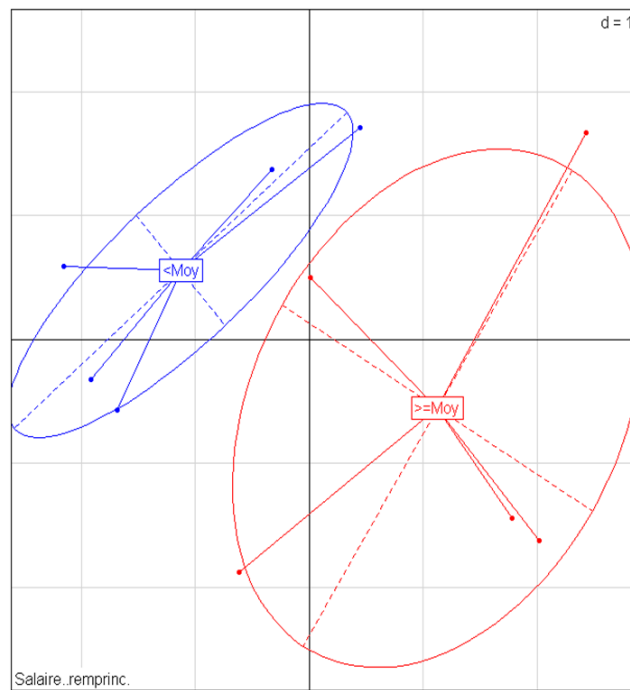


FIGURE 3.21 – Femmes : Classes en fonction de la variables salaire



## **Les Mixtes**

Pour la population mixte, nous nous contentons de présenter les résultats (figures 3.22 à 3.25), l'interprétation étant identique à celle effectuée pour les sédentaires.

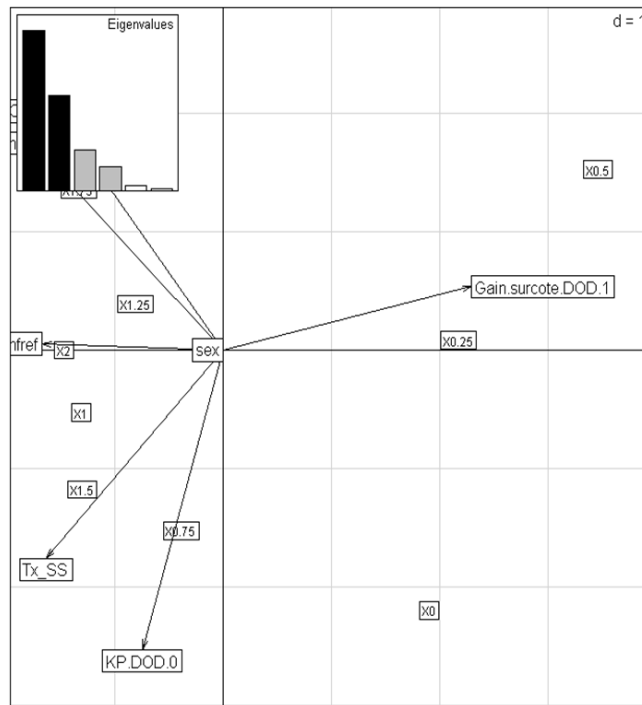


FIGURE 3.22 – Mixtes : Représentation des variables et des individus

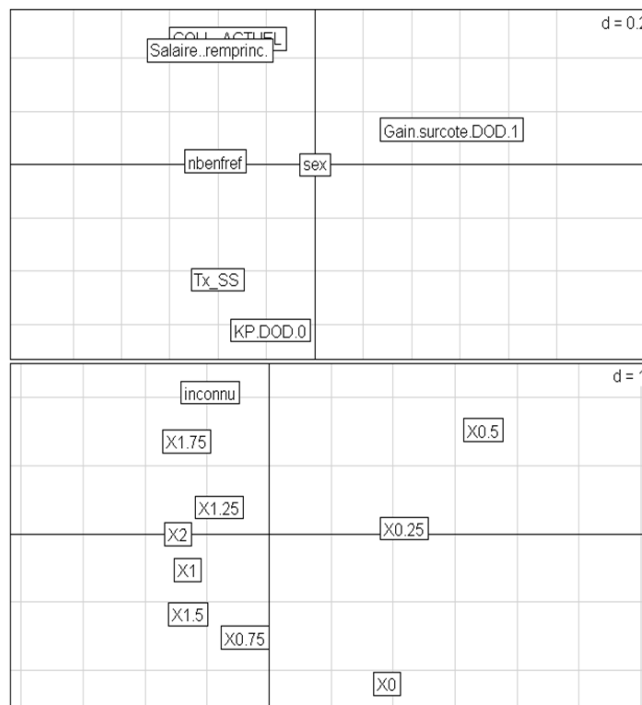


FIGURE 3.23 – Haut : Représentation des variables. Bas : Représentation des individus

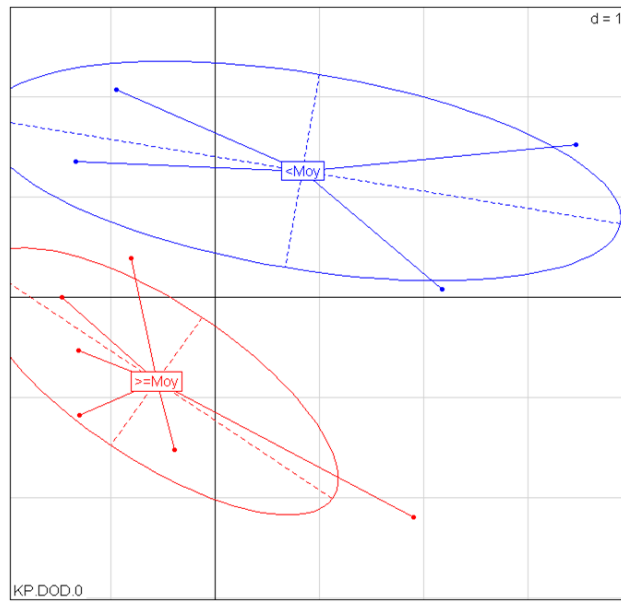


FIGURE 3.24 – Mixtes : Classes en fonction de la variables taux de remplacement à l'ouverture des droits

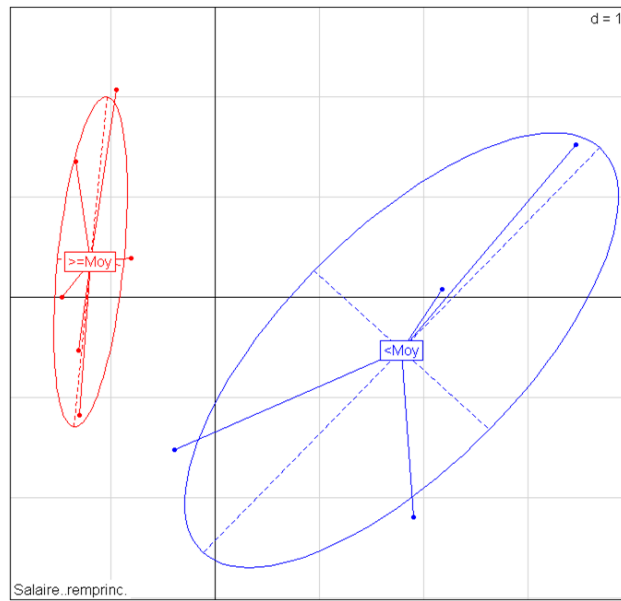


FIGURE 3.25 – Mixtes : Classes en fonction de la variables salaire

### 3.3 Analyse des départs par strates

Dans les ACP précédentes, nous avons étudié les causes de départ des individus à l'intérieur de nos strates. Nous allons maintenant, grâce à des statistiques descriptives, observer ces comportements sur plusieurs années. Cette analyse permettra également de prendre en compte le volume des effectifs de chaque strate.

Commençons donc par observer les effectifs de nos strates :

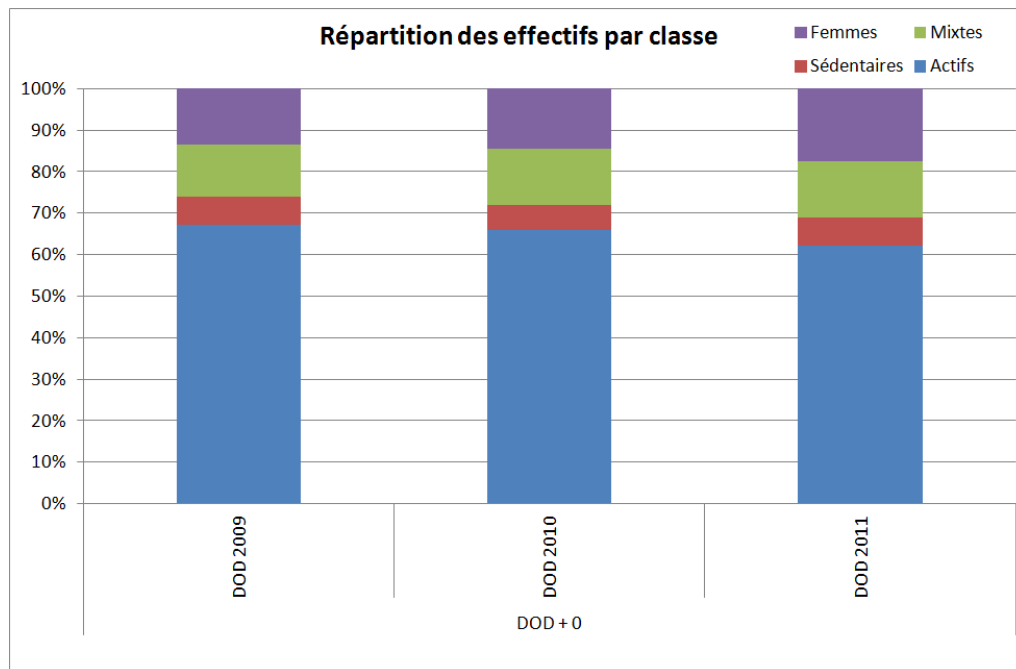


FIGURE 3.26 – Répartition des strates au sein des effectifs

On remarque que les actifs sont très largement majoritaires alors que les Sédentaires sont minoritaires. Il est aussi intéressant de noter que la répartition des classes est relativement stable au cours du temps. Intéressons-nous maintenant aux taux de liquidation de ces classes.

#### 3.3.1 Taux de liquidation

Observons tout d'abord les taux de liquidations cumulés des Actifs (figure 3.27) :

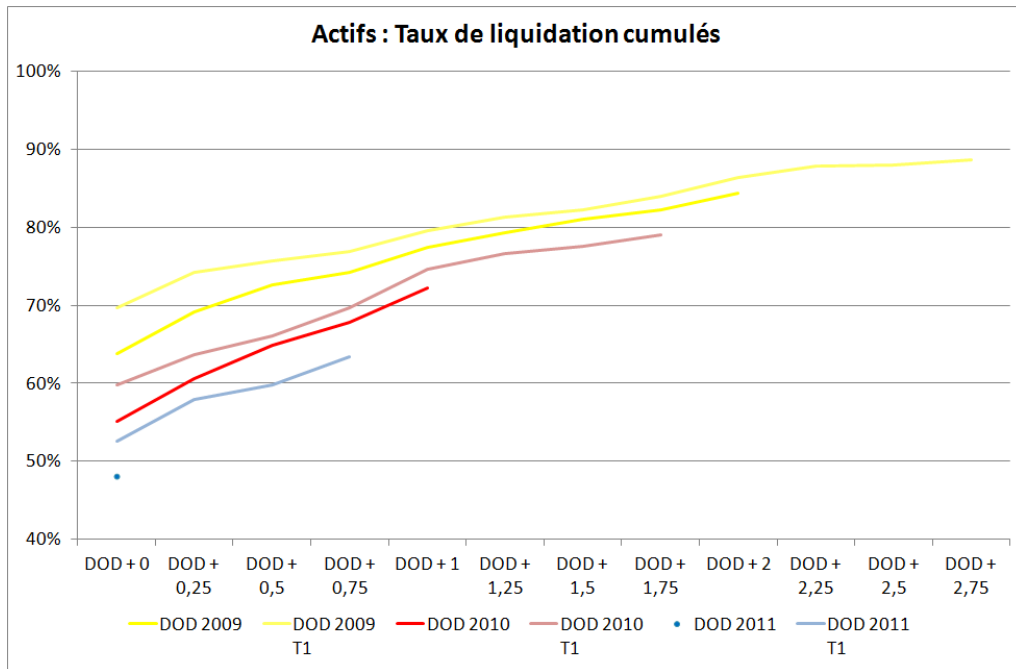


FIGURE 3.27 – Taux de liquidation des Actifs

Les actifs ont des taux de liquidation très élevés. Il sera intéressant de voir par la suite si cela traduit un comportement particulier de cette classe où si c'est simplement parce qu'ils ont des taux de remplacement suffisamment élevés à l'ouverture des droits. On retrouve bien les écarts de taux entre les différentes années d'ouverture de droits que l'on avait observé sur la population totale. Les réformes ont donc impacté les comportements des agents de cette classe.

Intéressons-nous maintenant aux taux de liquidation des autres classes (graphes 3.28 à 3.30) :

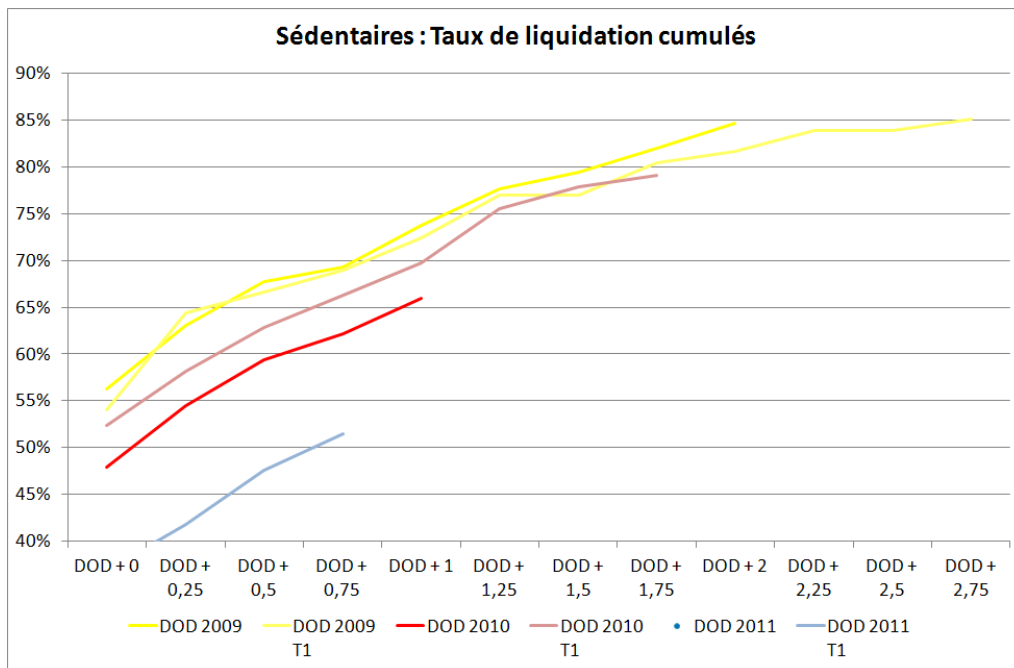


FIGURE 3.28 – Taux de liquidation des Sédentaires

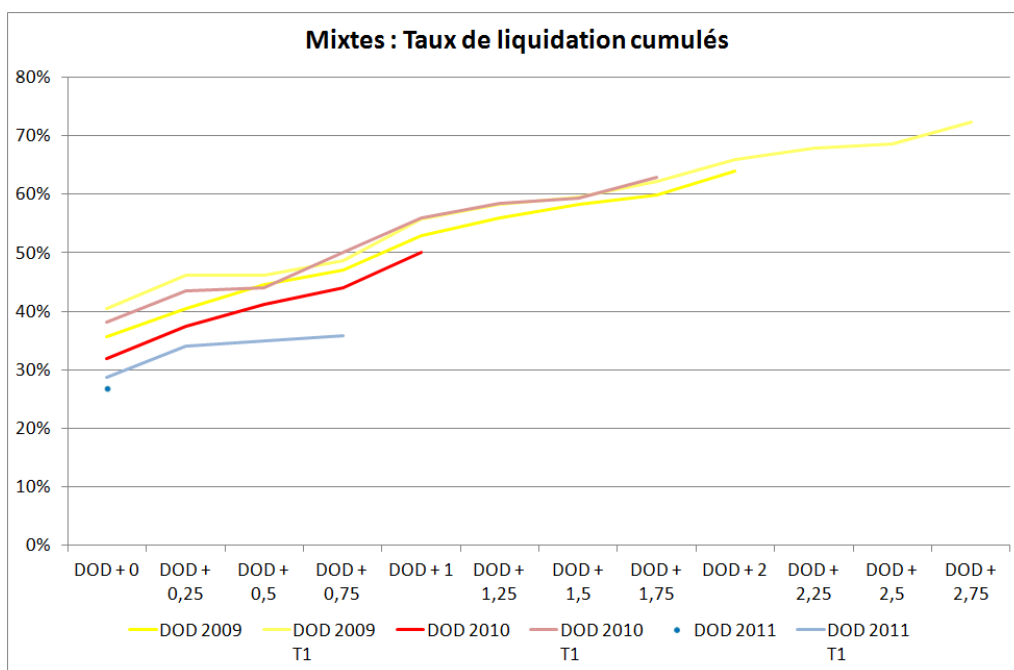


FIGURE 3.29 – Taux de liquidation des Mixtes

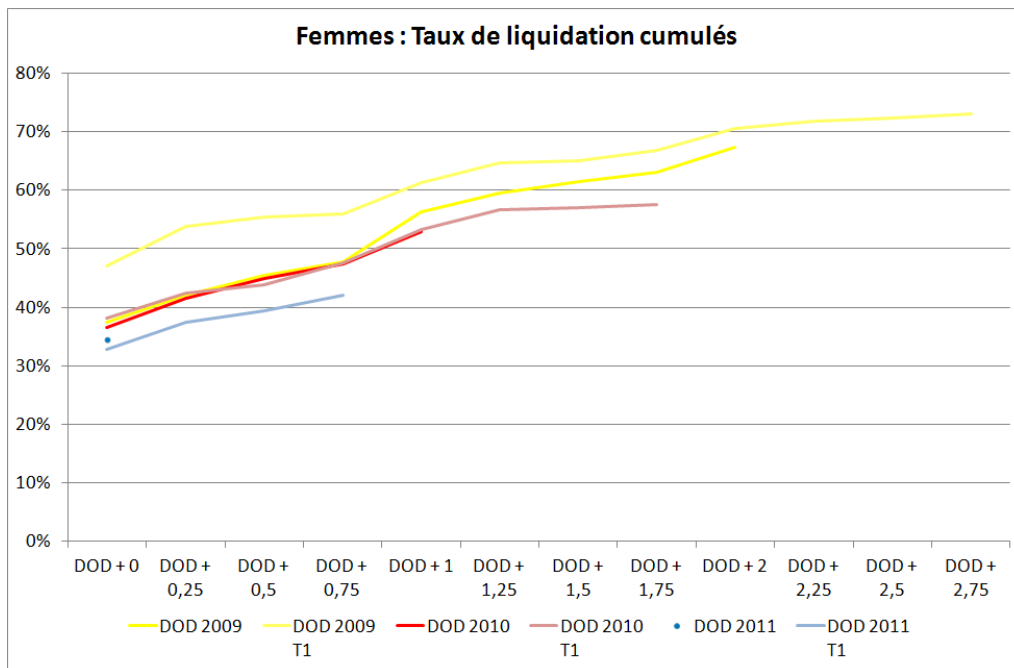


FIGURE 3.30 – Taux de liquidation des Femmes

Les Sédentaires, Mixtes, et Femmes ont des taux de liquidation relativement bas, avec un minimum de 27% à l'ouverture des droits atteint par les mixtes. On note un écart de taux très important chez les sédentaires entre les agents ayant eu leur DOD en 2011 et les autres. Nous essaierons de savoir plus tard si cet écart est imputable à l'arrivée de la décote. D'une manière générale, on remarque que les écarts de taux sont tout de même plus resserrés que chez les actifs. Nous essaierons donc de savoir si cette différence traduit le fait que les réformes ont eu moins d'effets sur ces classes ou si leurs taux de remplacement à l'ouverture des droits sont tout simplement trop faibles et atténuent donc les effets des réformes.

### 3.3.2 Taux de remplacement

Afin de vérifier si les différences de taux de liquidation entre les classes sont dues à des différences de comportements pures ou si elles découlent des différences inhérentes aux activités des classes, nous allons observer les taux de remplacement à la liquidation (graphes 3.31 à 3.34) :

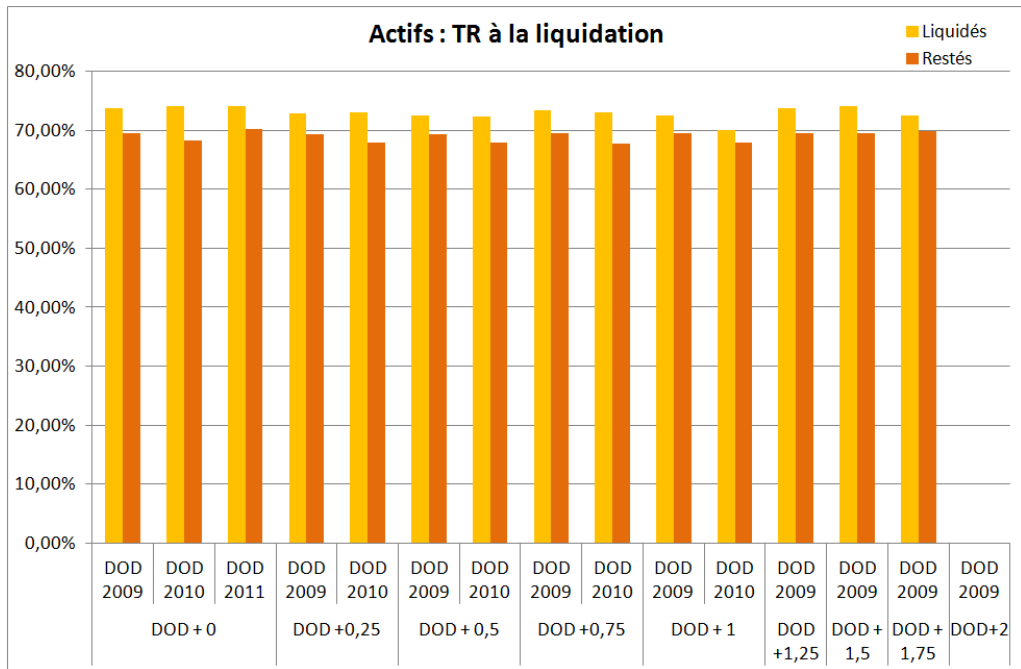


FIGURE 3.31 – Taux de remplacement des Actifs

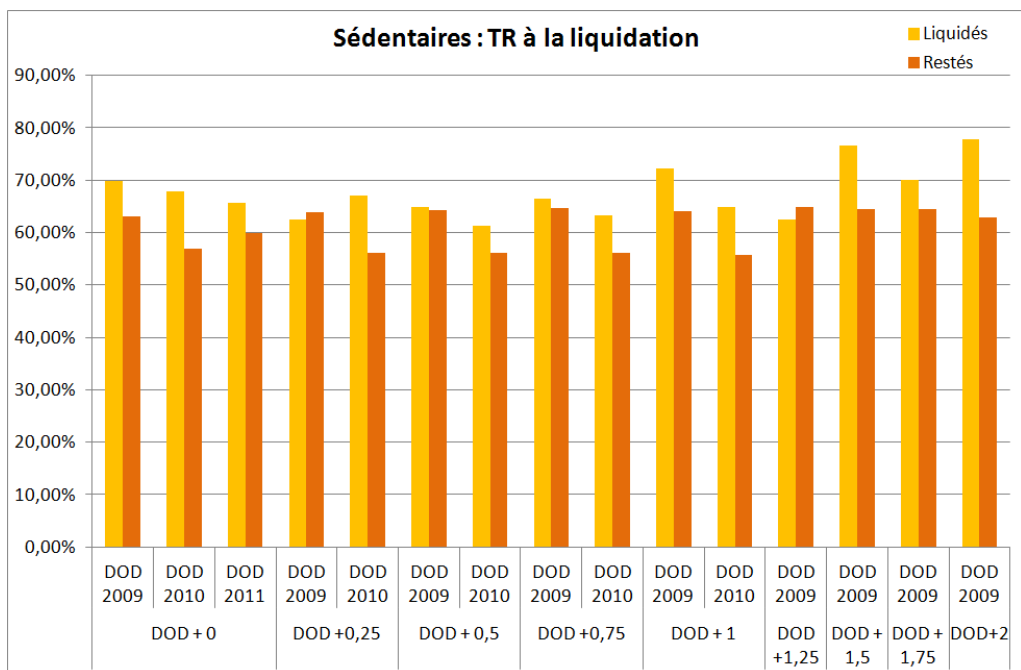


FIGURE 3.32 – Taux de remplacement des Sédentaire



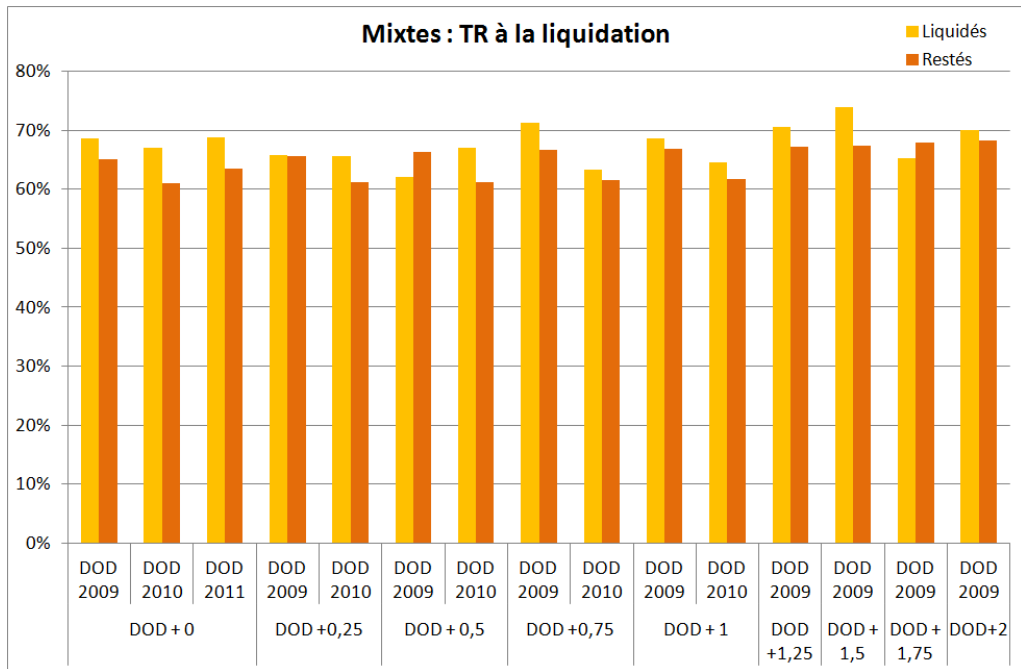


FIGURE 3.33 – Taux de remplacement des Mixtes

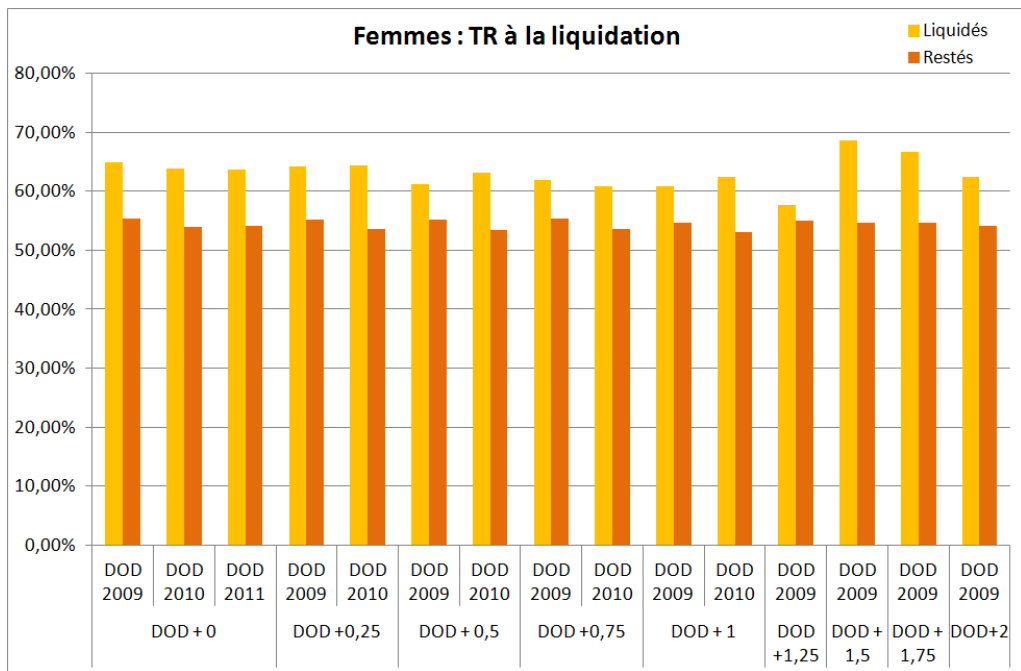


FIGURE 3.34 – Taux de remplacement des Femmes

On remarque tout d'abord que les taux de remplacement des actifs sont les plus élevés de toutes les classes. De plus, on retrouve un écart stable entre les taux de remplacement des liquidés et ceux des restés, ils semblent donc bien suivre une logique de recherche de taux de remplacement assez précis. Ceci pourrait donc expliquer que leurs taux de liquidation soient si élevés.

Chez les sédentaires et les mixtes, les écarts entre les taux de remplacement des liquidés et des non liquidés ne sont pas stables. Il est donc possible qu'ils suivent la même logique que les actifs, c'est-à-dire qu'ils sont en général à la recherche d'un certain taux de remplacement pour liquider, mais qu'ils l'atteignent assez tard, ce qui expliquerait leurs taux de liquidation assez bas. Ceux qui liquident avant d'atteindre cet objectif (ceux qu'on peut observer sur le graphe) auraient abandonné l'objectif et c'est pourquoi leurs taux de liquidations seraient plus erratiques.

Les femmes quant à elles semblent bien suivre la logique de l'objectif de taux de remplacement. Par contre, le taux de remplacement recherché est plus bas que chez les hommes.

### **3.3.3 Surcote**

Intéressons nous maintenant à la surcote, grâce aux résultats suivant (graphes 3.35 à 3.37) :

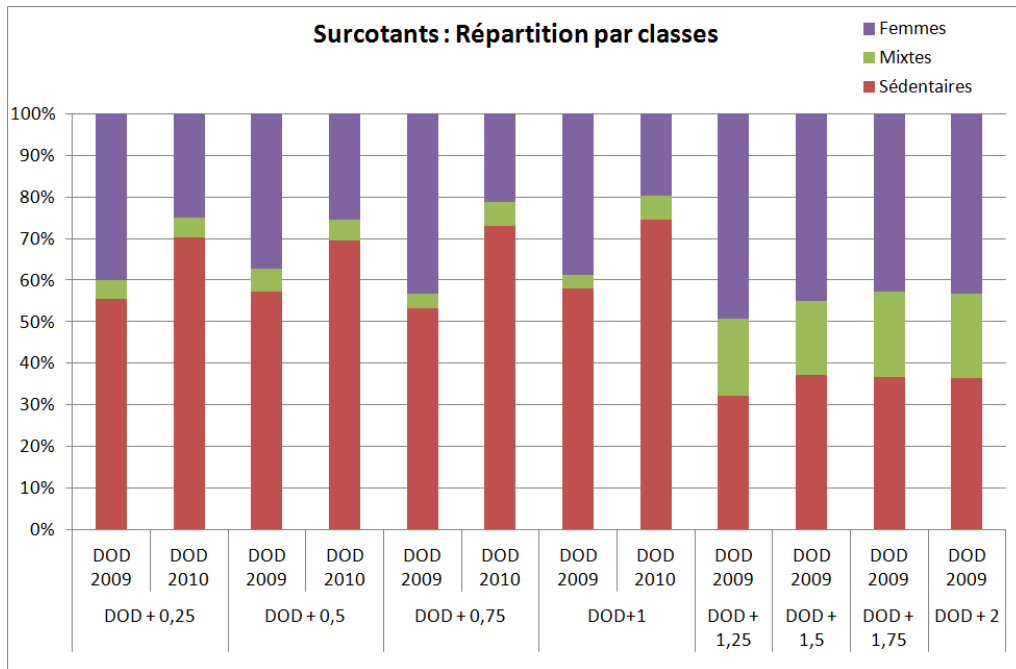


FIGURE 3.35 – Répartition des surcotants par classes

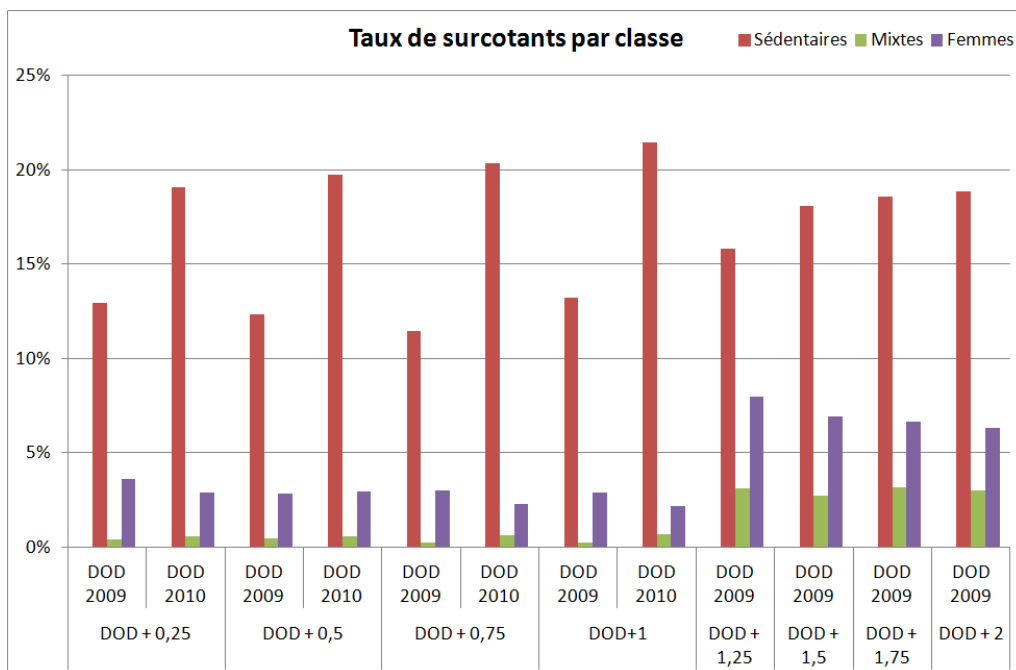


FIGURE 3.36 – Répartition des surcotants au sein des classes

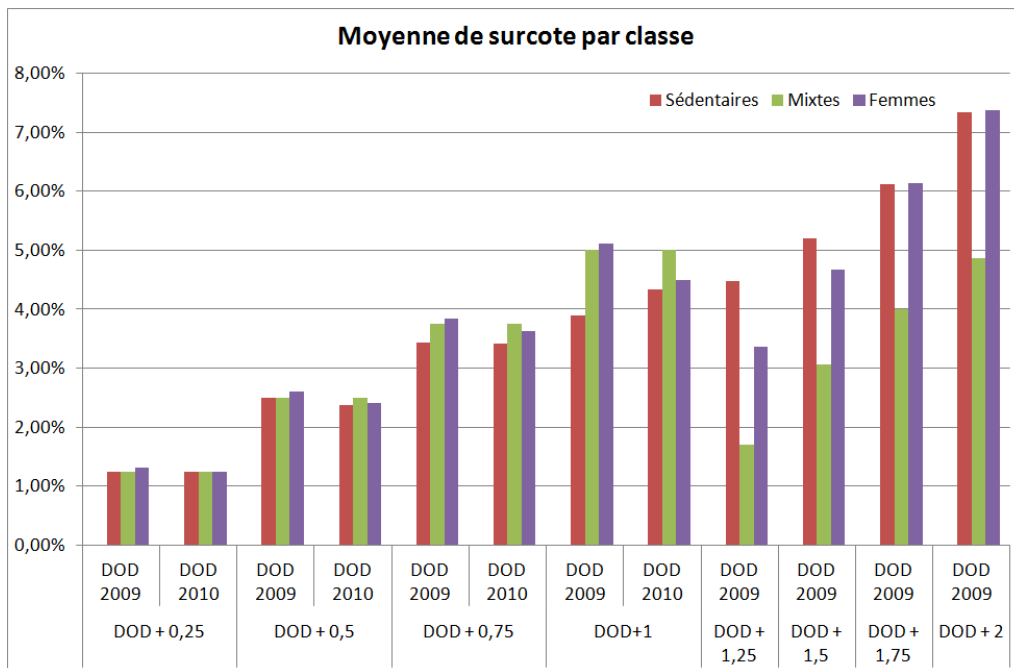


FIGURE 3.37 – Moyenne de surcote au sein des classes

On note qu'aucun actif ne surcote, ce qui s'explique du fait de leur âge d'ouverture des droits très bas. Les moyennes de surcotes sont à peu près les mêmes pour toutes les classes. On remarque que c'est chez les sédentaires que l'on retrouve la plus grande proportion de surcotants. Nous avons émis plus haut l'hypothèse qu'ils seraient à la recherche d'un certain taux de remplacement pour partir à la retraite, il serait donc logique qu'ils restent plus longtemps et qu'ils cherchent à surcoter pour atteindre cet objectif

### 3.3.4 Décote

Nous allons maintenant nous pencher sur l'une des variables principales de notre étude, la décote (graphes 3.38 à 3.40) :

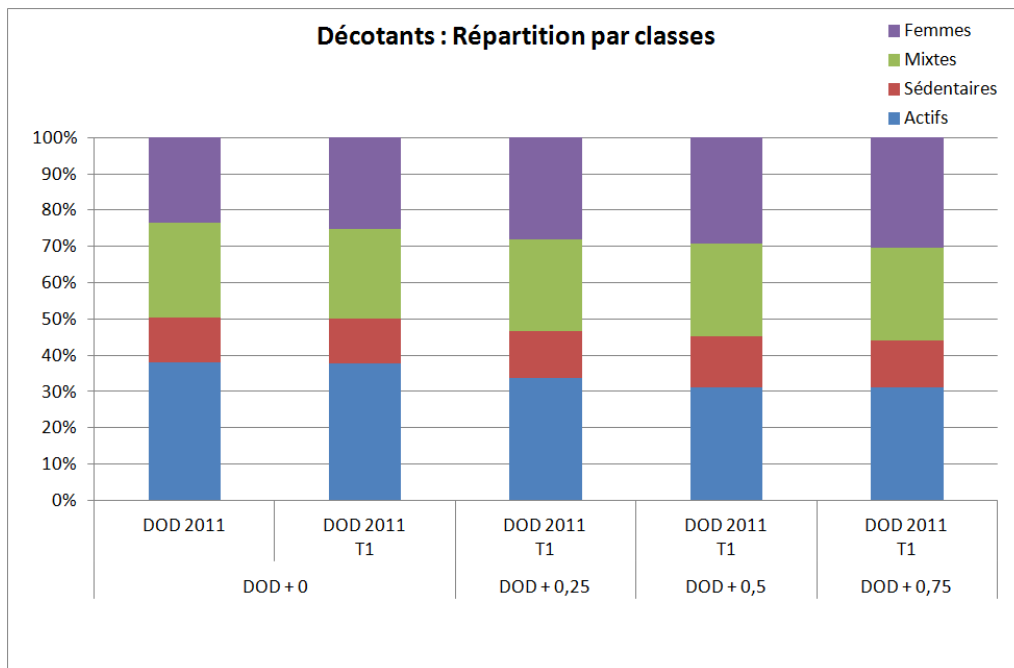


FIGURE 3.38 – Répartition des surcotants par classes

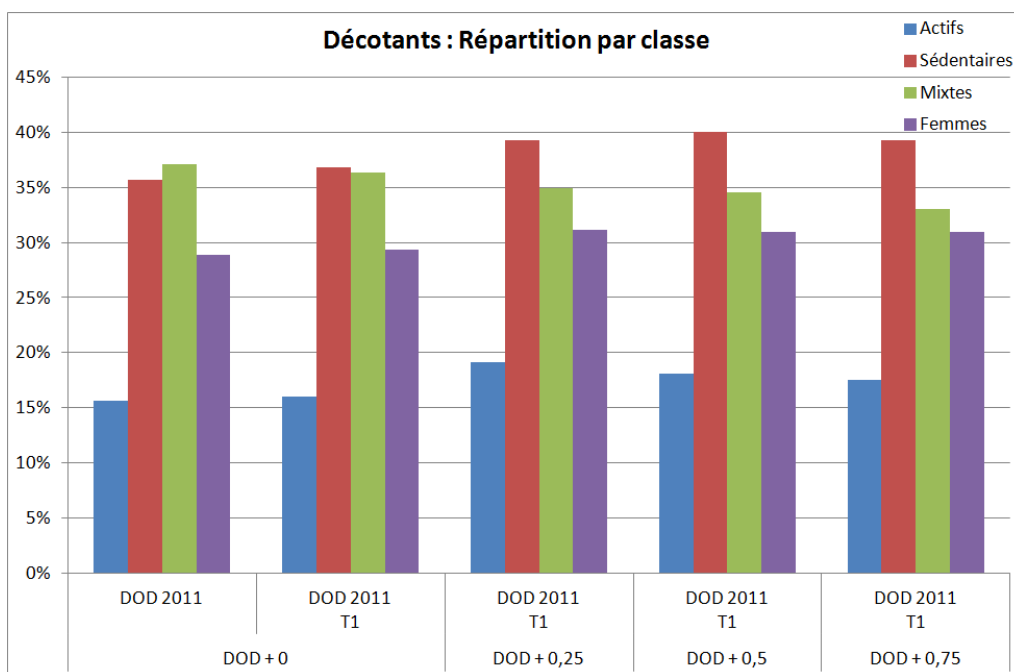


FIGURE 3.39 – Répartition des surcotants au sein des classes

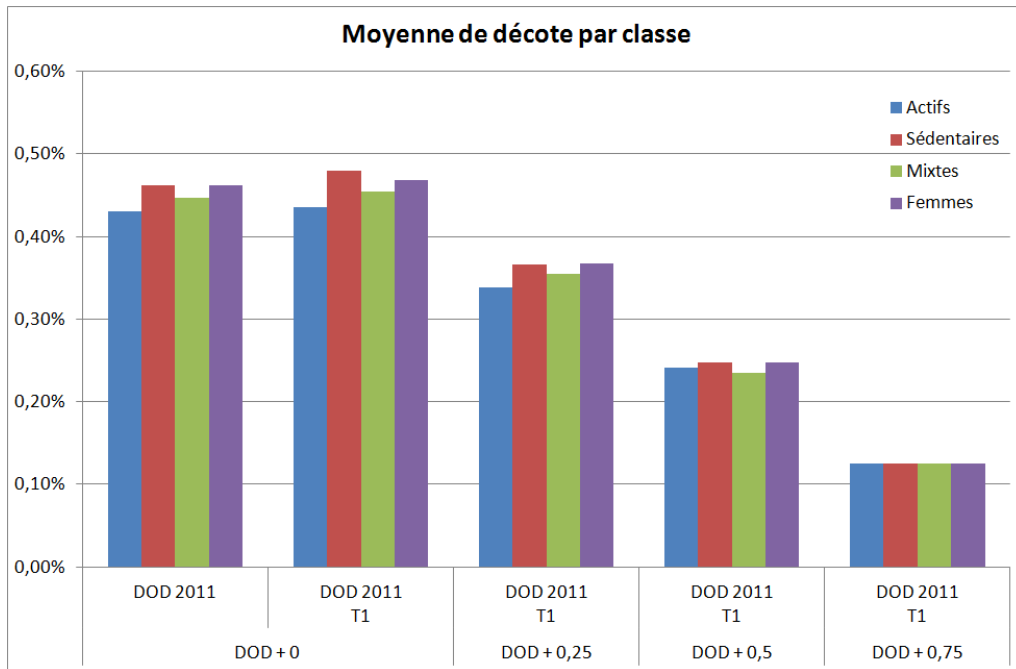


FIGURE 3.40 – Moyenne de surcote au sein des classes

La répartition des décotants par classe est très stable dans le temps. Les moyennes des décotes sont bien homogènes, aucune classe ne sort du lot. On remarque par contre un fort taux de décotants chez les mixtes ce qui pourrait expliquer leurs taux de liquidation bas. On observe même un très fort taux de décotants chez les sédentaires ce qui confirme notre hypothèse concernant leur écart de taux de liquidation en 2011, la décote en est bien responsable.

## Résumé de l'analyse des comportements

Nous arrivons au terme de notre analyse des comportements de départs. Celle-ci étant relativement longue, nous proposons ici un résumé de nos résultats.

### Taux de remplacement

La première analyse des comportements a tout de suite mis en évidence l'importance du taux de remplacement dans les décisions de départ à la retraite. On a pu observer que les moyennes des taux de remplacement des personnes liquidant leur pension étaient toujours plus élevées que celles décidant de rester. De plus, cette différence était marquée par une extrême régularité au cours du temps.

L'analyse en composantes principales a confirmé cette interprétation. Une fois la segmentation effectuée, elle nous a même permis de nous rendre compte que le niveau de revenu accentuait l'importance du taux de remplacement chez les Sédentaires, les mixtes et les actifs.

Enfin, l'analyse des départs par classe est venue préciser les comportements face au taux de remplacement. Il est alors apparu que les actifs étaient à la recherche d'un taux assez précis pour liquider. Cette impression s'est confirmée lors de l'analyse des femmes, leur taux dessinaient le même motif mais elles semblaient avoir un objectif de taux moins élevé. Chez les sédentaires et les mixtes, les taux de remplacement à l'ouverture des droits étant assez bas, l'objectif de taux n'était pas encore atteint par l'ensemble de la population. On a donc pu observer des départs plus désordonnés, témoignant d'un renoncement à l'objectif de taux.

### La surcote

Dans la formule du calcul de la pension, la surcote agit comme un prolongement du KP. En effet, une fois le taux plein atteint, et sous certaines conditions, elle vient continuer d'augmenter le taux de remplacement. C'est bien de cette manière qu'elle est perçue par les agents. En sa présence, les comportements des agents sont inchangés, ils continuent d'être déterminés par le niveau de leur taux de remplacement. Ce n'est pas la surcote en elle-même qui influence le départ, mais la hauteur à laquelle elle vient élever le taux de remplacement.

### La décote

La décote a été mise en place par le régime pour ses effets dissuasifs sur les liquidations. On a en effet tout de suite remarqué que la population des décotants affichait des taux de liquidation beaucoup plus faibles que le reste des effectifs. Mais ce qui est particulier et que nous voulons souligner ici, c'est que la décote dépasse son rôle de minorant de KP. En effet, nous avons observé qu'à taux de remplacement égal, un individu avait moins de chance de liquider s'il était décotant que s'il ne l'était pas. L'effet dissuasif de la décote vient donc altérer la perception qu'ont les agents de leur taux de remplacement.

Cette analyse pourrait être encore plus longue car les causes de départ sont multiples. Nous n'avons par exemple pas détaillé les situations de famille des salariés, les âges des conjoints, des enfants. Mais nous avons choisi, pour notre modélisation, de nous limiter aux trois variables ci-dessus. Ce choix nous semble pertinent puisque le taux de remplacement peut en fait être vu comme un résumé de la carrière des agents, il contient presque toutes les informations dont nous avons besoin. De plus, ce taux porte les traces des réformes car il est modifié par les allongements de durée requise, par la surcote et la décote. C'est pourquoi nous porterons également une attention particulière à la modélisation des comportements des agents face à ces deux derniers coefficients.



## Troisième partie

# Modélisation de la décision d'entrée en retraite

# Chapitre 1

## Présentation du modèle de base

### 1.1 « Rester actif » ou « Partir à la retraite » : un choix d'option

Le module comportemental de départ à la retraite des individus qui sera décrit plus bas s'appuie sur un modèle dit « à choix d'option ». Ce dernier, mis en place par Stock et Wise en 1990<sup>1</sup> visait à expliquer les comportements de départ à la retraite des salariés du secteur privé aux Etats-Unis. Afin de comprendre le terme « choix d'option », rappelons le point de départ de leur réflexion.

Ils sont partis du constat suivant. Les régimes d'entreprise américains versent une forte compensation aux employés travaillant jusqu'à un certain âge, correspondant en général à l'âge d'ouverture des droits. Ceci constitue une forte incitation au départ immédiat à la retraite. En effet, les employés souhaitant continuer à travailler au-delà de cet âge peuvent le faire, mais la compensation sera alors moins avantageuse. Symétriquement, les employés souhaitant partir avant cet âge doivent renoncer à leur bonus. En outre, la rémunération à la retraite est inférieure à celle versée en activité. Les salariés doivent donc choisir, une fois cet âge atteint, de partir à la retraite avec le bonus maximum ou de repousser leur départ pour profiter d'une meilleure rémunération, d'où la notion de « choix d'option ».

Le cadre de notre étude est différent, mais on peut facilement tracer un parallèle avec celui décrit par Stock and Wise. En effet, à partir de l'âge d'ouverture des droits, les salariés de notre étude sont libres de partir à la retraite ou de rester travailler. Mais nombre d'entre eux n'ont pas encore atteint le taux plein. Ils doivent donc choisir soit de rester pour optimiser leur rente, soit de partir. On peut également noter qu'ici aussi les rentes sont inférieures aux salaires et que le régime propose un mécanisme de surcote. Il en résulte donc que même une fois le taux plein atteint, les employés se retrouvent face à un choix. Nous développerons donc un module comportemental s'appuyant sur un modèle à « choix d'option ».

---

1. [STOCK J-H et WISE A.]

## 1.2 Le modèle de base

Le modèle que nous allons construire repose sur la simulation des comportements des individus. Ceci implique notamment de pouvoir modéliser leurs préférences. Pour ce, nous nous placerons dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée. Nous en rappelons ci-après les bases.

### 1.2.1 Théorie de l'utilité espérée

La fonction d'utilité a été développée en économie pour permettre de mesurer et de comparer les préférences des agents. C'est une fonction allant de l'espace des biens dans  $\mathbb{R}^+$ . Nous la noterons  $v$ . Ainsi, en notant "b est préféré à a" par  $a \prec b$ , la fonction  $v$  est caractérisée par :

$$a \prec b \Leftrightarrow v(a) < v(b).$$

Si les biens contiennent des variables aléatoires, les préférences des agents sont alors modélisées par l'espérance de l'utilité<sup>2</sup>. Par exemple, si  $x$  est un bien sûr et  $\epsilon$  un bien risqué (i.e. une variable aléatoire) alors  $x + \epsilon$  sera évalué par :

$$\mathbb{E}[v(x + \epsilon)]$$

Nous faisons les hypothèses suivantes, hypothèses qui semblent naturelles à la vue du comportement des agents :

- Les agents sont rationnels, autrement dit le principe de non saturation des préférences s'applique.
- Les agents sont averses au risque, c'est à dire qu'ils craignent le risque.

Ces deux hypothèses peuvent se traduire en terme de propriétés sur la fonction  $v$  :

1. La fonction  $v$  est croissante.
2. La fonction  $v$  est concave, ce qui est équivalent à dire que  $v''(x) < 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ .

Preuve :

1. *Le fait que la fonction  $v$  soit une fonction croissante est immédiat. En effet, un individu rationnel va toujours préférer une plus grande somme d'argent à une plus petite. Dès lors,  $v(x - k) < v(x) \quad \forall x, k \in \mathbb{R}^+$ . Ainsi,  $v$  est bien une fonction croissante.*
2. *Montrons que tout individu averse au risque a une fonction d'utilité  $v$  concave. Un individu averse est quelqu'un qui préfère à un revenu aléatoire  $\tilde{W}$ , avoir avec certitude l'espérance  $\mathbb{E}[\tilde{W}]$  de ce revenu. Nous avons donc :*

$$v(\mathbb{E}[\tilde{W}]) > E[v(\tilde{W})]$$

---

2. Théorie de Von Neumann et Morgenstern

Autrement dit, si  $\tilde{W}$  est une variable aléatoire discrète à  $n$  réalisations, et où chaque réalisation est affectée d'une probabilité  $1/n$ , on obtient :

$$v\left(\frac{1}{n}x_1 + \dots + \frac{1}{n}x_n\right) > \frac{1}{n}v(x_1) + \dots + \frac{1}{n}v(x_n)$$

Cette dernière inégalité est bien équivalente au fait que la fonction  $v$  soit concave<sup>3</sup>.

## 1.2.2 Utilité totale

On considérera, conformément à la théorie de l'utilité espérée, qu'un individu choisit la date de son départ en retraite en optimisant son bien-être escompté. Il nous faut donc construire une fonction d'utilité totale prenant en compte les salaires perçus en tant qu'actif d'une part ainsi que les pensions qu'il percevra une fois à la retraite. Pour ce, nous définissons une fonction d'utilité totale somme de deux fonctions d'utilités représentatives respectivement du bien être dégagé des salaires et des pensions.

Soit un individu dont l'âge de départ à la retraite  $r$  et la date de décès  $S$  sont connus.

**Notations :** Dans la suite, on notera

- .  $Y_s$  : salaire perçu par l'agent à l'âge  $s$
- .  $B_s(r)$  : pension perçue par l'agent à l'âge  $s$
- .  $\beta$  : taux d'actualisation

**Définition :**

- . On définit la fonction d'utilité des salaires  $U_w$  comme suit

$$\begin{aligned} U_w : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ Y_s &\rightarrow U_w(Y_s) \end{aligned}$$

- . On définit la fonction d'utilité des pensions  $U_p$  comme suit

$$\begin{aligned} U_p : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ B_s &\rightarrow U_p(B_s) \end{aligned}$$

**Remarque :**

- Nous ne donnons pas ici les formes explicites des fonctions d'utilité des pensions et des salaires. Elles feront en effet l'objet d'une étude particulière plus loin.

---

3. inégalité de Jensen

Nous faisons également remarquer que, de ce fait, leur nombre de paramètres pourra être amené à évoluer.

Définition :

. La fonction d'utilité totale de l'individu au temps  $t$  est alors :

$$\begin{aligned} V_t : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ r &\rightarrow V_t(r) \end{aligned}$$

$$\text{Avec } V_t(r) = \sum_{s=t}^{r-1} \beta^{s-t} U_w(Y_s) + \sum_{s=r}^S \beta^{s-r} U_r(B_s(r))$$

Remarque :

- On remarquera que c'est bien l'âge  $r$  de départ à la retraite qui est paramètre de la fonction d'utilité totale. Ceci est bien cohérent avec notre démarche puisque c'est le seul paramètre que l'agent peut maîtriser afin d'optimiser son bien-être.
- Un lecteur avisé aura remarqué que la fonction  $V_t(\cdot)$  peut se lire comme la valeur actualisée de l'utilité retirée par l'agent le long de sa durée de vie résiduelle.

### 1.2.3 Détermination de l'âge de départ du salarié

Nous expliquons dans cette partie comment doit être utilisée la fonction d'utilité totale afin de déterminer l'âge de départ du salarié.

Soit  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtration engendrée par l'information disponible pour l'agent à l'âge  $t$ .

A chaque âge  $t$  supérieur à l'âge d'ouverture des droits, le salarié a le choix entre :

1. partir à la retraite immédiatement et donc en retirer l'utilité :  $\mathbb{E}[V_t(t)|\mathcal{F}_t]$
2. reporter son âge de départ à plus tard. Ce choix correspond à la situation où le salarié estime pouvoir retirer une utilité totale plus importante en partant à la retraite à un âge  $r$  supérieur à  $t$ .

Formellement, l'agent choisit de partir à la retraite à l'âge  $t$  si :

1.  $\forall r > t, \quad \mathbb{E}[V_t(t)|\mathcal{F}_t] \geq \mathbb{E}[V_t(r)|\mathcal{F}_t]$
2. Symétriquement, l'agent d'âge  $t$  choisit de décaler son âge de départ si :

$$\begin{aligned} \exists r > t, \quad \mathbb{E}[V_t(r)|\mathcal{F}_t] &> \mathbb{E}[V_t(t)|\mathcal{F}_t] \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}[V_t(r)|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[V_t(t)|\mathcal{F}_t] &< 0 \end{aligned}$$

Dans ce dernier cas de figure, l'agent espère donc obtenir un gain d'utilité à décaler son départ à la retraite. Afin de traduire ce choix, nous définissons la fonction gain ci-après :

**Définition :**

- . La fonction gain d'un agent d'âge  $t$  de décaler son âge de départ à la retraite de  $t$  à  $r$  est défini comme suit

$$G_t(r) = \mathbb{E}[V_t(r)|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[V_t(t)|\mathcal{F}_t]$$

Grâce à cette définition le processus de décision de l'agent peut donc se résumer comme suit :

**Algorithme de décision :**

Pour  $t$  allant de l'âge d'ouverture des droits à l'âge limite de départ à la retraite  
Si,  $\forall r = t + 1 \dots$  âge limite,  $G_t(r) \leq 0$   
Alors l'agent part en  $t$   
Sinon  $t$  suivant

Cet algorithme a l'avantage d'exposer de manière succincte le processus de décision de l'agent.

A chaque pas de  $t$ , l'agent évalue ses deux options « partir à la retraite en  $t$  » et « repousser l'âge de départ à la retraite ». On retrouve donc bien ici les deux options décrites en 1.1. De plus, il faut remarquer que si au pas  $t$ , l'agent préfère l'option « repousser l'âge de départ à la retraite », il n'a à ce moment précis pas forcément décidé de son âge de départ futur, il estime seulement qu'il pourrait retirer une utilité totale supérieure en partant à la retraite à une date postérieure.

## 1.2.4 Fonctions d'utilité dans le modèle de base

Nous proposons ici une caractérisation des fonctions d'utilité des salaires et des pensions simple et identique pour tous les individus. Le but est de construire un premier modèle facilement implémentable et interprétable et d'en dégager un premier résultat sur l'âge de départ à la retraite des salariés. L'intérêt de la microsimulation se fera sentir avec plus de force lorsque nous développerons plus loin un processus individuel de déformation des perceptions.

### Définition :

- . On définit la fonction d'utilité des salaires  $U_w$  comme suit

$$U_w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$
$$Y_s \rightarrow U_w(Y_s) = \frac{Y_s^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

- . On définit la fonction d'utilité des pensions  $U_p$  comme suit

$$U_p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$
$$B_s(r) \rightarrow U_p(B_s) = \frac{(k \cdot B_s(r))^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

Où :

- .  $k \in \mathbb{R}^+$  est appelé le coefficient de préférence pour le loisir
- .  $0 < \gamma < 1$  est appelé le coefficient d'aversion pour le risque

### Propriété 1.1 :

- . Ces fonctions représentent des agents rationnels et averses au risque (i.e. elles sont croissantes et concaves)

Preuve :

$$U_w(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$
$$\Rightarrow U'_w(x) = \frac{1-\gamma}{1-\gamma} x^{-\gamma} = x^{-\gamma}$$
$$\Rightarrow U''_w(x) = -\gamma \cdot x^{-\gamma-1}$$

On a bien  $U''_w(x) > 0$  et  $U''_w(x) < 0$

## Interprétation du coefficient d'aversion au risque $\gamma$

Afin de comprendre en quoi gamma représente un coefficient d'aversion au risque, un petit retour sur la théorie de l'utilité espérée s'impose.



Prime de risque et indice d'aversion au risque :

Définissons maintenant la prime de risque associée à une loterie  $\tilde{W}$  :

*La prime de risque associée à la loterie  $\tilde{W}$ , notée  $\rho_{\tilde{W}}$ , correspond au montant maximum qu'un agent est prêt à payer pour éviter de subir un risque et obtenir un gain certain :*

$$\mathbb{E}[v(\tilde{W})] = v(\mathbb{E}[\tilde{W}] - \rho_{\tilde{W}}) \quad (1.1)$$

Ainsi, les agents étant ici considérés comme averses au risque, la formule (3.1) est bien vérifiée et implique que la prime de risque  $\rho_{\tilde{W}}$  est positive. La quantité  $\mathbb{E}[\tilde{W}] - \rho_{\tilde{W}}$  est appelée équivalent certain associé à  $\tilde{W}$ .

Nous pouvons considérer que si la loterie est peu risquée, c'est à dire si  $\tilde{W} \approx \mathbb{E}[\tilde{W}]$ , nous pouvons faire l'approximation suivante<sup>a</sup> (développement de Taylor à l'ordre 2) :

$$\begin{aligned} v(\tilde{W}) &\approx v(\mathbb{E}[\tilde{W}]) + v'(\mathbb{E}[\tilde{W}])(\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}]) + \frac{1}{2}v''(\mathbb{E}[\tilde{W}])(\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}])^2 \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}[v(\tilde{W})] &\approx \mathbb{E}[v(\mathbb{E}[\tilde{W}])] + \mathbb{E}[v'(\mathbb{E}[\tilde{W}])(\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}])] + \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}v''(\mathbb{E}[\tilde{W}])(\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}])^2\right] \end{aligned}$$

Or, nous avons :

$$\mathbb{E}[v(\mathbb{E}[\tilde{W}])] = v(\mathbb{E}[\tilde{W}])$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[v'(\mathbb{E}[\tilde{W}])(\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}])] &= \mathbb{E}[v'(\mathbb{E}[\tilde{W}])\tilde{W}] - \mathbb{E}[v'(\mathbb{E}[\tilde{W}])\mathbb{E}[\tilde{W}]] \\ &= \mathbb{E}[v'(\mathbb{E}[\tilde{W}])\mathbb{E}[\tilde{W}]] - \mathbb{E}[v'(\mathbb{E}[\tilde{W}])\mathbb{E}[\tilde{W}]] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}v''(\mathbb{E}[\tilde{W}])(\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}])^2\right] &= \frac{1}{2}v''(\mathbb{E}[\tilde{W}])\mathbb{E}[(\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}])^2] \\ &= \frac{1}{2}v''(\mathbb{E}[\tilde{W}])\sigma^2(\tilde{W}) \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \mathbb{E}[v(\tilde{W})] \approx v(\mathbb{E}[\tilde{W}]) + \frac{1}{2}v''(\mathbb{E}[\tilde{W}])\sigma^2(\tilde{W}) \quad (3.2)$$

$$\text{De plus }^b, \quad \mathbb{E}[v(\tilde{W})] \approx v(\mathbb{E}[\tilde{W}]) - \rho_{\tilde{W}}v'(\mathbb{E}[\tilde{W}]) \quad (3.3)$$

Ainsi en égalisant les équations (3.2) et (3.3), nous obtenons :

$$\rho_{\tilde{W}} \approx -\frac{v''(\mathbb{E}[\tilde{W}])}{2v'(\mathbb{E}[\tilde{W}])}\sigma^2(\tilde{W})$$

Notons  $\alpha_{\tilde{W}}^v = -\frac{v''(\mathbb{E}[\tilde{W}])}{v'(\mathbb{E}[\tilde{W}])}$ . Ce coefficient est appelé **indice d'aversion absolue pour le risque**. Nous pouvons remarquer que ce coefficient est positif de part les hypothèses que nous avons faites ci dessus. Ainsi, plus ce coefficient sera grand, plus l'investisseur sera averse au risque.

<sup>a</sup>. Approximation de Pratt

<sup>b</sup>. approximation de (3.1) à l'ordre 1

Revenons maintenant à notre fonction d'utilité  $U_w$  et calculons son indice d'aversion au risque  $\alpha^{u_w}$ .

Soit  $\tilde{W}$  une loterie quelconque ayant une espérance finie  $\mathbb{E}[\tilde{W}]$

On a :

$$\begin{aligned}\alpha_{\tilde{W}}^{u_w}(x) &= -u''(x)/u'(x) \\ &= -\gamma \cdot x^{(-\gamma-1)} / x^{(-\gamma)} \\ &= \gamma \cdot x\end{aligned}$$

L'indice d'aversion au risque est donc croissant linéairement avec gamma, ce qui justifie le fait que l'on appelle gamma le coefficient d'aversion au risque.

## Evaluation de la fonction gain dans le modèle de base

On rappelle la forme de la fonction gain :  $G_t(r) = E[V_t(r)|\mathcal{F}_t] - E[V_t(t)|\mathcal{F}_t]$

$$\text{Avec } V_t(r) = \sum_{s=t}^{r-1} \beta^{s-t} U_w(Y_s) + \sum_{s=r}^S \beta^{s-t} U_r(B_s(r))$$

D'où :

$$\begin{aligned} G_t(r) &= \sum_{s=t}^{r-1} \beta^{s-t} \cdot {}_s p_t \cdot \mathbb{E}[U_w(Y_s)|\mathcal{F}_t] + \sum_{s=r}^{\infty} \beta^{s-t} \cdot {}_s p_t \cdot \mathbb{E}[U_r(B_s(r))|\mathcal{F}_t] \\ &\quad - \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} \cdot {}_s p_t \cdot \mathbb{E}[U_r(B_s(t))|\mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

où  ${}_s p_t$  = Probabilité qu'un individu vivant à l'âge t le soit encore à l'âge s

Reste donc à évaluer  $\mathbb{E}[U_w(Y_s)|\mathcal{F}_t]$  et  $\mathbb{E}[U_p(B_s(r))|\mathcal{F}_t]$ . Ces quantités représentent l'évaluation que fait l'individu en t de son futur salaire en s. Pour plus de simplicité nous noterons ici :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_w(Y_s)|\mathcal{F}_t] &= U_w(Y_t \cdot \nu_w^{s-t}) \\ \mathbb{E}[U_r(B_s(r))|\mathcal{F}_t] &= U_r(B^t(r) \cdot \nu_p^{s-t}) \end{aligned}$$

Avec :

- .  $\nu_w$  le taux d'évolution des salaires. Comme nous nous plaçons ici à la fin de la carrière des salariés<sup>4</sup>, nous prendrons  $\nu_w$  égal à 1. On aura donc  $Y_t = Y_{aod} := Y$  pour tout âge t supérieur à l'âge d'ouverture des droits.
- .  $\nu_p$  le taux d'évolution des pensions. Le modèle comprenant déjà un taux d'actualisation, les pensions ne nécessitent pas d'être ré-augmentées, nous prendrons donc  $\nu_p$  égal à 1.
- .  $B^t(r)$  la pension à laquelle le salarié aura droit s'il part à la retraite en r sous la réglementation en vigueur en t.

On a donc finalement :

$$G_t(r) = \sum_{s=t}^{r-1} \beta^{s-t} {}_s p_t U_w(Y) + \sum_{s=r}^{110} \beta^{s-t} {}_s p_t U_p(B^t(r)) - \sum_{s=t}^{110} \beta^{s-t} {}_s p_t U_p(B^t(t))$$

4. Nous décrivons ici le fonctionnement du module comportemental commençant à l'âge d'ouverture des droits. Le module de projection des actifs contiendra bien évidemment des taux d'évolution de salaire supérieurs à 1.

## 1.3 Etude du lien entre coefficient de préférence pour le loisir et taux de remplacement

### 1.3.1 Interprétation du coefficient de préférence pour le loisir

Le coefficient de préférence pour le loisir  $k$ , multiplicatif, représente la « valeur ajoutée » d'une unité monétaire perçue lors de la retraite. C'est la valeur accordée par les individus à leur temps libre. Pour comprendre son intérêt, il faut se rappeler le mode de calcul de la fonction d'utilité totale<sup>5</sup>. Cette fonction calcule pour un âge  $t$  et un âge de retraite  $r$  donnés la valeur actualisée et espérée des revenus qu'un individu percevra jusqu'à la fin de sa vie. Et c'est cette valeur qui servira au calcul de la fonction gain, et donc au choix de l'âge de départ à la retraite de l'individu. Or, sans la présence du coefficient  $k$ , l'utilité retirée de la retraite serait systématiquement moins importante que celle retirée du salaire puisque les pensions sont systématiquement inférieures aux salaires. Ce coefficient sert donc à réajuster l'écart systématique qui existe entre le niveau des salaires et celui des pensions. Ce coefficient prend donc implicitement en compte les motivations non financières des agents. En conséquences, il sera individualisé au sein de notre modèle.

### 1.3.2 Coefficient de préférence pour le loisir optimal et taux plein

L'analyse de données menée plus haut nous a permis de nous rendre compte du rôle majeur joué par le taux de remplacement dans les décisions de départ. Nous avons même évoqué l'existence d'un taux "objectif", dont l'atteinte provoquerait le départ. Nous voulons traduire ces comportements dans notre modélisation. Pour ce, nous allons tout d'abord mettre en évidence le lien existant entre le coefficient de préférence pour le loisir et le taux plein. Plus précisément, nous allons montrer qu'un certain choix de  $k$  aurait permis, en l'absence de surcote, de modéliser le taux plein comme un taux objectif.

Commençons par définir le coefficient de préférence pour le loisir optimal :

**Définition :**

. Soit  $t$  et  $r$  fixés, le coefficient de préférence pour le loisir optimal  ${}_t k_r^{opt}$  est tel que :

$$G_t^{{}_t k_r^{opt}}(r) = 0$$

avec  $G_t^{{}_t k_r^{opt}}(r)$  la fonction gain évaluée avec  $k = {}_t k_r^{opt}$

---

5. cf 1.2.2 Utilité totale

Nous allons maintenant caractériser  ${}_t k_r^{opt}$ .

*Préambule :*

– *Plaçons-nous dans le cadre du régime avant les réformes. Le taux de remplacement est égal au KP. Nous avons donc, en notant  $KP_t$  le KP d'un agent à l'âge  $t$  :*

$$B^t(r) = Y.KP_r \quad (1.2)$$

– *De plus, la surcote n'existe pas encore, le KP connaît un maximum, le taux plein. Nous le noterons dans la suite  $KP_{TP}$ .*

Soient  $r$  et  $t$  deux entiers positifs tels que  $r > t$ , on a alors :

$$\begin{aligned} V_t(t) &= \sum_{s=t}^S \beta^{s-t} U_p(B^t(t)) \\ V_t(r) &= \sum_{s=t}^{r-1} \beta^{s-t} U_w(Y_s) + \sum_{s=r}^S \beta^{s-t} U_p(B^t(r)) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} V_t(r) - V_t(t) &= \sum_{s=t}^{r-1} \beta^{s-t} (U_w(Y_s) - U_p(B^t(t))) \\ &\quad + \sum_{s=r}^S \beta^{s-t} (U_p(B^t(r)) - U_p(B^t(t))) \\ \Rightarrow E[V_t(r)|\mathcal{F}_t] - E[V_t(r+t)|\mathcal{F}_t] &= \sum_{s=t}^{r-1} \beta^{s-t} {}_s p_t (U_w(Y) - U_p(B^t(t))) \\ &\quad + \sum_{s=r}^{110} \beta^{s-t} {}_s p_t (U_p(B^t(r)) - U_p(B^t(t))) \\ &= G_t(r) \end{aligned}$$

À l'aide de (1.2), on obtient donc :

$$\begin{aligned} G_t(r) &= \sum_{s=t}^{r-1} \beta^{s-t} {}_s p_t (U_w(Y) - U_p(Y.KP_t)) \\ &\quad + \sum_{s=r}^{110} \beta^{s-t} {}_s p_t (U_p(Y.KP_r) - U_p(Y.KP_t)) \end{aligned}$$

Puis, en revenant aux définitions des fonctions d'utilité :

$$G_t(r) = \frac{Y^{(1-\gamma)}}{1-\gamma} \sum_{s=t}^{r-1} \beta^{s-t} {}_s p_t (1 - (k.KP_t)^{(1-\gamma)}) \\ + \frac{Y^{(1-\gamma)}}{1-\gamma} \sum_{s=r}^{110} \beta^{s-t} {}_s p_t k^{(1-\gamma)} (KP_r^{(1-\gamma)} - KP_t^{(1-\gamma)})$$

En notant :

$${}_t u_w^{t_1 \rightarrow t_2} := \frac{1}{1-\gamma} \sum_{s=t_1}^{t_2} \beta^{s-t} {}_s p_t \\ {}_r d_t := \frac{KP_t}{KP_r}$$

On obtient :

$$G_t(r) = Y^{(1-\gamma)} \cdot \left( {}_t u_w^{t \rightarrow (r-1)} (1 - (k.KP_t)^{(1-\gamma)}) \right) \\ + Y^{(1-\gamma)} \cdot KP_t^{(1-\gamma)} \left( {}_t u_w^{r \rightarrow 110} \cdot k^{(1-\gamma)} ({}_r d_t - 1) \right) \quad (1.3)$$

D'où, par définition de  ${}_t k_r^{opt}$  :

$$Y^{(1-\gamma)} \cdot ({}_t k_r^{opt} \cdot KP_t)^{(1-\gamma)} \left( {}_t u_w^{t \rightarrow (r-1)} + {}_t u_w^{r \rightarrow 110} \cdot (1 - {}_r d_t) \right) = Y^{(1-\gamma)} ({}_t u_w^{t \rightarrow (r-1)})$$

On a donc finalement :

$${}_t k_r^{opt} = \frac{1}{KP_t} \cdot \left( \frac{{}_t u_w^{t \rightarrow (r-1)}}{{}_t u_w^{t \rightarrow (r-1)} + {}_t u_w^{r \rightarrow 110} \cdot (1 - {}_r d_t)} \right)^{1/(1-\gamma)} \quad (1.4)$$

Maintenant que nous avons caractérisé  ${}_t k_r^{opt}$ , nous allons le mettre en relation avec le taux plein :

Propriété 1.2 :

$$\text{Si } KP_r = KP_t, \text{ alors } {}_t k_r^{opt} = \frac{1}{KP_t}$$

Preuve : Il suffit de remarquer que si  $KP_r = KP_t$  alors  ${}_r d_t = 1$

Propriété 1.3 :

$$\text{Soit } r_1 \text{ et } r_2 \text{ tels que } KP_t \leq KP_{r_1} < KP_{r_2}, \text{ alors } {}_t k_{r_1}^{opt} > \frac{1}{KP_{r_2}}$$

Preuve :(Remarque : on a la même propriété pour  $r_1$  et  $r_2$  t.q.  $KP_t < KP_{r_1} \leq KP_{r_2}$ )

$t > 0$  fixé,

$$KP_{r_1} \geq KP_t \Rightarrow {}_{r_1} d_t \leq 1$$

$$\Rightarrow (1 - {}_{r_1} d_t) \geq 0$$

$$\Rightarrow {}_t u_w^{t \rightarrow (r_1 - 1)} + {}_t u_w^{r \rightarrow 110} \cdot (1 - {}_{r_1} d_t) \geq {}_t u_w^{t \rightarrow (r - 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{{}_t u_w^{t \rightarrow (r_1 - 1)}}{{}_t u_w^{t \rightarrow (r_1 - 1)} + {}_t u_w^{r \rightarrow 110} \cdot (1 - {}_{r_1} d_t)} \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{KP_{r_1}} \cdot \frac{{}_t u_w^{t \rightarrow (r_1 - 1)}}{{}_t u_w^{t \rightarrow (r_1 - 1)} + {}_t u_w^{r \rightarrow 110} \cdot (1 - {}_{r_1} d_t)} \geq \frac{1}{KP_{r_1}}$$

$$\Rightarrow {}_t k_{r_1}^{opt} \geq \frac{1}{KP_{r_1}}$$

$$\text{Or, par hypothèse, } KP_{r_1} < KP_{r_2} \Rightarrow {}_t k_{r_1}^{opt} \geq \frac{1}{KP_{r_1}} > \frac{1}{KP_{r_2}}$$

Propriété 1.4 :

$$G_t(r) \leq 0 \Leftrightarrow k \geq {}_t k_r^{opt}$$

Preuve : On repart de (1.3),

$$\text{On a } G_t(r) = Y^{(1-\gamma)} \cdot \left( {}_t u_w^{t \rightarrow (r-1)} (1 - (k \cdot KP_t)^{(1-\gamma)}) \right) + Y^{(1-\gamma)} \cdot KP_t^{(1-\gamma)} \left( {}_t u_w^{r \rightarrow 110} \cdot k^{(1-\gamma)} (1 - r d_t) \right)$$

$$D'où } G_t(r) \leq 0 \Leftrightarrow Y^{(1-\gamma)} \cdot ({}_t k_r^{opt} \cdot KP_t)^{(1-\gamma)} \left( {}_t u_w^{t \rightarrow (r-1)} + {}_t u_w^{r \rightarrow 110} \cdot (1 - r d_t) \right) \geq Y^{(1-\gamma)} ({}_t u_w^{t \rightarrow (r-1)})$$

$$\Leftrightarrow k \geq \frac{1}{KP_t} \cdot \left( \frac{{}_t u_w^{t \rightarrow (r-1)}}{{}_t u_w^{t \rightarrow (r-1)} + {}_t u_w^{r \rightarrow 110} \cdot (1 - r d_t)} \right)^{1/(1-\gamma)} = {}_t k_r^{opt}$$

Nous arrivons maintenant à la propriété qui nous intéresse :

Propriété 1.5 :

*Dans le modèle de base, si le régime ne comporte pas de surcote et si l'on choisit  $k = \frac{1}{KP_{TP}}$  alors les agents décident de partir à la retraite si et seulement si ils ont atteint le taux plein.*

Preuve : On veut montrer que si  $k = \frac{1}{KP_{TP}}$

$$\text{Alors, } \forall r > t, G_t(r) \leq 0 \Leftrightarrow KP_t = KP_{TP}$$

- Soit  $t$  tel que  $KP_t = KP_{TP}$  :

Par construction de  $KP_{TP}$ , on a donc  $KP_r = KP_{TP}$  pour tout  $r > t$

Par la propriété 1.2, on a donc  ${}_t k_r^{opt} = \frac{1}{KP_{TP}}$  pour tout  $r > t$

Donc  $G_t(r) = 0$  pour tout  $r > t$

- Dans l'autre sens, on va procéder par contraposée i.e. montrons que :

$$KP_t \neq KP_{TP} \Rightarrow \exists r > t, G_t(r) > 0$$

Par définition de  $KP_{TP}$  :  $KP_t \neq KP_{TP} \Rightarrow KP_t < KP_{TP}$

Il existe donc  $r > t$  tel que :  $KP_t < KPr \leq KP_{TP}$  (ou t.q.  $KP_t \leq KPr < KP_{TP}$ )

Donc par la propriété 1.3 :  ${}_t k_r^{opt} > \frac{1}{KP_{TP}}$



Or comme  $k = \frac{1}{KP_{TP}}$ , par la propriété 1.4 :  $G_t(r) > 0$

Nous avons donc montré que dans ce modèle, et en l'absence de surcote, il était possible de calibrer le coefficient de préférence pour le loisir de manière à ce que les agents ne partent qu'une fois le taux plein atteint.

### 1.3.3 Le problème posé par la surcote

Lors de l'analyse des comportements de départ, nous avons évoqué la notion de taux de remplacement "objectif". Nous pensions que les salariés décidaient de partir à la retraite lorsqu'ils avaient atteint ce taux. Le modèle étudié dans la partie précédente présente l'avantage de pouvoir traduire ce comportement. En effet, si l'on considère le taux plein comme étant le taux objectif, il suffirait de choisir  $k_{TP} = 1/KP_{TP}$  pour reproduire ces comportements.

Mais ce modèle ne permet pas de choisir un taux objectif quelconque. En effet, ce système fonctionne car le coefficient optimal de préférence pour le loisir atteint son minimum lorsqu'il est égal à  $k_{TP}$ .

En effet, on montre<sup>6</sup> que quelque soient  $r$  et  $t$ ,  ${}_t k_r^{opt} \geq \frac{1}{KP_t} \geq \frac{1}{KP_{TP}}$ .

Pour bien comprendre l'importance de cette particularité, imaginons que l'on veuille se fixer un autre taux objectif que  $KP_{TP}$ . Considérons un individu, notons  $KP_{obj}$  son taux objectif et  $t_{obj}$  l'âge auquel il atteint ce taux. Comme nous voulons que notre agent parte lorsqu'il atteint ce taux, il nous faut donc prendre  $k$  tel que :

$$k \geq \max_{r > t_{obj}} ({}_t k_r^{opt})$$

Prenons donc le plus petit coefficient possible, à savoir  $\max ({}_t k_r^{opt})$ , et notons-le  $k_{obj}$ . Ce coefficient va bien satisfaire une de nos contraintes, on aura bien<sup>7</sup> :

$$\forall r > t_{obj}, G_{t_{obj}}^{k_{obj}}(r) \leq 0$$

Mais, comme ici  $k_{obj}$  ne minore pas l'ensemble des coefficient de préférence pour le loisir optimaux, il sera possible qu'à un âge  $t$  antérieur à  $t_{obj}$ , on ait :

$$k_{obj} \geq \max_{r > t} ({}_t k_r^{opt})$$

Ce qui veut dire que notre modèle fera sortir notre agent à un âge inférieur à celui que nous voulions. Le modèle devient donc incontrôlable.

---

6. repartir de la formule (1.4)

7. prop. 1.4

En l'absence de surcote, ce défaut n'aurait peut-être pas été trop gênant puisque le taux plein historique, comme nous le verrons plus tard, fournit un taux objectif satisfaisant. Mais l'introduction de la surcote va retirer au taux plein historique son rôle de majorant des taux de remplacement. Essayer de fixer ce taux comme un taux objectif va donc poser le problème décrit plus haut.

Cette partie a été rédigée dans une démarche heuristique et il n'a pas été prouvé formellement que la courbe des maxima des coefficients de préférence pour le loisir optimaux pouvait être croissante avec  $t$ . Pour nous en assurer, nous avons tracé ci-dessous le graphique des  $\max_{r>t} ({}_t k_r^{opt})$  d'une personne surcotante.

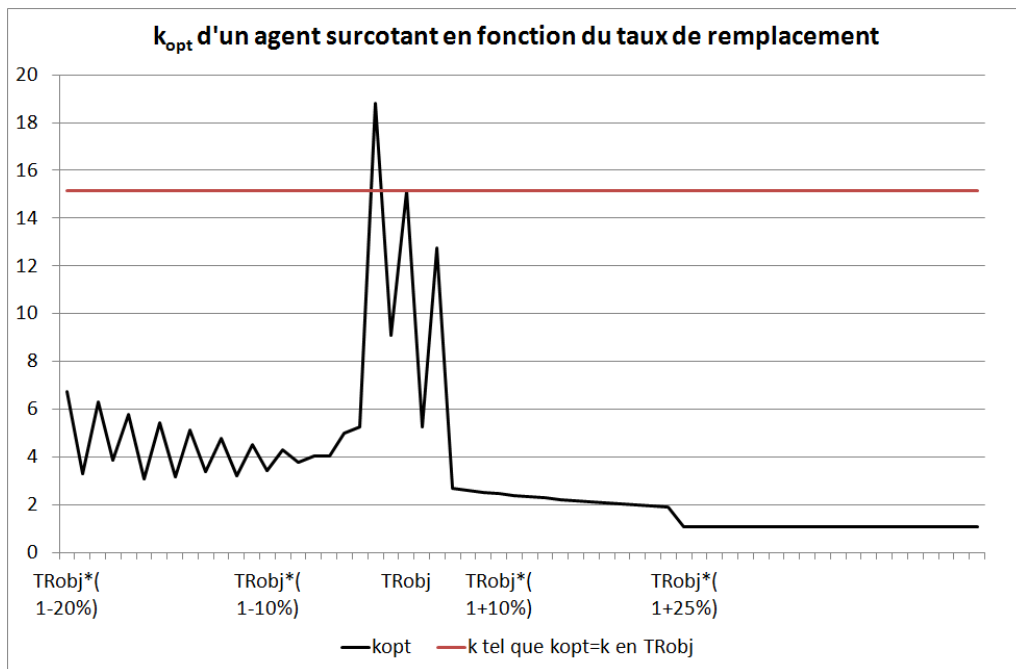


FIGURE 1.1 – Coefficient de préférence pour le loisir optimal en présence de surcote.

On voit bien que si l'on avait pris pour  $k$  le coefficient optimal correspondant au taux plein, l'agent serait parti avant de l'atteindre. D'une manière générale, on remarque que l'allure de la courbe est chaotique, celle-ci étant parfois croissante, parfois décroissante. Choisir un coefficient de préférence pour le loisir se révélerait donc hasardeux puisqu'on ne pourrait pas toujours prévoir à quel taux de remplacement il provoquerait les départs. Nous allons donc devoir mettre en place un processus capable d'instaurer une relation maîtrisable entre les décisions de départs et le taux de remplacement.

## Chapitre 2

# Création du modèle

### 2.1 Idée

Nous voulons mettre en place un modèle liant les décisions de départ au taux de remplacement. Afin de préciser la nature du lien que nous voulons établir, commençons par observer celui-ci grâce aux données dont nous disposons.

### 2.1.1 Analyse des départs autour du taux plein historique

Nous allons maintenant observer comment se répartissent les liquidations en fonction du taux de remplacement. Cette analyse devra nous permettre de vérifier l'existence d'un taux objectif dont l'atteinte inciterait fortement à la liquidation.

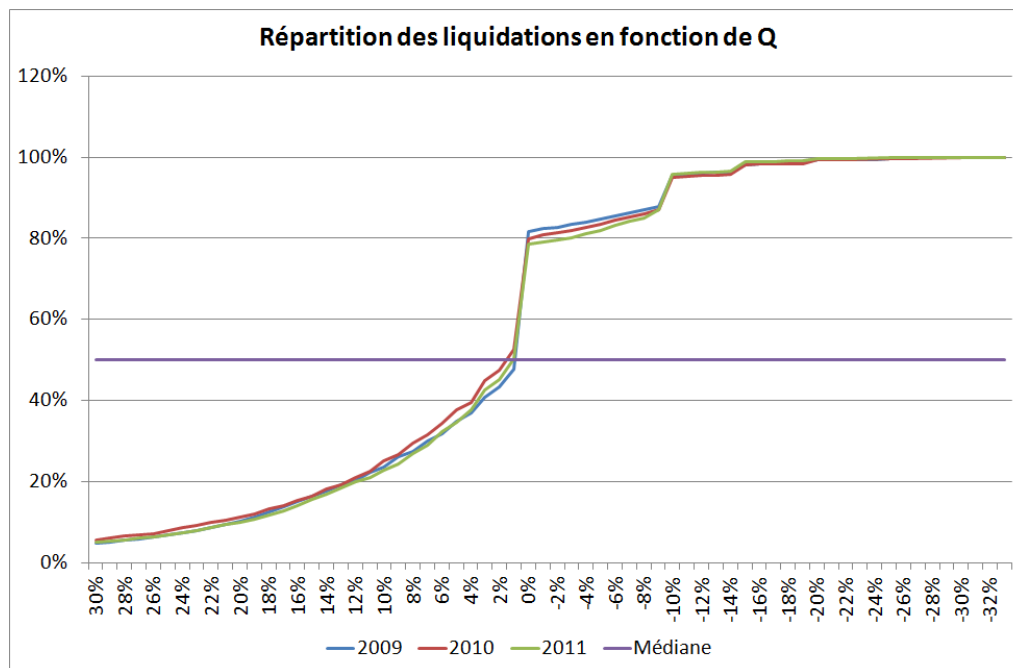


FIGURE 2.1 – Répartition des liquidations en fonction de Q

Ce graphique nous permet de nous rendre compte que la majorité des liquidations ont lieu à l'atteinte du taux plein historique. Il faut néanmoins rester prudent quant à la valeur incitative de ce taux. En effet, ce graphique nous montre la répartition de départs observés. Or, il se peut que la plupart des agents aient eu un taux de remplacement égal au taux plein historique lors de leur ouverture des droits. Et l'on ne peut pas savoir si ceux-ci seraient partis même en ayant un taux de remplacement moins élevé. En d'autre terme, ce graphe nous permet de dire qu'il existe un taux objectif et que celui-ci est inférieur ou égal au taux plein historique.

On remarque également que les courbes se décalent légèrement au cours des années. Ce décalage est la traduction des changements de comportements que nous avons mis en évidence dans la partie II. Notre modèle devra donc également offrir la possibilité de représenter ce décalage.

## 2.1.2 Ossature du modèle : Processus de remplacement objectif

Nous allons dans cette partie mettre en place un modèle déterministe permettant de déclencher les départs lors de l'atteinte d'un taux objectif. Nous rappelons que nous voulons créer in fine un processus permettant de rendre le désir de partir à la retraite croissant avec le taux de remplacement. Dans ce modèle le taux objectif ne sera qu'un repère autour duquel la liquidation devra avoir en général lieu. Le modèle que nous allons présenter laissera donc la possibilité d'installer plus tard une certaine souplesse quant à la notion de taux objectif.

*Notations : Soit un individu d'âge  $x$ , dans la suite nous noterons*

- $TR_x$  le taux de remplacement atteint par l'individu à l'âge  $x$
- $TR_{obj}$  le taux de remplacement objectif auquel nous souhaitons modéliser la sortie de l'individu
- $k_{obj}$  le coefficient de préférence pour le loisir égal à  $1/TR_{obj}$

### Définition :

- . L'écart entre le taux de remplacement atteint par un individu à l'âge  $x$  et son taux objectif sera représenté par le facteur  $Q_x^{obj}$  défini de la manière suivante :

$$TR_x = TR_{obj} \cdot (1 - Q_x^{obj})$$

Nous allons maintenant introduire le processus "de remplacement objectif" qui permet de déclencher les départs à la retraite lors de l'atteinte d'un taux objectif :

### Définition :

Soit un individu d'âge  $x$ , on note  $PR_x^{obj}$  son processus de remplacement objectif défini de la manière suivante :

$$PR_x^{obj} = \frac{1}{(1 - p \cdot Q_x^{obj})} \cdot F_x$$

Avec :

- .  $p \in [0; 1[$  "la pente" du processus.

- .  $F_x = \max_{r > x} \left( \frac{{}_x u_w^{x \rightarrow (r-1)}}{{}_x u_w^{x \rightarrow (r-1)} + {}_x u_w^{r \rightarrow 110} \cdot (1 - r d_x)} \right)^{1/(1-\gamma)}$

Ce processus s'intégrera dans le modèle de base en agissant comme un coefficient venant modifier la perception qu'ont les agents de leur pension. On aura désormais :

$$U_p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$B_s \rightarrow U_p(B_s \cdot PR_s^{obj})$$

**Définition :** Soit un individu d'âge  $x$ ,

On note  $PR_x^{opt}$  le processus  $PR_x^{obj}$  pris avec la pente  $p = 1$

**Propriété 2.1 :** Si on choisit  $k = k_{obj}$ , alors :

Les agents partiront à la retraite en  $x$  si et seulement si

$$x = \inf\{y \geq aod / PR_y^{obj} \geq PR_y^{opt}\}$$

*Preuve :*

- . On remarque que, pour  $x$  fixé,  $1/TR_{obj} \cdot PR_x^{obj} = \max_{r > x} ({}_x k_r^{opt})$ , puis on applique la propriété 1.4.
- . Le fait que l'on doive prendre la plus petite valeur de  $x$  telle que  $PR_x^{obj} \geq PR_x^{opt}$  découle de l'algorithme de décision des agents

Le processus  $PR^{opt}$  va donc pouvoir nous servir de point de repère dans la caractérisation de nos processus de remplacement. En effet, grâce à la propriété 2.1, nous savons désormais que nos agents partiront à la retraite dès qu'ils auront franchi la limite tracée par  $PR^{opt}$ .

Nous arrivons maintenant au résultat que nous avons annoncé au début de cette partie :

**Propriété 2.2 :** Si on choisit  $k = k_{obj}$ , alors :

Les agents partiront à la retraite en  $x$  dès que  $x$  sera tel que

$$TR_x \geq TR_{obj}$$

Preuve :

. D'après la propriété 2.1, les agents partiront à la retraite au plus petit âge  $x$  tel que  $PR_x^{obj} \geq PR_x^{opt}$ .

. Or,  $(-1 < Q_x^{obj} < 1)$  et  $(0 \leq p < 1)$  donc  $((1 - p \cdot Q_x^{obj}) > 0)$

. D'où :  $\frac{PR_x^{obj}}{PR_x^{opt}} = \frac{1 - Q_x^{obj}}{1 - p \cdot Q_x^{obj}} \geq 1 \Leftrightarrow Q_x^{obj} \leq p \cdot Q_x^{obj} \Leftrightarrow Q_x^{obj} \leq 0$

Nous avons donc construit un processus permettant de déclencher le départ des agents dès que ceux-ci franchissent le taux de remplacement que l'on s'est fixé. Il suffit pour cela de prendre le coefficient de préférence pour le loisir  $k$  égal à  $k_{obj}$ . Et ceci est possible quelque soit le taux objectif que l'on choisisse.

La construction de  $PR^{opt}$  nous offre une visualisation simple du comportement de notre processus de remplacement objectif. Il suffit en effet d'observer le rapprochement de ces deux courbes pour se rendre compte de l'évolution des comportements de départs des agents en fonction de leur taux de remplacement. De plus, la preuve ci-dessus nous fait remarquer une propriété qui va faciliter cette visualisation.

Propriété 2.2 bis : Si on choisit  $k = k_{obj}$ , alors :

Les agents partiront à la retraite en  $x$  dès que  $x$  sera tel que

$$(1 - p \cdot Q_x^{obj}) \geq (1 - Q_x^{obj})$$

Pour voir à quel taux de remplacement le départ est provoqué, il suffit donc d'observer le croisement de la courbe  $(1 - Q_x^{obj})$  avec la courbe  $(1 - p \cdot Q_x^{obj})$ . Dans la suite, ce coefficient sera modifié. C'est essentiellement le travail effectué sur ce coefficient qui nous permettra d'assouplir notre modèle quant à la notion de taux objectif. Pour conclure cette partie, nous proposons d'observer le comportement de  $(1 - p \cdot Q_x^{obj})$  et  $(1 - Q_x^{obj})$  par rapport au coefficient  $Q_x^{obj}$ .

Notations : Dans la suite on désignera par

- $C_x^{opt}$  la courbe de  $(1 - Q_x^{opt})$  en fonction de  $Q_x^{obj}$
- $C_x^{obj}$  la courbe de  $(1 - p \cdot Q_x^{obj})$  en fonction de  $Q_x^{obj}$

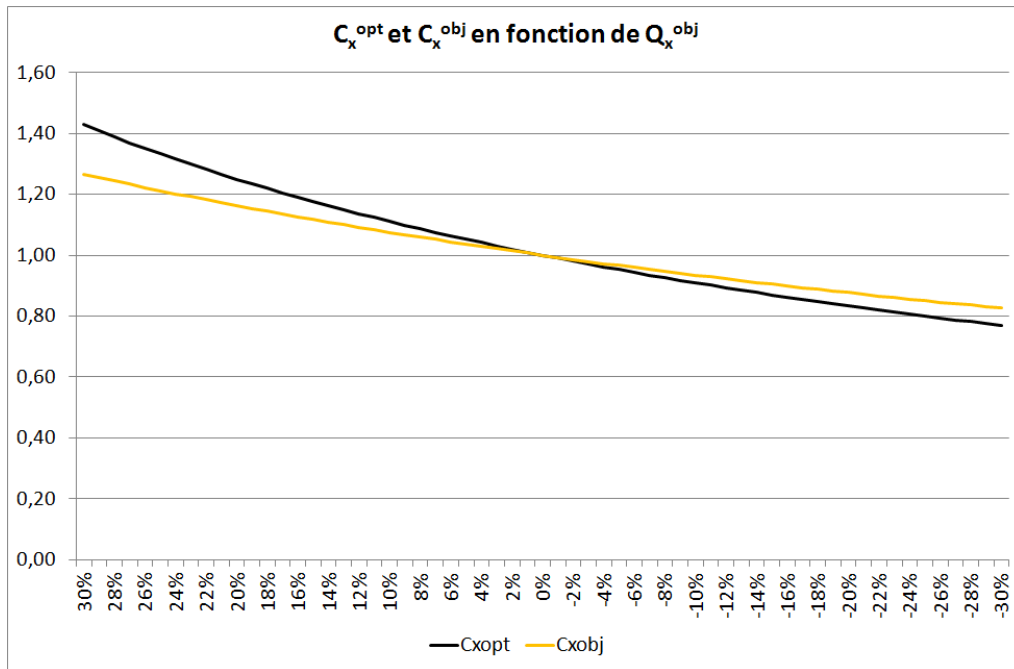


FIGURE 2.2 –  $C_x^{opt}$  et  $C_x^{obj}$  en fonction de  $Q_x^{obj}$

Les deux courbes se croisent bien en  $Q_x^{obj} = 0$ . Mais ce qui est aussi intéressant de remarquer, c'est l'évolution de l'écart entre ces deux courbes. La courbe  $C_x^{obj}$  est d'abord très inférieure à  $C_x^{opt}$  pour des petites valeurs de  $Q_x^{obj}$ . Ensuite, cet écart se réduit progressivement à l'approche de 0 jusqu'à ce qu'elles se rejoignent. Puis la courbe  $C_x^{obj}$  passe au dessus et continue de creuser progressivement l'écart.

La façon dont ces écarts évoluent ne sont pour l'instant pas importants, mais ils le seront plus tard, lorsque  $(1 - p.Q_x^{obj})$  servira de support à un processus aléatoire. Ainsi, plus  $C_x^{obj}$  sera éloignée par en dessous de  $C_x^{opt}$  et moins nos agents auront de chance de partir. De la même manière, plus elle sera loin au dessus et plus ils seront incités à partir.



## 2.2 Le modèle : Processus de remplacement flottant

Nous avons pour l'instant réussi à ordonner les préférences des agents en fonction de leur taux de remplacement. L'ossature de notre modèle étant construite, il nous faut maintenant lui retirer son caractère déterministe. En effet, l'intérêt de la microsimulation réside dans sa capacité à simuler un à un le parcours de chaque individu. Il est donc essentiel que notre modèle permette d'individualiser les comportements des agents.

### 2.2.1 Introduction de l'aléa

Comme nous l'indiquions plus haut, notre objectif est ici de rendre aléatoire le moment de croisement des courbes  $C_x^{opt}$  et  $C_x^{obj}$ . Nous devons cependant veiller à ce que cette modification ne dénature pas la notion de taux objectif. Pour ce, nous avons décidé d'assouplir notre processus de remplacement objectif. Plus précisément, nous allons remplacer son coefficient déterministe  $(1 - p \cdot Q_x^{obj})$  par une marche aléatoire dérivant de ce coefficient.

#### Définition :

On définit l'âge d'ouverture de la réflexion, noté  $aor$ , comme l'âge auquel un individu entame sa réflexion concernant son départ à la retraite. Et on suppose que  $aor \leq aod$ .

#### Définition :

On note  $\Delta_t^p$  le processus de dérive des comportements défini de la manière suivante :

$$\Delta_t^p = c + \Delta_{t-1}^p + \epsilon_t$$

Avec :

- .  $c$  le coefficient directeur de la droite  $(1 + p \cdot Q_t^{obj})$
- .  $t \in \{aor, \dots, age\ limite\}$
- .  $\Delta_{aor}^p = (1 + p \cdot Q_{aor}^{obj})$
- .  $(\epsilon_t)_t$  une famille de v.a.i.i.d de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma)$

Nous avons donc défini notre dérive des comportements qui va remplacer le coefficient  $(1/(1 - p.Q_x^{obj}))$ . Nous faisons remarquer que la droite  $(1 + p.Q_x^{obj})$  à laquelle il est fait référence dans cette définition, est en fait la tangente à  $C_x^{opt}$  en 0. L'intérêt de ce choix se comprend grâce à la propriété suivante.

Propriété 2.3 : Pour tout  $t \geq aor$ , on a :

$$\mathbb{E}[\Delta_t] = c.t + \Delta_{aor}^p$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \cdot \Delta_t^p &= c.t + \Delta_{aor}^p + \sum_{s=aor+1}^t \epsilon_s \\ \cdot \text{Or, } \mathbb{E}\left[\sum_{s=aor+1}^t \epsilon_s\right] &= \sum_{s=aor+1}^t \mathbb{E}[\epsilon_s] = 0 \text{ car les } \epsilon_i \text{ sont indépendants de moyenne nulle} \end{aligned}$$

Nous avons donc mis en place une marche aléatoire dont la moyenne des termes épouse la droite  $(1 + p.Q_t^{obj})$ . Ainsi,  $\mathbb{E}[\Delta_t]$  va donc rencontrer la droite  $C_x^{opt}$  lors de l'atteinte du taux objectif.

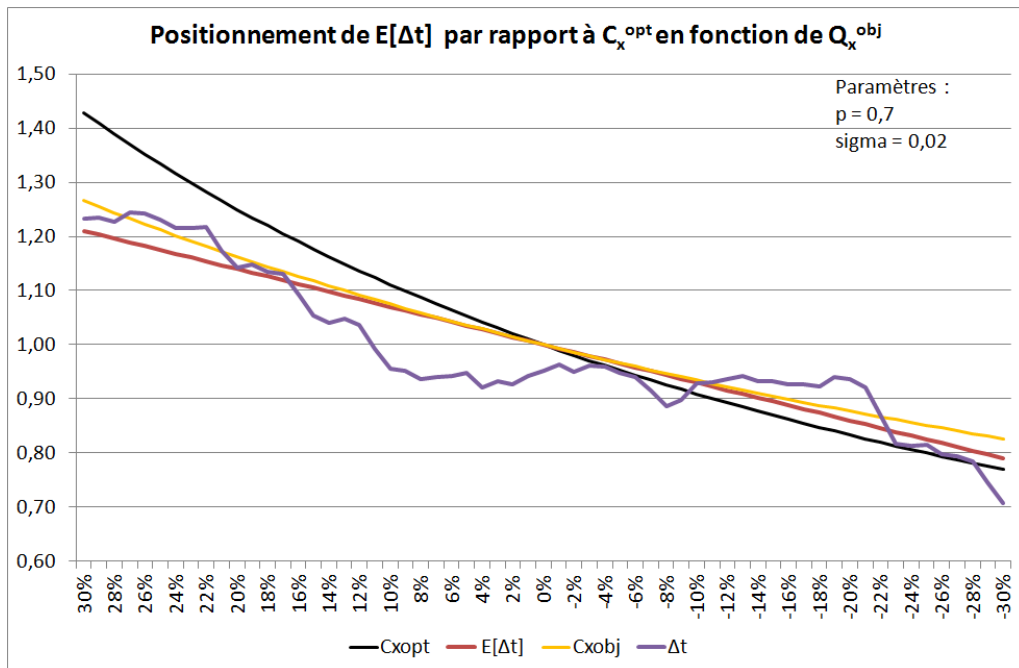


FIGURE 2.3 – Représentation de  $\Delta_x$  en fonction de  $Q_x^{obj}$

Nous faisons également remarquer que le comportement de  $\mathbb{E}[\Delta_t]$  par rapport à  $C_t^{opt}$  est tel que nous le souhaitons. En effet, La courbe  $\mathbb{E}[\Delta_t]$  est d'abord inférieure à  $C_t^{opt}$  pour des petites valeurs du taux de remplacement. Ensuite, cet écart réduit progressivement jusqu'à ce qu'elles se croisent au taux objectif. Puis la courbe  $C_t^{obj}$  passe au dessus et continue de creuser progressivement l'écart. Nos agents seront donc d'autant plus incités à partir que leur taux de remplacement augmentera. Et notre modèle permet même de maîtriser l'évolution de l'écart entre ces deux courbes grâce au coefficient p.

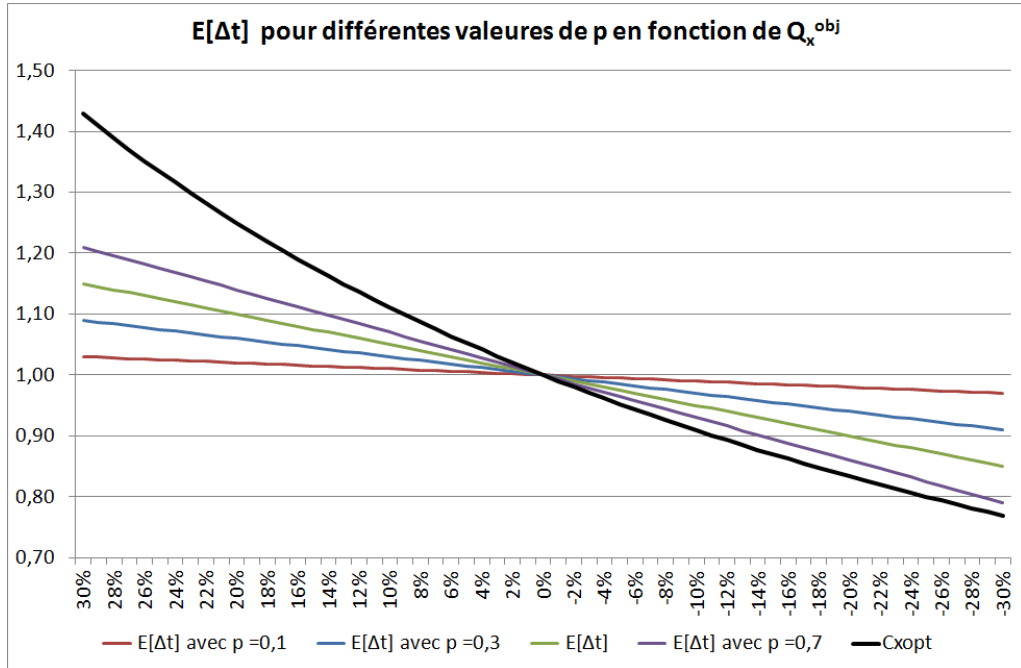


FIGURE 2.4 – Sensibilité de  $\Delta_x$  au coefficient de pente

Nous rappelons que nous avons fait remarquer lors de l'analyse des départs autour du taux plein que même si les données laissaient penser à l'existence d'un taux objectif, nous ne pouvions pas savoir si celui-ci ne serait pas inférieur au taux auquel se situait le pic des liquidations. La notion de taux objectif ne doit donc pas être traduite avec trop de rigidité au sein du modèle. Le coefficient p va nous servir à tenir compte de cette remarque. En effet, le fait d'augmenter ce coefficient va nous permettre de réduire l'écart entre les deux courbes. Cette manipulation permettra donc de flouter la notion de taux plein puisque celles-ci seront donc proches sur une durée plus longue. De plus, nous ne sommes pas ici en présence d'un processus stationnaire, la variance de delta t est croissante avec le temps<sup>1</sup>. Or, nous avons choisi de débiter la réflexion des agents avant leur ouverture des droits, donc en général avant qu'ils aient atteint le taux objectif. Le moment de croisement de  $\mathbb{E}[\Delta_t]$  avec la courbe  $C_{opt}$  sera donc assez éloigné dans le temps pour que la variance du processus ait eu le temps d'augmenter. Le croisement du processus avec  $C_t^{opt}$  ne se fera donc pas de manière prévisible à ce moment là.

1. On a  $\Delta_t^p = c.t + \Delta_{aor}^p + \sum_{s=aor+1}^t \epsilon_s \Rightarrow \text{Var}(\Delta_t^p) = \text{Var}(\sum_{s=aor+1}^t \epsilon_s) = (t - aor) \cdot \sigma$

*Nota bene : Il arrive souvent que le taux de remplacement des individus soit constant sur plusieurs trimestres. Or, on peut penser que les individus continuent leur réflexion quant à leur décision de départ durant cette période. Pour éviter que leur dérive ne stagne durant cette période, il a donc été ajouté dans le modèle un processus de moyenne nulle venant continuer le mouvement de la dérive durant ces périodes. Nous ne le décrivons pas en détail ici mais nous l'illustrons avec ce graphique*

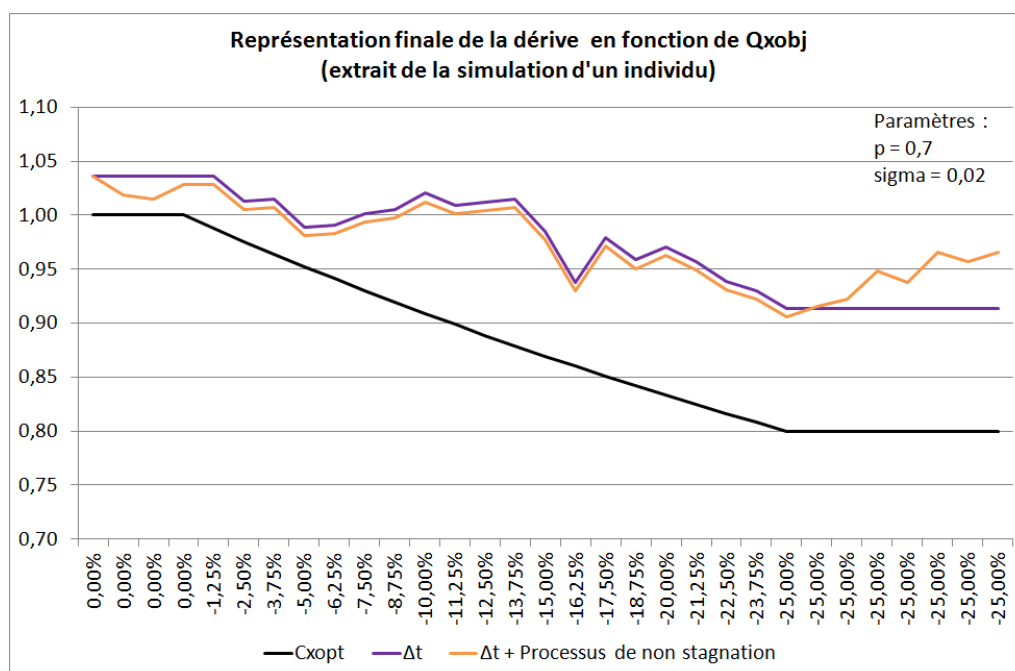


FIGURE 2.5 – Aperçu du processus de dérive final

## 2.2.2 Introduction d'une vision à court-terme

La dernière modification que nous apportons concerne  $F_x$ . Ce coefficient nous a permis de positionner les perceptions des agents par rapport au coefficient de préférence pour le loisir optimal. La logique de décision long-terme que nous souhaitons modéliser est donc respectée.

Nous voudrions néanmoins apporter plus de finesse dans la modélisation des comportements en y intégrant une logique de décision à court-terme. En effet, pour être plus réaliste, notre modèle devrait être sensible aux mouvements dans la pension proches de  $x$ . On peut effectivement penser que lorsqu'un agent réfléchit à son âge de départ, il tient particulièrement compte des gains de pensions auxquels il pourrait prétendre s'il décalait légèrement son départ. Dans sa définition actuelle,  $F_x$  rend le modèle insensible aux mouvements dans la pension proches de  $x$ . Nous allons donc le modifier.

Définition :

Soit un individu d'âge  $x$ , on définit  $F_x^{delai}$  comme suit :

$$F_x^{delai} = \max_{r > x + delai} \left( \frac{x u_w^{x \rightarrow (r-1)}}{x u_w^{x \rightarrow (r-1)} + x u_w^{r \rightarrow 110} \cdot (1 - r d_x)} \right)^{1/(1-\gamma)}$$

Afin de comprendre l'intérêt de cette modification, nous devons tout d'abord définir notre processus de remplacement final :

Définition :

Soit un individu d'âge  $x$ , on note  $PRf_x^{obj}$  son processus de remplacement flottant défini de la manière suivante :

$$PRf_x^{obj} = \Delta_x^p \cdot F_x^{delai}$$

Avec :

- $\Delta_x^p$  la dérive du processus
- $F_x^{delai} = \max_{r > x + delai} \left( \frac{x u_w^{x \rightarrow (r-1)}}{x u_w^{x \rightarrow (r-1)} + x u_w^{r \rightarrow 110} \cdot (1 - r d_x)} \right)^{1/(1-\gamma)}$

Nous arrivons maintenant à la propriété qui nous intéresse :

Propriété 2.3 : Si on choisit  $k = k_{obj}$ , alors :

Les agents partiront à la retraite en  $x$  dès que  $x$  sera tel que

$$\Delta_x^p \cdot \frac{F_x^{delai}}{F_x} \geq \frac{1}{(1 - p \cdot Q_x^{obj})}$$

*Preuve :* repartir de la propriété 2.2 bis et de la définition du processus de remplacement flottant.

Dans le cas où  $F_x^{delai} = F_x$ , nos départs seront donc déterminés par le croisement de notre dérive avec la courbe  $cxopt$ . Notre logique de comportement à long terme telle que voulue jusqu'ici est donc respectée.

Pour comprendre l'intérêt de la modification de  $F_x$ , intéressons nous au cas où  $F_x^{delai}$  est différent de  $F_x$ . On aura forcément par définition de ces deux processus,  $F_x^{delai}$  inférieur à  $F_x$ . Dans cette configuration, l'effort demandé à la dérive pour déclencher le départ sera plus important, puisqu'il faudra que  $\Delta_x^p$  soit supérieur à

$(F_x)/(F_x^{delai}).(1)/(1 - p.Q_x^{obj})$ . On peut même montrer<sup>2</sup> que cette condition revient à ce que  $\Delta_x^p > 1/(1 - Q)$  pour tout  $x$  et que  $G_x(r)$  soit inférieur à 0 pour tout les  $x$  entre  $x$  et  $x + delai$ . Ce qui veut dire, en terme de théorie de l'utilité, que l'agent a, en plus de sa logique long terme, un comportement myope. Il fonde sa décision de partir sur l'évaluation de son utilité entre son âge actuel et le délai.

Caractérisons maintenant le fait que  $F_x^{delai}$  soit inférieur à  $F_x$ , ceci nous permettra de caractériser le déclenchement de la vision à court terme.

Notons :

$$\begin{aligned} \cdot r_{proche} \text{ le } r \text{ tel que } F_x &= \left( \frac{x u_w^{x \rightarrow (r_{proche}-1)}}{x u_w^{x \rightarrow (r_{proche}-1)} + x u_w^{r_{proche} \rightarrow 110} \cdot (1 - r_{proche} d_x)} \right)^{1/(1-\gamma)} \\ \cdot r_{loin} \text{ le } r \text{ tel que } F_x^{delai} &= \left( \frac{x u_w^{x \rightarrow (r_{loin}-1)}}{x u_w^{x \rightarrow (r_{loin}-1)} + x u_w^{r_{loin} \rightarrow 110} \cdot (1 - r_{loin} d_x)} \right)^{1/(1-\gamma)} \\ \cdot r b_x &= \frac{x u_w^{r \rightarrow 110}}{x u_w^{x \rightarrow (r-1)}} \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} F_x^{delai} &< F_x \\ \Leftrightarrow \exists r \in [x; x + delai] \text{ tel que } &\left( \frac{x u_w^{x \rightarrow (r-1)}}{x u_w^{x \rightarrow (r-1)} + x u_w^{r \rightarrow 110} \cdot (1 - r d_x)} \right)^{1/(1-\gamma)} > F_x^{delai} \\ \Rightarrow r_{proche} \in [x; x + delai] & \end{aligned}$$

Par définition de  $F_x^{delai}$ , on a de plus :  $r_{loin} > x + delai$

On a :

---

2. On a  $F_x^{delai} = F_x$  pour  $r$  supérieur à  $delai$  donc la condition sur  $G_x(r)$  est remplie pour  $r$  supérieur au délai d'après la proposition 2.3.. La condition sur  $G_x(r)$  doit donc être vérifiée pour  $r$  entre  $x$  et  $x + delai$

$$\begin{aligned}
F_x^{delai} &< Fx \\
\Leftrightarrow_{\gamma \in [0;1]} &\left( \frac{{}_x u_w^{x \rightarrow (r_{loin}-1)}}{{}_x u_w^{x \rightarrow (r_{loin}-1)} + {}_x u_w^{r_{loin} \rightarrow 110} \cdot (1 - r_{loin} d_x)} \right) < \left( \frac{{}_x u_w^{x \rightarrow (r_{proche}-1)}}{{}_x u_w^{x \rightarrow (r_{proche}-1)} + {}_x u_w^{r_{proche} \rightarrow 110} \cdot (1 - r_{proche} d_x)} \right) \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{(1 + r_{loin} b_x \cdot (1 - r_{loin} d_x))} < \frac{1}{(1 + r_{proche} b_x \cdot (1 - r_{proche} d_x))} \\
\Leftrightarrow_{r, d_x \in [0;1] \forall r} &(1 + r_{loin} b_x \cdot (1 - r_{loin} d_x)) > (1 + r_{proche} b_x \cdot (1 - r_{proche} d_x)) \\
\Leftrightarrow_{r, d_x \in [0;1] \forall r} &\frac{(1 - r_{proche} d_x)}{(1 - r_{loin} d_x)} > \frac{r_{loin} b_x}{r_{proche} b_x}
\end{aligned}$$

Nous avons obtenu une condition permettant de caractériser le déclenchement de la vision à court terme. Commençons par nous intéresser au membre de droite de cette inégalité.

Par construction de  ${}_r b_x$ , pour un âge  $x$  fixé :

- . si l'on fixe  $r_{proche}$ , la quantité  $\frac{r_{loin} b_x}{r_{proche} b_x}$  est décroissante avec  $r_{loin}$ .
- . si l'on fixe  $loin$ , la quantité  $\frac{r_{loin} b_x}{r_{proche} b_x}$  est croissante avec  $r_{proche}$ .

Nous résumons ces propriétés dans le graphique suivant :

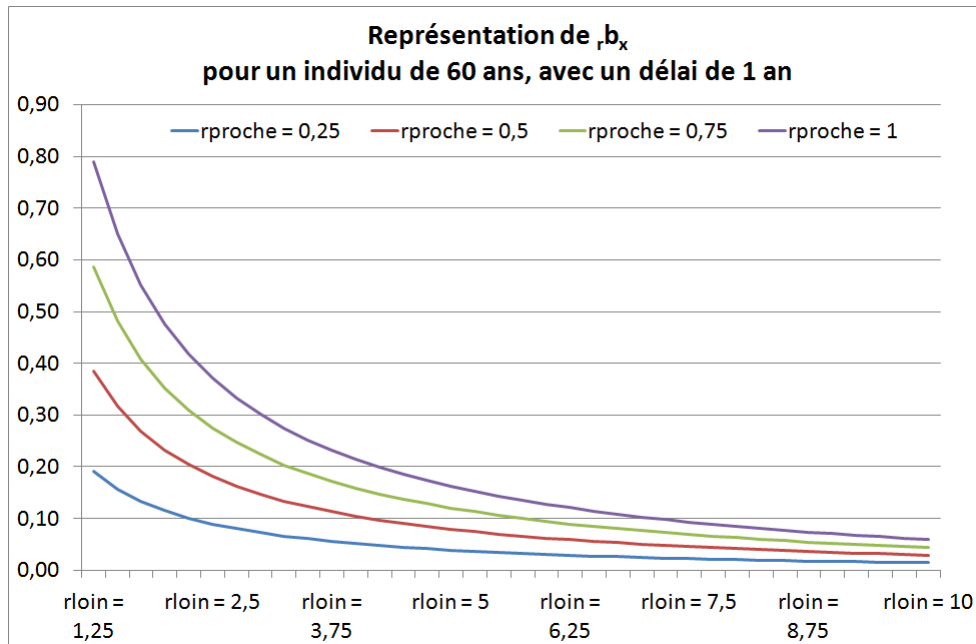


FIGURE 2.6 – Représentation des mouvements de  $\frac{{}_{rloin} b_x}{{}_{rproche} b_x}$  selon différentes valeurs de  $r_{proche}$  et de  $r_{loin}$

Nous allons maintenant nous intéresser au membre de droite de notre inégalité. Commençons par le simplifier afin d'en tirer une interprétation.

Nous rappelons que  ${}_r d_x = \frac{KP_r}{KP_x}$ , on a donc :

$$\frac{(1 - {}_{rproche} d_x)}{(1 - {}_{rloin} d_x)} = \frac{(1 - KP_{rproche}/KP_x)}{(1 - KP_{rloin}/KP_x)} = \frac{(KP_x - KP_{rproche})}{(KP_x - KP_{rloin})} = \frac{(KP_{rproche} - KP_x)}{(KP_{rloin} - KP_x)}$$

Cette forme est particulièrement intéressante puisqu'elle nous permet d'interpréter ce coefficient en termes de mouvements dans la pension. C'est le ratio entre les mouvements proches et les mouvement éloignés.

Ainsi, plus les mouvements dans la pension avant le délai seront élevés et plus notre ratio sera élevé. On aura donc plus de chance que  $(1 - {}_{rproche} d_x)/(1 - {}_{rloin} d_x)$  soit supérieur à  $({}_{rloin} b_x / {}_{rproche} b_x)$  et donc que  $F_x^{delai}$  soit inférieur à  $F_x$ . À l'inverse, des mouvements élevés mais lointains dans la pension vont venir diminuer notre ratio et l'effort demandé à  $KP_{proche}$  pour que  $F_x^{delai}$  soit inférieur à  $F_x$  sera plus important.

En d'autres termes, ce sont de fortes augmentations de la pension avant le délai qui peuvent déclencher la vision à court-terme. Mais l'importance de ces variations proches pourra être atténuée si la pension comporte des valeurs lointaines élevées. Le déclenchement de la vision court terme nous semble donc se faire dans des conditions satisfaisantes puisque ce sont des gains proches qui le provoquent, et ces gains doivent



être d'autant plus élevés que l'agent espère de fortes augmentations futures.

Nous allons illustrer ce raisonnement grâce à deux agents d'âge  $x$  observant leurs gains de pension futur. Le premier a une pension dont le montant augmente très fortement juste après  $x$  et dont les mouvements après le délai sont moins forts. Le second a une pension qui ne commence à augmenter fortement que passé le délai, que nous avons ici fixé à un an. Nous verrons que la vision à court-terme sera déclenchée pour notre premier agent mais pas pour le second.

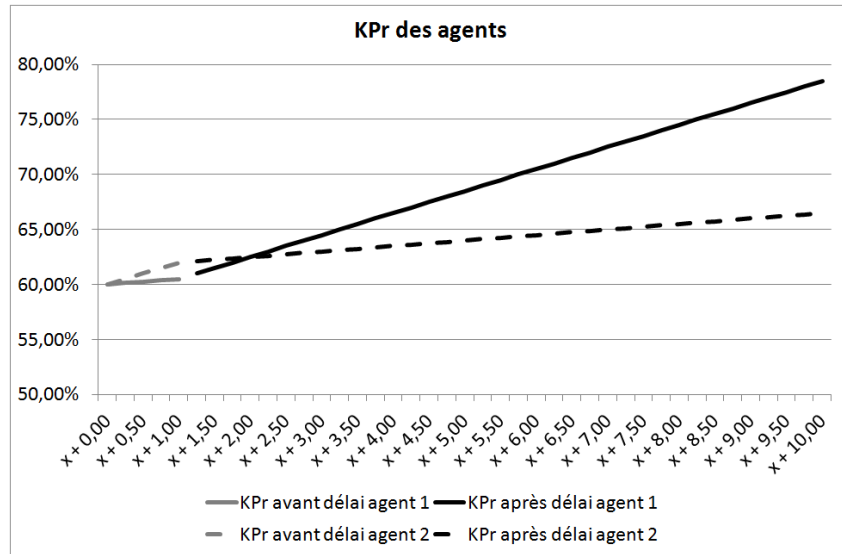


FIGURE 2.7 – KPr des agents

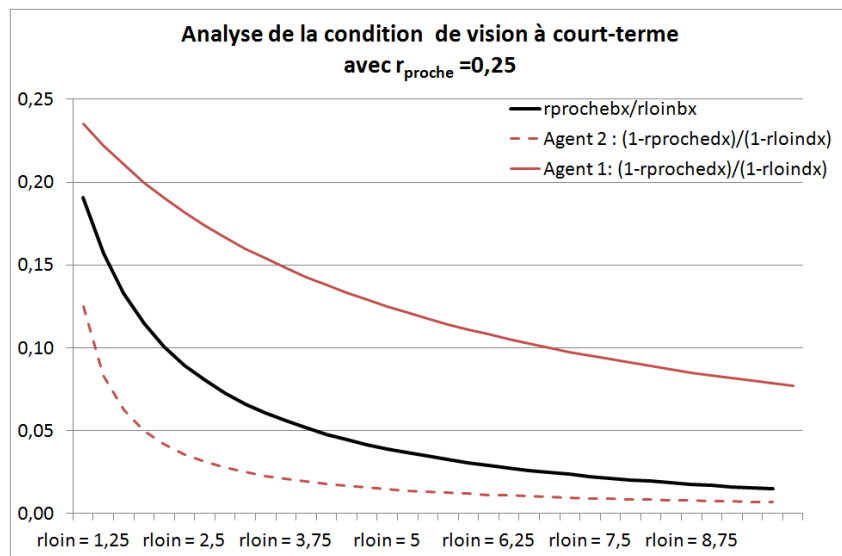


FIGURE 2.8 – Positionnement de  $\frac{(KP_{r_{proche}} - KP_x)}{(KP_{r_{loin}} - KP_x)}$  par rapport à  $\frac{r_{loin} b_x}{r_{proche} b_x}$

On voit donc que la courbe du ratio gains proches/gains lointains de notre premier agent est supérieure à la courbe des  $\frac{r_{loin} b_x}{r_{proche} b_x}$ . On aura donc pour lui  $F_x^{delai}$  inférieur à  $F_x$ . Notre second agent aura lui  $F_x^{delai}$  égal à  $F_x$ , sa décision de départ pour l'année  $x$  sera donc uniquement fondée sur une logique long-terme.

La construction de  $F_x^{delai}$  est donc satisfaisante. Tout d'abord parce que le déclenchement de la vision court-terme, comme nous venons de le voir, intervient lorsque la pension augmente fortement dans le délai fixé. De plus, les variations avant ce délai auront moins de chance de déclencher cette vision court-terme si l'agent espère des gains futurs élevés.

Nous voulons également insister sur l'interprétation de cette vision court-terme, lorsqu'elle est déclenchée. Un point important est qu'elle n'occulte pas la logique à long terme. Au contraire, elle demande à  $\Delta_x^p$  un effort supplémentaire<sup>3</sup>. Ceci s'interprète bien, l'agent ayant vu un gain élevé proche, donc facilement accessible, son envie de partir doit être plus forte pour qu'il ne soit pas tenté de rester chercher ce gain. Et la logique long terme est d'autant plus respectée que plus on sera proche du taux objectif et moins l'effort demandé à delta sera élevé. Il faut se rappeler que lorsqu'on est proche du taux objectif, il y a de fortes chances pour que la dérive soit proche de  $C_x^{opt}$ , donc on aura plus facilement  $\Delta_x^p$  supérieur à  $F_x/F_x^{delai} \cdot 1/(1 - Q_x^{opt})$ . Si la vision à court terme est déclenchée, les décisions seront donc faites sur un jugement de plus en plus myope à mesure que l'on s'approchera du taux objectif. Ceci nous semble cohérent puisque l'individu est alors prêt à partir, donc seules de fortes variations très proches peuvent l'inciter à rester.

---

3. puisqu'il est toujours demandé à  $\Delta_x^p$  d'être supérieur à  $F_x/(1 - Q_x^{opt})$

Nous avons donc réussi à construire un processus aléatoire fidèle à l'esprit du modèle déterministe présenté précédemment. Ce passage nous a certes fait perdre en précision mais il permet toujours de situer les préférences des agents par rapport au taux de remplacement. De plus, il suffit encore de choisir  $k = k_{obj}$  pour influencer le gros des départs autour d'un taux objectif quelconque, et ce même en présence de surcote. Enfin, nous avons ajouté une sensibilité aux mouvements dans la pension à court-terme qui respecte la logique long-terme.

### 2.2.3 Prise en compte de la décote et de la surcote dans le modèle

#### La surcote

Nous avons remarqué lors de notre analyse des comportements de départ que la surcote était perçue par les agents comme un simple prolongement du *KP*. En sa présence, les comportements des agents n'étaient pas modifiés, ils continuaient d'être déterminés par leur niveau de taux de remplacement. Or, c'est précisément le comportement que traduit notre processus de remplacement. Les préférences des individus sont basées sur leur taux de remplacement et ne sont pas modifiées en présence de surcote. Ce coefficient est donc déjà pris en compte par notre modèle.

#### La décote

Notre analyse des comportements avait mis en évidence le double effet de la décote. Nous avons en effet remarqué qu'en plus de baisser le taux de remplacement des agents, sa présence altérait la perception qu'ils avaient de ce taux. Le premier effet est déjà pris en compte par notre modèle, nous devons en revanche traduire le phénomène d'altération des perceptions dans notre processus de remplacement.

Soit un individu  $i$  fixé, on note  $\rho_x$  le processus défini par

$$\rho_x = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est décotant en } x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut maintenant définir notre processus de remplacement final :

**Définition :**

Soit un individu d'âge  $x$ , on note  $PRf_x^{obj}$  son processus de remplacement flottant défini de la manière suivante :

$$PRf_x^{obj} = \Delta_x^p \cdot (1 - \rho_x \cdot D) \cdot F_x^{delai}$$

Avec :

- $\Delta_x^p$  la dérive du processus
- $F_x^{delai} = \max_{r > x + delai} \left( \frac{{}_t u_w^{x \rightarrow (r-1)}}{{}_t u_w^{x \rightarrow (r-1)} + {}_t u_w^{r \rightarrow 110} \cdot (1 - r d_x)} \right)^{1/(1-\gamma)}$
- $\rho_x$  le processus défini ci-avant
- $D \in [0; 1]$  le "coefficient de perception de la décote"

Le coefficient de perception de la décote va donc agir comme un poids attirant la dérive  $D\%$  plus bas qu'elle ne l'était. C'est bien ce que nous voulions traduire, la décote dégrade la perception que les agents auraient eu de leur taux de remplacement sans sa présence.

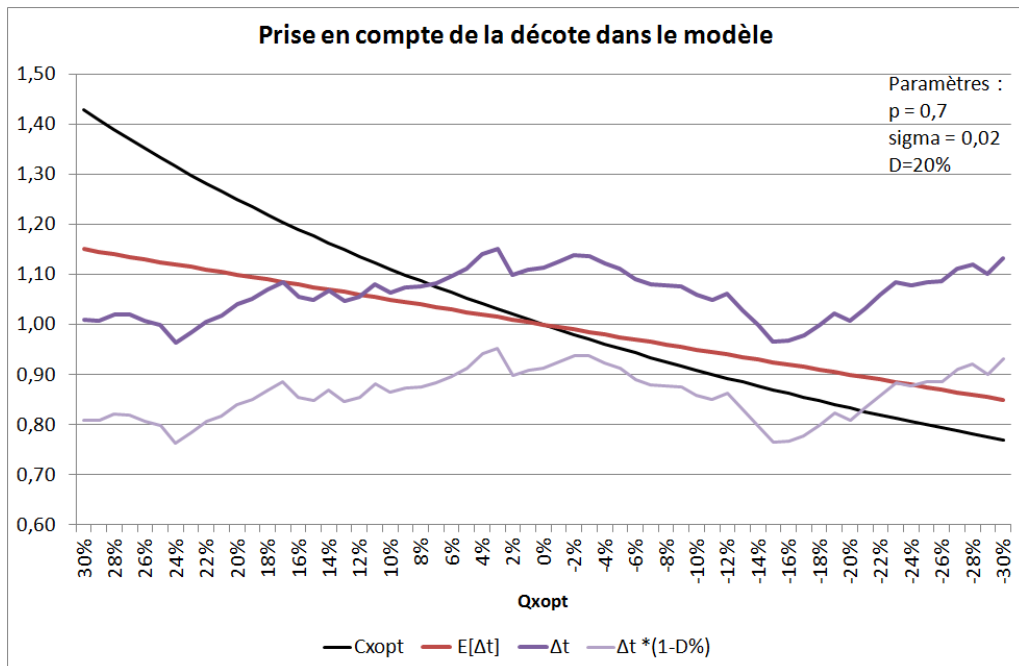


FIGURE 2.9 – Déformation de la dérive par le coefficient de perception de la décote

Quatrième partie

Résultats

# Chapitre 1

## Adaptation des paramètres du modèle aux données

La construction du modèle étant terminée, nous allons maintenant tester son adéquation à la réalité. Pour ce, nous allons vérifier qu'un bon choix de paramètres permet de reproduire les comportements de départ observés au sein du régime. Nous rappelons également que nos données s'étalent sur trois années durant lesquelles les réformes ont été mises en place. Cette partie permettra donc également d'observer les modifications de comportement durant cette période et de les traduire en terme de modification de paramètres dans notre modèle.

Afin de faciliter la lecture de cette partie, nous rappelons les paramètres du modèle :

Paramètre	Description	Fixé à priori/À déterminer
aor	Age d'ouverture de la réflexion : âge auquel les agents entament leur réflexion concernant leur âge de départ à la retraite	Fixé (5 ans avant l'ouverture des droits)
$\sigma$	Variance de $\epsilon$ , bruit blanc gaussien responsable du caractère aléatoire de la dérive des comportements	Fixé
$p \in [0; 1]$	Pente de la dérive des comportements	À déterminer
délai	Durée du "court-terme" dans la définition de la vision court-terme	À déterminer
$D \in [0; 1]$	Coefficient de perception de la décote	À déterminer
$KP^{obj}$	Taux de remplacement objectif	À déterminer

N.B. : Les paramètres proposés n'ont pas été déterminés a priori mais sont le résultats d'essais effectués sur nos échantillons, afin de trouver ceux donnant des résultats correspondant le mieux à la réalité. Nous ne présentons pas ici de méthode de détermination de ces paramètres, mais nous en proposons une interprétation à posteriori, celle-ci pouvant permettre une détermination plus rapide à l'avenir.

## 1.1 Données DOD 2009

Pour les données DOD 2009, nous avons effectué les simulations avec les paramètres suivants :

	Actifs	Mixtes	Sédentaires	Femmes
p	0.5	0.6	0.4	0.5
délai	3 Trimestres	5 Trimestres	4 Trimestres	5 Trimestres
$KP^{obj}$	64%	68%	62%	62%
$KP_{+1}^{obj}$	$(KP^{obj} - 1\%)$	$(KP^{obj} - 1\%)$	$(KP^{obj} - 2\%)$	$(KP^{obj} - 5\%)$

Si l'on observe les taux de liquidation cumulés des femmes et des sédentaires de l'échantillon DOD 2009<sup>1</sup>, on remarque un pic des liquidation en DOD+1.

Pour prendre en compte cette anomalie de comportement, nous avons donc abaissé le paramètre  $KP^{obj}$  chez ces deux populations à partir de DOD+1, créant le paramètre  $KP_{+1}^{obj}$ . Nous verrons plus loin que pour ces deux populations ce pic des liquidation est particulièrement élevé et peut donc être considéré comme une exception due aux récentes réformes. Il nous est néanmoins apparu que la présence de ce paramètre à des niveaux très faibles (autour de 1%) donnait des résultats satisfaisants même pour les années postérieures, et pour les autres populations, nous avons donc décidé de l'intégrer au modèle.

Nous avons fait ce choix en tenant compte du fait que ce paramètre ne changeait pas le fonctionnement du modèle, mais seulement l'interprétation des comportements des agents, dans une mesure qui nous a semblé réaliste. On peut en effet admettre qu'une fois la première année resté à travailler après l'ouverture des droits, les agents diminuent leurs exigences, ce qui se traduirait par une baisse de leur KPobj.

Concernant le choix de p, on remarque que c'est la population Mixte qui a été affectée du coefficient de pente le plus élevé. Ceci traduit le fait que cette catégorie abrite des comportement hétérogènes, au taux de remplacement objectif défini moins clairement que pour le reste de la population.

---

1. (figures 3.28 et 3.30 partie II)

Le choix du délai mérite une attention particulière car il jouera un rôle important dans la modification des comportements lors des réformes. C'est chez les Actifs qu'il a été pris le plus faible, ce qui signifie que les agents de cette catégorie affichent une réticence à reporter leur départ lorsque leur dérive est supérieure à  $C_x^{opt}$ . En effet, lorsque leur objectif de taux long terme est atteint, seuls des gains extrêmement proches dans le temps peuvent les inciter à rester. Ils ne sont donc pas dans une logique d'optimisation de leur pension. À l'inverse, les Femmes sont plus réceptives aux mouvements dans la pension, même si ceux-ci sont éloignés de plus d'un an. Ceci est peut-être dû au fait qu'elles bénéficient souvent d'anticipations de durée et possèdent donc un âge d'ouverture des droits relativement jeune. Les gains de pensions futurs leur semblent donc plus accessibles et peuvent donc assouplir leur logique long terme.

Enfin, à part pour les Actifs, les taux de remplacements objectifs peuvent sembler logiques aux vues des histogrammes des taux de remplacements à la liquidation<sup>2</sup>. Les moyennes des taux de remplacement des Actifs lors de la liquidation sont en effet supérieures à 70% alors que leur taux objectif n'a été pris que égal à 64%. Or, il faut rappeler ici que le taux objectif ne représente que le taux à partir duquel les agents sont prêts à liquider. Leur moyenne de taux à la liquidation est élevée parce que nombre d'entre eux ont des taux très élevés dès l'ouverture des droits. Mais nous devons aussi prendre compte les agents aux taux moins élevés et qui liquident quand même, ce qui vient baisser le taux objectif.

Ces paramètres donnent les simulations suivantes :

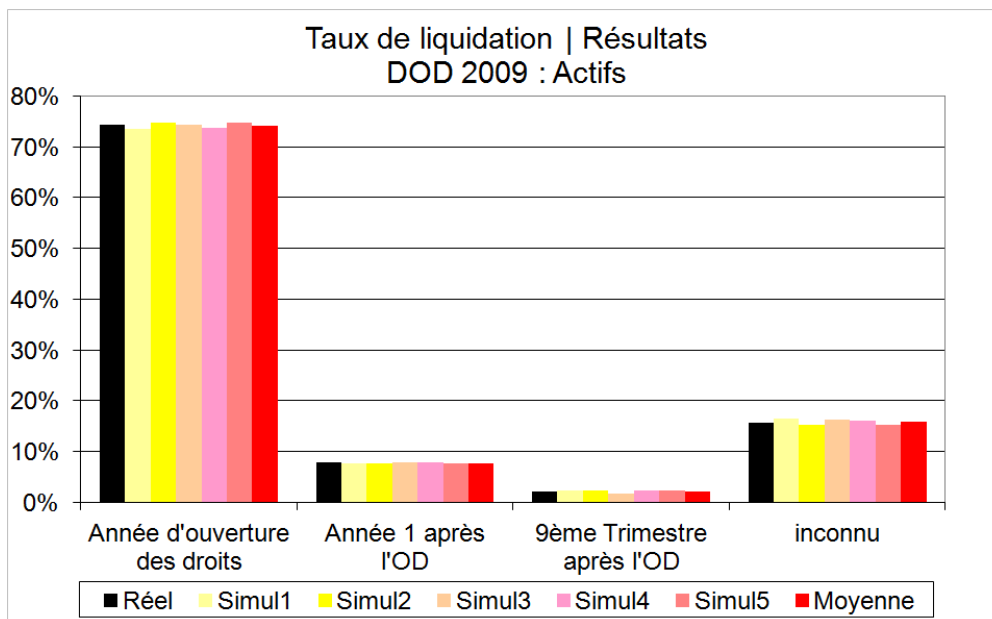


FIGURE 1.1 – Actifs : Résultats des simulations

2. figures 3.31 à 3.34 partie II



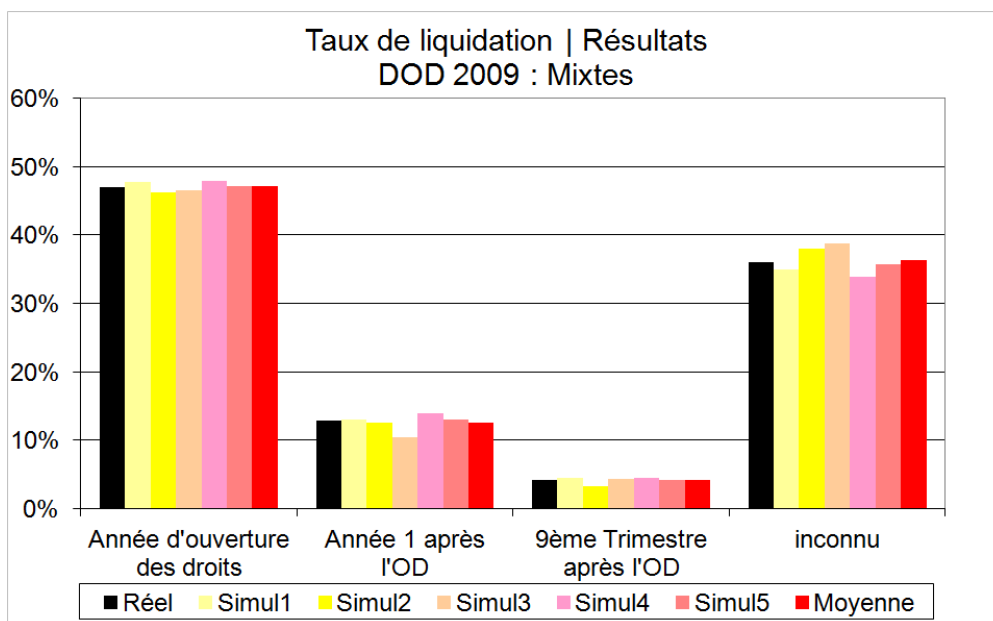


FIGURE 1.2 – Mixtes : Résultats des simulations

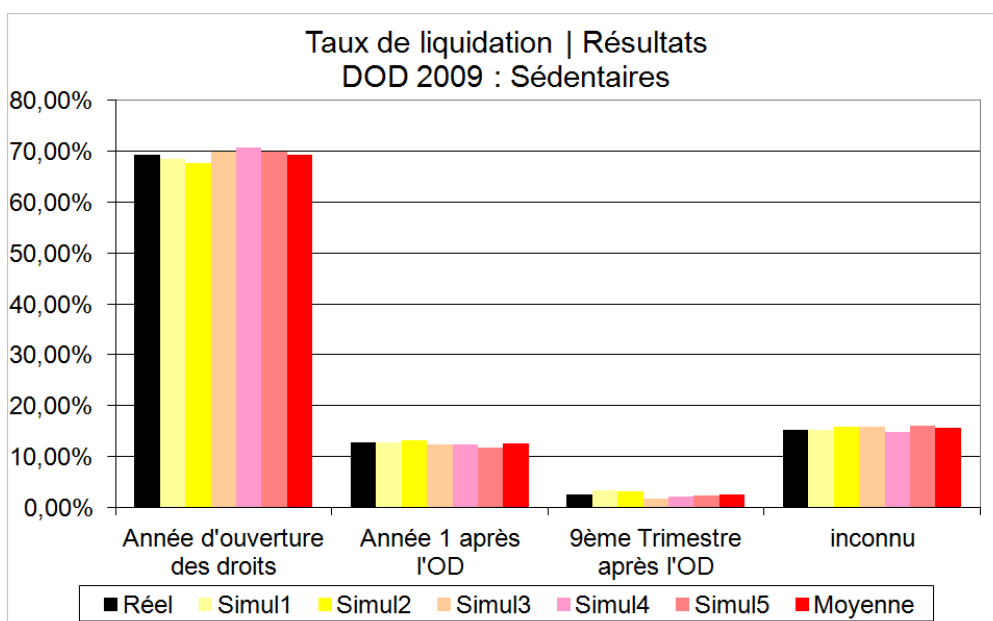


FIGURE 1.3 – Sédentaires : Résultats des simulations

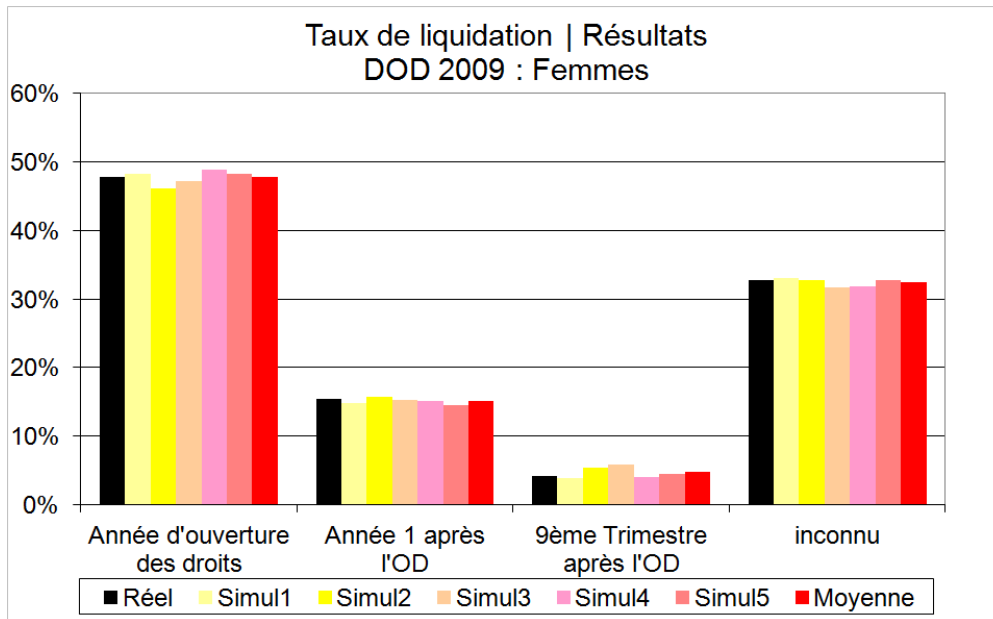


FIGURE 1.4 – Femmes : Résultats des simulations

Les taux de liquidations obtenus sont proches de la réalité. Mais cela ne veut pas forcément dire que notre modèle respecte la logique des comportements de départs réels. Pour nous en assurer, observons les taux de remplacement à la liquidation.

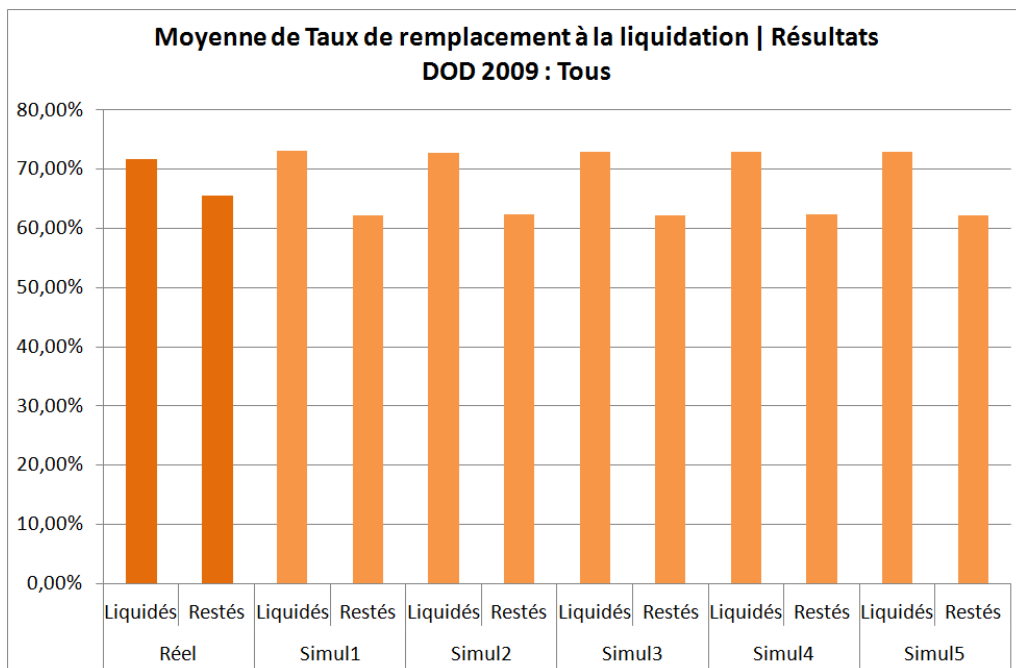


FIGURE 1.5 – Tous : Résultats des simulations. Taux de remplacement moyen annuel à la liquidation

La logique des comportements de départ a bien été respectée par les simulations. Les taux de remplacement des liquidés sont supérieurs à ceux des agents restés. Mais l'on remarque néanmoins que les simulations ont tendance à caricaturer la réalité. En effet, même si les taux de remplacements des simulations sont du même ordre de grandeur que dans la réalité, l'écart entre la moyenne des taux des liquidés et de ceux qui sont restés est plus importante que dans la réalité. Pour être plus précis dans notre analyse, intéressons-nous plus particulièrement à deux catégories ayant des comportements de départ différents, les Actifs et les Femmes.

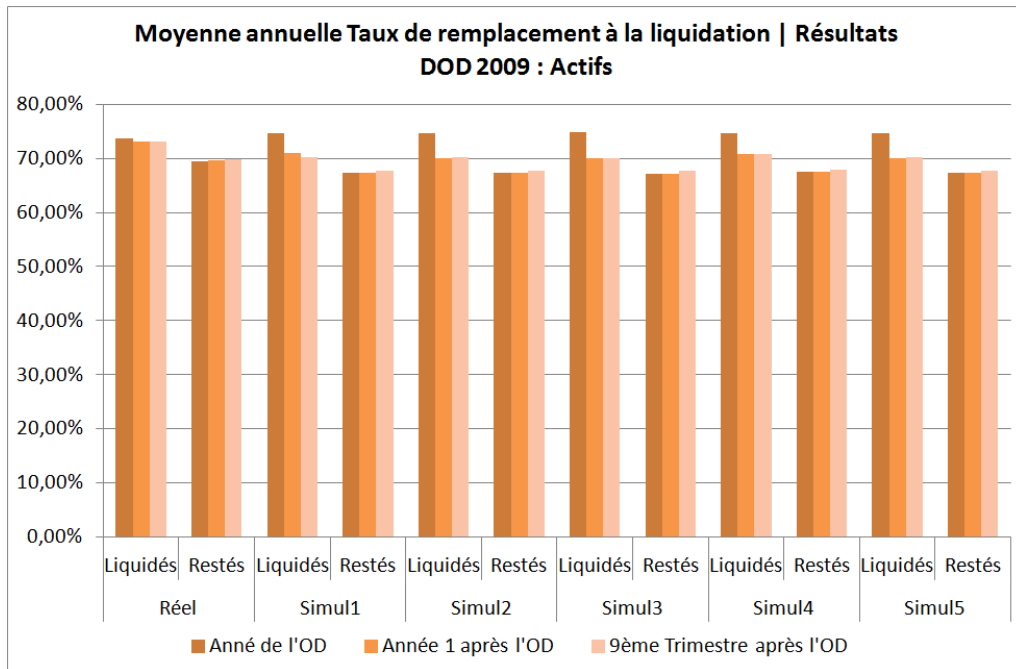


FIGURE 1.6 – Actifs : Résultats des simulations. Taux de remplacement annuel moyen à la liquidation

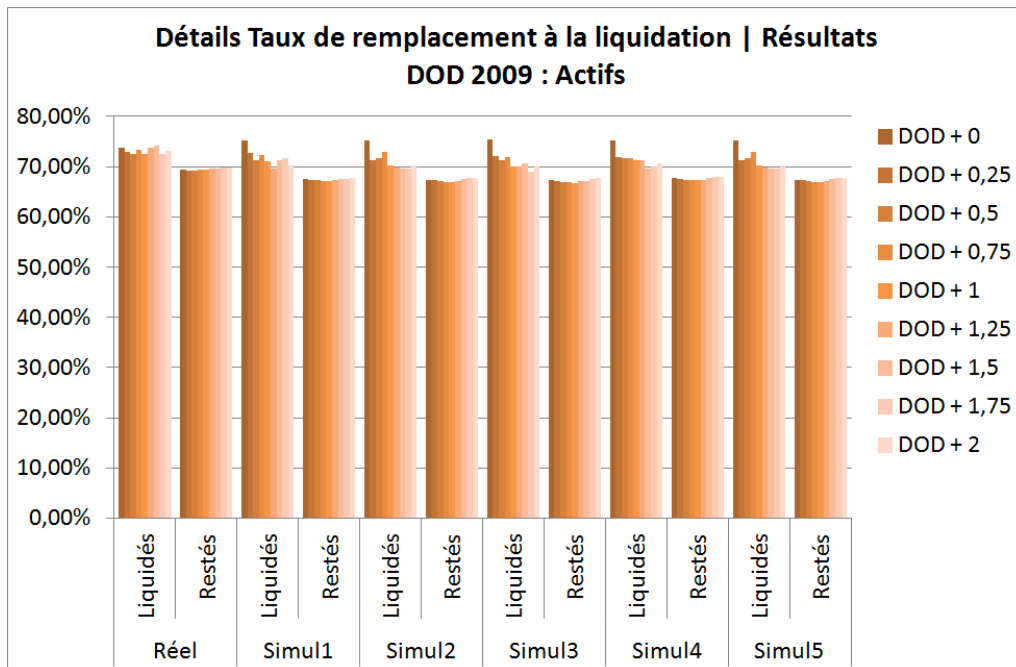


FIGURE 1.7 – Actifs : Résultats des simulations. Taux de remplacement à la liquidation

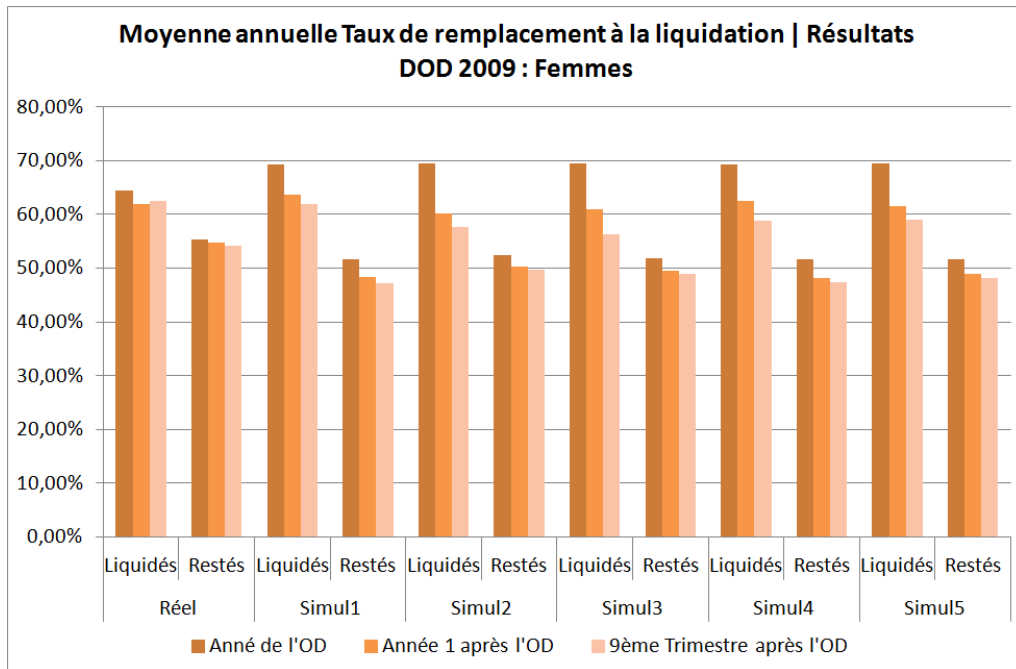


FIGURE 1.8 – Femmes : Résultats des simulations. Taux de remplacement annuel moyen à la liquidation

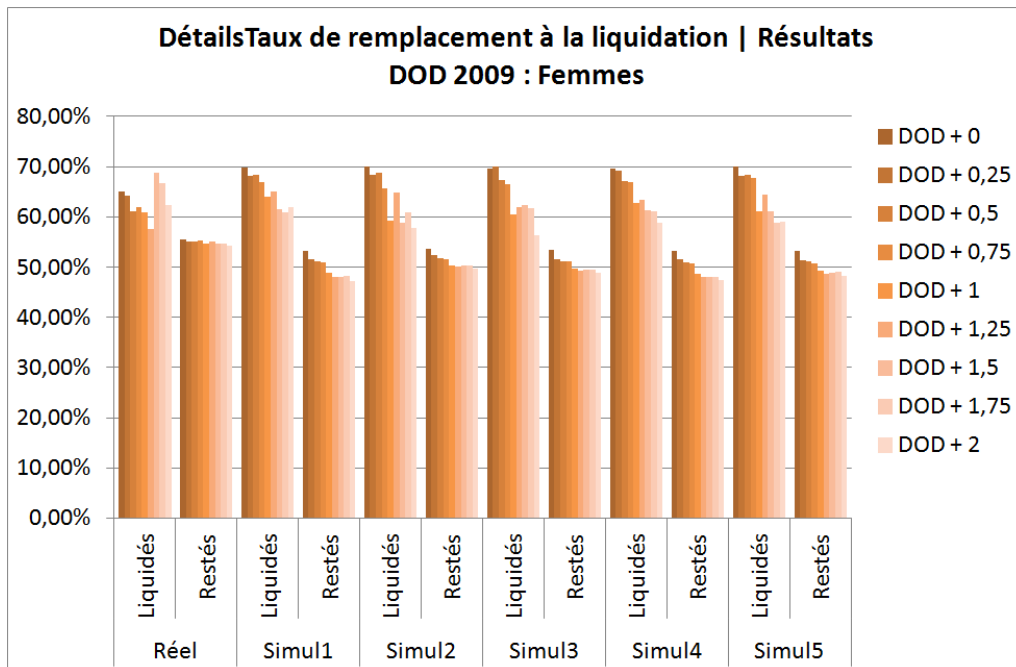


FIGURE 1.9 – Femmes : Résultats des simulations. Taux de remplacement à la liquidation

Intéressons nous tout d'abord à l'évolution des taux de remplacements des Actifs ayant liquidé. Leurs moyennes décroissent à mesure que l'on s'éloigne de la date d'ouverture des droits. On remarque le même phénomène chez les femmes jusqu'à ce qu'on atteigne l'année 1 après l'ouverture des droits, ce qui correspond au pic des liquidations dû à l'effet réforme que nous avons évoqué plus haut. Mais ce qui est intéressant de remarquer, et qui différencie les comportements des Femmes de ceux des Actifs, c'est que cette décroissance est beaucoup plus forte chez les Femmes que chez les Actifs. En d'autres termes, les Actifs qui restent le font dans le but d'obtenir un taux de remplacement aussi élevé que ceux qui avaient liquidé plus tôt. Alors que les femmes restées liquident avant d'avoir atteint cet objectif, peut-être parce que celui-ci est trop éloigné.

Un autre élément confirme cette interprétation. Il faut remarquer que les taux de liquidation des actifs restés ont tendance à augmenter alors que l'on s'éloigne de l'ouverture des droits. À l'inverse, ceux des femmes diminuent, ce qui veut dire qu'elles n'attendent pas d'avoir un taux de remplacement élevé pour partir.

Ces phénomènes sont bien reproduits par nos simulations. En effet, la décroissance des taux de liquidation des agents restés est plus forte chez les Femmes que chez les Actifs. Et notre simulation reproduit, certes avec un peu de retard, la croissance des taux de liquidation des Actifs restés. Nous faisons remarquer une fois de plus que nos simulations grossissent le trait puisque les moyennes des taux de liquidation des agents liquidant le premier trimestre sont nettement supérieurs à la réalité. De plus, la décroissance de ces taux, surtout chez les femmes, est plus schématique que dans la réalité.

## 1.2 Données DOD 2010

Nous commençons par présenter les résultats des simulations effectuées sur l'échantillon DOD 2010 avec les paramètres obtenus précédemment, lors de la simulation des données DOD 2009. Nous discuterons ensuite de l'adéquation de ces paramètres au nouvel échantillon. Cette analyse nous permettra de proposer un nouveau jeu de paramètres, s'adaptant mieux aux données 2010. Nous porterons une attention particulière à l'évolution des paramètres puisqu'ils sont les marqueurs de l'évolution des comportements due aux réformes.

Ci-dessous les résultats des simulations effectuées sur l'échantillon DOD 2010 avec les paramètres des données DOD 2009 :

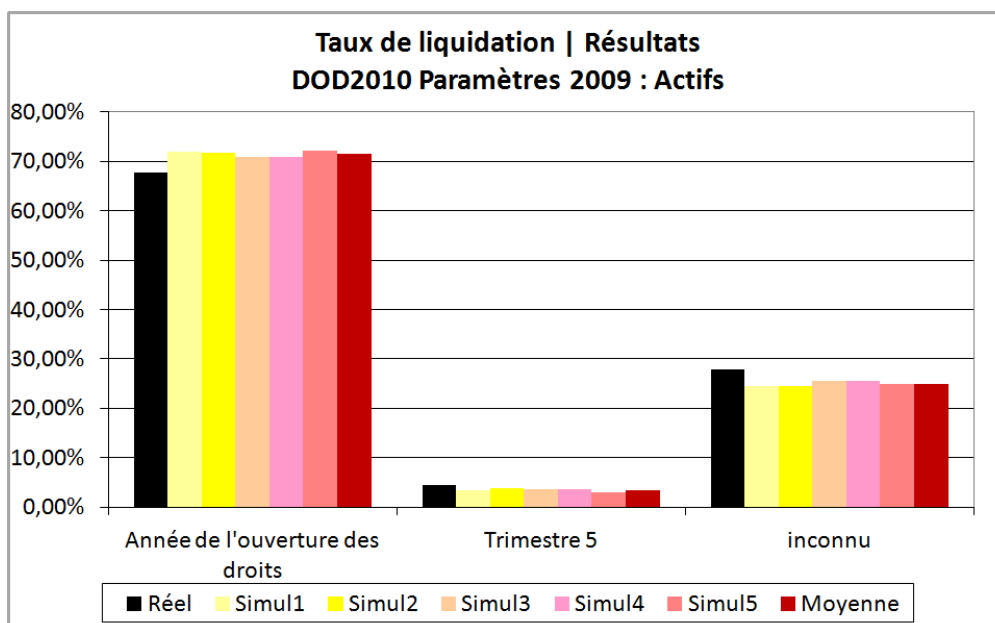


FIGURE 1.10 – Actifs : Résultats des simulations 2010 paramètres 2009. Taux de remplacement à la liquidation

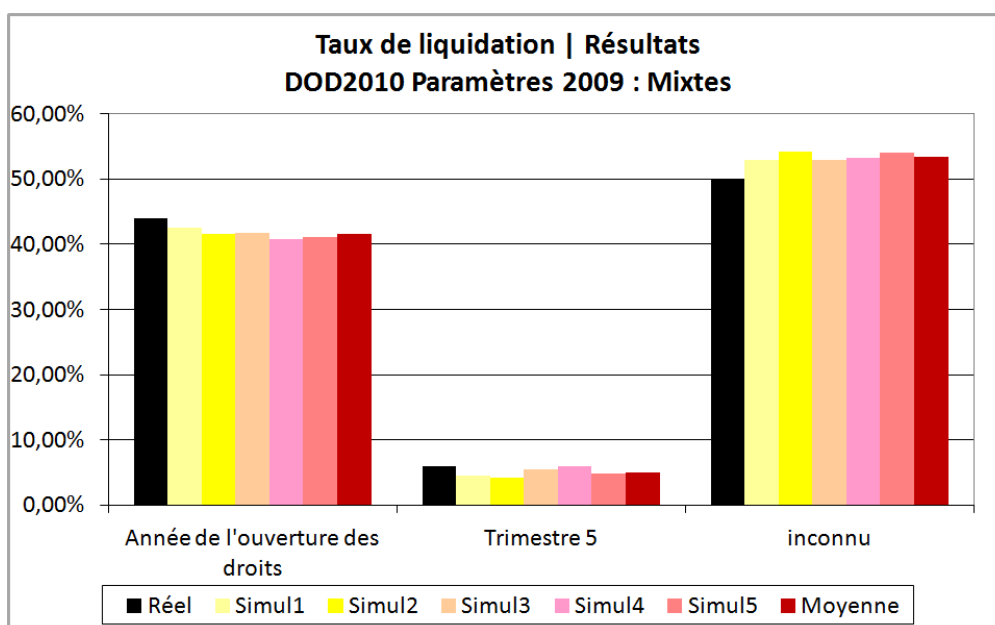


FIGURE 1.11 – Mixtes : Résultats des simulations 2010 paramètres 2009. Taux de remplacement à la liquidation

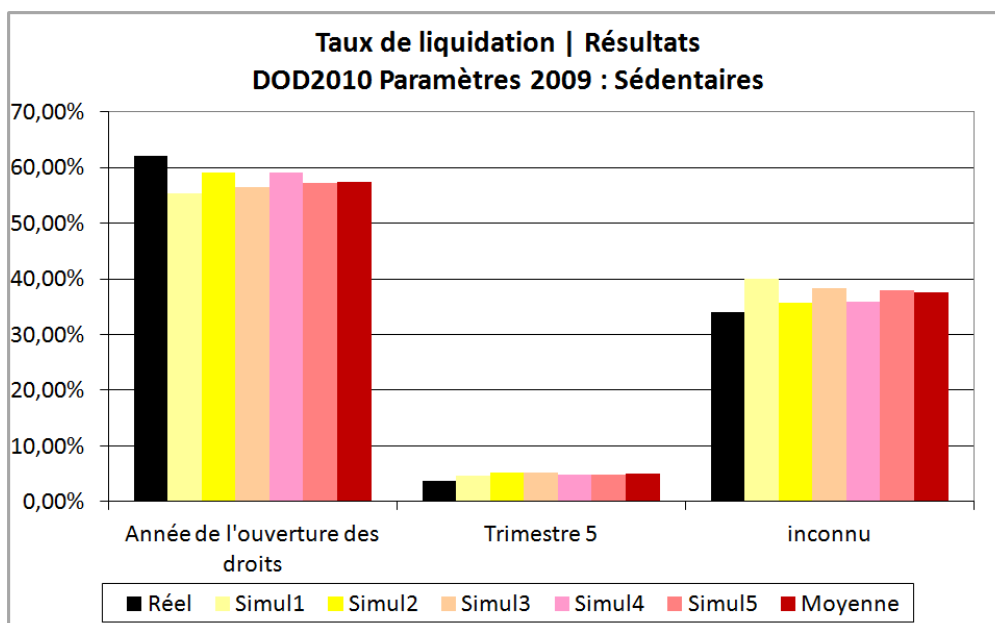


FIGURE 1.12 – Sédentaires : Résultats des simulations 2010 paramètres 2009. Taux de remplacement à la liquidation

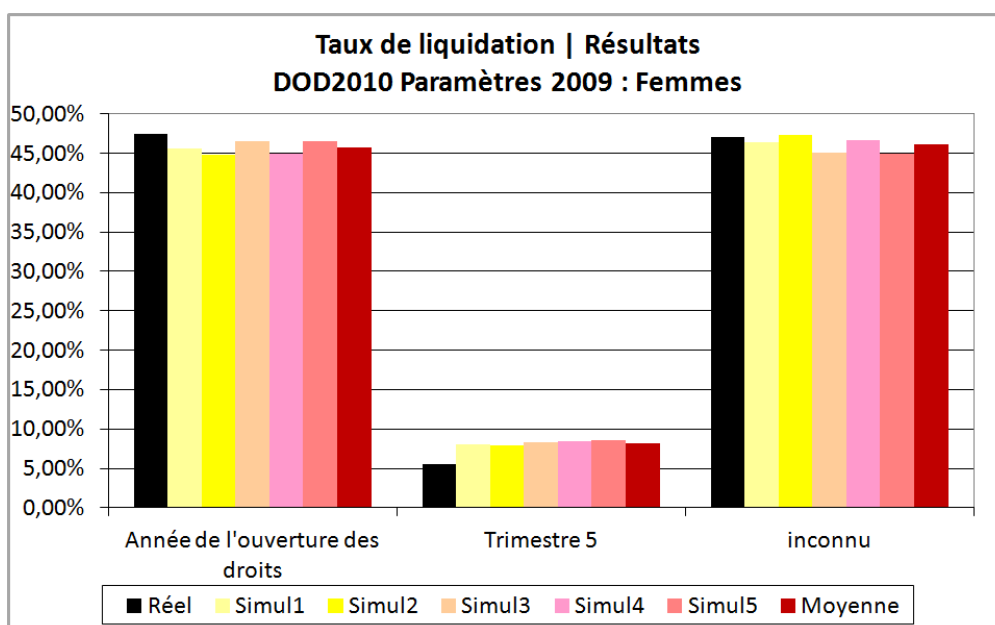


FIGURE 1.13 – Femmes : Résultats des simulations 2010 paramètres 2009. Taux de remplacement à la liquidation



Intéressons-nous tout d'abord aux liquidations lors de l'année d'ouverture des droits. On remarque que les taux de liquidation simulés sont inférieurs aux réels pour toute la population sauf pour les Actifs. Il semblerait donc que le taux objectif des Sédentaires, des Femmes et des Mixtes ait été surestimé.

Les Actifs, contrairement au reste de la population possèdent des taux de liquidations réels inférieurs à ceux simulés avec les paramètres 2009. En regardant attentivement, on remarque que le phénomène inverse se produit pour les simulations du trimestre 5. Pour plus de précision, nous avons effectué des simulations sur l'échantillon DOD2010 T1 avec les mêmes paramètres. Nous rappelons que cet échantillon est inclus dans l'échantillon DOD2010 mais qu'il permet d'observer les départs jusqu'à un an après l'ouverture des droits. On obtient les résultats suivants :

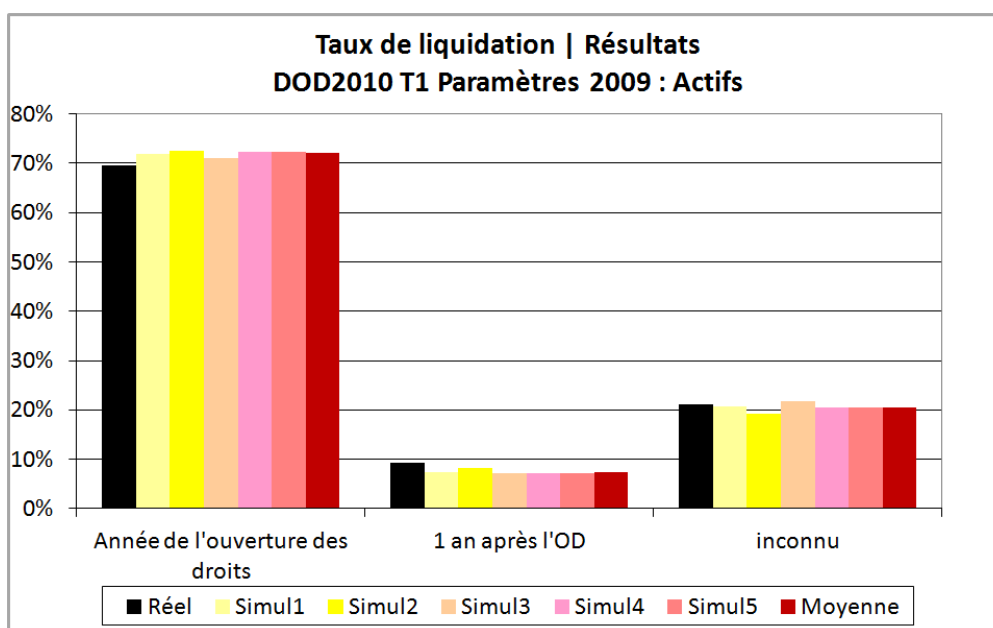


FIGURE 1.14 – Actifs : Résultats des simulations 2010 ( échantillon DOD2010 T1) paramètres 2009. Taux de remplacement à la liquidation

On voit bien sur ce graphique que l'écart entre les liquidations simulées et réelles lors de l'année d'ouverture des droits crée un écart inverse l'année suivante. En d'autres termes, le nombre de liquidations entre l'ouverture des droits et un an après l'ouverture des droits est correctement simulé, mais la répartition entre ces deux années est erronée. Pour résumer, les Actifs ont tendance à reporter leur départ d'un an par rapport à l'année dernière. Ce phénomène correspond exactement à une augmentation de la vision court-terme, les Actifs commencent à optimiser leur rente en tenant compte des mouvements de pension plus éloignés de l'ouverture des droits que l'année dernière. Il semblerait donc que chez les Actifs, un des effets de la réforme résulte en l'apparition d'une optimisation de rente court-terme plus accrue. Nous augmenterons donc le délai de la vision court terme chez cette population.

Nous revenons maintenant rapidement sur le paramètre  $KP_{+1}^{obj}$  des Femmes. Il avait été pris à un niveau très élevé l'année dernière pour faire face au pic des liquidations en DOD+1. Or, nous ne retrouvons pas un pic aussi élevé cette année. Il semble

donc que ce phénomène était exceptionnel et causé par une précipitation des départs de peur que les réformes n'altèrent les niveaux de pensions. Garder ce paramètre tel quel amènerait une surestimation des départs en DOD+1. Pour nous en assurer, nous avons effectué les simulations pour les femmes de l'échantillon DOD2010 T1.

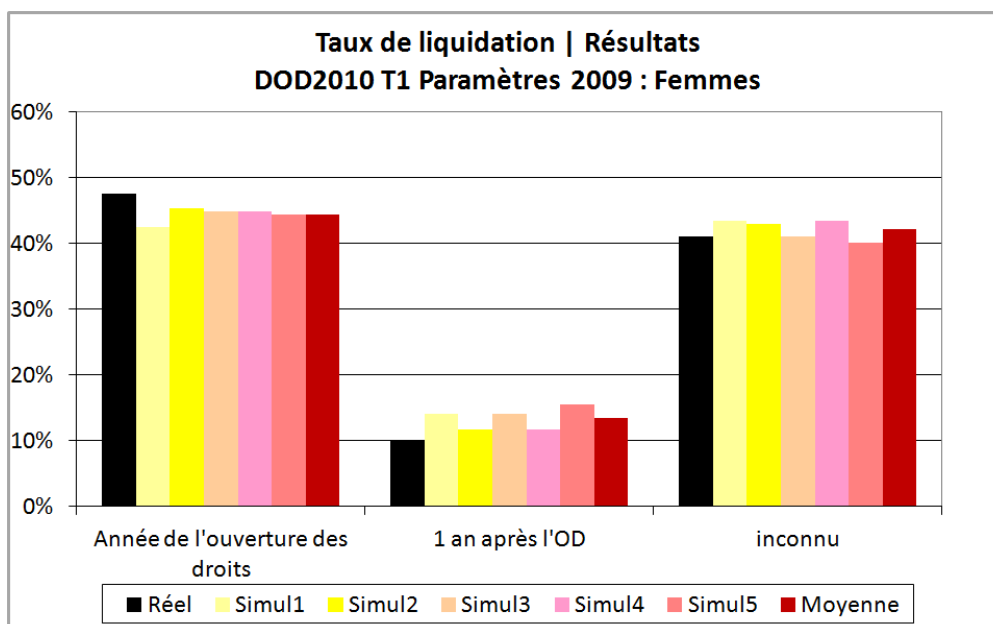


FIGURE 1.15 – Femmes : Résultats des simulations 2010 ( échantillon DOD2010 T1) paramètres 2009. Taux de remplacement à la liquidation

On voit bien ici que les départs un an après l'ouverture des droits seraient surestimés si l'on gardait un  $KP_{+1}^{obj}$  aussi élevé. Nous allons donc baisser ce paramètre.

Finalement, nous avons effectué les simulations sur l'échantillon DOD 2010 avec les paramètres suivant :

	Actifs	Mixtes	Sédentaires	Femmes
p	0.5	0.6	0.4	0.5
délai	3 Trimestres	5 Trimestres	4 Trimestres	5 Trimestres
$KP^{obj}$	64%	66%	61%	61%
$KP_{+1}^{obj}$	$(KP^{obj} - 1\%)$	$(KP^{obj} - 1\%)$	$(KP^{obj} - 2\%)$	$(KP^{obj} - 2.5\%)$

Afin de vérifier que ce jeu de paramètres donne des résultats satisfaisants même en DOD+1, nous présentons les résultats des simulations sur l'échantillon DOD2010 T1 :

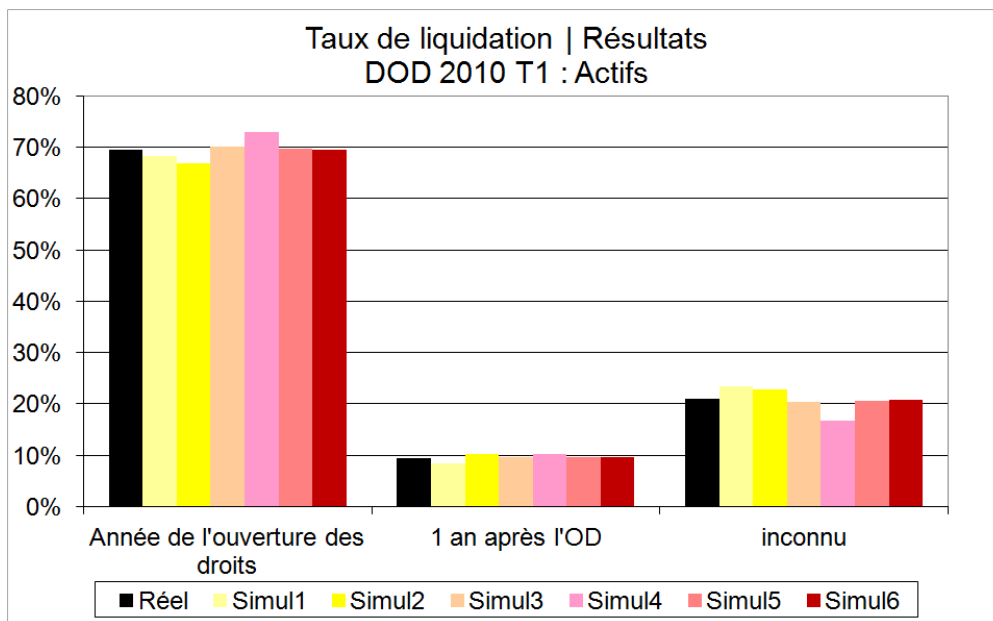


FIGURE 1.16 – Actifs : Résultats des simulations. Taux de liquidation annuels moyens

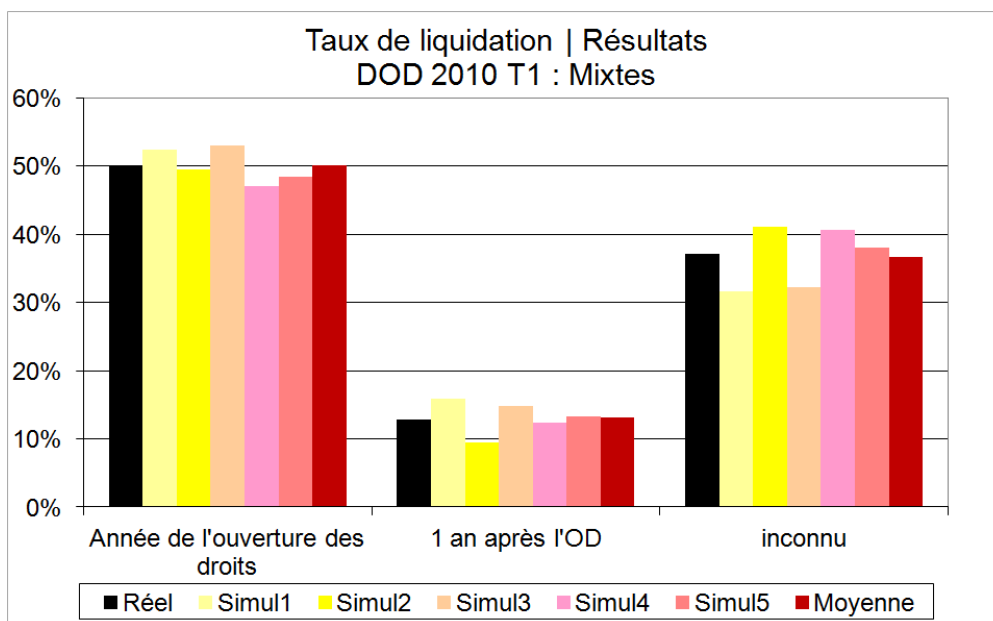


FIGURE 1.17 – Mixtes : Résultats des simulations. Taux de liquidation annuels moyens

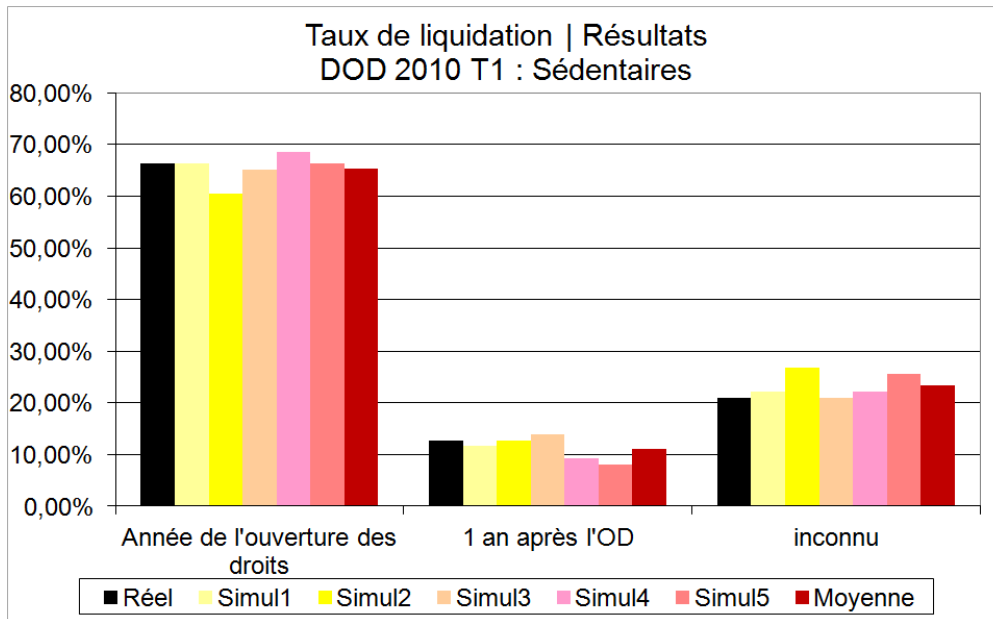


FIGURE 1.18 – Sédentaires : Résultats des simulations. Taux de liquidation annuels moyens

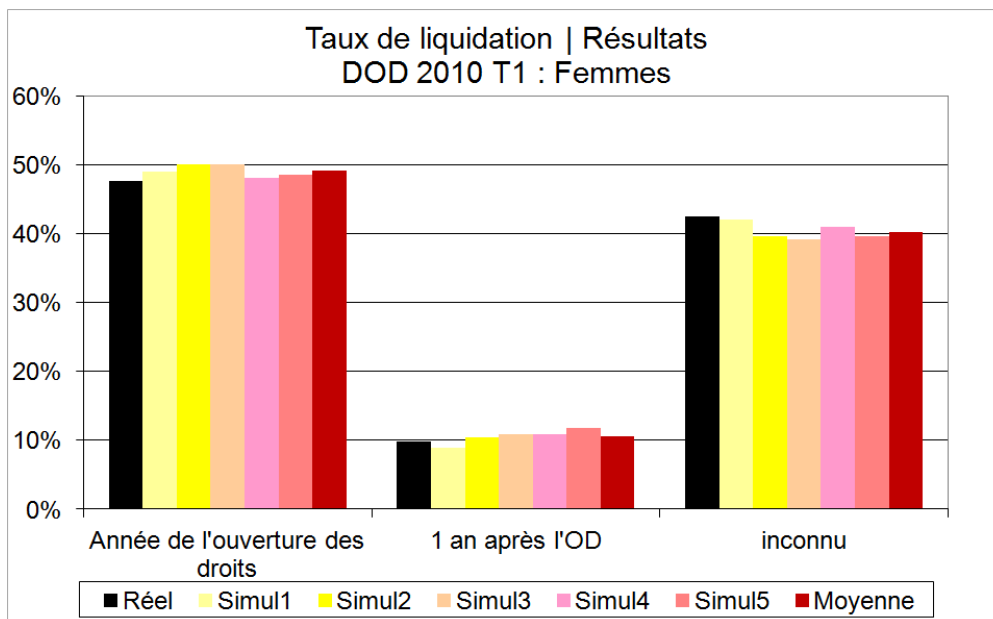


FIGURE 1.19 – Femmes : Résultats des simulations. Taux de liquidation annuels moyens

Afin de vérifier que notre modèle respecte toujours la logique des comportements de départs réels, observons les taux de remplacement à la liquidation. Ces résultats appellent les même commentaires que ceux de l'échantillon DOD 2009.

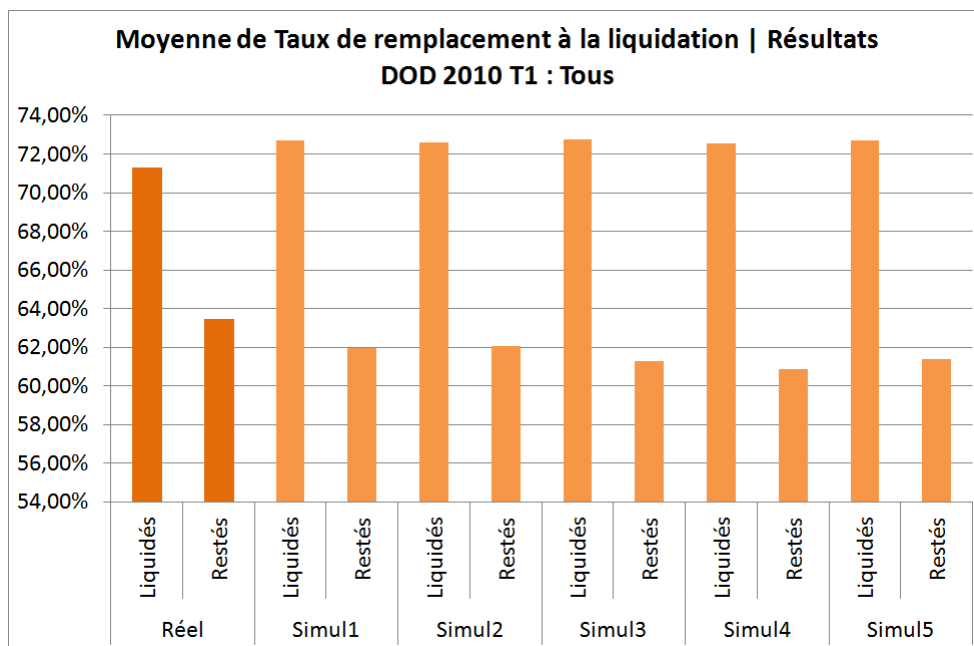


FIGURE 1.20 – Tous : Résultats des simulations DOD2010 T1. Taux de remplacement annuel moyen à la liquidation

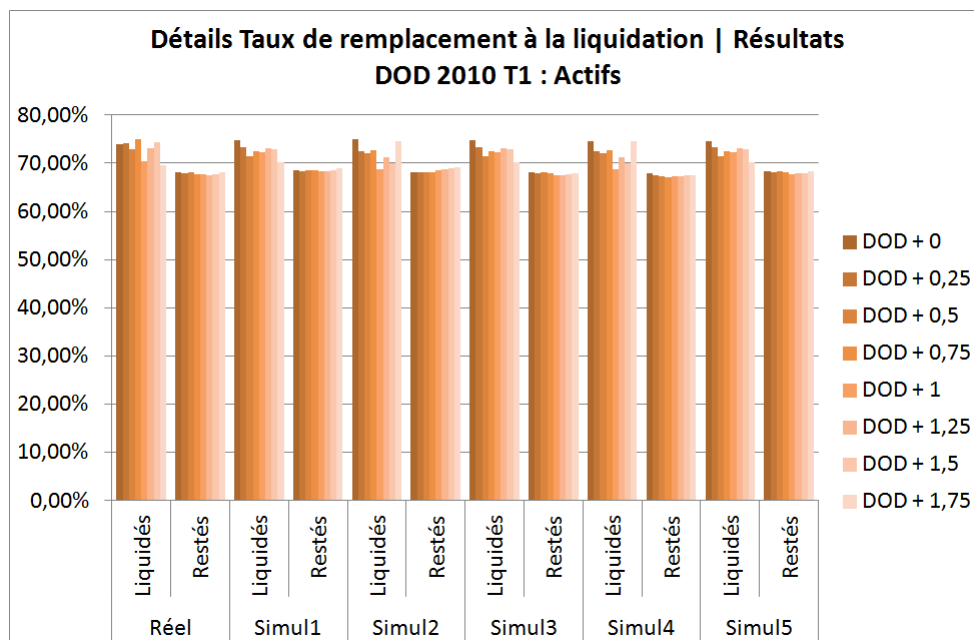


FIGURE 1.21 – Actifs : Résultats des simulations DOD2010 T1. Taux de remplacement à la liquidation

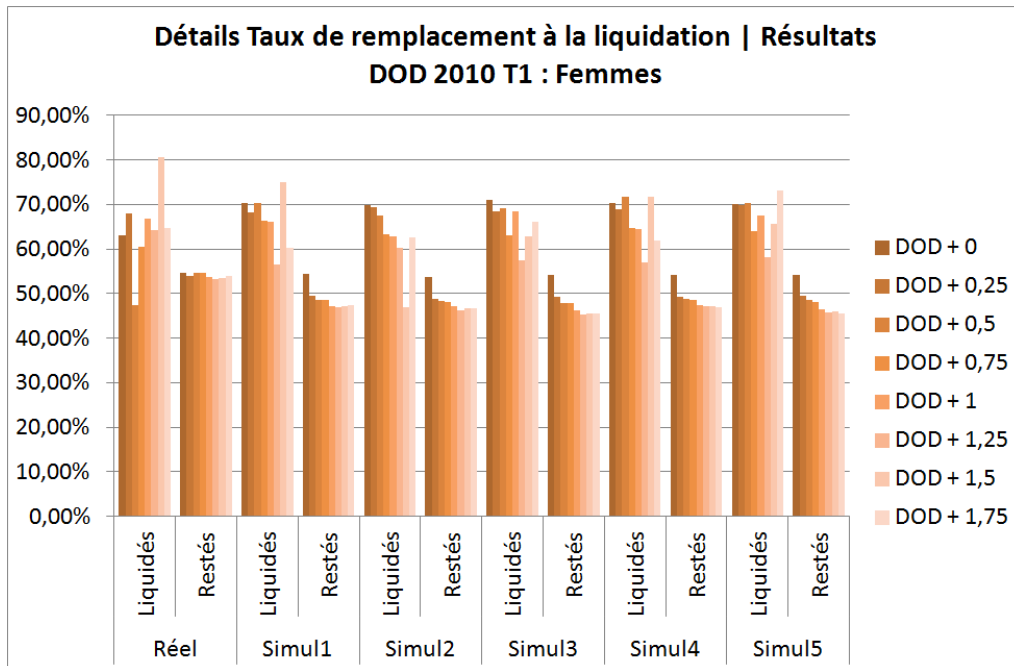


FIGURE 1.22 – Femmes : Résultats des simulations DOD2010 T1. Taux de remplacement à la liquidation

### 1.3 Données DOD 2011

L'adaptation des paramètres aux données DOD 2011 T1 nous a amené à proposer le jeu de paramètres suivant :

	Actifs	Mixtes	Sédentaires	Femmes
p	0.5	0.6	0.4	0.5
délai	5 Trimestres	5 Trimestres	4 Trimestres	5 Trimestres
$KP^{obj}$	64%	65%	60%	61%

Nous présentons les résultats des simulations ci-après :

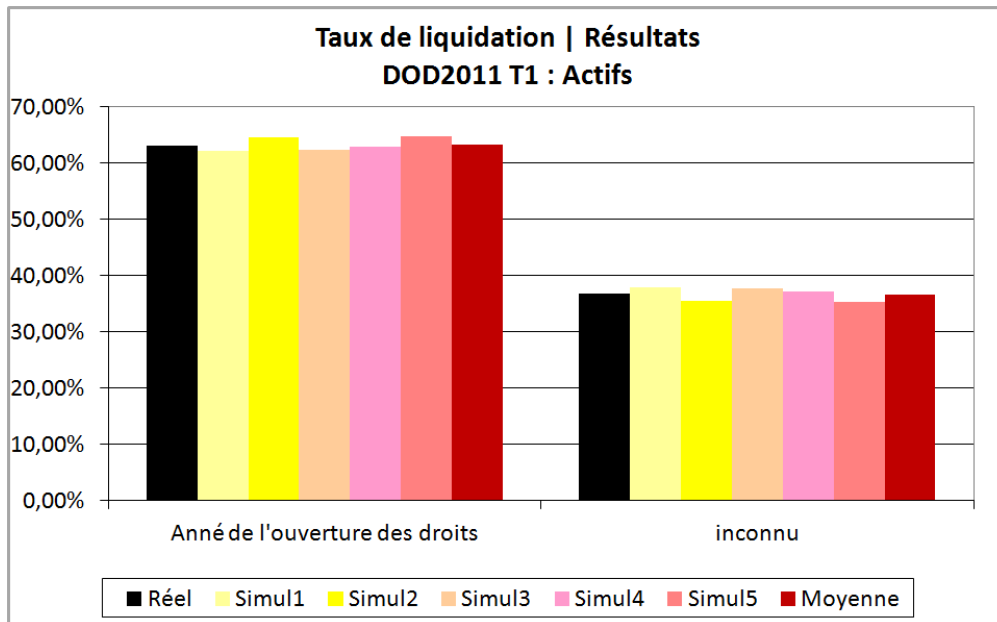


FIGURE 1.23 – Actifs : Résultats des simulations DOD2011 T1. Taux de remplacement à la liquidation

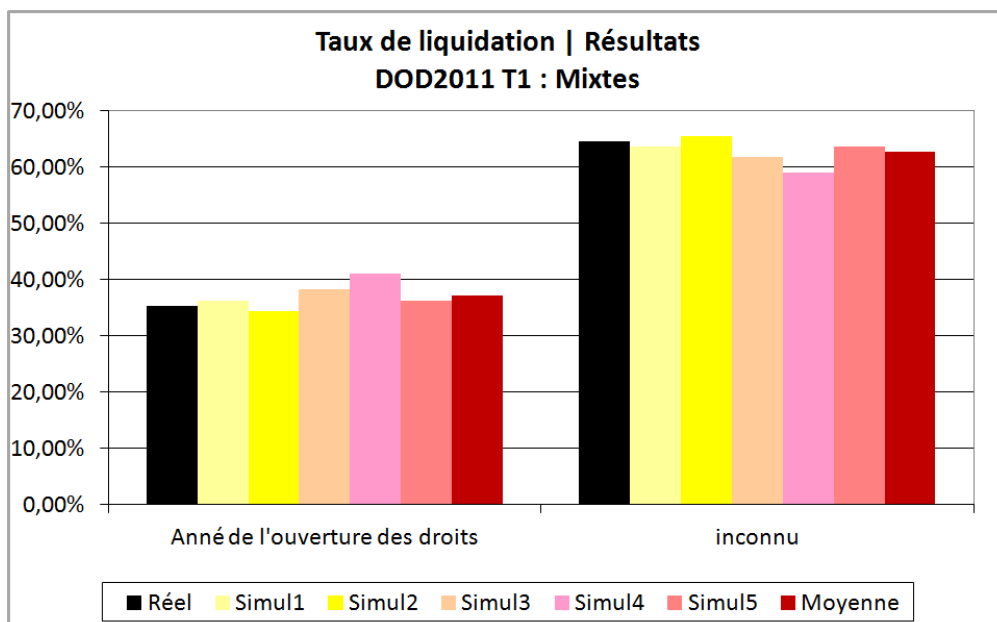


FIGURE 1.24 – Mixtes : Résultats des simulations DOD2011 T1. Taux de remplacement à la liquidation

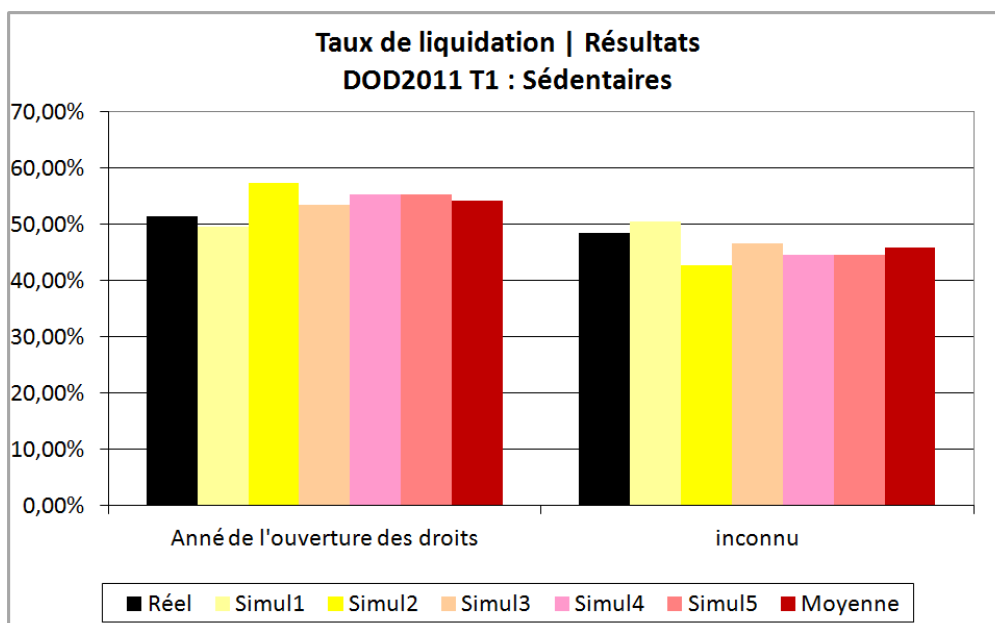


FIGURE 1.25 – Sédentaires : Résultats des simulations DOD2011 T1. Taux de remplacement à la liquidation

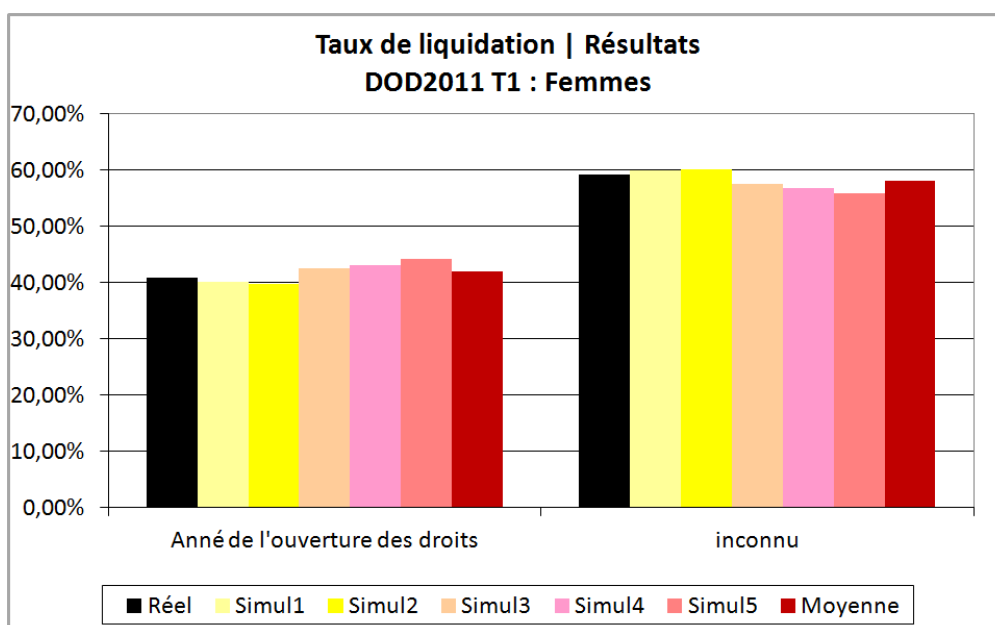


FIGURE 1.26 – Femmes : Résultats des simulations DOD2011 T1. Taux de remplacement à la liquidation



Nous rappelons que pour cet échantillon, nous ne disposons pas de données dont les départs sont observables sur plus d'une année, les paramètres présentés précédemment sont donc à considérer avec prudence.

Pour résumer les modifications des comportements causées par les réformes nous retiendrons deux points :

- Pour les populations qui étaient déjà dans une logique d'optimisation de leur rente avant réforme (Femmes, Sédentaires et Mixtes), on a pu observer une baisse de leur taux de remplacement objectif. Ce qui signifie que les réformes ont eu un effet pessimiste sur la perception de leur pension. Compte tenu des données dont nous disposons, nous ne pouvons pas affirmer si cette modification est définitive ou si elle ne durera que le temps de la mise en place des réformes. Nous faisons tout de même remarquer que ce phénomène semble s'être stabilisé chez les Femmes alors qu'il continue de décroître chez les Mixtes et les Sédentaires.
- Pour les Actifs, il semble que les réformes les aient poussé à développer une logique d'optimisation à court terme. Ils sont devenus plus sensibles aux mouvements de pension proches de l'ouverture des droits. Ceci a résulté en un léger étalement de leurs départs sur l'année postérieure à l'ouverture des droits. En d'autres termes, ils ne liquident plus systématiquement une fois leur objectif long terme atteint mais sont prêts à attendre un peu afin d'améliorer leur pension.

Il nous reste maintenant à fixer le paramètre de perception de la décote  $D$ . Ce paramètre doit servir à modéliser l'altération de la perception du taux de remplacement par les agents. Or, l'échantillon DOD2011 T1 qui a été utilisé pour la détermination des paramètres 2011 ne contient que très peu de décotants. Nous allons donc appliquer ces paramètres à l'échantillon DOD 2011 dont les départs réels ne sont observables que sur un trimestre. Ces résultats nous serviront à donner un ordre de grandeur à  $D$ .

Les simulations sur l'échantillon DOD 2011 avec  $D=0$  donnent les résultats suivants :

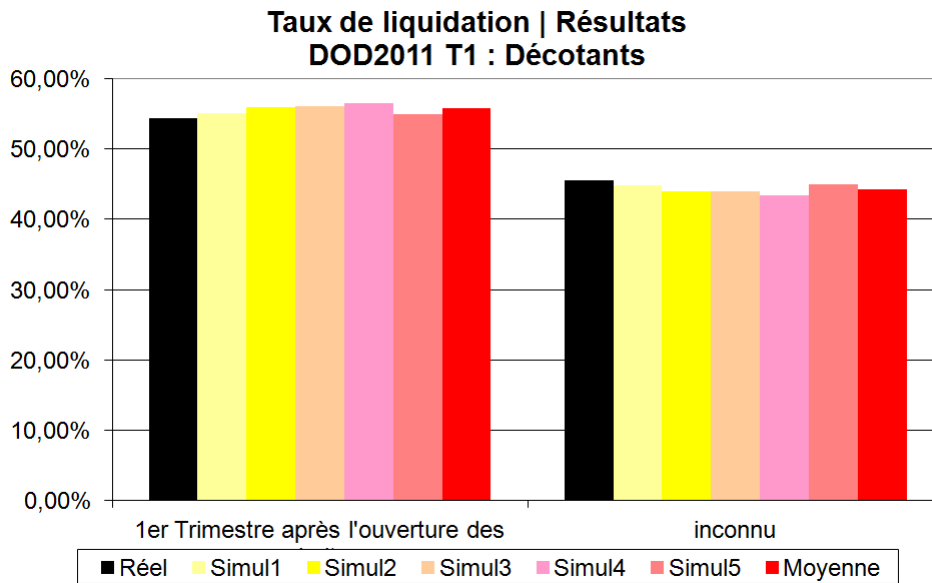


FIGURE 1.27 – Décotants : Résultats des simulations DOD2011 T1 avec D=0. Taux de remplacement à la liquidation

Les taux de liquidation des décotants ne sont que très légèrement supérieurs à la réalité. Une petite valeur de D suffira donc à corriger cet écart.

Les simulations sur l'échantillon DOD 2011 avec D=2% donnent les résultats suivants :

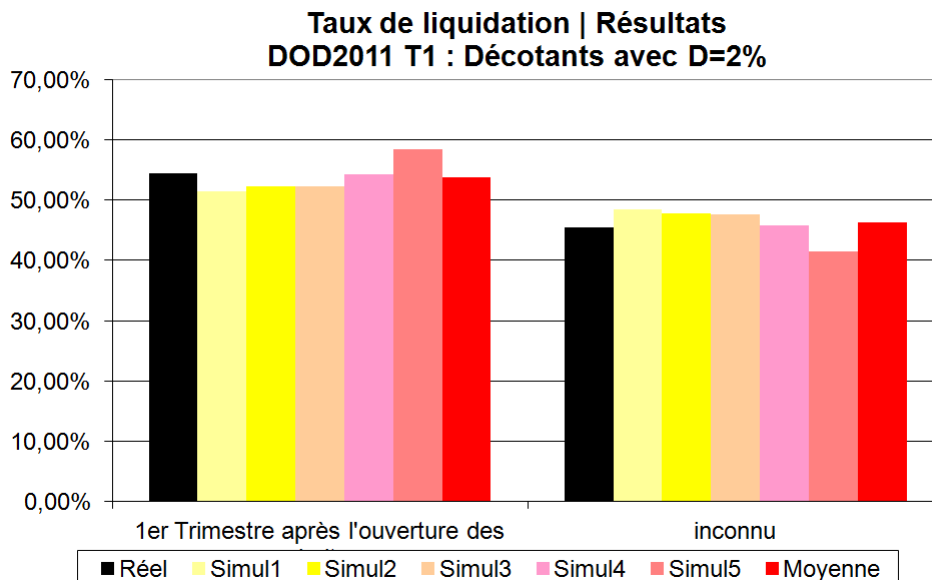


FIGURE 1.28 – Décotants : Résultats des simulations DOD2011 T1 avec D=2%. Taux de remplacement à la liquidation

L'écart a donc été corrigé. Cet exemple n'a certes pas permis de donner une valeur fiable de  $D$ , mais il nous a tout de même permis de vérifier que ce paramètre pouvait corriger les écarts de simulation dus à la présence de la décote.

Nous avons donc terminé notre phase de détermination des paramètres du modèle. Ces paramètres sont à considérer avec prudence compte tenu du peu de données dont nous disposions. Mais cette partie nous a tout de même permis de vérifier la viabilité de notre modèle. Celui-ci permet donc de modéliser les comportements de départ à la retraite des agents. De plus, les paramètres choisis peuvent être interprétés en termes de comportements et leur évolution permet donc de donner une interprétation des changements de comportements lors de la modification du régime.

## 1.4 Projection des départs à moyen-terme

Les simulations présentées précédemment avaient pour but de déterminer les paramètres du modèles. Celles-ci avaient donc un horizon relativement court pour permettre de les comparer aux données dont nous disposions. Nous proposons ici de les prolonger afin d'observer quelles seront les évolutions des départs simulés à moyen terme.

Les projections ont été effectuées jusqu'en juillet 2015. Aux échantillons étudiés précédemment ont été ajoutés les populations DOD 2012, 2013 et 2014. Ces dernières ont été simulées avec les paramètres obtenues avec l'échantillon DOD 2011.

Les résultats sont les suivants :

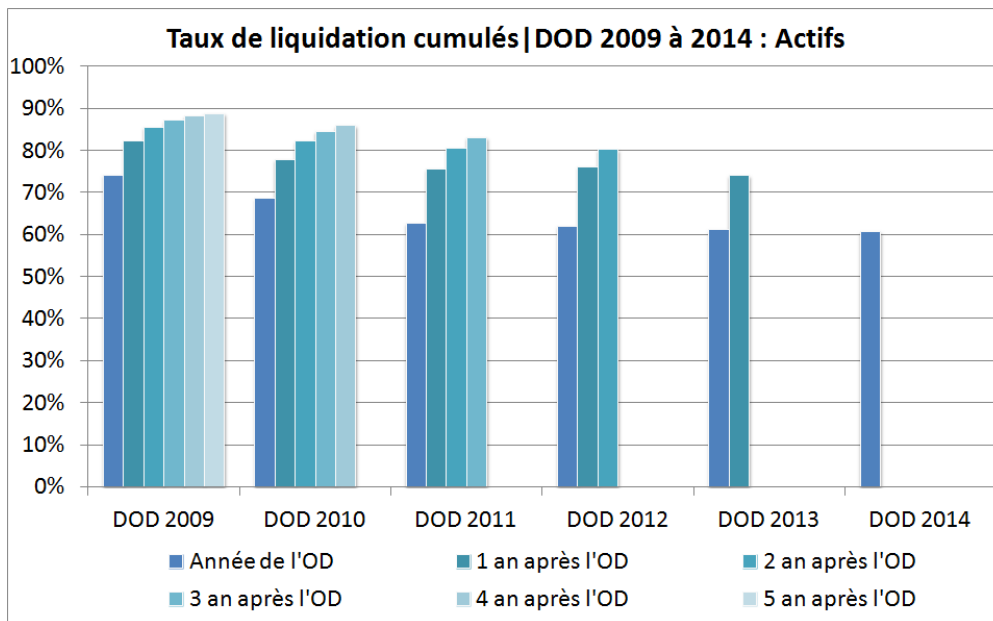


FIGURE 1.29 – Actifs : Résultats des simulations DOD 2009 à 2014 projetés jusqu'en 2015. Taux de liquidation cumulés.

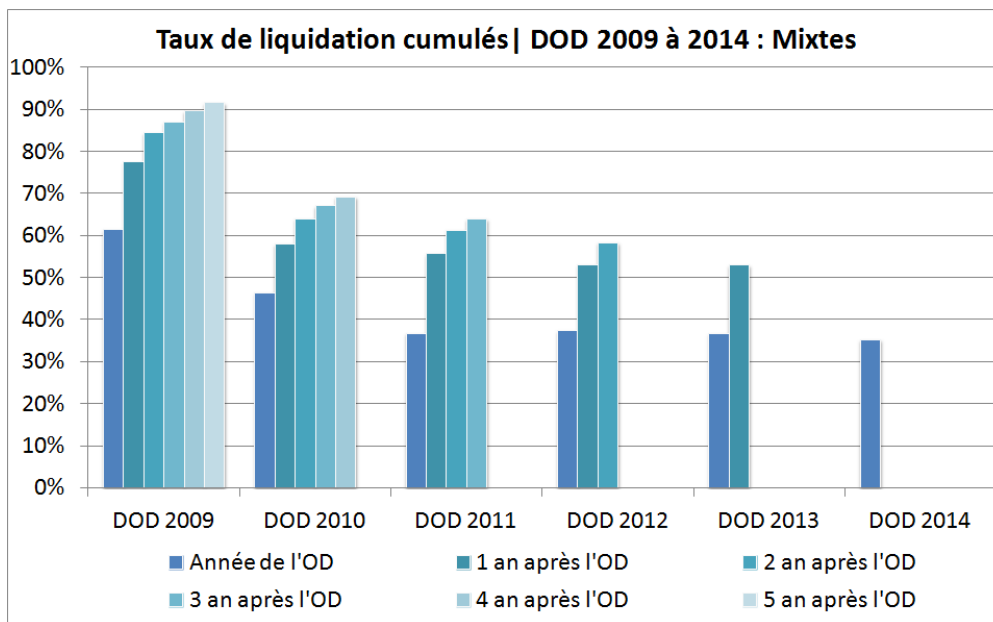


FIGURE 1.30 – Mixtes : Résultats des simulations DOD 2009 à 2014 projetés jusqu'en 2015. Taux de liquidation cumulés.

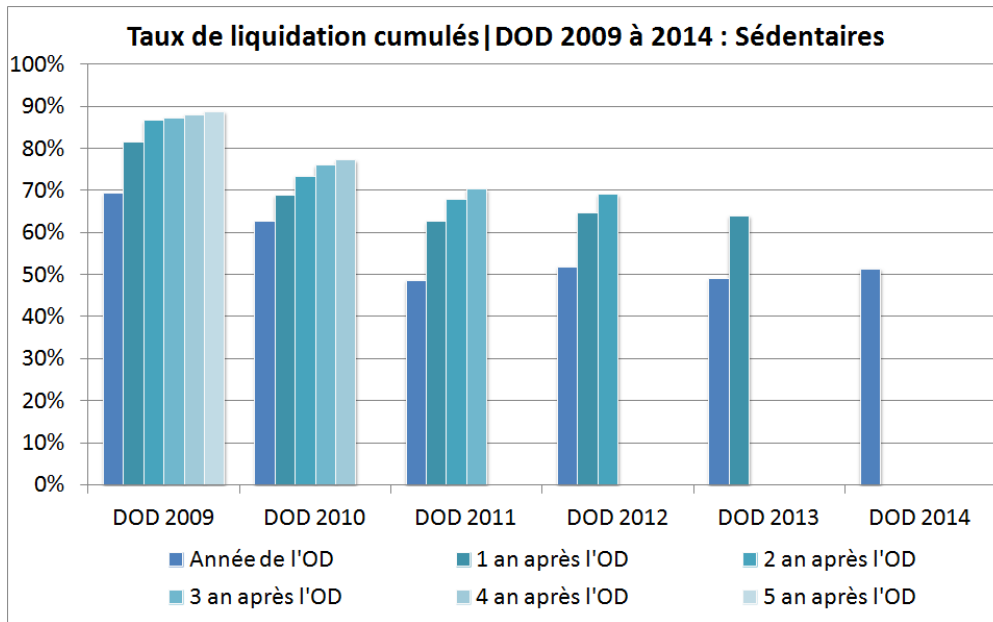


FIGURE 1.31 – Sédentaires : Résultats des simulations DOD 2009 à 2014 projetés jusqu'en 2015. Taux de liquidation cumulés.

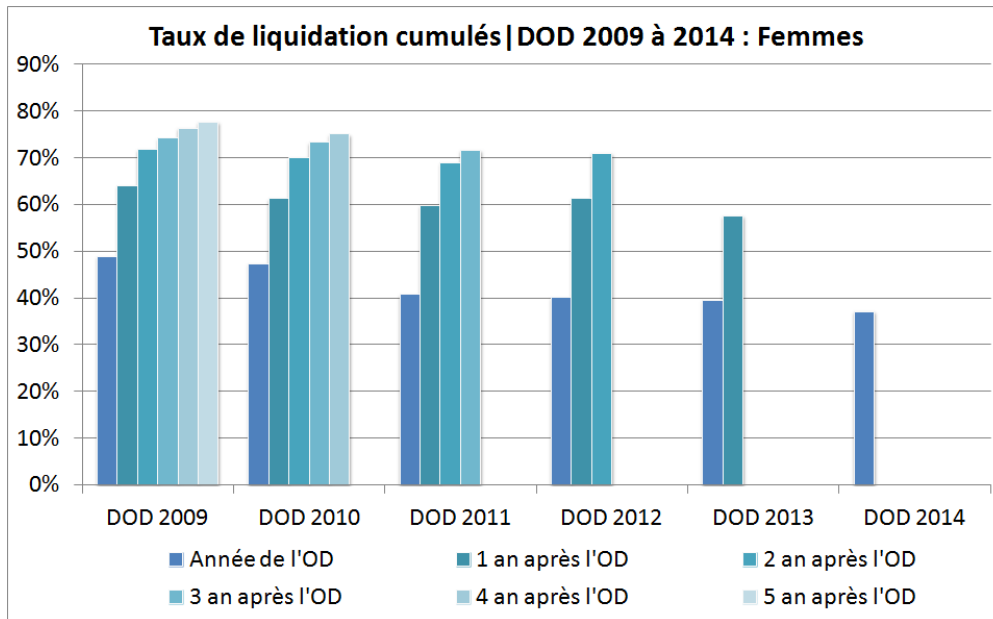


FIGURE 1.32 – Femmes : Résultats des simulations DOD 2009 à 2014 projetés jusqu'en 2015. Taux de liquidation cumulés.

On remarque une décroissance des taux de liquidation assez nette chez les Actifs, les Femmes et le Mixtes. Nous rappelons que les simulations des populations DOD 2011 à 2014 ont été effectuées à paramètres constants. Nous considérons donc que le choc opéré par les réformes sur les comportements arrive à son terme en 2011 et qu'à partir de 2012, les départs sont en régime de croisière. Cette tendance est alors le signe du durcissement progressif des règles de liquidation, c'est pourquoi elle est particulièrement visible chez les Femmes. C'est en effet chez cette population que les droits ont le plus régressé.

Si notre hypothèse de stabilisation des comportements s'avérait erronée, seul un mouvement des paramètres dans le sens inverse de celui observé entre 2009 et 2011 pourrait inverser la tendance observée ici. Pour que les liquidations augmentent, il faudrait en effet que les critères personnels de liquidation des agents deviennent plus exigeants que ce que l'on a pu observer en 2011. Sous réserve que notre hypothèse de stabilisation soit vérifiée ou que les modifications de comportements continuent dans le sens observé jusqu'en 2011, il semble donc que les taux de liquidations au sein du régime continueront à diminuer au moins jusqu'en 2015.

Ces résultats nous ont donc permis de vérifier qu'une fois les comportements stabilisés, notre modèle pouvait modéliser les évolutions de comportement de départ dues à des modifications progressives du régime. Afin de valider cette modélisation en régime de croisière, nous observerons donc avec beaucoup d'attention l'évolution des liquidations du régime au cours des prochaines années. Pour donner plus de force à la validation de notre modèle, il sera en effet très intéressant de l'appliquer à une population disposant d'une plus large profondeur de données.

## Conclusion

L'analyse des comportements nous a permis de mettre en évidence l'importance du taux de remplacement dans les décisions de départ. Nous avons donc décidé d'en faire le coeur de notre module comportemental. Ce choix nous a semblé pertinent puisque le taux de remplacement peut en fait être vu comme un résumé de la carrière des agents. De plus, ce taux porte les traces des réformes car il est modifié par les allongements de durée requise, par la surcote et la décote. Nous avons donc également porté une attention particulière à l'étude de ces deux coefficients. Il est alors apparu qu'en présence de surcote, les comportements des agents étaient inchangés, ils continuaient d'être déterminés par le niveau de leur taux de remplacement. Nous en avons donc conclu que ce n'était pas la surcote en elle-même qui influençait le départ, mais la hauteur à laquelle elle venait élever le taux de remplacement. À l'inverse, nous avons remarqué que l'effet dissuasif de la décote allait jusqu'à altérer la perception qu'avaient les agents de leur taux de remplacement. En effet, nous avons montré qu'à taux de remplacement égal, un individu avait moins de chance de liquider s'il était décotant que s'il ne l'était pas.

Grâce à ces observations, nous avons ensuite entamé l'élaboration de notre module comportemental. La construction du modèle de base nous a permis de nous rendre compte de la difficulté posée par l'apparition de la surcote. Nous avons montré qu'en libérant le taux de remplacement, elle ne permettait plus de choisir le coefficient de préférence pour le loisir de manière à orienter les départs autour du taux plein historique. Nous avons donc créé un modèle palliant ce défaut. Notre modèle permet même de définir pour chaque individu un taux objectif autour duquel il sera incité à liquider. Afin d'affiner la reproduction des perceptions, il a été ajouté à cette logique long-terme une vision à court-terme. Cette modification offre la possibilité de définir pour chaque individu un délai à l'intérieur duquel les agents sont prêts à retarder leur départ si leur pension augmente fortement. Cet ajout ne dénature pas la notion de taux objectif puisque l'effort demandé pour retarder le départ sera d'autant plus élevé que l'on sera proche du taux objectif. La dernière étape de la construction du modèle a consisté en l'élaboration d'un processus reproduisant l'effet dissuasif de la décote sur les liquidations.

Une fois notre modèle construit, nous avons testé son adéquation à la réalité. Pour ce, nous nous sommes assurés qu'un bon choix de paramètres permettait de reproduire les comportements de départ observés au sein du régime. Nous avons ensuite vérifié que ces paramètres pouvaient s'interpréter en termes de comportements d'une manière cohérente avec la construction du modèle. Nos données s'étalant sur trois années durant lesquelles les réformes ont été mises en place, l'évolution de ces paramètres a finalement permis de donner une interprétation des changements de comportements lors de la modification du régime et de proposer une projection des départs à moyen-terme.

# Bibliographie

- [VAN IMHOFF et POST] *Méthodes de microsimulation pour des projections de population*, Population, 52ème année, No 4, Nouvelles approches méthodologiques en sciences sociales.
- [POUBELLE V.] *PRISME, le modèle de la CNAV*, Retraite et société 2006/2 n° 2.
- [ARDILLY P.] *Les techniques de sondage*, TECHNIP.
- [GONZALEZ P.-L.] *Cours : L'analyse en composantes principales*, centre d'étude et de recherche en informatique et communications
- [CASIN P.] *Analyse des données et des pannels de données*, De Boeck Supérieur
- [STOCK J-H et WISE A.] *Pensions, the Option Value of Work, and Retirement*, ECONOMETRICA vol.58 p.1151-1180
- [DE BARTOLO G.] *La démographie appliquée à la gestion publique des entreprises*, INED, 2003
- [PRIVAT A-G.] *Evaluation de l'impact des réformes de 1993 et 2003 à l'aide du modèle de microsimulation ARTEMIS*, ECONOMETRICA vol.58 p.1151-1180
- [ROBERT-BOBEE .I] *Modelling demographic behaviours in the French microsimulation model Destinie : An analysis of future change in completed fertility*, Série des documents de travail de la Direction des Etudes et Synthèses Économiques
- [BARONI E. et RICHIARDI M.] *Modelling demographic behaviours in the French microsimulation model Destinie : An analysis of future change in completed fertility*, Série des documents de travail de la Direction des Etudes et Synthèses Économiques
- [DE GANS H-A] *Loi mathématique ou conjecture spéculative ? Un débat des années 1920 sur la méthodologie des projections démographiques*, Population, p.91-119
- [BACHELET M., BEFFY M. et BLANCHET D.] *Projeter l'impact des réformes des retraites sur l'activité des 55 ans et plus : une comparaison de trois modèles*, Document de travail INSEE



Annexe A

ACP : code R

```

#####
#####
#####Chargement donnees#####
#####
#####
rm(list=ls(all=TRUE))
setwd("C:/...")
library(ade4)
don=read.table("ACP2009.csv", h=TRUE, sep=";", dec=",")
head(don,5)

dim(don)
don=don[1:5716,]
dim(don)

Mat=don[,1]
Cat=don[,2]

don=don[,-1]#mat
don=don[,-1]#cat
attach(don)

#####
#####Selection de la pop a etudier#####
#####

don=don[Cat=="Actif",]
#don=don[Salaire..rempinc. < 70000,]
summary(don)
Decal=don[,8]
attach(don)

#####
#####
#####

don=don[,-8]#decal
don=don[,-1]#col emb
don=don[,-6]#bonif enft
don=don[,-11]#surcote DOD+0
don=don[,-10]#gain kp liquid
don=don[,-13]#gain surcote liquid

don=don[,-10]#gain surcote DOD+1
don=don[,-10]#gain surcote DOD+2
don=don[,-10]#gain surcote DOD+3

don=don[,-7]#gain KP DOD+1
don=don[,-7]#gain KP DOD+2

```

```

don=don[,-7]#gain KP DOD+3

#don=don[,-2]#nbre enf
#don=don[,-2]#Tx_SS
head(don,5)

don$compteur=rep(c(1), length(don[,1]))

  for (i in 1:dim(don)[2]) {
    {don[, i]=as.double(don[, i])}
  }

head(don)

attach(don)

#####
#####
#####Def variables d'aggregation#####
#####
#####

####Diff aod/age_liquid (Classes)#####
Decal=as.factor(Decal)

#####
#####
#####Aggregation#####
#####

aggreg_moy=function(variable_aggreg,donnees)
{
res=data.frame(t(round(data.frame(lapply(split(donnees,variable_aggreg),
function(x) apply(x, 2,mean))), dig = 5)))
temp=aggregate(cbind(donnees$compteur),by=list(variable_aggreg),sum)
res$compteur=temp[,2]
return(res)
}

tab_decal=aggreg_moy(Decal,don)
#affiche_tendances(tab_decal)
tab_decal

```

```
#####  
#####  
#####ACP sur donnees agregees#####  
#####  
#####
```

```
#####  
#####ACP#####  
#####
```

```
#enlever le compteur  
#tab_decal=tab_decal[,-10]  
tab_decal=tab_decal[,-7]
```

```
pca_2009=dudi.pca(tab_decal, center=TRUE, scale=TRUE,scannf=FALSE,nf=4)
```

```
scatter(pca_2009,xax=1,yax=2)
```

```
x11()  
par(mfrow=c(2,1))  
s.label(pca_2009$c1)  
s.label(pca_2009$li, xax = 1, yax = 2)
```

```
tab_decal
```

```
#####  
#####Inertie expliquée#####  
#####  
#Le vecteur eig donne les valeurs propres (eigen values) dans le plus petit des  
deux espaces diagonalises.  
#Les valeurs propres nous renseignent sur la fraction de l'inertie totale prise en  
compte par chaque axe :
```

```
barplot(pca_2009$eig,main="pca_2009")  
pve <- 100 * pca_2009$eig/sum(pca_2009$eig)  
cumsum(pve)
```

```
#####  
#####Analyse du cercle des correlations#####  
#####
```

```
s.corcircle(pca_2009$co,xax = 1, yax = 2)
```

```
#####  
#####Representation des individus#####  
#####  
scatter(pca_2009,xax=1,yax=2)
```

```
#####  
#####Inertie expliquee#####  
#####
```

```
#Chaque nuage de points (variables et individus) est construit en  
#projection sur les plans factoriels.  
#L'examen des plans factoriels permettra de visualiser les  
#correlations entre les variables et d'identifier les groupes  
#d'individus ayant pris des valeurs proches sur certaines  
#variables.
```

```
#Mais il faut avant de lire directement les graphiques  
#interpreter les axes.
```

```
#####  
#####Axe 1#####  
#####  
#####
```

```
#####  
#####Etude des variables#####  
#####
```

```
###representation graphique des variables sur le premier plan factoriel  
s.label(pca_2009$c1)
```

```
#####Qualite de representation des variables : Cercle des correlations  
(voir memoire p.25)#####  
s.corcircle(pca_H_diff_liqu_aod$co,xax = 1, yax = 2)
```

```
#Le cercle des correlations permet de voir la correlation des variables avec les  
facteurs crees,dans ce plan, une variable xj est reperee par un point de  
coordonnees r(c1,xj) et d'ordonnee r(c2,xj).Ainsi, plus une variable a des  
coordonnees importantes sur un axe, plus elle est correlee a celui-ci  
(et donc mieux elle est representee)
```

```

#####Contributions#####
#Permet de definir une valeur seuil a partir de laquelle
#on peut dire qu'une variable contribue reellement a la construction d'un axe.
#Et permet donc d'utiliser cette variable pour interpreter cet axe.(sous reserve
  qu'elle soit bien representee)

#La contribution moyenne d'une variable a l'inertie d'un axe est donc de 1/p
(on a somme des contrib = 100%)
#Nous pouvons donc considerer que les variables ayant une contribution > a 1/p
  contribuent a la construction de cet axe

#Contribution absolue (poids de la variable sur l'axe, ne tient pas compte du
  "sens dans lequel elle pese positif ou negatif)

contrib_var=function(pca,numaxe){
  par(mfrow=c(1,2))

  ctrabs<-inertia.dudi(pca,col.inertia = T)$col.abs[,numaxe]/10000
  ctrabs<-ctrabs[order(ctrabs)] #trier par ordre croissant
  h=rep("red",length(ctrabs))
  h[abs(ctrabs)<1/length(ctrabs)]= "grey"
  barplot(ctrabs,names.arg=names(ctrabs),las=2,main=paste("Contribution des
    variables \n a l'inertie de l'axe n",numaxe),density=1000,col=h,border=NA,
    angle=50,horiz=F)
  abline(h=c(1/length(ctrabs)), col="red")

  ctrabs<-inertia.dudi(pca,col.inertia = T)$col.abs[,numaxe]/10000
  ctrrel=inertia.dudi(pca,col.inertia = T)$col.rel[,numaxe]
  ctrrel[is.na(ctrrel)]=0
  ctrrel=cbind(ctrrel[order(ctrabs)],c(1:length(ctrrel)))
  ctrabs<-ctrabs[order(ctrabs)]
  ctrneg=cbind(-ctrabs[ctrrel[,1]<0],ctrrel[ctrrel[,1]<0,2])
  ctrpos=cbind(ctrabs[ctrrel[,1]>=0],ctrrel[ctrrel[,1]>=0,2])
  ctrrel=rbind(ctrneg,ctrpos)
  ctrrelfin=ctrrel[order(ctrrel[,2])]

  h=rep("red",length(ctrrelfin))
  h[abs(ctrrelfin)<1/length(ctrrelfin)]= "grey"
  barplot(ctrrelfin,names.arg=names(ctrabs),las=2,main="contributions affectees \n
    du signe des contribution relative \n ( i.e. \"sens des contributions\" ) ",density=1000,
    col=h,border=NA,angle=50,horiz=T)
  abline(v=c(1/length(ctrabs),0,-1/length(ctrabs)), col=c("red","black","red"))
}

contrib_var_resum=function(pca,numaxe){

  ctrabs<-inertia.dudi(pca,col.inertia = T)$col.abs[,numaxe]/10000

```

```

ctrrel=inertia.dudi(pca,col.inertia = T)$col.rel[,numaxe]
ctrrel=cbind(ctrrel[order(-ctrabs)])
ctrabs<-ctrabs[order(-ctrabs)]
ctrneg=ctrabs[ctrrel[,1]<0]
ctrpos=ctrabs[ctrrel[,1]>=0]

ctrneg=names(ctrneg[ctrneg >=1/length(ctrabs)])
ctrpos=names(ctrpos[ctrpos >=1/length(ctrabs)])

m=max(length(ctrneg),length(ctrpos))
if(length(ctrneg)<m){ctrneg[(length(ctrneg)+1):m]=""}
if(length(ctrpos)<m){ctrpos[(length(ctrpos)+1):m]=""}
h=data.frame(Neg=ctrneg,Pos=ctrpos)

return(h)
}

contrib_var_resum(pca_2009,1)
contrib_var_resum(pca_2009,2)

contrib_var(pca_2009,1)
x11()
contrib_var(pca_2009,2)

##Res numeriques
#contribution absolues (en %)
ctrabs1<-inertia.dudi(pca_2009,col.inertia = T)$col.abs[,1]/100
ctrabs2<-inertia.dudi(pca_2009,col.inertia = T)$col.abs[,2]/100

###Representations des variables et de leurs contributions###
c=names(ctrabs[order(-ctrabs)])
par(mfrow=c(1,2))
s.label(pca_2009$c1, xax = 1, yax = 2,clabel=0)
for (i in 1:length(ctrabs)){s.label(pca_2009$c1[i,], xax = 1,yax=2,clabel
=max(0.45,ctrabs1[i]/10),add.p=T)}
s.label(pca_2009$c1, xax = 1, yax = 2,clabel=0)
for (i in 1:length(ctrabs)){s.label(pca_2009$c1[i,], xax = 1,yax=2,
clabel=max(0.45,ctrabs2[i]/10),add.p=T)}

###Representations des correlations et des contributions###
par(mfrow=c(1,2))
s.corcircle(pca_2009$co, xax = 1, yax = 2,clabel=0)
for (i in 1:length(ctrabs)){s.corcircle(pca_2009$co[i,], xax = 1,yax=2,clabel
=max(0.45,ctrabs1[i]/10),add.p=T)}
s.corcircle(pca_2009$co, xax = 1, yax = 2,clabel=0)
for (i in 1:length(ctrabs)){s.corcircle(pca_2009$co[i,], xax = 1,yax=2,clabel
=max(0.45,ctrabs2[i]/10),add.p=T)}

```

```

#####Debut d'interpretation de l'axe du point de vue des variables

#####
#####Etude des individus#####
#####

###representation graphique des individus sur le premier plan
s.label(pca_2009$li, xax = 1, yax = 2)

###qualite de la representation des individus : cos^2 (voir memoire p.26)###

##Note perso : dans ade4 coscarre = contrib relative
#contribution relative ou cos2: exprime la qualite de representation d'une variable
sur chaque axe. Ils sont signes
par(mfrow=c(2,1))
cos2=abs(inertia.dudi(pca_2009, row.inertia = T)$row.rel[,1]/10000)
s.label(pca_2009$li, xax = 1, yax = 2)
barplot(cos2, col="blue", main= "Qualite de representation des individus sur
l'axe n1 \n (cos)", ylim=c(0:1),names.arg=names(cos2),space=0.2)

par(mfrow=c(2,1))
cos2=abs(inertia.dudi(pca_2009, row.inertia = T)$row.rel[,2]/10000)
s.label(pca_2009$li, xax = 1, yax = 2)
barplot(cos2, col="blue", main= "Qualite de representation des individus sur l'axe
n2 \n (cos)", ylim=c(0:1),names.arg=names(cos2),space=0.2)

###contribution des individus

contrib_indiv=function(pca,numaxe){
par(mfrow=c(1,2))

ctrabs<-inertia.dudi(pca,row.inertia = T)$row.abs[,numaxe]/10000
#ctrabs<-ctrabs[order(ctrabs)] #trier par ordre croissant
h=rep("red",length(ctrabs))
h[abs(ctrabs)<1/length(ctrabs)]= "grey"
barplot(ctrabs,names.arg=names(ctrabs),las=2,main=paste("Contribution des
individus \n a l'inertie de l'axe n",numaxe),density=1000,col=h,border=NA,
angle=50,horiz=F)
abline(h=c(1/length(ctrabs)), col="red")

ctrabs<-inertia.dudi(pca,row.inertia = T)$row.abs[,numaxe]/10000
ctrrel=inertia.dudi(pca,row.inertia = T)$row.rel[,numaxe]
ctrrel=cbind(ctrrel,c(1:length(ctrrel)))
#ctrabs<-ctrabs[order(ctrabs)]
ctrneg=cbind(-ctrabs[ctrrel[,1]<0],ctrrel[ctrrel[,1]<0,2])
ctrpos=cbind(ctrabs[ctrrel[,1]>=0],ctrrel[ctrrel[,1]>=0,2])
ctrrel=rbind(ctrneg,ctrpos)

```



```

ctrrelfin=ctrrel[order(ctrrel[,2])]
ctrrelfin
h=rep("red",length(ctrrelfin))
h[abs(ctrrelfin)<1/length(ctrrelfin)]= "grey"
barplot(ctrrelfin,names.arg=names(ctrabs),las=2,main="contributions affectees \n
du signe des contribution relative \n ( i.e. \"sens des contributions\" ) ",density=1000
,col=h,
border=NA,angle=50,horiz=T)
abline(v=c(1/length(ctrabs),0,-1/length(ctrabs)), col=c("red","black","red"))
}

```

```

contrib_indiv_resum=function(pca,numaxe){

ctrabs<-inertia.dudi(pca,row.inertia = T)$row.abs[,numaxe]/10000
ctrrel=inertia.dudi(pca,row.inertia = T)$row.rel[,numaxe]
ctrrel=ctrrel[order(-ctrabs)]
ctrabs<-ctrabs[order(-ctrabs)]
ctrneg=ctrabs[ctrrel<0]
ctrpos=ctrabs[ctrrel>=0]

ctrneg=names(ctrneg[ctrneg >=1/length(ctrabs)])
ctrpos=names(ctrpos[ctrpos >=1/length(ctrabs)])

m=max(length(ctrneg),length(ctrpos))
if(length(ctrneg)<m){ctrneg[(length(ctrneg)+1):m]=""}
if(length(ctrpos)<m){ctrpos[(length(ctrpos)+1):m]=""}
h=data.frame(Neg=ctrneg,Pos=ctrpos)

return(h)
}

```

```

contrib_indiv(pca_2009,1)
contrib_indiv(pca_2009,2)

```

```

contrib_indiv_resum(pca_2009,1)
contrib_indiv_resum(pca_2009,2)

```

```

##Res numeriques
#contribution absolues (en %)
ctrabs1<-inertia.dudi(pca_2009,row.inertia = T)$row.abs[,1]/100
ctrabs1
ctrabs2<-inertia.dudi(pca_2009,row.inertia = T)$row.abs[,2]/100
ctrabs2

```

```

###Representations des variables et de leurs contributions###
s.label(pca_2009$li, xax = 1, yax = 2,clabel=0)

```

```

for (i in 1:length(ctrabs)){s.label(pca_2009$li[i,], xax = 1,yax=2,clabel=
max(0.45,ctrabs1[i]/10),add.p=T)}
s.label(pca_2009$li, xax = 1, yax = 2,clabel=0)
for (i in 1:length(ctrabs)){s.label(pca_2009$li[i,], xax = 1,yax=2,clabel
=max(0.45,ctrabs2[i]/10),add.p=T)}

```

```

#####
#####Interpretation finale de l'axe#####
#####

```

```

#resume :
contrib_var_resum(pca_2009,1)
contrib_indiv_resum(pca_2009,1)

```

```

contrib_var_resum(pca_2009,2)
contrib_indiv_resum(pca_2009,2)

```

```

#L'interpretation des nouvelles variables (des axes
#factoriel) se fera a l'aide des individus et
#variables contribuant le plus a l'axe avec la regle
#suivante : si une variable a une forte contribution
#positive a l'axe, les individus ayant une forte
#contribution positive a l'axe sont caracterises par
#une valeur elevee de la variable.

```

```

par(mfrow = c(3, 4))
for (i in 1:dim(tab_decal)[2]) {
x11()
titre <- colnames(tab_decal[i])
test(tab_decal[,i],pca_2009,1,2,titre)
}

```

```

#####
#####Fonctions pour graphiques#####
#####
#####

```

```

densite=function(donnees,titre,min,max)
{
plot(density(donnees), xlim = c(min,max),main = titre, yaxt = "n", bty = "n")
rug(donnees, col = "blue")
abline(v = mean(donnees), col = "red")
}

```

```

}

affiche_densites=function(donnees){
par(mfrow = c(3, 7))
for (i in 1:21) {
x <- donnees[, i]
titre <- colnames(donnees)[i]
densite(x,titre,min(x),max(x))
}}

affiche_tendances=function(donnees){
par(mfrow = c(3, 7))
for (i in 1:21) {
x <- donnees[, i]
titre <- colnames(donnees)[i]
plot(x,main=titre,type="l", col="blue")
}}

test=function(variable,acp,x,y,titre){
class_variable=as.factor(ifelse(variable<mean(variable),"<Moy", ">=Moy"))
s.class(acp$li,col = gcol, fac =class_variable, xax=x,yax=y,sub=titre)
return(class_variable)}

```

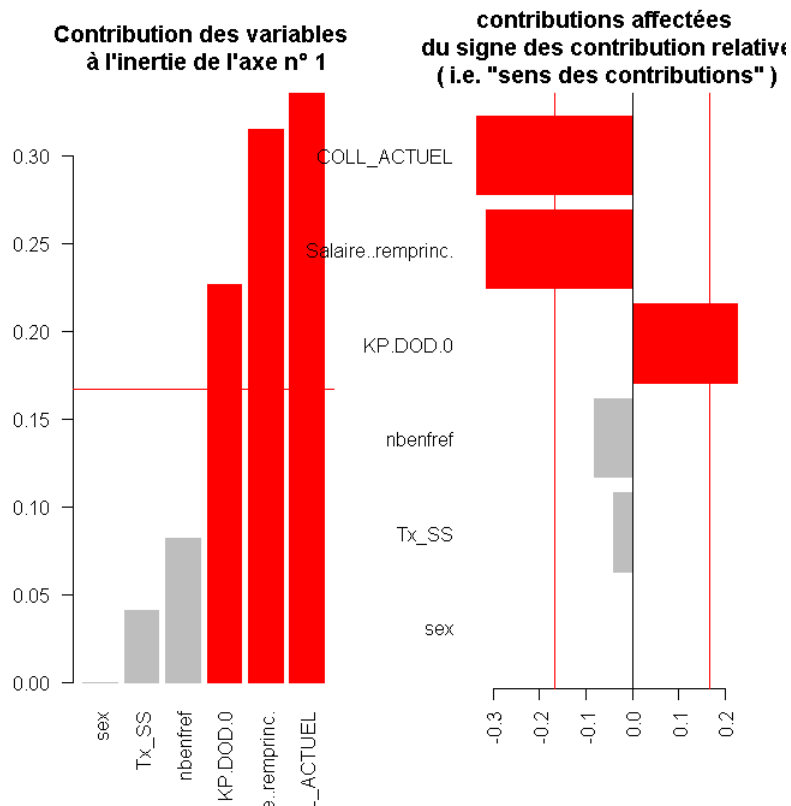
## Aperçu des sorties

```

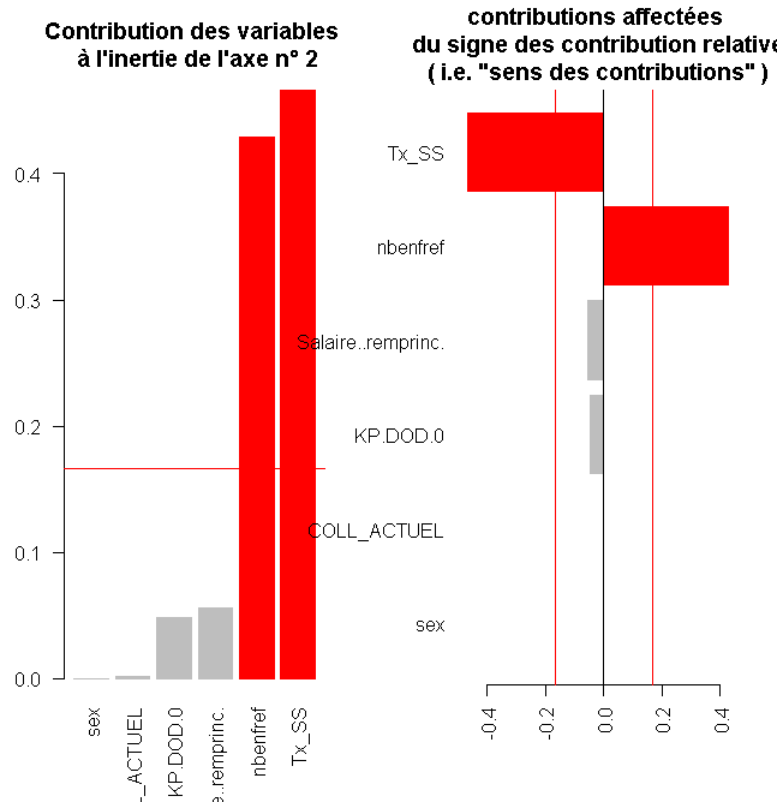
> contrib_var_resum(pca_2009,1)
      Neg      Pos
1  COLL_ACTUEL KP.DOD.0
2 Salaire..remprinc. <NA>
3                <NA>
> contrib_indiv_resum(pca_2009,1)
      Neg Pos
1     X2  X0
2  X1.75
>
> contrib_var_resum(pca_2009,2)
      Neg      Pos
1 Tx_SS nbenfref
2 <NA>    <NA>
> contrib_indiv_resum(pca_2009,2)
      Neg      Pos
1 X0.75     X2
2 X1.75     X0
3      inconnu

```

```
contrib_var_resum(pca_2009,1)
```



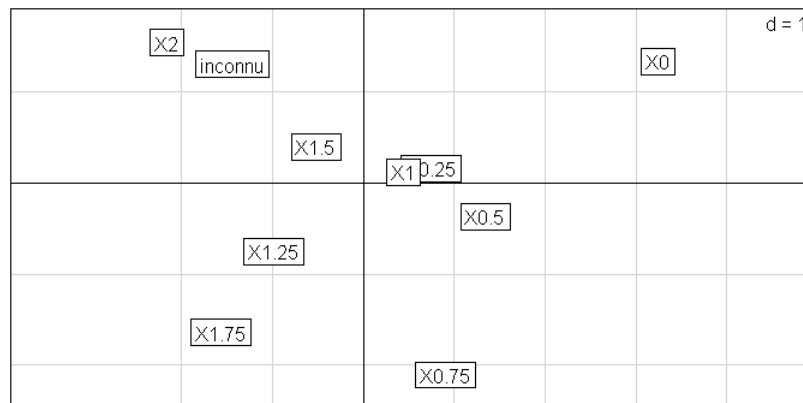
contrib\_var\_resum(pca\_2009,2)



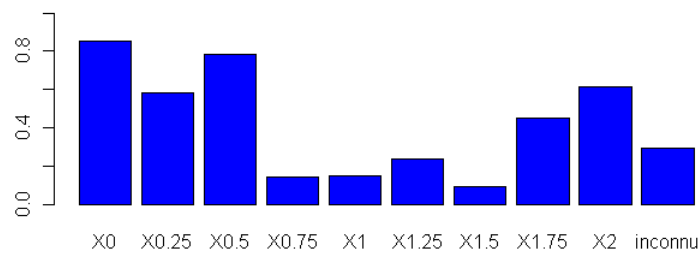
```

#contribution relative ou cos2: exprime la qualite de representation
d'une variable sur chaque axe. Ils sont signes
par(mfrow=c(2,1))
cos2=abs(inertia.dudi(pca_2009, row.inertia = T)$row.rel[,1]/10000)
s.label(pca_2009$li, xax = 1, yax = 2)
barplot(cos2, col="blue", main= "Qualite de representation des individus
sur l'axe n1 \n (cos)", ylim=c(0:1),names.arg=names(cos2),space=0.2)

```



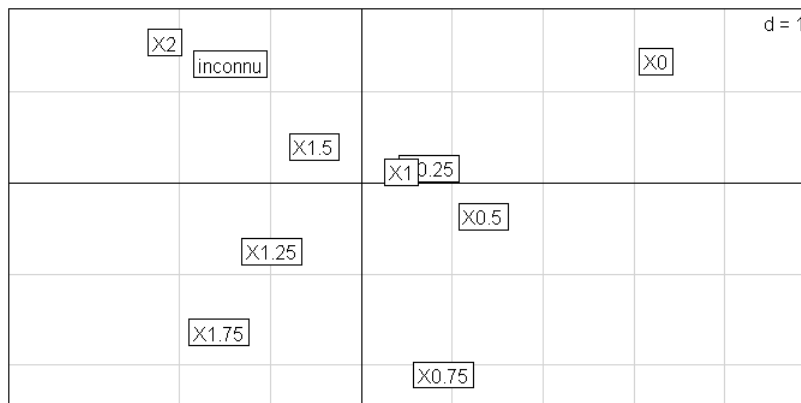
**Qualité de représentation des individus sur l'axe n°1  
(cos²)**



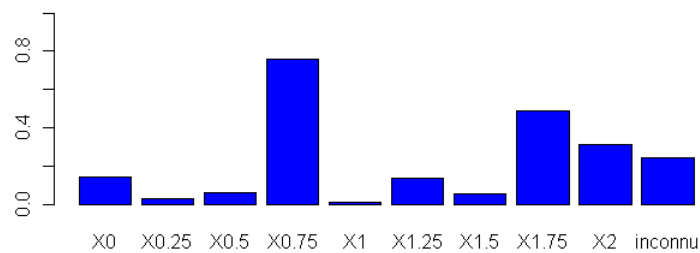
```

#contribution relative ou cos2: exprime la qualite de representation d'une variable
sur chaque axe. Ils sont signes
par(mfrow=c(2,1))
cos2=abs(inertia.dudi(pca_2009, row.inertia = T)$row.rel[,1])/10000)
s.label(pca_2009$li, xax = 1, yax = 2)
barplot(cos2, col="blue", main= "Qualite de representation des individus sur
l'axe n1 \n (cos)", ylim=c(0:1),names.arg=names(cos2),space=0.2)

```



**Qualité de représentation des individus sur l'axe n°2  
(cos²)**



## Annexe B

# Microsimulation : code Visual Basic



## Construction de la classe individu

Structure tab

```
'Attributs "naturels"
Public enf_av As Integer
Public enf_ap As Integer
Public sex As Integer
Public bonif_enf As Integer
Public duree_conge_default As Integer
Public stocksi As Integer
Public stocksa As Integer
Public stocksm As Integer
Public stockss As Integer

Public fluxsi As Integer
Public fluxsa As Integer
Public fluxss As Integer

Public age As Double
Public rachats As Integer
Public dod As Date
Public anneeod As Integer
Public duree_autre_regime As Integer
Public aod As Double
Public validation_particuliere As Integer

Public pension_age_debut As Double
Public pension_age_retraite As Double

'Construits ici
Public bonifs_enf() As Integer
Public duree_conge_av() As Integer
Public conge_av() As Boolean
Public est_conge_sans_solde() As Boolean
Public duree_conge_ap() As Integer
Public conge_ap() As Boolean
Public validations_gratuite() As Integer
Public majos_duree() As Integer

Public Sub ini_vecs()
    ReDim Preserve bonifs_enf(0 To 0)
    ReDim Preserve duree_conge_av(0 To 0)
    ReDim Preserve conge_av(0 To 0)
    ReDim Preserve est_conge_sans_solde(0 To 0)
    ReDim Preserve duree_conge_ap(0 To 0)
    ReDim Preserve majos_duree(0 To 0)
    ReDim Preserve conge_ap(0 To 0)
    ReDim Preserve validations_gratuite(0 To 0)
```

```

    bonifs_enf(0) = 0
    duree_conge_av(0) = 0
    conge_av(0) = 0
    est_conge_sans_solde(0) = 0
    duree_conge_ap(0) = 0
    conge_ap(0) = 0
    validations_gratuite(0) = 0
    majos_duree(0) = 0
End Sub

Public Sub traitement_bonifs()

If enf_av > 0 And sex = 2 Then
    ReDim Preserve bonifs_enf(0 To enf_av - 1)
    ReDim conge_av(0 To enf_av - 1)
    Dim i As Integer

    If enf_av = 2 And bonif_enf = 3 Then
        bonifs_enf(0) = 4
        bonifs_enf(1) = 8
        conge_av(0) = True
        conge_av(1) = True

    Else

        For i = 0 To enf_av - 1
            If i <= bonif_enf - 1 Then
                bonifs_enf(i) = 4
                conge_av(i) = True
            Else
                bonifs_enf(i) = 0
                conge_av(i) = False
            End If
        Next i

    End If
End If
End Sub

Public Sub ini_conge_ap_default()
    If enf_ap > 0 Then
        ReDim Preserve conge_ap(0 To enf_ap - 1)
        Dim i As Integer
        For i = 0 To enf_ap - 1
            conge_ap(i) = (sex = 2)
        Next
    End If
End Sub

Public Sub remplir_est_conge_sans_solde()

```

```

If sex = 2 Then
    If enf_av > 0 Then
        ReDim Preserve est_conge_sans_solde(0 To enf_av - 1)
        Dim i As Integer
        For i = 0 To enf_av - 1
            est_conge_sans_solde(i) = info
        Next
    End If
End If
End Sub

Public Sub remplir_conges_default()
    ini_vecs()

    ini_conge_ap_default()
    traitement_bonifs()
    remplir_est_conge_sans_solde()

    If enf_av > 0 And sex = 2 Then
        ReDim Preserve duree_conge_av(0 To UBound(conge_av))
        Dim i As Integer
        For i = 0 To enf_av - 1
            If conge_av(i) Then
                duree_conge_av(i) = duree_conge_default
            Else
                duree_conge_av(i) = 0
            End If
        Next i
    End If

    If enf_ap > 0 Then
        ReDim Preserve duree_conge_ap(0 To UBound(conge_ap))
        Dim j As Integer
        For j = 0 To enf_ap - 1

            If conge_ap(j) Then
                duree_conge_ap(j) = duree_conge_default
            Else
                duree_conge_ap(j) = 0
            End If
        Next j
    End If

    remplir_validations_gratuite()
    remplir_majo_duree()
End Sub

Public Sub remplir_validations_gratuite()
    If enf_ap > 0 Then
        Dim i As Integer

```

```

        ReDim Preserve validations_gratuite(0 To UBound(duree_conge_ap))

        For i = LBound(duree_conge_ap) To UBound(duree_conge_ap)
            validations_gratuite(i) = Max(0, Min(12, Int(duree_conge_ap(i) / 90)))
        Next i
    End If
End Sub

Public Sub remplir_majo_duree()
    Dim i As Integer
    If enf_ap > 0 Then
        ReDim Preserve majos_duree(0 To enf_ap - 1)

        For i = 0 To enf_ap - 1

            If validations_gratuite(i) < 4 And sex = 2 Then 'car majo pour accouchem
ent
                (donc ne concerne que les femmes)
                If i = 0 Then
                    majos_duree(i) = 2
                Else
                    majos_duree(i) = 4
                End If

            Else
                majos_duree(i) = 0
            End If

        Next i
    Else

    End If
End Sub

Public Sub mise_a_jour(ByVal nouveau_nombre_enf As Integer)
    enf_ap = nouveau_nombre_enf
    remplir_conges_default()
End Sub

End Structure

```

## Calcul des probabilités de décès

```
Public Function lx(ByVal sexe, ByVal age, ByVal tab_mort(,))
    Dim lx1, lx2 As Double
    lx1 = tab_mort(Int(age), sexe - 1)
    lx2 = tab_mort(roundUp(age), sexe - 1)
    lx = (age - Int(age)) * lx2 + (1 + Int(age) - age) * lx1
End Function

Public Function proba_deces(ByVal age_depart, ByVal age_arrivee, ByVal sexe,
ByVal tab_mort(,))
    Dim lx_depart, lx_arrivee As Double
    lx_depart = lx(sexe, age_depart, tab_mort)
    lx_arrivee = lx(sexe, age_arrivee, tab_mort)
    proba_deces = Max(0, 1 - lx_arrivee / lx_depart)
End Function
```

## Calcul des utilités

```
Public Function utilite_travail(ByVal sexe, ByVal age, ByVal age_retraite,
ByVal salaire
, ByVal tab_mort(,))
    Dim j
    utilite_travail = 0
    For j = age To age_retraite - 0.25 Step 0.25
        utilite_travail += (1 / (1 + rho) ^ (j - age)) * utilite_salaire(salaire *
(1 + tx_reval_sal) ^ (j - age)) * (1 - proba_deces(age, j, sexe, tab_mort))
    Next j
End Function

Public Function utilite_retraite(ByVal sexe, ByVal age, ByVal age_retraite,
ByVal pension, ByVal tab_mort(,))
    Dim j
    utilite_retraite = 0
    For j = age_retraite To 109 Step 0.25
        utilite_retraite += (1 / (1 + rho) ^ (j - age)) * utilite_pension(pension *
(1 + tx_reval_pens) ^ (j - age_retraite))
    * (1 - proba_deces(age, j, sexe, tab_mort))
    Next j
End Function

Public Function utilite_totale(ByVal sexe, ByVal age, ByVal age_retraite,
ByVal salaire,
ByVal tab_mort(,), ByVal pension)
    utilite_totale = utilite_travail(sexe, age, age_retraite, salaire, tab_mort) +
utilite_retraite(sexe, age, age_retraite, pension, tab_mort)
End Function
```

## Construction de la dérive

```
Dim TRrdeb As Double = TR(t(i - 1), t(i - 1).aod - recul, tab_decote,
tab_surcote, dateeval)

Q0 = Round(1 - TRrdeb / TRtp, 2)
Dim Qmax = Round(1 - 1 / (TRtp - 0.1), 2)

Dim derive_main (1, 1) As Object
ReDim derive_main ((Q0 - Qmax) * 100, 1)

b(0, 0) = Q0
b(0, 1) = 1.0 + p * Q0

Dim coeff_dir As Double = -p / 100

Randomize()

For j As Integer = 1 To ((Q0 - Qmax) * 100)

    Dim x As Double
    Dim y As Double

    Randomize()

    x = genrand_real3()
    y = genrand_real3()

    Dim u As Double = boxmuller(x, y)(0)
    Dim v As Double = boxmuller(x, y)(1)

    derive_main (j, 0) = Round(b(j - 1, 0) - 0.01, 2)
    derive_main (j, 1) = coeff_dir + b(j - 1, 1) + u * sigma_main

Next j
```

## Calcul de l'âge de départ à la retraite

```

Public Function age_depart_retraite(ByVal t As tab, ByVal salaire
As Double, ByVal dateeval As Date, ByVal tab_decote(,) As Object,
ByVal tab_surcote(,) As Object, ByVal tab_mort(,) As Object, ByVal
derive_main(,) As Object)

    Dim age_debut As Double = t.aod
    Dim age As Double = t.age
    Dim u_optimal As Double = 0
    Dim u_temp As Double
    Dim Q_r_moins_1 As Double = 16598
    Dim derive_moins_1 As Double = 0
    Dim eps As Double = 0

    age_depart_retraite= age_limite

    For r As Double = age_debut To age_debut + longueursimul Step 0.25

        k = 1 / TRtp

    Dim TRr As Double = TR(t, r, tab_decote, tab_surcote, dateeval)
        Dim F_r As Double = 0

        For z As Double = r + delai + 0.25 To age_limite Step 0.25
            Dim uw_raz = utilite_travail(t.sex, r, z, salaire * (1 + tx_reval_sal)
^ (r - age), tab_mort)
            Dim ur_z = utilite_retraite(t.sex, r, z, pension(t, salaire * (1 +
x_reval_sal) ^ (z - age), z, tab_decote, tab_surcote, dateeval), tab_mort)
            Dim uw_r_plus_l_a_110 = utilite_retraite(t.sex, r, z, salaire * (1 +
tx_reval_sal) ^ (z - age), tab_mort) / (k ^ (1 - gamma))
            Dim TRr_plus_l = TR(t, z, tab_decote, tab_surcote, dateeval)
            Dim quu As Double = TRr_plus_l / TRr
            Dim f_q_r_l_temp As Double = (uw_raz / (uw_raz + (1 - quu ^
(1 - gamma)) * uw_r_plus_l_a_110)) ^ (1 / (1 - gamma))
            F_r = Max(f_q_r_l_temp, F_r)
        Next z

        delai = Max(0, delai - 0.25)

    Dim Q As Double = 1 - TRr / TRtp
    Dim derive As Double = recherchev(derive_main, Round(Q, 2), 2) + eps

    If Q = Q_r_moins_1 Then
        Dim x As Double
        Dim y As Double

```

```

Randomize()

x = genrand_real3()
y = genrand_real3()

Dim w As Double = boxmuller(x, y)(1) * sigma_micro
eps = eps + w
derive = derive_moins_1 + w

End If

Q_r_moins_1 = Q
derive_moins_1 = derive

k = 1 / TRtp * derive * F_r
Dim derive_temp = derive

Dim u_r As Double = utilite_totale(t.sex, r, r, salaire * (1 + tx_reval_sal)
^ (r - age), tab_mort, pension(t, salaire * (1 + tx_reval_sal) ^ (r - age), r,
tab_decote, tab_surcote, dateeval))

For z As Double = r + 0.25 To r + delai Step 0.25
    u_temp = utilite_totale(t.sex, r, z, salaire * (1 + tx_reval_sal) ^
(r - age), tab_mort, pension(t, salaire * (1 + tx_reval_sal) ^ (z - age), z,
tab_decote, tab_surcote, dateeval))
    u_optimal = Max(u_optimal, u_temp)
Next z

If u_r >= u_optimal Then
    If derive_temp >= (1 / (1 - Q)) Then
        age_depart_retraite = Min(age_depart_retraite, r)
        GoTo lala
    End If
End If

u_optimal = 0

Next r
lala:
End Function

```