

Mémoire présenté le : 6 février 2018

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Pierre MONTESINOS

Titre Réflexions sur l'équité intergénérationnelle en matière de retraite

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaires*

C. PIGEON
G. LACOUR

signature

Entreprise :

Nom : SPAC Actuaires

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Olivier SEGUIN

Signature :


Invité :

Nom : Brigitte ECARY

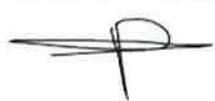
Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



Résumé

Mots-clés : retraite, retraite par répartition, retraite en points, indicateur de pilotage, équité intergénérationnelle, ELT, ajustement de table de référence.

Trois mots : protecteur, obligatoire et solidaire. Trois mots qui ont été les fondations, les règles inaliénables, le fil d'Ariane en quelque sorte, dans la constitution tumultueuse d'un acquis d'aujourd'hui, d'un combat d'hier : le système de retraite français.

Fruit d'initiatives gouvernementales, parfois rabrouées ou initiées par des remous sociaux, dans une période de transition du pays, le système de retraite français est le miroir de l'évolution de la société. Puisque les différents régimes sont créés dans le but de protéger les travailleurs, l'adhésion y devient rapidement obligatoire. Instaurant dès l'origine une solidarité entre les générations, la retraite française est aujourd'hui confrontée aux mutations économiques, sociales et démographiques du pays. Plusieurs mesures ont été prises au fil du temps pour éviter une dérive irrémédiable des régimes, prenant la forme de réformes paramétriques, au sens où les paramètres du calcul des pensions et/ou des cotisations sont modifiés : recul de l'âge de liquidation à taux plein, indice de revalorisation des pensions, revue de la base de cotisation... Parallèlement à cet éveil des consciences, des travaux sur la gestion des régimes, le "pilotage", émergent peu à peu pour aboutir à une méthodologie s'apparentant au calcul d'une myriade d'indicateurs, pour la plupart financiers. Néanmoins, les défis de la retraite résident, du moins pour les pays développés, dans l'amélioration des conditions de vie, dans la baisse de la mortalité, et dans le gain d'espérance de vie. Autrement dit, le pilotage doit prendre en compte ces évolutions démographiques dans leur ensemble, en alliant de manière habile la gestion de la santé du régime dans sa globalité et la dimension sociale individuelle.

Dès lors, un nouvel argument apparaît, à la frontière entre la philosophie, la science sociale et l'écologie : l'équité intergénérationnelle. A priori assez vaste, l'expression est traitée, sans surprise, du point de vue actuariel. L'équité intergénérationnelle est mesurée à l'aide d'un critère, défini comme le rendement individuel offert par le régime : il compare pour un individu le rapport de la somme des prestations offertes par le régime sur la somme des cotisations fournies au régime. Complet dans sa construction, permettant de couvrir à la fois les évolutions paramétriques des régimes et les évolutions démographiques des populations, il ramène la gestion du régime à l'échelle individuelle. De ce fait, la problématique de la mortalité est au coeur de la mise en oeuvre de ce nouvel indicateur. Facilement interprétable, le critère conduit à une question primordiale dans la direction que prend la retraite d'aujourd'hui : les trois mots, en somme devise de la retraite lors de sa création, sont-ils toujours d'actualité ?

Abstract

Keywords : retirement system, Pay-As-You-Go scheme, point system, pension steering indicators, intergenerational fairness, ELT, mortality table adjustment.

Three words : protective, obligatory and solidary. These three words have been the bedrock, the inalienable rules, the Ariadne's thread in a nutshell, in the tumultuous constitution of an asset, won through years of struggle : the mandatory public French retirement system.

Resulting from government initiatives and sometimes put down or initiated by social unrest, in a so-called transition period, the mandatory public French retirement system is the reflection of the societal changes throughout France. Since different schemes are created in order to protect workers, the membership rapidly becomes obligatory. An intergenerational solidarity is established since the creation of the mandatory French retirement system, and today, the system has to face economic, social and demographic changes of the country. Several measures have been taken over time to avoid an irremediable drift of the schemes, through parametric reforms, meaning that benefit and contribution calculous parameters are modified : increasing the age of retirement with full benefits, adjusting the level of pension, reviewing the contribution basis... While this awareness raising happened, works on pension scheme management, so called "steering", have gradually emerged to achieve in a methodology which imposes to calculate various indicators, where most of them are financial ones. Nevertheless, the challenges of retirement systems lie, at least in developed countries, in the improvement of living conditions, in the decline of the mortality, and in the gain in life expectancy. In other words, pension steering has to take into account these demographic changes globally, combining both financial and individual social scales of the scheme.

Henceforth, a fresh new argument appears, at the boundary of philosophy, social sciences and ecology : intergenerational fairness. Rather wide at first glance, our study deals with this expression from an actuarial point of view. Intergenerational fairness is measured using a criterion, defined as the individual yield offered by the scheme, or the recovery rate : it compares for an individual the ratio of the sum of the pensions received on the sum of the contributions paid. Thanks to a thorough construction, the criterion covers both parametric evolutions and demographic changes, bringing back individual scale in the heart of pension steering. Hence, mortality improvement issue was crucial during the implementation of this new indicator. Easily understandable, the criterion leads to a primordial question in the direction that the French retirement system takes : are the three words, the motto of the system, still relevant today ?

Remerciements

Il va être compliqué de faire des remerciements à la hauteur de ce qui m'a été donné durant cette année. Accompagné, suivi, conseillé et encouragé, travailler à la SPAC fut un réel plaisir, et je garderai un souvenir indélébile de cette première "vraie" expérience professionnelle. Si tous les membres du cabinet ont participé à l'ambiance extraordinaire qui a régné durant cette année, je remercie en particulier Brigitte, Olivier, Alexandre et Louis.

Brigitte pour le temps qu'elle a pris pour moi, pour sa générosité dans son investissement dans mon travail, pour les discussions pour "le plaisir intellectuel", et pour la rigueur de ses relectures. Je lui dois également beaucoup dans le temps et la liberté qu'elle m'a accordée dans la réalisation de mes projets futurs.

Olivier pour son suivi durant cette année, pour sa suggestion salvatrice concernant la mortalité, et pour ses blagues du midi.

Alexandre pour son accompagnement tout au long de cette année, pour les discussions sur les différents sujets du cabinet, pour la découverte d'un genre musical, disons, stimulant, et pour la confiance qu'il m'a accordée. C'était un plaisir de travailler avec lui.

Enfin, Louis, pour m'avoir appelé pour un entretien début 2016. C'est lui qui m'a ouvert les premières portes de cette entreprise hors du commun, et qui a assuré une partie de ma formation initiale.

Évidemment, je remercie aussi Didier Rullière pour avoir pris le temps de m'aider, même depuis le Vietnam, dans la réalisation de ce travail. Un grand merci à Frédéric Planchet pour ses conseils très très, très pointus dans l'étude de la mortalité.

Merci à ma famille, mes parents et mes frères, pour leur soutien sans faille, pour la compréhension des sacrifices qu'impliquent les études. (Et puis pour tout ce qui se dit moins, mais qui a participé à mon équilibre!)

Enfin, il ne reste plus qu'elle, elle qui connaît son rôle, immense, qui va bien au-delà de l'aboutissement de ce travail.

Alors, c'est très simple, mais très vrai : Merci.

Sommaire

Résumé	3
Abstract	4
Remerciements	5
Introduction	11
1 La retraite, ses origines et son évolution	15
1.1 Les origines de la retraite	15
1.1.1 Un contexte social et économique particulier	16
1.1.2 L'opposition des systèmes : Allemagne - Angleterre	17
1.2 Pour comprendre son évolution	18
1.2.1 Les deux grands principes	19
1.2.2 Les évolutions	23
1.3 Et son fonctionnement actuel	31
1.3.1 Une organisation en trois piliers	31
1.3.2 Qui laisse place à une myriade de systèmes	33
2 Le pilotage, ou la rencontre des points de vue	37
2.1 Les indicateurs utiles d'un régime	37
2.1.1 Les indicateurs de solvabilité les plus courants	37
2.1.2 Les indicateurs de pilotage	40
2.2 De l'équité comme contrainte à l'équité comme objectif	41
2.2.1 Digression sur l'équité intergénérationnelle	42
2.2.2 Indicateurs mesurant l'équité intergénérationnelle	44
2.2.3 Le critère retenu	49
3 Application et mise en oeuvre : un régime complémentaire de professions libérales	57
3.1 Mortalité spécifique	57
3.1.1 Présentation des méthodes : comparaison et mise en oeuvre	57

3.1.2	Une méthode discriminante	81
3.1.3	Fermeture et finalisation	85
3.2	Application sur le régime étudié	88
3.2.1	La mise en oeuvre du critère	88
3.2.2	Pérennité du triptyque	97
	Conclusion	103
	Bibliographie	107
	Table des figures	112
	Liste des tableaux	114
	Annexes	115
A	Historique de la retraite en France	117
B	Le calcul de la pension au Régime Général de la Sécurité Sociale	120
C	Présentation du PERP et du PERCO	121
D	Liquidation au RGSS	123
E	La retraite dans le monde	124
F	Valeurs des SMR en fonction de la plage d'âge retenue	126
G	Espérance de vie du moment sur la plage d'étude pour les deux populations avant ajustement	127
H	A propos de la fonction <i>logit</i>	129
I	A propos de la déviance	130
J	Intervalle de confiance femmes 2009-2015	131
K	Intervalle de confiance hommes 2009-2015	133
L	A propos du χ^2 , du R^2 et du <i>MAPE</i>	135
M	Lissage par la méthode de Whittaker-Henderson	136

N	Historique du taux d'évolution du PSS de 1981 à 2017	141
O	Rendement individuel pour la population masculine	142
P	Rapport démographique de 1981 à 2016	143
Q	Taux financiers nets de frais en fonction de la date de liquidation pour la population masculine	144

Introduction et revue de la littérature

Le pilotage d'un régime de retraite est un sujet moderne, plaçant la santé financière des régimes au cœur de la réflexion. Le Conseil d'Orientation des Retraites fournit depuis quelques années des méthodologies qui éclairent la gestion des régimes de retraite. Certes la problématique des gestionnaires est financière mais l'individu ne doit pas être oublié dans les orientations de gestion. Lors de sa création, le système de retraite français a été dimensionné dans un contexte favorable, tant au niveau démographique qu'économique. Mais l'entrée des papy-boomers dans les rangs des retraités, couplée à l'augmentation de l'espérance de vie après 60 ans sont des phénomènes qui fragilisent les régimes, et qui mettent à mal leur pérennité. Une réponse purement financière à la problématique démographique n'est pas viable, à l'image des remous populaires de 1995 ou ceux de 2010. Comment gérer cette crise démographique ?

La littérature sur ce sujet est très fournie, et les principaux axes de recherche sont décrits ici, afin de saisir l'étendue des travaux menés, et d'en faire une synthèse. La longévité, un risque de long terme, correspond au risque financier associé au fait que les individus vivent en moyenne significativement plus longtemps que prévu. Cette thématique est au cœur des travaux actuariels actuels à l'image de ceux menés par Hillairet et *al* (2012). La plupart des assureurs, et c'est ce qui sera fait dans ce travail, utilise des tables de mortalité prospectives où les tendances de mortalité actuelles sont projetées dans le futur. Mais le risque de longévité est un risque de tendance, c'est-à-dire que c'est le risque qu'un changement de vitesse d'amélioration de la mortalité survienne. Une des alternatives proposées est d'utiliser des modèles proches de ceux appliqués en biologie, où la population n'est plus modélisée uniquement via l'âge mais par d'autres facteurs reflétant le mode de vie : niveau socio-économique, statut marital... Ces études sont regroupées au sein du projet ANR LoLiTa¹ (Dynamic models for human Longevity with Lifestyle Adjustments) qui soumet des idées sur les types de modélisation du risque de longévité, les questions réglementaires, ainsi que les problématiques de transfert du risque. Le transfert de ce risque, l'évaluation et la couverture constituent un sujet en soi mais ne sera pas traité ici.

Finalement, les travaux du projet LoLiTa sont organisés en six axes, qui englobent le risque de longévité en abordant les modèles dynamiques, les méthodes de simulation, les aspects statistiques et enfin le partage du risque en retraite et assurance vie. Cette dernière tâche implique une réflexion sur l'équité intergénérationnelle. Dans cette approche, la solidarité intergénérationnelle est appréhendée par la description de la dynamique du régime en termes de prestations et cotisations en temps continu, de façon à atteindre un objectif pour chaque génération. Le présent mémoire est une variante de ce critère puisque l'étude s'appuie sur le calcul du ratio prestations/cotisations au niveau individuel en fonction des générations.

1. <http://lolita.isfa.fr>.

Parallèlement, une équipe de l'université de Tilburg propose une réflexion sur la solidarité intergénérationnelle qui suppose que les régimes sont financés par les cotisations, mais que les transferts entre les générations sont une question de négociation. L'approche de Boonen et al (2012) considère que les générations sont membres du Conseil d'Administration et que chaque membre a des vues distinctes pour le futur. Selon les auteurs, la stratégie du régime (un fonds de pension en l'occurrence) est déterminée à l'issue d'un processus de négociations entre les membres du Conseil. L'aspect important de ce travail est l'utilisation d'un modèle de générations imbriquées (Overlapping Generations Model) mélangeant six générations vivantes : quatre générations actives, et deux générations retraitées. Ici, le niveau des pensions reflète la capacité à partager le risque entre les générations, et les auteurs présentent les bienfaits de la solidarité intergénérationnelle via leur modèle. Dans le même esprit, Bohn (2009) suggère lui aussi une version de modèle à générations imbriquées. Présentée lors du colloque Longevity¹¹ en 2015, sa conclusion confirme celle du travail mené par Boonen : le partage des risques intergénérationnels permet des gains de bien-être.

Enfin, les travaux d'Aubert & Rabate (2014) apportent un éclairage sur le partage du gain d'espérance de vie entre durée de travail et durée de retraite instauré dans les réformes successives de 2003, 2010 et 2014. Selon eux, l'équité réside dans la préservation du rapport entre temps passé à la retraite et temps passé à travailler. Le travail de Knell (2011) sur le rôle de la retraite en répartition, soulève la question des défis inhérents aux évolutions démographiques. En particulier, son chapitre intitulé *Intergenerational fairness and the choice between different Pension Systems* offre une place déterminante au critère d'équité intergénérationnelle dans le choix du système de retraite.

Lors de l'analyse de la genèse du système de retraite français, un triptyque fondateur apparaît assez clairement. Protecteur, obligatoire et solidaire s'apparentent à la devise originelle de la retraite. Le mémoire s'interroge de fait sur **la pérennité de ce triptyque, en plaçant l'étude dans la problématique de l'équité intergénérationnelle à l'échelle individuelle**. En effet, si les réformes sont axées vers la gestion financière des régimes, qu'en est-il de la place de l'individu ? Pour tenter de répondre à cette question, l'étude se plonge dans la genèse du système de retraite français, en rappelant les grands principes, ainsi que son organisation et son état actuel. Ensuite, elle dédie une section à l'étude du pilotage des régimes puis s'interroge sur la question de l'équité intergénérationnelle, en opérant un tour d'horizon des mouvances, pour finir par la définition d'un critère permettant de juger de l'équité au niveau individuel, afin de pouvoir apprécier l'évolution de la pertinence de la devise. Tout d'abord, Kolm (1972) établit une théorie de l'équité qui peut se résumer en l'absence d'envie, qui vise à éviter que quiconque préfère la consommation d'autrui à la sienne. L'équité intergénérationnelle quant à elle apparaît d'abord dans le domaine environnemental, et Ferrari & Mery (2008) la définissent comme la mise en oeuvre de principes autorisant la préservation des éléments du capital naturel à long terme. Dans un autre registre, Rawls (1989) en propose une approche contractualiste, puisque selon lui les générations sont liées entre elles, et qu'elles ont chacune des droits propres, qui ne doivent pas être reniés. L'existence de ces droits est traitée de façon comp-

table par Tragaki (1998) via les transferts intergénérationnels. Sa méthode consiste en la comparaison des bilans de chaque génération. Hummel & Hugentobler (2007) analysent la genèse de la problématique intergénérationnelle, notamment en matière de retraite, sans toutefois proposer une définition claire. Il faudra alors retenir une définition pour être capable de gérer l'équité.

Enfin, le travail suggère le critère du taux de récupération, qui, calculé pour différentes générations, permet d'appréhender l'évolution de la devise originelle.

Par rapport à la littérature existante, l'apport de ce mémoire est l'utilisation du critère du taux de récupération, défini dans Dubois & Marino (2015), en tant que critère de gestion individuelle de l'équité intergénérationnelle. A la différence des critères proposés par Blanchet (2010) qui ne sont que des critères de comparaison de durée, ou d'effort contributif, la comparaison de l'équité se base sur la vision de Sen (2000), qui considère que tout problème d'équité est en fait un problème d'égalité, puisque chercher à rendre équitable une situation revient à égaliser quelque chose. En l'occurrence, l'égalisation recherchée est celle de l'état du triptyque fondamental, via le calcul du ratio prestations versées par le régime sur cotisations versées au régime. L'intérêt de cette vision est double. D'une part, elle permet de prendre en considération l'équité au niveau individuel, à la différence des autres critères prônés par le Conseil d'Orientation des Retraites dans COR (2012). D'autre part, elle se distingue des approches choisies dans les travaux modernes, à l'image de ceux de Gannon et *al* (2014) qui utilisent un modèle d'ajustement automatique des paramètres de la Caisse Nationale d'Assurance Vieillesse. Qui plus est, le critère permet de prendre en compte le gain d'espérance de vie. Cette question de l'accroissement de la durée de vie aux âges élevés sera traitée de manière technique, en se basant sur les travaux de Planchet & Tomas (2014a,b,c). La mortalité des affiliés du régime est analysée en détail et modélisée de manière la plus fine possible via l'utilisation des méthodes d'ajustement de tables réglementaires.

Chapitre 1

La retraite, ses origines et son évolution

Cette première partie du mémoire sert à initier le lecteur aux réflexions qui vont être développées dans la suite. Des questions seront soulevées, des pistes de raisonnement seront dégagées, puis développées dans les parties suivantes.

Le chapitre est découpé de façon analogue à celle du raisonnement qui a été mené : la première partie porte sur l'étude des origines de la retraite, en vue de comprendre son évolution, pour terminer sur l'analyse de son fonctionnement actuel.

1.1 Les origines de la retraite

L'objectif de l'étude des origines de la retraite ne consiste en rien à faire un historique de la genèse des systèmes de retraite en France¹ mais de replacer ces régimes dans le contexte de leur création, afin d'en saisir les fondements idéologiques. En effet, le fil conducteur du chapitre peut se résumer à l'interrogation suivante : quels sont les principes fondamentaux qui ont forgé le système de retraite en France ? Dans les chapitres suivants, la discussion s'élargira sur la question de la pérennité de ces principes. La question est encore à ce stade assez floue, le terme "principes fondamentaux" vague, et le travail s'appliquera à clarifier ces notions. La première question qui est venue à l'esprit lors de la réalisation du mémoire est celle des raisons de la création de la retraite. En effet, si aujourd'hui le fait d'obtenir une retraite est un "droit" acquis, qu'en est-il pour le siècle dernier, voire celui d'avant ? En fin de compte, quelles sont les raisons de la naissance de la retraite ? Pour y répondre, deux études parallèles sont menées : celle du contexte social, et celle du contexte économique. Il convient de préciser que si dans la suite seul le cas de la France est étudié, il ne serait pas sérieux d'isoler le pays pour ce premier chapitre. Les cas d'autres pays seront donc évoqués ici, puisqu'ils ont eu une influence sur le nôtre dans la mise en place des régimes des retraites.

1. Cela reste tout de même intéressant, c'est pourquoi un historique est disponible en Annexe A page 117.

1.1.1 Un contexte social et économique particulier

Historiquement, la retraite renvoie à l'état d'un individu retiré de la vie publique, profitant de ses vieux jours. C'est au milieu du XVIII^e siècle que le terme "retraite" est utilisé pour définir la pension perçue, sans pour autant perdre son sens premier de l'arrêt de l'activité professionnelle.

Avec l'arrivée de la société pré-industrielle, l'organisation de la famille est en mutation. Le temps de la solidarité familiale qui assure aux anciens une protection n'existe plus : à cette époque, la famille est éclatée et l'espérance de vie est marquée par de fortes inégalités². Le clivage entre une aristocratie capable d'épargner et une couche laborieuse ultra précaire amène Henry IV à imposer "qu'en chacune des mines qui sera ouverte dans ce royaume, [...] un trentième soit pris sur la masse entière de tout ce qui proviendra de bon et de net [...] et seront les deniers employés pour l'entretien d'un chirurgien et l'achat de médicament"³. Il y a ici un premier point fondamental : **la retraite protège**. Face aux conditions de travail de certaines professions, le gouvernement met en place des protections. Certes tous les corps de métiers ne sont pas concernés, mais la nouvelle se répand vite.

C'est d'abord le cas des mineurs, puis des marins en 1673⁴, puis de leur famille. Ensuite durant tout le XVIII^e siècle, les manufactures s'efforcent à mettre en place des pensions de retraite pour leurs employés et ouvriers, à l'image de Saint-Gobain. De la même façon, la "Ferme Générale"⁵ établissait pour son personnel une retraite dont les ressources provenaient d'une retenue de 3 % sur les salaires et d'une subvention égale de la Ferme. En fait, tous ces régimes sont financés de la même façon : des "retenues" sur les salaires lors de la vie active, seront redistribuées au moment venu. C'est donc un deuxième point qui ressort : **la retraite instaure la solidarité intergénérationnelle**. Bien que ce terme ne sera employé que bien plus tard, ce qu'il définit existe depuis bien longtemps. C'est très important de comprendre le contexte social dans lequel est née la retraite, puisqu'il permet d'expliquer les différences entre les régimes d'aujourd'hui, et surtout l'attachement et l'ancrage profond dans la société de principes qui peuvent apparaître comme immuables.

Finalement, le 18 juin 1850 une loi crée la Caisse des Retraites pour la Vieillesse (CRV). Cette Caisse est l'aboutissement de remous sociaux. En effet, dans les années 1830, une société industrielle voit le jour dans une France encore rurale et paysanne. La question sociale apparaît avec le paupérisme et la concentration urbaine, lorsqu'un pragmatisme social naît en faveur des ouvriers. Ils sont les destinataires privilégiés, voire

2. Pour une étude plus poussée, il est conseillé de se référer à Kessler (1991).

3. Robert (1981).

4. Pour être tout à fait exact, cet édit s'adresse d'abord aux Marins du Roi. Il est élargi la même année aux marins du commerce et à ceux de la pêche. De plus, il était entendu que les soldats embarqués comme personnel des arsenaux étaient inclus dans le régime.

5. La Ferme Générale est une institution qui avait pour vocation de prendre en charge la recette des impôts indirects, des droits de douane, des droits d'enregistrement et des produits domaniaux. C'est le corps de financiers qui prend à ferme les revenus du roi ; ils ne sont donc pas de simples banquiers, mais également des gestionnaires de l'impôt.

exclusifs, de nouvelles institutions d'épargne retraite. Un des enjeux de l'époque est celui de l'adhésion : doit-elle être obligatoire ou facultative ? Trois arguments intéressants sont émis par les économistes libéraux en faveur du caractère facultatif. Le premier est que l'épargne retraite retarde l'ascension sociale en captant l'épargne disponible au détriment de la création d'entreprise, le deuxième est qu'elle empêche la transmission successorale en diminuant le capital, et le dernier est qu'elle est un frein à la compétitivité à l'exportation lorsqu'elle est abondée par les employeurs. C'est une victoire pour eux puisque la CRV est finalement alimentée par des contributions volontaires. Mais après plusieurs essais de réformes infructueuses, des voix s'élèvent contre le caractère volontaire du versement, et prônent la création de dispositifs d'assistance obligatoire : c'est chose faite en 1905, avec la loi d'assistance. Néanmoins, une rancœur de la part des libéraux persiste, et ils obtiennent la mise en place des rentes ouvrières et paysannes de 1910. Elles sont assorties d'une obligation de cotisation sur les revenus annuels inférieurs à 3000 francs. Le **caractère obligatoire des cotisations est alors un principe acquis**. Cette fois-ci, le régime est géré par capitalisation, mais très vite le système devient insoutenable, et il bascule en répartition dès 1912. Ceci ne veut pas dire que la capitalisation est forcément vouée à l'échec, mais simplement que le dimensionnement du régime doit être réaliste. L'étude s'appliquera dans la suite à détailler les deux modes de gestion, leurs avantages et leurs inconvénients.

Les 4 et 19 octobre 1945 est créée la Sécurité Sociale, avec trois objectifs : l'unicité de la sécurité sociale, qui prend la place de l'assurance sociale, en créant un réseau coordonné de caisses remplaçant la mosaïque d'organismes, l'extension des risques couverts et enfin la généralisation de la couverture à l'ensemble des citoyens. Mais les lois et les décrets de 1946 vident les ordonnances de 1945 de leur substance en raison d'une résistance menée sur plusieurs fronts. En effet, les salariés relevant des régimes spéciaux refusent d'appartenir à un régime général qui s'avère moins généreux que le leur : les régimes spéciaux sont pérennisés et réorganisés en juin 1946. Parallèlement, les salariés agricoles réclament un régime autonome, et ils l'obtiennent en juin 1951. Enfin, les professions indépendantes (chefs d'entreprise, commerçants, artisans, industriels et professions libérales) sont les plus hostiles aux objectifs de la Sécurité Sociale universelle. Ils la perçoivent comme un mécanisme susceptible de les amener à subventionner massivement les pensions des salariés. Dès lors, en janvier 1948 le Parlement pose les jalons de l'organisation actuelle du système de retraite français en instituant quatre organisations autonomes d'assurance vieillesse.

1.1.2 L'opposition des systèmes : Allemagne - Angleterre

Il n'y a pas qu'en France que les peuples grondent. En effet, les révolutions industrielles touchent la plupart des pays, et de fait, les ouvriers font entendre leur voix pour obtenir plus de considération. En réponse à cela, deux visions naissent : la vision allemande assurantielle et la vision forfaitaire anglaise⁶.

6. La présentation des deux visions se base sur les travaux de Pourville (2011).

Au cours des années 1880, le chancelier Otto Von Bismark dote l'Empire allemand des premières assurances sociales, en faisant adopter trois lois fondamentales sur l'assurance maladie (1883), l'assurance accident du travail (1884) et l'assurance invalidité et vieillesse (1889). La conception bismarckienne de la protection sociale s'appuie sur l'activité professionnelle et s'inscrit dans une logique assurantielle, contributive et paritaire. La couverture sociale vise à compenser une perte de revenu professionnel consécutive à la réalisation d'un risque, en proportion de contributions prélevées sur les salaires et co-gérées par les employés et les employeurs dans des caisses autonomes organisées par des catégories professionnelles.

Plus ou moins à la même époque, William Beveridge prône la mise en place d'assurances sociales en Angleterre. Il entend combattre ce qu'il appelle les cinq maux sociaux : le besoin, la maladie, l'ignorance, la misère et l'oisiveté. La philosophie beveridgienne repose sur trois principes, appelés "les trois U" : l'**universalité** par laquelle tous les travailleurs doivent bénéficier d'une couverture pour tous les risques sociaux, quel que soit leur statut professionnel, l'**uniformité** par laquelle les citoyens doivent recevoir des prestations identiques en contrepartie de contributions égales et pour terminer, l'**unicité** par laquelle les prestations relèvent d'un même service public. Pour ce qui est de la retraite, le système beveridgien se traduit par l'instauration d'un régime général couvrant l'ensemble des travailleurs, et versant des pensions identiques quel que soit le niveau de revenu d'activité. De fait, un système beveridgien pur est un régime forfaitaire, puisque les prestations reçues sont forfaitaires et indépendantes des cotisations versées.

Les deux mouvances peuvent être résumées ainsi :

Vision Bismarckienne :	Vision Beveridgienne :
<ul style="list-style-type: none"> — assurance ; — contributivité ; — base professionnelle ; — paritarisme. 	<ul style="list-style-type: none"> — assistance ; — forfaitisation ; — universalité ; — étatismes.

TABLE 1.1 – Résumé des visions Bismarckienne et Beveridgienne

Ces modèles présentent deux traits communs importants : l'universalité de la couverture, et du fait du caractère obligatoire, le principe d'un financement fondé sur la capacité contributive de l'assuré et non pas sur le niveau de risque. Ce dernier point les distingue d'un système d'assurance privée dans lequel les primes sont calculées en fonction du risque et de la couverture choisie. Finalement, le système bismarckien est assurantiel et le système beveridgien est assistanciel.

1.2 Pour comprendre son évolution

Les origines sont claires : le système de retraite a été institué en vue de protéger les salariés les plus faibles pour leurs vieux jours, puis le champ des bénéficiaires est élargi au

fil du temps. C'est en somme dans une logique d'assistance et d'assurance que le système a été mis en place. Si la distinction entre les deux visions des mouvances originales de retraites est claire, la réalité actuelle est toute autre. En effet, les régimes d'aujourd'hui sont un mélange bien moins manichéen qu'auparavant, puisqu'ils adoptent une vision autant générale que distributive. Le prochain point à comprendre est le mode de gestion, puisque de celui-ci découle, en quelque sorte, le rôle du système de retraite.

1.2.1 Les deux grands principes

De nos jours, la segmentation ne se fait plus guère sur l'appartenance à l'idéologie allemande ou britannique, mais plutôt sur le mode de gestion, la répartition ou la capitalisation, qui constituent les deux grands principes de la retraite ⁷.

Pour ce qui est de la répartition, les réserves sont inférieures aux engagements ⁸, et peuvent, en théorie, même être nulles. Pour la capitalisation, les réserves doivent être supérieures ou égales aux engagements.

La gestion par répartition : la répartition adopte une vision prospective et totalement dépendante de l'équilibre démographique et financier du régime, puisque ce sont les cotisations des actifs qui sont directement reversées aux retraités. Il n'existe donc aucune garantie des prestations futures. Même si en théorie les réserves peuvent être nulles, en pratique, un régime en répartition ne peut pas fonctionner sans réserves. Il est nécessaire d'avoir un fonds de roulement pour faire face, par exemple, à des retards de paiement de cotisations, sans pour autant retarder les prestations. Plus généralement, ces réserves permettent d'assurer la survie du régime en cas de période économique néfaste. La constitution de réserves se fait sur une période de croissance économique, avec un faible taux de chômage et un rapport démographique ⁹ favorable. Puisqu'il y a une redistribution immédiate des cotisations aux retraités, le système de gestion par répartition met en place une forte solidarité intergénérationnelle : c'est la génération des actifs qui est garante de la pension des retraités. En revanche, un problème apparaît assez clairement : les évolutions démographiques, et notamment l'allongement de la durée de vie, couplées au niveau économique (les réserves sont placées sur les marchés financiers) mettent à mal ces régimes. Si le rapport démographique devient défavorable, les cotisations ne seront plus suffisantes pour faire face au paiement des prestations. Une solution pour gérer ce risque est que la population des cotisants soit répartie dans des secteurs diversifiés, de façon à assurer une suffisance des effectifs d'une part, et du renouvellement régulier d'autre part. La vérification de ce besoin à un horizon donné nécessite la construction d'un outil de projection en groupe ouvert, avec cotisations futures et acquisition future de droits. C'est pour cette raison que les régimes de base ont contourné ce problème en mettant en place une compensation inter-régime et en trouvant d'autres sources de financement que les cotisations.

7. Une description complète des modes de gestion ainsi que des réflexions sur leur futur sont menées dans Lavigne (2013).

8. L'engagement d'un régime de retraite est la somme actualisée des prestations futures probables que le régime doit à ses bénéficiaires pour les droits acquis (actifs, retraités, anciens actifs, et ayants droit).

9. Le rapport démographique est le rapport Cotisants/Retraités.

Tout ceci implique que l'adhésion à un régime géré en répartition est obligatoire. La raison de cette obligation est d'éviter tout risque d'anti-sélection : en considérant l'adhésion facultative, il se pourrait que seuls les mauvais risques¹⁰ soient demandeurs, ou que trop peu de gens souscrivent par rapport au nombre de souscriptions passées. Ainsi, la mutualisation est mise à mal, et la pérennité du régime aussi. Enfin, la répartition nécessite une adaptation constante des ressources aux prestations. Le régime est de fait sensible aux évolutions démographiques, via le vieillissement de la population, aux évolutions économiques (chômage, stagnation des salaires) et aux évolutions des modes de travail. La répartition peut se résumer ainsi :

Gestion par répartition	
Avantages :	Inconvénients :
<ul style="list-style-type: none"> — mutualise le risque entre l'ensemble des affiliés au régime, cotisants et allocataires ; — lors de la mise en place du régime, permet de reconnaître l'ensemble des services passés, sans coût supplémentaire immédiat ; — permet de mettre en place des prestations non forcément corrélées avec le niveau des cotisations versées pour le compte de chaque affilié, et notamment d'accorder des droits "gratuits" (maladie, invalidité, chômage) ; — par nature, il établit une solidarité entre actifs et retraités. 	<ul style="list-style-type: none"> — ne peut pas être résilié, sous peine de perte de l'ensemble des droits acquis (plus de cotisations) ; — l'évolution du régime est totalement liée à l'évolution démographique de la population des affiliés et au niveau des cotisations (donc des salaires/revenus soumis à cotisation) ; — il n'existe aucune garantie de niveau des prestations futures ; — le risque étant mutualisé, chaque affilié ne reçoit pas forcément la contre partie des cotisations versées pour son compte ; — son fonctionnement incite à distribuer des droits gratuits lors de la création du régime (tant que prestations < cotisations).

TABLE 1.2 – Avantages et Inconvénients de la gestion par répartition

Bichot (2010) met en garde contre les dangers de la répartition, en l'assimilant à une chaîne de Ponzi¹¹. En effet, avant la guerre, l'assurance vieillesse fonctionnait par capitalisation. A cette époque, la multiplicité des caisses ne posait aucun problème, mais suite aux besoins de financement de la guerre, ces caisses se sont retrouvées en faillite. La solution trouvée a été de faire basculer les régimes de capitalisation en des régimes gérés en

10. Pour ce qui est de la retraite, un mauvais risque est une personne avec une espérance de vie supérieure à la moyenne.

11. Une chaîne de Ponzi est un système frauduleux qui rémunère les clients par le biais des fonds récupérés lors de l'entrée de nouveaux clients dans la chaîne.

répartition. Le soucis est que le passage de la capitalisation à la répartition a été fait sans que la relation entre cotisations et droits à pension soit remise en question. En pratique, les cotisations ne sont plus investies pour préparer l'avenir et pour permettre de payer des décennies plus tard les pensions promises aux actifs actuels, mais sont dépensées au fur et à mesure pour payer les pensions des personnes actuellement à la retraite. Un décalage est créé, et le système ne marche que tant qu'il y a assez de cotisations qui renflouent les caisses, ou alors si les bénéficiaires meurent assez vite, et il ne s'est passé ni l'un, ni l'autre. Des mécanismes de compensation démographique ont dû être mis en place, ainsi que des interventions de l'Etat pour sauver les régimes. Vont-ils survivre encore longtemps ? Pour paraphraser Alfred Sauvy, la retraite par répartition est en fait une retraite par capitalisation humaine : il ne reste plus qu'à espérer que le rendement soit bon...

La gestion par capitalisation : Contrairement à un régime en répartition, les cotisations servent à constituer un capital, qui sera ensuite consommé pendant la période de retraite. La capitalisation peut être individuelle, c'est-à-dire propre à chacun, ou alors collective, commune à toute la population couverte. Il existe alors un réel lien entre cotisations et prestations. Les droits sont acquis, et le versement des prestations est la contrepartie des cotisations effectuées pendant la période d'activité. Il y a une différence majeure avec la gestion en répartition, étant donné qu'il ne peut pas y avoir de solidarité intergénérationnelle, avec par exemple la distribution des droits gratuits. De plus, le régime en capitalisation fonctionne quelle que soit la population couverte. Il n'existe aucune garantie sur la suffisance du capital pour le versement des prestations. Comme les réserves sont placées sur les marchés, ils conditionnent l'évolution du régime, puisqu'elles sont soumises à leurs variations. Qui plus est, le régime est soumis au risque de longévité, et un régime collectif permet de mutualiser ce risque et d'instaurer une solidarité intergénérationnelle. En revanche, ce même régime deviendra sensible aux évolutions démographiques. Avec la gestion par capitalisation, il n'y a pas de garantie sur la suffisance du capital. Les avantages et inconvénients de ce mode de gestion se résument ainsi :

Gestion par capitalisation	
Avantages :	Inconvénients :
<ul style="list-style-type: none"> — les droits sont acquis. Ayant les réserves pour faire face aux engagements, le régime peut être résilié ou modifié à tout moment sans conséquence sur les droits passés ; — l'évolution des droits acquis auprès du régime est indépendante de la structure démographique, du nombre de cotisants ou du secteur d'activité ; — les affiliés reçoivent la contrepartie exacte des cotisations ou droits capitalisés sur leur compte. 	<ul style="list-style-type: none"> — ne prévoit pas de mutualisation intergénérationnelle ; — l'évolution du régime est liée à la performance de gestion financière réalisée sur les réserves ; — le niveau des prestations dépend des caractéristiques individuelles de l'affilié (âge de liquidation, situation de famille, âge du conjoint) et de l'environnement économique (taux technique de rente) ; — il ne permet pas de reconnaissance rétroactive des droits, et ne peut verser des prestations conséquentes qu'après plusieurs années de cotisations.

TABLE 1.3 – Avantages et Inconvénients de la gestion par capitalisation

Au lendemain de la seconde guerre mondiale, le choix d'un système de retraite géré en répartition s'impose pour plusieurs raisons. La première est la volonté de servir immédiatement des prestations significatives à ceux qui avaient sauvé la France et se retrouvaient sans ressources. La deuxième raison est la forte inflation et la faillite boursière de l'entre-deux-guerres avec la crise de 1929 ayant conduit à une perte totale de confiance dans les régimes en capitalisation. Enfin, la dernière raison est démographique : d'une part la reconstruction du pays laissait présager une forte augmentation de la natalité (baby boom) et d'autre part l'espérance de vie à 65 ans était faible. L'organisation de la retraite joue la sécurité sur les régimes du premier pilier en imposant la répartition, alors que les deux autres sont gérés par capitalisation ¹².

Quel que soit le mode de gestion du régime, les systèmes de retraite remplissent deux objectifs principaux, et le premier est assurantiel. En effet, le système de retraite permet de lisser la consommation sur la durée de vie, afin d'éviter un effondrement du niveau de vie dès lors que le sujet n'est plus apte à subvenir à ses besoins par son travail. Bien sûr, ce transfert de revenu pourrait être fait par une épargne individuelle sans passer par un système de retraite, mais le fait de le rendre obligatoire protège le sujet contre son imprévoyance. Ce dernier peut être incapable de calculer les ressources nécessaires à ses vieux jours. En somme, le système de retraite peut être assimilé à un mécanisme de prévoyance : les systèmes assurent aux retraités des revenus réguliers aux âges élevés malgré la variation des revenus d'activité.

Deuxièmement, le système de retraite est redistributif et s'inscrit dans la logique originelle

12. Le détail du contenu des piliers est présenté dans la suite, page 31.

d'assistance. Il opère une double redistribution, intragénérationnelle et intergénérationnelle. La redistribution intragénérationnelle trouve sa source dans les différences de longévité au sein de la même génération, en transférant les revenus des individus qui meurent jeunes vers ceux qui meurent âgés. La redistribution intergénérationnelle est propre à la gestion en répartition, et elle permet de redistribuer des richesses à des générations dans le besoin, en prélevant sur les générations mieux dotées économiquement.

Une question reste en suspens : **la retraite par répartition est-elle plus équitable que la retraite par capitalisation ?** Bien que la notion d'équité sera définie dans la suite, l'analyse des différences de traitement entre les générations peut déjà être faite. Premièrement, la répartition induit une inéquité intergénérationnelle à sa création via le dispositif de droits gratuits. La première génération bénéficiant des prestations peut ne pas avoir cotisé, ou du moins très peu. Il est compliqué de comparer l'équité des deux régimes puisque le mécanisme de fabrication des prestations n'est pas le même, et donc les risques sous-jacents aux deux modes ne sont pas les mêmes. La répartition est dépendante de la croissance de la population et de la production du travail, alors que la capitalisation est soumise au rendement du capital. Dès lors, si le rapport démographique se dégrade, la répartition induit une inéquité intergénérationnelle étant donné que les générations moins nombreuses sont pénalisées, alors que la capitalisation est plus ou moins immunisée contre le risque démographique. Parallèlement, si les rendements du capital sont volatils, alors la capitalisation induit une inéquité intergénérationnelle. Néanmoins, la capitalisation conserve l'équité intergénérationnelle instantanée, dans la mesure où le risque financier est partagé de la même façon entre les retraités et les actifs.

Si la problématique de l'équité intergénérationnelle est primordiale dans le travail effectué, il ne faut pas mettre au rebut celle de l'équité intragénérationnelle. Il est rappelé que l'équité intragénérationnelle prend deux dimensions au sein d'une même génération : une redistribution horizontale définie par l'équité des traitements d'individus à revenus identiques, et une redistribution verticale définie par l'équité entre des individus percevant des revenus différents. De fait, il est clair que le système par capitalisation ne contient pas de redistribution verticale : la capitalisation étant individuelle, les écarts de revenus persistent à la retraite. Qui plus est, les individus les plus aisés sont plus à même de diversifier leurs placements, et de bénéficier d'un couple rendement-risque favorable. En ce qui concerne la répartition, ce mode de gestion permet de protéger dans une certaine mesure l'équité intragénérationnelle via le plafonnement des cotisations et des prestations dans le régime général. Dans les régimes complémentaires, cette redistribution verticale est moins évidente puisque les plafonds qui encadrent les cotisations sont plus élevés. De plus, la répartition offre une prestation viagère, et étant donné les différences d'espérance de vie, son caractère redistributif est amoindri. La question de l'espérance de vie est extrêmement intéressante, et occupera une place importante dans la suite du travail.

1.2.2 Les évolutions

La genèse du système de retraite est très complexe. En revanche, une fois que les principes fondateurs ont été identifiés, inspecter leur évolution est tout à fait envisageable.

Cette partie fait un état des lieux des domaines en lien avec le sujet : l'évolution de la population et les principales réformes de la retraite. Le but est toujours le même : comprendre les enjeux de la retraite d'aujourd'hui afin d'identifier les facteurs responsables d'une éventuelle dérive.

Le premier sujet est celui relatif à la démographie¹³. Comme il a été décrit plus haut, bon nombre de régimes sont soumis au risque démographique, aussi, voici un état des lieux de la démographie en France. Tout d'abord, l'espérance de vie à 60 ans a augmenté de 16,2 % pour les femmes et de 9,2 % pour les hommes de 1996 à 2015. Il faut avoir en tête qu'en 1945, l'espérance de vie à 60 ans était d'environ 14 ans pour un homme et de 18 ans pour une femme (l'âge de la retraite était de 65 ans). Voici l'évolution de l'espérance de vie à 60 ans pour les hommes et les femmes :

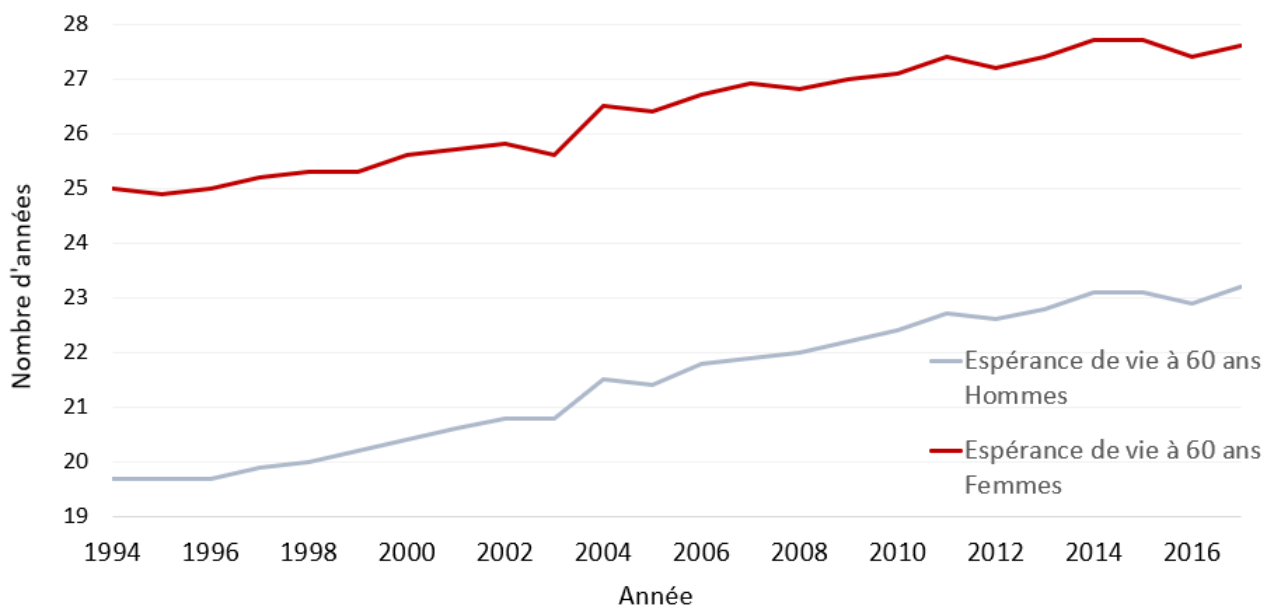


Figure. 1.1 – Évolution de l'espérance de vie à 60 ans pour les hommes et les femmes

Factuellement l'espérance de vie augmente pour les hommes et les femmes. Ce n'est pas une surprise que de constater que la mortalité s'améliore aussi :

13. Les Figures 1.1 et 1.2 sont issus des données de l'INSEE.

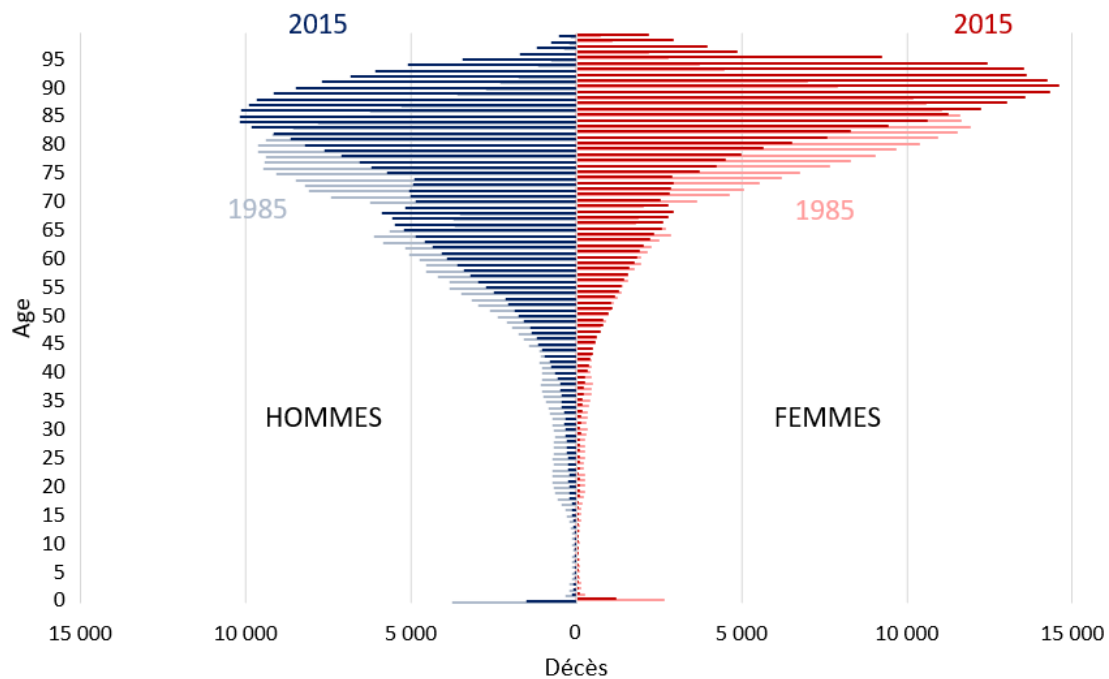


Figure. 1.2 – Évolution de la mortalité pour les hommes et les femmes entre 1985 et 2015

Une translation est observable vers les âges élevés, et la mortalité infantile a fortement diminué sur les 30 ans couverts par les données. Apparaissent ici les prémices du problème : la population meurt moins, et les grands âges sont atteints plus "facilement". Les régimes ont-ils été dimensionnés pour gérer ce type de problème ? Dans tous les cas, les dirigeants en avaient pleinement conscience puisque dès 1998, Monsieur Lionel Jospin, alors Premier Ministre, écrit dans le rapport Charpin¹⁴ que "le vieillissement de la population constitue l'une des principales mutations auxquelles la société française sera confrontée au cours des prochaines décennies". Qui plus est, il annonce que "2005 marquera le début du départ en retraite des générations nombreuses nées dans l'immédiat après-guerre". Cette mutation radicale est confirmée à l'examen des pyramides des âges à deux dates différentes¹⁵ :

14. Charpin et al (1999).

15. Les graphiques sont issus de Pison (2014).

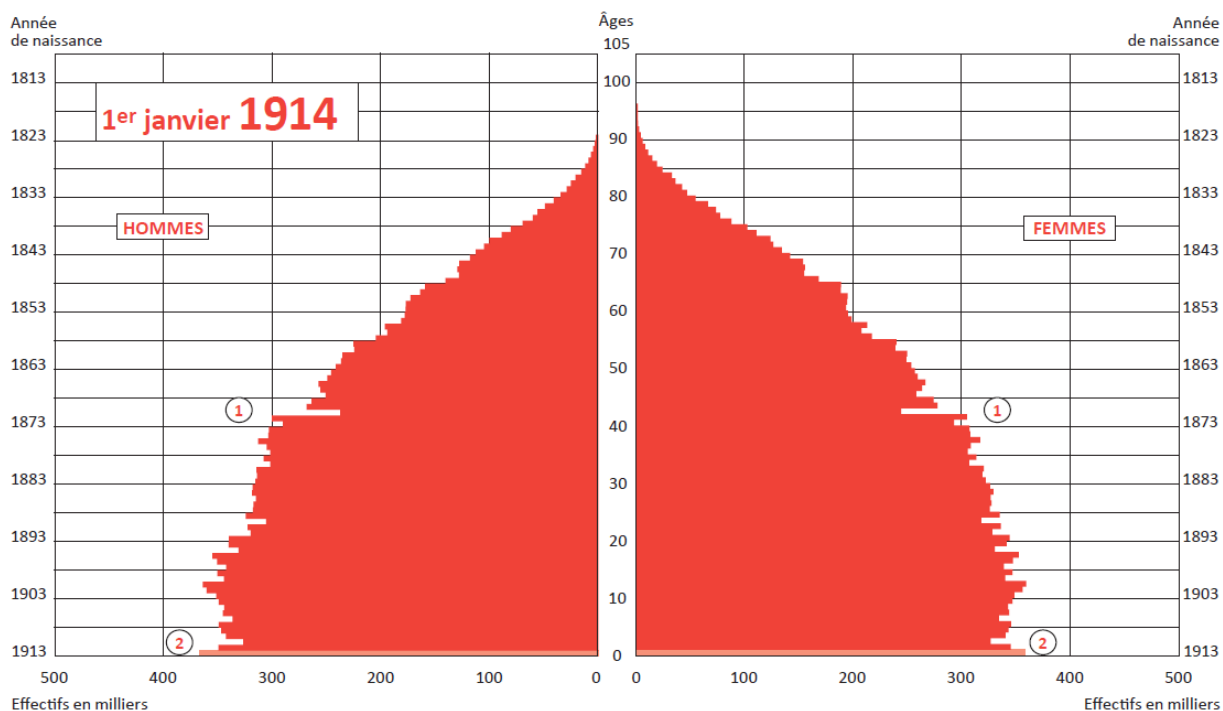


Figure. 1.3 – Pyramide des âges en 1914

La pyramide porte bien son nom en 1914 (Figure 1.3). En revanche, pour 2014 (Figure 1.4), le terme est moins adapté. La forme est plutôt cylindrique. C'est pour cette raison que les problématiques de démographie sont si importantes. Comme il en a été fait mention plus haut, la répartition utilise les apports des cotisants pour payer les pensions des bénéficiaires. Si le rapport démographique tend vers 1, la situation du régime est critique, surtout si ses réserves sont faibles. C'est maintenant que la gestion du régime en répartition prend son importance, et les leviers à actionner ne sont pas si nombreux que cela (ils seront discutés dans la suite du rapport). Très succinctement, ils consistent à augmenter la cotisation, baisser les pensions, ou allonger la période de cotisation. Les deux premières posent un problème majeur : le non respect de l'équité intergénérationnelle. Une - ou plusieurs - générations vont être obligées de payer plus cher pour garantir des droits à des générations anciennes, alors même que leurs droits sont en péril. A l'inverse, baisser les prestations signifie que des générations auront moins de droits que les générations précédentes, tout en payant peu ou prou le même montant. In fine, l'augmentation de la durée de cotisation mène elle aussi à une disparité entre les générations : pour bénéficier des mêmes droits, certaines doivent cotiser plus longtemps ; ce n'est qu'une augmentation masquée de la cotisation.

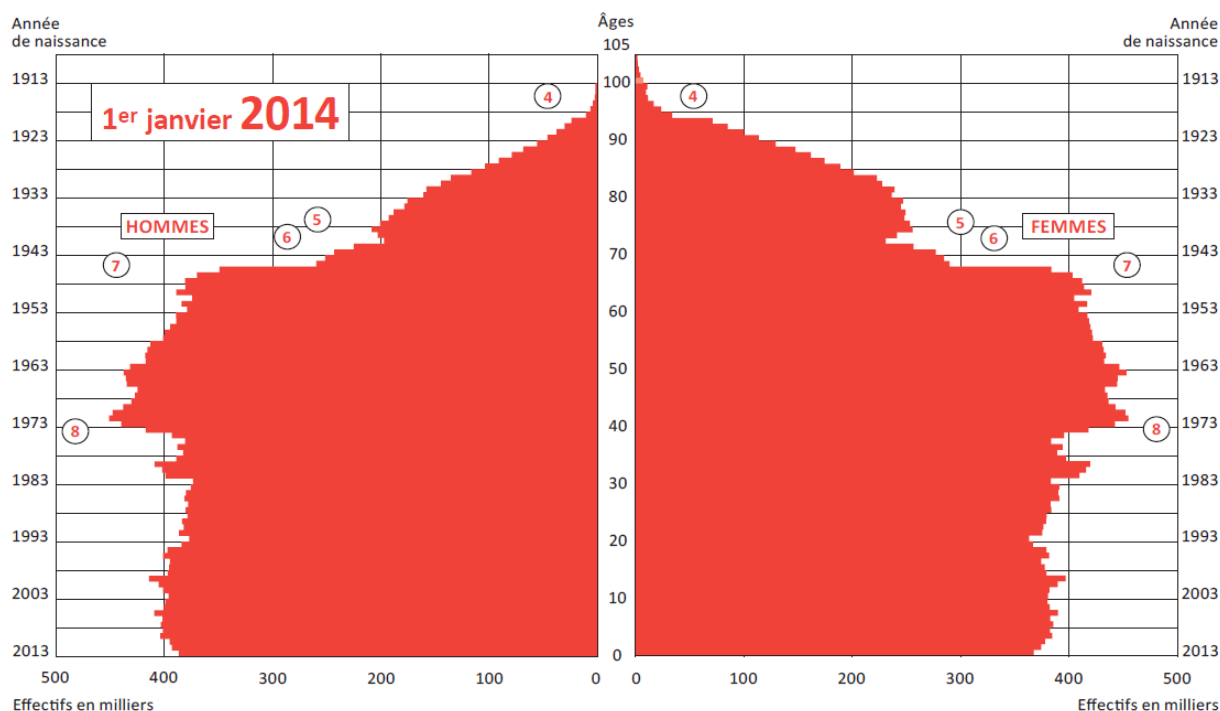


Figure. 1.4 – Pyramide des âges en 2014

Numéros sur les graphiques :

- 1 : Déficit de naissances dû à la guerre de 1870 ;
- 2 : Canicule de l'été 1911 ayant entraîné une forte mortalité des nouveau-nés ;
- 4 : Déficit de naissances dû à la guerre de 1914-1918 (classes creuses) ;
- 5 : Passage des classes creuses à l'âge de fécondité ;
- 6 : Déficit de naissances dû à la guerre de 1939-1945 ;
- 7 : Début du baby-boom ;
- 8 : Fin du baby-boom.

Finalement, quel est l'impact d'une telle mutation ? Il faut comprendre que tous les domaines sont touchés par cette évolution. En effet, le vieillissement de la population a favorisé l'accroissement du nombre de foyers, et couplé à la faible mobilité des seniors, a déséquilibré le marché de l'immobilier. Parallèlement, le vieillissement mène tout naturellement à l'augmentation des dépenses et des besoins en santé, via les besoins paramédicaux et en dépendance. Enfin, les habitudes de consommations sont modifiées et la transmission du patrimoine est plus tardive. En ce qui concerne la retraite, le constat est relativement simple : les retraités vivent de plus en plus vieux, et la pension est de facto versée de plus en plus longtemps. A l'échelle d'un régime, ce vieillissement a des conséquences importantes. Voici une comparaison du temps passé à la retraite pour la population masculine¹⁶ :

16. Source : INSEE pour les générations 1910 à 1970, prolongé avec les tables prospectives 2007-2060 de l'INSEE.

Génération	Cas d'un départ à 60 ans			Cas d'un départ à 65 ans		
	Probabilité de survie de 40 à 60 ans en %	Espérance de vie à 60 ans	Durée espérée de retraite pour les individus ayant atteint 40 ans	Probabilité de survie de 40 à 65 ans en %	Espérance de vie à 65 ans	Durée espérée de retraite pour les individus ayant atteint 40 ans
1910	81,9	17,6	14,4	72,7	14,5	10,5
1920	83,2	19,1	15,9	75,0	15,9	11,9
1930	84,2	20,5	17,3	77,1	17,1	13,2
1940	87,2	21,8	19,0	80,9	18,3	14,8
1950	88,9	23,0	20,4	83,4	19,3	16,1
1960	90,6	24,0	21,7	85,7	20,3	17,4
1970	92,0	25,0	23,0	87,7	21,1	18,5
1980	94,0	25,9	24,3	91,5	22,2	20,3
1990	94,9	27,0	25,6	92,9	23,2	21,6

TABLE 1.4 – Effets de l'augmentation de l'espérance de vie sur la retraite : exemple de la population masculine

En 80 ans, la durée de retraite espérée est augmentée de 11 ans pour un départ à 60 ou 65 ans. Autre indicateur alarmant, le Régime Général n'a pas fini sa montée en charge comme en témoigne le graphique ci dessous¹⁷ :

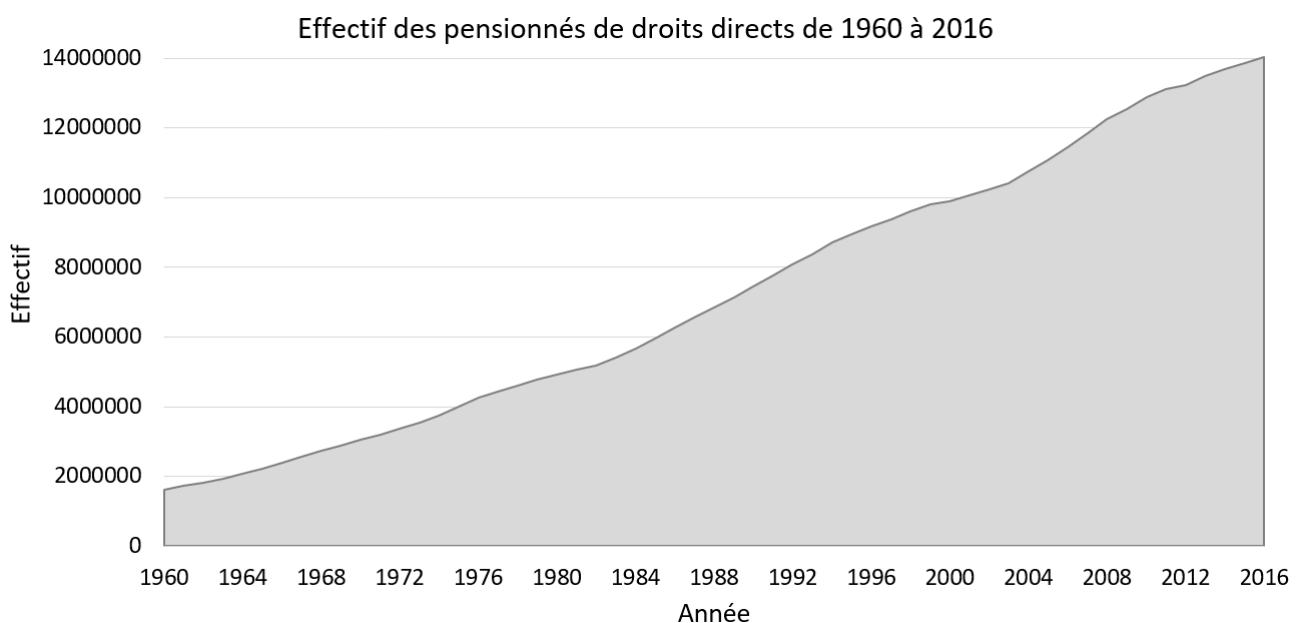


Figure. 1.5 – Évolution de l'effectif des pensionnés de droits directs du Régime Général de la Sécurité Sociale

En 2016, le Régime Général de la Sécurité Sociale (RGSS) enregistrait encore une augmentation de 1,23 % pour atteindre 14 023 754 retraités. Cela signifie que le nombre de

17. Source : <https://data.cnnav.fr>.

retraités ne cesse d'augmenter, et que le régime n'est pas mature.

Alors une fois que les évolutions démographiques et leurs conséquences sont comprises, il est légitime de se demander quelle a été la réaction des pouvoirs publics pour contrecarrer le problème. La réponse se trouve dans une succession de réformes, qui sont analysées ici. Il faut noter que jusqu'en 1982, les réformes ont toutes pour objectif l'amélioration des garanties apportées par le système : extension à tous les salariés en 1945, mode de calcul des pensions plus généreux en 1971, instauration d'une retraite complémentaire obligatoire en 1972, et retraite à 60 ans au lieu de 65 en 1982. A partir de 1982, une nouvelle vague de pensées se propage en Europe à propos de la pérennité financière des régimes de retraite face au vieillissement de la population. C'est alors qu'en 1991, le Premier Ministre Michel Rocard pose les jalons d'une vision nouvelle à travers le Livre Blanc¹⁸ : les réformes devront prendre acte des évolutions démographiques, dans le but de sauver le système, tout en conservant les grands principes du système français.

La réforme Balladur de 1993 : La première réforme notable est celle de 1993. Elle instaure l'allongement progressif de la durée de cotisation de 37,5 à 40 annuités pour une retraite à taux plein. De plus, le salaire annuel moyen pour le calcul de la retraite de base est calculé progressivement sur les 25 meilleures années, contre 10 auparavant. Enfin, les pensions ne sont plus revalorisées sur l'évolution des salaires, mais il est entériné dans le code qu'elles sont indexées sur l'évolution des prix¹⁹. Les changements se font progressivement pour une raison très simple : lisser les impacts, en vue de ne pas pénaliser une génération. Par exemple, l'allongement de la durée de cotisation est étalée de 1993 à 2003, ce qui fait que le changement pour une génération est atténué. Il faut avoir en tête que ce sont des mesures sur le long terme, et qu'un échancier de 10 ans est finalement assez peu à l'échelle de la vie du régime. Le but de la réforme est très clair : réduire le temps passé à la retraite, augmenter la contribution totale, et diminuer les pensions, puisque les salaires constituant le Salaire Annuel Moyen (SAM)²⁰ sont revalorisés sur les prix²¹.

La création du Fonds de réserve des retraites : En 1999, le gouvernement de Lionel Jospin crée le Fonds de réserve des retraites, dont la vocation est de permettre de faire face au choc démographique lié à l'arrivée à l'âge de la retraite des baby-boomers. Aujourd'hui, le fonds dispose de 36,3 milliards d'euros, qui sont à comparer à l'objectif prévu en 2020 : 150 milliards... Il n'est d'ailleurs plus utilisé pour la retraite !

La réforme Fillon de 2003 : La réforme Fillon s'inscrit dans le sillon de la réforme Balladur : la durée de cotisation des fonctionnaires est alignée progressivement sur celle du privé, en passant de 37,5 à 40 annuités. A partir de la génération 1949, la durée d'assurance est allongée pour atteindre 41 annuités pour la génération 1952, au lieu de

18. Rocard (1991).

19. En réalité, cela était déjà le cas depuis 1987.

20. Le salaire annuel moyen est à la base du calcul de la pension au RGSS, détaillé en Annexe B, page 120.

21. Entre 1999 et 2009, les salaires ont augmenté en moyenne de 29,6 %, les prix de 17,4 %, d'où une perte de pouvoir d'achat relative de plus de 10 % sur la période.

40. Mais parallèlement à cela, des dispositions sont prises pour que les actifs de plus de 60 ans qui continuent à travailler en ayant atteint leur durée d'assurance suffisante bénéficient d'une surcote. Les salariés en carrière longue obtiennent le droit de partir avant 60 ans s'ils ont commencé à travailler entre 14 et 16 ans, et qu'ils remplissent certaines conditions²². Enfin, la réforme Fillon crée des dispositifs d'épargne retraite : le Plan d'Épargne Retraite Populaire (PERP) et le Plan d'Épargne pour la Retraite Collectif (PERCO)²³. Le Conseil d'Orientation des Retraites (COR) présente dans son troisième rapport de mars 2006 les effets de la réforme de 2003 :

	Besoin de financement % PIB		
	2003	2020	2050
Sans réforme	0,0	-1,7	-4,3
Après réforme	0,0	-0,8	-3,1
Impact de la réforme	0,0	+0,9	+1,2

TABLE 1.5 – Effets de la réforme de 2003

La réforme permet de redresser l'état du système.

La réforme des régimes spéciaux de 2008 : Les régimes spéciaux voient leur durée d'assurance relevée progressivement de 37,5 à 40 annuités, harmonisée avec celle des fonctionnaires, et évolue comme dans le régime de la fonction publique. Tout comme dans le Régime Général, un système de décote est progressivement mis en place, calculé soit en fonction du nombre de trimestres manquants par rapport à la durée d'assurance exigée, soit par rapport à un âge pivot. Enfin, à partir de 2009, la revalorisation des pensions est indexée sur les prix.

La réforme Woerth de 2010 : La réforme prévoit un allongement progressif de la durée d'assurance et un recul de l'âge minimum du départ en retraite à 62 ans. En cas de durée d'assurance insuffisante, l'âge de départ en retraite pour bénéficier d'un taux plein est repoussé progressivement de 65 à 67 ans.

La réforme Hollande de 2014 : La réforme prévoit un nouvel allongement progressif de la durée d'assurance. Ce dispositif intervient à raison d'un trimestre tous les 3 ans à partir de la génération 1958 et fixé à 43 annuités pour les générations à partir de 1973. Parallèlement, le montant nécessaire pour valider un trimestre est abaissé à 150 fois le SMIC horaire, contre 200 heures auparavant.

Un résumé des évolutions des âges de la retraite est disponible en Annexe D sur le récapitulatif des effets des réformes sur le Régime Général page 123. Néanmoins, voici la situation actuelle :

22. Les conditions portent sur la durée de cotisation.

23. Ces deux plans sont détaillés en Annexe C, pages 121 et 122.

Année de naissance	Age minimum de liquidation	Age de liquidation sans condition	Espérance de vie à la naissance
1950	60 ans	65 ans	69,2 ans
1973	62 ans	67 ans	76,3 ans

TABLE 1.6 – Évolution de l'âge de la retraite et espérance de vie des femmes

Face à ces valeurs, le constat est simple : le temps passé à la retraite augmente, ou plutôt, les réformes des régimes ne suivent pas le rythme de l'évolution de l'espérance de vie. Mais dire que puisque l'espérance de vie a augmenté de 7 ans sur la période, alors il faut que la période de cotisation augmente de 7 ans est une vision extrêmement naïve du problème. Le système, cela a été vu plus haut, n'a pas été dimensionné en fonction du nombre d'années restant à vivre, mais plutôt sur la durée et les conditions de travail. Certes, il y a des axes de réflexion à exploiter sur cette approche naïve, et c'est ce qui sera fait dans la suite, mais il ne faut pas oublier que le système s'inscrit dans un contexte, et que si l'étude est quelque peu isolée, des considérations plus larges doivent être prises en compte : l'évolution des salaires, les aides sociales, le prix des soins etc... A ce titre, le mémoire de Garaix & Le Quellec (1999) présente une démarche plus complète, en élargissant le périmètre de l'étude. Malgré tout, le travail proposé ici débouche sur la mise en place d'un critère de pilotage, très simple à mettre en oeuvre faisant intervenir l'espérance de vie. Maintenant que les origines et les évolutions majeures du système sont identifiées, il ne reste plus qu'à examiner son état actuel.

1.3 Et son fonctionnement actuel

Le fonctionnement de la retraite aujourd'hui ne peut se résumer en une phrase étant donné la variété des régimes existants. Dès lors, cette dernière section du chapitre s'applique à détailler le plus possible l'organisation actuelle de la retraite en France, et de présenter les principales classes de régimes. Cette partie est importante car à chaque régime correspond des avantages et ceux-ci participent à la notion d'équité intergénérationnelle, mais le chapitre suivant est réservé à ces discussions.

1.3.1 Une organisation en trois piliers

Il est intéressant de remonter à la création des piliers, et il apparaît que la métaphore des piliers trouve ses origines en Suisse²⁴. Elle est inscrite dans la Constitution de la Confédération Helvétique dans les années 1970²⁵. Le premier pilier suisse est un régime d'assurance sociale minimale géré en répartition, le deuxième pilier compte les régimes complémentaires, rendus obligatoires en 1985, et le troisième pilier est constitué par l'épargne individuelle, c'est le seul qui est facultatif. Déjà à cette époque, la métaphore est utilisée de façon normative, et non pas pour décrire le système de retraite suisse. En 1994, la Banque Mondiale reprend le modèle suisse dans un rapport, mais sans suivre

24. Ap Roberts (2007).

25. C'est là encore, suite à une volonté de la gauche d'augmenter les pensions du régime de base, cf Leimgruber (2005).

exactement le même schéma. Alors que le premier pilier suisse relève de l'assurance sociale, la Banque Mondiale prône plutôt un pilier financé par l'Etat qui doit redistribuer un revenu minimal aux retraités. La Banque Mondiale considère que le deuxième pilier doit être financé par capitalisation et constitué par des régimes professionnels ou des comptes individuels d'épargne retraite obligatoire. En somme, la Banque enraine sa vision libérale en favorisant l'épargne individuelle en la rendant obligatoire, au détriment des régimes professionnels qu'elle juge pénalisants pour les travailleurs mobiles. Le troisième pilier est en revanche commun aux deux visions.

Plus récemment, la Banque Mondiale redéfinit son schéma, en utilisant le terme "système multipiliers". Elle continue à défendre l'importance de faire coexister plusieurs piliers, elle ajoute deux sources de revenus pour les retraités, et donc deux nouveaux piliers, portant son modèle au nombre de cinq piliers. Ces deux piliers supplémentaires permettent de couvrir un éventail de revenus plus large. Aussi, le quatrième pilier est constitué de l'aide non monétaire, qui comprend le soutien familial, l'accès aux soins médicaux et au logement. Le cinquième pilier est en fait le fruit de la scission en deux parties du premier pilier. Celui-ci est séparé en un "premier pilier" contributif dont les prestations sont plus ou moins liées au salaire, et un "pilier zéro" qui reprend les caractéristiques du premier pilier originel : financement de l'Etat et constitué soit par l'assistance publique, soit par un régime minimal universel.

Enfin, la dernière vision qui sera détaillée ici est celle de la Commission Européenne, et elle est encore différente des deux précédentes. Elle fait d'abord référence à trois piliers, qui sont organisés comme suit en 1997. Le premier pilier est un régime de base public, le second compte les régimes professionnels gérés par capitalisation qui versent des pensions et le troisième comprend l'épargne individuelle facultative avec sortie en rente. Néanmoins, étant donné le déséquilibre flagrant entre les trois piliers, elle revoit sa vision et propose une nouvelle définition en 2003 : le deuxième pilier regroupe toute forme de capitalisation pour la retraite mise en place dans un cadre professionnel, y compris les plans d'épargne salariale avec sortie en capital. En 2003, le Comité de la protection sociale critique la représentation du système de retraite, en soulignant que les systèmes de retraite sont caractérisés par des architectures propres, qui ne répondent pas forcément à un schéma unique.

Afin de saisir la complexité de l'organisation de la retraite, l'Annexe E sur **la retraite dans le monde** présente succinctement les principes qui prédominent dans différents pays. Le but de cette manœuvre est de comprendre la réalité de l'ancrage des idéologies dans les pays, et donc d'avoir conscience de la difficulté de réformer de tels mastodontes. Qu'en est-il de l'organisation du système français ? D'abord, il ne faut pas nier que le système français est une mosaïque complexe, fruit d'une longue accumulation de dispositifs hétérogènes. Ces trois piliers diffèrent sur plusieurs points : leur mode de gestion, l'obligation d'adhésion ou non et leur caractère individuel ou collectif²⁶. Voici comment ils sont organisés :

26. Cornilleau & Sterdyniak (2003) proposent une vision en cinq piliers très précise.



Figure. 1.6 – Les piliers du système de retraite en France

1.3.2 Qui laisse place à une myriade de systèmes

Chaque pilier comprend un ou plusieurs régimes qui sont présentés dans la suite. Tout d'abord, deux grands types de régimes peuvent être distingués, quel que soit le mode de gestion. En effet, il y a soit les régimes à cotisations définies, soit les régimes à prestations définies. Le premier est un régime où l'engagement porte sur le montant de la cotisation, et non sur le montant de la pension. Il peut être géré en euros (capitalisation), en points (capitalisation ou répartition) ou en comptes notionnels (répartition). Au sein de la classe des régimes à prestations définies, il faut différencier deux types de régimes :

- les régimes à prestations définies différentielles (ou régime "chapeau") où l'engagement du régime est exprimé sous déduction des pensions d'au moins un autre régime,
- les régimes à prestations définies additives où l'engagement du régime est indépendant de celui de tout autre régime.

Dans ces deux cas, l'engagement porte sur le montant de la pension.

Pour terminer ce premier chapitre, il est proposé de passer en revue les principaux régimes existants, afin d'en saisir les spécificités et les caractéristiques. En effet, si la suite du travail ne porte que sur un régime en particulier, la problématique de l'équité intergénérationnelle ne se cantonne pas qu'au régime complémentaire de professions libérales. Les régimes sont examinés dans l'ordre des piliers, et l'examen commence par celui des régimes légalement obligatoires.

En France, il est possible de distinguer quatre catégories de travailleurs en termes de retraite : les salariés du privé, les non salariés, les fonctionnaires et les salariés relevant

d'un régime spécial. Ces régimes du premier pilier sont gérés en répartition, pour les raisons citées ci-dessus. Les régimes légalement obligatoires des salariés du privé peuvent être scindés en deux types : le Régime Général de base et les régimes complémentaires de l'ARRCO (Association du Régime de Retraite Complémentaire Obligatoire) et l'AGIRC (Association Générale des Institutions de Retraite des Cadres).

- **Le Régime Général de base** : en 1945 est créée la Sécurité Sociale. Il en découle la création du régime général de retraite, avec l'Assurance Retraite gérée par la Caisse Nationale d'Assurance Vieillesse (CNAV). Les droits acquis dans le Régime Général s'expriment en trimestres. Pour qu'un trimestre soit validé, il faut que l'individu ait cotisé au minimum sur la base d'un salaire équivalent à 150h de SMIC dans l'année.
Le régime de base est le plus important tant au niveau de l'effectif, que des ressources et des charges. A titre indicatif, 82 % des retraités touchant un régime de base perçoivent une pension de droit direct de la CNAV.
- **Les régimes complémentaires** : les régimes complémentaires sont des régimes obligatoires au même titre que le Régime Général et viennent s'ajouter à ce dernier. Pour les salariés du privé, ils se composent de l'ARRCO et de l'AGIRC. Ce sont deux régimes gérés en répartition, fonctionnant en points. Les cotisations sont calculées à partir d'un taux appliqué à l'assiette des cotisations. Ces cotisations permettent d'acquérir des points, représentatifs des droits acquis. Le nombre de points acquis par an est calculé en divisant les cotisations annuelles par la Valeur d'Achat du point (ou du Salaire de Référence). A l'âge de la retraite, les points acquis sont transformés en unités de rente en multipliant le nombre de points par la Valeur de Service. Ces notions seront détaillées dans la partie dédiée au calcul de la pension pour le régime complémentaire étudié dans la suite. Chaque année, le Conseil d'Administration fixe le Salaire de Référence et la Valeur de Service du point.

En ce qui concerne le deuxième pilier, il rassemble les régimes supplémentaires d'entreprise. Ils sont gérés en capitalisation, et restent peu développés en France en raison de l'importance du pilier 1. Ces régimes ne sont pas obligatoires, mais ils peuvent le devenir au sein de l'entreprise. Il convient de distinguer les régimes supplémentaires en fonction de l'engagement pris envers les assurés. En effet, cet engagement peut être une obligation de ressource, ou de résultat.

- **Les régimes à cotisations définies** : si l'engagement porte sur les ressources, le régime sera à cotisations définies. Ces régimes sont également appelés "Article 83", puisqu'ils sont régis fiscalement par cet article du Code Général des Impôts (CGI). L'obligation pour l'employeur est une obligation de constitution et de moyen, c'est-à-dire qu'il se décharge de toute responsabilité envers le régime une fois la cotisation versée. Il faut noter que la gestion de ces régimes doit être externalisée. De plus, l'adhésion est obligatoire et doit porter sur une catégorie objective de salariés pour que les cotisations soient exonérées de charges sociales et d'impôts. Plus générale-

ment, dans un régime à cotisations définies, les droits sont définitivement acquis et ne peuvent pas dépendre d'une condition de présence dans l'entreprise au moment de la retraite. La sortie dans ces régimes se fait uniquement en rente²⁷, et le montant de la prestation dépendra uniquement de l'effort de financement réalisé pendant la période de cotisation.

- **Les régimes à prestations définies** : si un régime est soumis à une obligation de résultat, alors c'est un régime à prestations définies. Le règlement intègre des montants prédéterminés à verser au moment de la retraite. Ces montants peuvent être versés sous forme de rentes, ou de capital. En référence à l'article du CGI qui les encadre, ces régimes sont usuellement connus sous le nom d'"Article 39". La distinction entre les prestations définies additives et différentielles se retrouve dans la classification des Articles 39. Enfin, ces régimes présentent une dernière caractéristique, qui repose sur les droits : ils peuvent être acquis ou aléatoires. Le cas des droits aléatoires signifie que la prestation est assujettie à une condition de présence dans l'entreprise au moment du versement de la prestation. C'est pour cette raison que ces régimes sont totalement financés par l'employeur.

Enfin, pour ce qui est du troisième pilier, il regroupe l'épargne individuelle, qui correspond à la retraite individuelle. Elle peut être gérée individuellement ou collectivement. La loi Fillon de 2003 a donné naissance au PERP (Plan Epargne Retraite Populaire) et au PERCO (Plan d'Epargne pour la Retraite Collective) : ces deux plans ont été créés en tant qu'incitation pour les salariés à se constituer une épargne supplémentaire en vue de la retraite. Pour le PERP, la sortie est effectuée en rente, et si elle est possible en rente ou en capital dans le PERCO, elle se fait majoritairement en capital. Enfin, ces contrats sont à adhésion et versements facultatifs.

En France, il existe aujourd'hui plus de 36 régimes différents, qui sont présentés en Figure 1.7.²⁸

Pourquoi tant de régimes existent ? Un élément de réponse est la volonté de conserver les privilèges accordés dès l'origine. L'étude reviendra sur cet aspect plus bas, mais déjà le fait de l'existence de cette myriade de régimes, parfois petits et très spécifiques, traduit la volonté de préserver des principes anciens. Alors est-ce au nom de l'équité intergénérationnelle pour les affiliés de ces régimes ? Il faudra impérativement différencier les notions de progrès, d'ajustement, de mobilité et en somme d'évolution des régimes pour ne pas confondre principes utopistes et obsolètes avec les impératifs sociaux d'aujourd'hui. La réflexion menée essaie dans le chapitre suivant de rentrer dans le vif du sujet et d'apporter un éclairage sur cette problématique : la direction prise par les régimes de retraite ira-t-elle à l'encontre de l'équité intergénérationnelle ? Toutefois, si l'équité est perçue comme un rapport d'égalité entre deux parties, alors oui, tout changement, même minime, conduirait à un déséquilibre : l'une ou l'autre des parties aurait plus que l'autre. Finalement, et c'est la raison d'être du deuxième chapitre, qu'est-ce que l'équité intergénérationnelle ?

27. Sauf cinq cas dérogatoires qui permettent la sortie en capital.

28. Source : caisse d'Assurance Retraite de la Sécurité Sociale.

	Retraite de base		Retraite complémentaire
Salariés			
Salariés agricoles	➤ MSA Mutualité Sociale Agricole (www.msa.fr)	+	ARRCO Retraite complémentaire des salariés (www.agirc-arrco.fr) + AGIRC Retraite complémentaire des cadres (www.agirc-arrco.fr)
Salariés de l'industrie, du commerce et des services	➤ L'ASSURANCE RETRAITE Régime général de la sécurité sociale (www.lassuranceretraite.fr)	+	IRCANTEC (www.ircantec.fr)
Agents non titulaires de l'État et des collectivités publiques		+	
Personnel navigant de l'aéronautique civile		+	CRPN (www.crpn.fr)
Salariés relevant d'entreprises ou de professions à statut particulier	➤ BANQUE DE FRANCE (www.bdfretraite.fr), RETRAITE DES MINES (www.retraitedesmines.fr), CNIEG Gaz - Élec. (www.cnieg.fr), CRPCF (Comédie Française), CRPCEN Clercs et employés de notaires (www.crpcen.fr), ENIM Marins (www.enim.eu), CROPERA Caisse de retraites des personnels de l'Opéra national de Paris (www.caisse-de-retraite-opera-de-paris.fr), PORT AUTONOME DE STRASBOURG , CRP RATP (www.crpratp.fr), CPRPSNCF (www.cprpsncf.fr)		
Fonctionnaires			
Fonctionnaires de l'État, magistrats et militaires	➤ SERVICE DES RETRAITES DE L'ÉTAT (www.retraitesdeletat.gouv.fr)	+	RAFP Retraite additionnelle (www.rafp.fr)
Agents de la fonction publique territoriale et hospitalière	➤ CNRACL Caisse nationale de retraites des agents des collectivités locales (www.cnracl.fr)	+	
Ouvriers de l'État	➤ FSPOEIE Fond spécial des pensions des ouvriers des établissements industriels de l'État (www.fspoeie.fr)		
Non salariés			
Exploitants agricoles	➤ MSA Mutualité Sociale Agricole (www.msa.fr) Retraite de base + complémentaire		
Artisans, commerçants et industriels	➤ RSI Régime Social des Indépendants (www.rsi.fr) Retraite de base + complémentaire		
Professions libérales	➤ CNAVPL Caisse Nationale d'Assurance Vieillesse des Professions Libérales (www.cnavpl.fr) Retraite de base + complémentaire + supplémentaire selon les sections professionnelles , CRN Notaires (www.crn.fr), CAVOM Officiers ministériels (www.cavom.org), CARMF Médecins (www.carmf.fr), CARCDSF Dentistes et sages-femmes (www.carcdsf.fr), CAVP Pharmaciens (www.cavp.fr), CARPIMKO Auxiliaires médicaux (www.carpimko.com), CARPV Vétérinaires (www.carpv.fr), CAVAMAC Agents d'assurance (www.cavamac.fr), CAVEC Experts-comptables (www.cavec.org), CIPAV Professions libérales diverses (www.cipav-retraite.fr)		
	CNBF Avocats Caisse Nationale des Barreaux Français (www.cnbef.fr)		
Artistes, auteurs d'œuvres originales	➤ L'ASSURANCE RETRAITE Régime général de la sécurité sociale (www.lassuranceretraite.fr)	+	IRCEC Retraite complémentaire (www.ircec.fr)
Patrons pêcheurs embarqués	➤ ENIM (www.enim.eu)		
Membres des cultes	➤ CAVIMAC Caisse d'Assurance Vieillesse, Invalidité et Maladie des Cultes (www.cavimac.fr)	+	ARRCO (www.agirc-arrco.fr)

Figure. 1.7 – Les régimes de retraite en France

Chapitre 2

Le pilotage, ou la rencontre des points de vue

Comme s'est appliqué à le montrer le premier chapitre, le système de retraite français est obligatoire, et né d'une volonté de protéger. Comment vérifier si ces principes fondateurs sont toujours d'actualité? La réponse réside dans le calcul de différents indicateurs, dits de pilotage. Le Conseil d'Orientation des Retraites définit le pilotage d'un régime de retraite comme "l'ajustement au fil du temps des différents paramètres en vue d'atteindre les objectifs visés tel celui de la pérennité financière". Il existe un panel d'indicateurs variés, qui permettent de rendre compte d'un ou plusieurs aspects, démographique ou financier, d'un régime de retraite. Néanmoins, il apparaît assez vite que la contrainte de l'échelle individuelle nécessite de proposer un critère supplémentaire, qui a le mérite de faire état de la devise à date de calcul.

2.1 Les indicateurs utiles d'un régime

Pour commencer, les principaux indicateurs sont passés en revue. Une fois définis, certains s'avèreront plus pertinents que d'autres concernant la problématique du travail. Puis, la question de l'équité intergénérationnelle sera traitée. En effet, dans le chapitre précédant elle est souvent intervenue sans jamais avoir été cadrée, et il faudra s'y atteler. Enfin, à la suite de la réflexion sur l'équité, un critère sera proposé, et sa construction sera finement analysée.

2.1.1 Les indicateurs de solvabilité les plus courants

Il existe classiquement huit indicateurs de solvabilité d'un régime. Ils sont présentés un à un et pour chacun, une analyse de leur significativité est apportée.

Le rapport de charge : Le rapport de charge d'une année est le rapport du montant total des cotisations perçues (et le cas échéant des autres ressources que les cotisations) par le montant des prestations versées. Cet "indicateur" instantané permet simplement de mesurer si le régime a besoin de ses réserves pour couvrir ses prestations, ou si ses ressources extérieures suffisent à les couvrir.

$$RC_n = \frac{\text{Cotisations et autres ressources extérieures de l'année } n}{\text{Prestations payées l'année } n}$$

Le rendement instantané : Le rendement instantané, qui a davantage de sens pour un régime en points que pour un régime en annuités, est défini comme étant le montant de retraite acquis au cours d'une année en contrepartie d'une cotisation de un euro payée cette même année.

$$\text{Rendement instantané} = \frac{\text{Valeur de Service du point}}{\text{Valeur d'Achat du point} \times \text{taux d'appel des cotisations}}$$

Le rendement instantané n'a aucun sens en lui-même. En effet, et notamment pour comparer le rendement de différents régimes, il faudrait inclure dans la formule de calcul de l'indicateur les conditions de liquidation et les avantages annexes. Par exemple, le rendement d'un régime ayant un âge de liquidation de 60 ans, une réversion à 60 % et des majorations enfants ne peut pas être le même que celui prévoyant un âge normal de liquidation de 65 ans avec une réversion à 50 % et pas de majoration enfants.

Cet indicateur n'est intéressant que lorsqu'il est comparé au rendement d'équilibre du régime à long terme.

Le rendement d'équilibre à long terme : Le rendement d'équilibre à long terme correspond au rendement constant qui égalise, sur une durée de projection prédéfinie (par exemple 30 ans) les recettes et les dépenses actualisées du régime.

Ce rendement n'a de sens que lorsque le régime est arrivé à maturité, c'est-à-dire lorsque le rapport de charge du régime est relativement stable. Dans un régime à maturité géré en répartition, il doit y avoir égalité entre les ressources et les charges :

$$\text{Effectif}_{cot} \times N_{an} \times SR = \text{Effectif}_{ret} \times N_{carrière} \times VS$$

Avec :

- Effectif_{cot} : effectif des cotisants ;
- Effectif_{ret} : effectif des retraités ;
- N_{an} : le nombre de points acquis par un cotisant en une année ;
- $N_{carrière}$: le nombre de points moyens payés aux retraités ;
- SR : le salaire de référence ;
- VS : Valeur de Service du point.

Finalement, le rendement d'équilibre R_{eq} peut s'écrire :

$$R_{eq} = \frac{VS}{SR} = \frac{\text{Effectif}_{cot}}{\text{Effectif}_{ret}} \times \frac{N_{an}}{N_{carrière}}$$

Il est amélioré lorsque le nombre de cotisants augmente et plus ils acquièrent de points dans l'année. À l'inverse, il est dégradé si le nombre de retraités ou le nombre de points payés augmente. Le calcul du rendement d'équilibre revient à diviser les paramètres influençant (positivement) le niveau des ressources par ceux gouvernant le niveau des charges. Le rendement d'équilibre est donc bien un indicateur de la santé immédiate du régime. Une vision prospective du régime reviendrait à penser que plus le nombre de droits acquis

augmente, plus les charges seront élevées au moment de la liquidation de ces droits. La viabilité d'un tel régime au long terme est ainsi conditionnée à une croissance économique synonyme d'augmentation des ressources dans le futur.

Par ailleurs, ce rendement peut ne pas avoir exactement la même valeur si on suppose que, sur la période, l'équilibre sera atteint par une augmentation des ressources ou par une baisse (ou moindre revalorisation) des prestations.

Le niveau instantané des réserves, exprimé en années de prestations :

$$R_n = \frac{\text{Réserves en fin d'année } n}{\text{Prestations payées l'année } n}$$

Ce niveau de réserves peut être observé à plusieurs échéances, par exemple au 31 décembre de l'année de calcul ($n=0$) et au bout de 30 ans (si elles ne s'annulent pas avant).

Le niveau de réserve à la date de calcul n'est pas, utilisé seul, un indicateur pertinent. En effet, il ne reflète pas la maturité du régime : si le régime est en phase de croissance des prestations, l'indicateur baissera rapidement, même si le niveau absolu des réserves augmente. En revanche, si le niveau des réserves est calculé en situation projetée à plusieurs échéances (par exemple tous les dix ans, voire en courbe tous les ans), il est beaucoup plus significatif.

L'année prévisionnelle d'annulation des réserves : L'année prévisionnelle d'annulation des réserves, sans changement de réglementation, permet de mesurer le temps que le régime a pour mettre en place d'éventuelles mesures de redressement de ses équilibres. Plus cette date est éloignée, plus le régime peut se permettre de prendre des mesures "douces" (progressives dans le temps).

Cet indicateur est naturellement étroitement lié au nombre d'années de prestations en réserves à la date d'observation.

Le taux de couverture instantané : Ce taux correspond au rapport entre, d'une part, les cotisations versées au cours d'un exercice et d'autre part, la valeur actuelle de la globalité des prestations futures actualisées qui découleront de ces cotisations.

$$\text{Taux de couverture instantané} = \frac{\text{Cotisations versées au cours de l'année}}{\sum_{i=1}^{\text{fin de projection}} \text{droits acquis par ces cotisations actualisées}_i}$$

Les "droits acquis" correspondent au total des droits attribués avec les cotisations de l'année. Lorsque le régime a d'autres ressources que les cotisations, on peut choisir de les ajouter au dénominateur (pour autant qu'elles soient relativement stables et pérennes dans le temps en pourcentage des cotisations reçues).

Si le taux de couverture instantané est proche de 1, le régime est assuré que les nouveaux droits ne participeront pas à sa dégradation (le régime ne distribue pas "trop" de droits). Ceci n'assure pas pour autant l'équilibre du régime, si les droits passés sont plus importants que les droits futurs (régime en décroissance).

Le taux de couverture des prestations futures par les cotisations, les réserves et leurs produits, en groupe ouvert, à un horizon donné n :

$$\text{Taux de couverture}_{gpe\ ouvert} = \frac{\text{Réserves} + \sum_{i=1}^n \text{cotisations actualisées}_i}{\sum_{i=1}^n \text{prestations actualisées}_i}$$

Si l'horizon pris en compte (n) est inférieur à la date à laquelle les réserves s'annulent, ce taux est supérieur à un. Il est égal à 1 à l'horizon où les réserves s'épuisent. A très long terme, il tangente le rapport de charges structurel.

Le taux de couverture des droits acquis par les réserves, viager, en groupe fermé :

$$\text{Taux de couverture}_{gpe\ fermé} = \frac{\text{Réserves initiales}}{\sum_{i=1}^{\text{fin de projection}} \text{droits acquis par ces cotisations actualisées}_i}$$

Cet indicateur mesure, pour les régimes qui ont des réserves, combien de temps il serait en capacité de régler les droits acquis sans nouvelles cotisations et sans attribution de nouveaux droits.

2.1.2 Les indicateurs de pilotage

Les indicateurs de pilotage sont les indicateurs de solvabilité choisis par les gestionnaires du régime pour déclencher des mesures de redressement.

Comme les gestionnaires n'ont le plus souvent pas beaucoup de marge de manœuvre (en dehors d'une réforme du régime), ces indicateurs ne peuvent conduire qu'à une correction sur les cotisations et les droits acquis contre ces cotisations (ou droits cotisés).

La date d'annulation des réserves est par définition une notion primordiale dans un régime qui a un minimum de réserves.

Le taux de couverture instantané peut être un indicateur de pilotage, permettant de fixer un objectif de rendement du régime. En effet, il mesure l'équité intergénérationnelle, en s'assurant que le régime n'attribue pas plus de points cotisés qu'il ne serait en mesure de payer avec les cotisations qu'il reçoit.

Si cet indicateur est proche de 1, les nouveaux droits ne participent pas à la dégradation du régime, et les cotisants reçoivent globalement des droits qui ont une valeur proche

des cotisations qu'ils versent. En tout état de cause, quelle que soit sa valeur initiale, il faudrait s'assurer qu'elle ne baisse pas dans le temps (ce qui est le cas si les paramètres du régime n'évoluent pas, dans la mesure où l'espérance de vie augmente).

La difficulté de cet indicateur réside dans la fixation des paramètres qui permettent de le calculer, dont notamment les conditions de liquidation des droits attribués contre les cotisations, l'espérance de vie et le taux d'actualisation du flux probable de ces droits.

Si les conditions de liquidation et l'espérance de vie peuvent évoluer dans le temps pour être les plus représentatives de la réalité constatée, le taux d'actualisation devrait quant à lui rester stable dans le temps. Ceci pourrait permettre de mesurer, à paramètres constants, la dérive de cet indicateur due aux conditions de liquidation et à l'évolution de l'espérance de vie.

Le taux de rendement d'équilibre, est le rendement qu'il faudrait appliquer au régime pour l'équilibrer et son évolution dans le temps pourrait également être un indicateur de pilotage. Deux notions de taux de rendement d'équilibre peuvent être retenues :

- le taux de rendement d'équilibre instantané, qui revient à mesurer l'augmentation des cotisations qu'il faudrait réaliser pour assurer l'équilibre technique du régime pour une année donnée – ce taux peut être représenté en courbe, par un calcul sur chacune des années de projection,
- le taux de rendement d'équilibre de long terme, qui est le taux de rendement unique à appliquer au régime de la date de calcul jusqu'à l'horizon d'étude souhaité pour équilibrer le régime à cet horizon.

Attention, le rendement d'équilibre instantané n'a de signification que dans un régime à maturité.

Les indicateurs présentés ci-dessus permettent de maintenir le régime en bonne santé, ou du moins ils aident les gérants à prendre des décisions. Toutefois, et la suite le confirmera, ces indicateurs ne sont surtout pas à prendre un par un. Le principe consiste à calculer une batterie d'indicateurs, à des intervalles relativement rapprochés pour permettre de détecter les dérives du régime.

2.2 De l'équité comme contrainte à l'équité comme objectif

Tout le travail fait précédemment a permis d'identifier des points de réflexion autour du même thème : l'équité intergénérationnelle. Jusqu'ici volontairement ignorée, il convient de se pencher sur sa signification et sur ses problématiques propres pour pouvoir tenter d'en tirer des conclusions afin d'apporter un éclairage sur notre problématique initiale : la pérennité du triptyque fondateur.

2.2.1 Digression sur l'équité intergénérationnelle

La première question à se poser repose sur la signification de l'expression "équité intergénérationnelle"¹. Apparue d'abord dans le domaine de l'environnement, elle fait référence à la responsabilité des générations actuelles dans l'état de la planète. Ferrari & Mery (2008) la considèrent comme "la mise en oeuvre de principes autorisant la préservation des éléments du capital naturel à long terme, notamment du capital naturel critique pour lequel il n'existe aucun substitut". Le "capital naturel" dont ils parlent peut être assimilé, dans une certaine mesure, à l'état des régimes de retraite. Dans un autre registre, Rawls (1989) propose une approche contractualiste de l'équité intergénérationnelle. Il considère que les générations successives sont liées entre elles, et que les générations futures ont des droits qui ne doivent pas être ignorés. Il faut donc mettre en oeuvre des principes de justice qui prennent en compte les individus présents ainsi que leur descendance. L'existence de droits entre les générations successives se traduit alors par des transferts intergénérationnels. Le but ici est de conserver les droits d'une génération à l'autre. Dans le domaine de la retraite, Tragaki (1998) propose une analyse des transferts sociaux via leur comptabilité, en orientant son étude de l'équité intergénérationnelle au sens des bilans relatifs actualisés de chaque génération. Quoiqu'il en soit, les différentes recherches effectuées dans le domaine de l'éthique intergénérationnelle mettent en lumière le manque d'une définition globale de l'équité intergénérationnelle. En revanche - et c'est en ce point que la problématique de la pérennité de la devise s'inscrit dans celle de l'équité intergénérationnelle - la notion de conservation et de préservation semble être commune à tous les points de vue. De fait, étudier le moyen de faire état de la préservation des fondements du système de retraite est en osmose avec l'étude de l'équité intergénérationnelle pour autant que l'équité soit perçue comme la conservation d'un état.

Plus précisément en matière de retraite, Blanchet (2010) propose d'étudier trois conceptions de l'équité entre générations constituées de l'égalité transversale instantanée entre les classes d'âge, l'égalité des taux de retour sur cotisation pour les générations et enfin l'équité au sens de la compensation des inégalités entre les générations. Néanmoins, il convient de s'arrêter un instant sur la différence entre équité et égalité. Tout d'abord, il faut savoir qu'il existe un pan de la recherche et de la philosophie dédié à la théorie de l'équité, en particulier alimentée par Kolm (1972). Pour la résumer très succinctement, la théorie de l'équité est celle de l'absence d'envie, qui vise à éviter que quiconque préfère la consommation d'autrui à la sienne. En menant le raisonnement à son terme, l'idée même de "l'absence d'envie" pose la question de la mesure utilisée pour quantifier les envies individuelles, ou même collectives dans un registre plus large. Usuellement, et c'est à titre d'exemple la méthode utilisée en économie, les individus sont caractérisés par les fonctions d'utilité, qui sont en somme une sorte de mesure liant "l'espace des envies" abstrait à la droite des réels concrète. Le principe sous-jacent à cette manipulation permet d'associer un nombre à un état dans le but de pouvoir comparer ces états en ordonnant les valeurs. De fait, l'absence d'envie sera avérée si chaque individu ressent la même utilité face à une situation commune : nous venons de lier équité à égalité. Suite à un raisonnement plus ro-

1. Letang (2013) s'est appliqué à répertorier 25 ans d'écrits sur les relations entre les générations. Dans le même esprit, Hummel & Hugentobler (2007) analysent la genèse de la problématique intergénérationnelle.

buste, Sen (2000) affirme que toutes les théories de l'équité peuvent se caractériser comme visant l'égalité de quelque chose. Évidemment, la question finale est celle du critère à égaliser, et la réponse est apportée dans la suite. Toutefois, l'application du critère de l'égalité stricte entre les générations est vite ingérable puisqu'il annihile toute notion de croissance.

Afin d'illustrer le propos énoncé ci-dessus, l'exemple très simple suivant permet de fixer les idées. Soient deux individus, dont l'un est affamé et l'autre est rassasié, à qui l'on propose un gâteau à se partager. Quelle part reçoit chacun des individus ? D'un point de vue de l'égalité, la logique veut que le gâteau soit coupé en deux de manière à égaliser leur part. La personne affamée aura sûrement encore faim, alors que la personne ayant déjà bien mangé n'arrivera sûrement pas à finir sa moitié. En revanche, d'un point de vue de l'équité, le découpage se fera d'une façon bien différente, de manière à combler les besoins de chacun. Quoi qu'il en soit, le but du partage équitable dans ce contexte est d'égaliser la sensation d'avoir mangé à sa faim, et c'est pourquoi la notion d'égalité et la notion d'équité ne doivent pas être opposées.

Une fois que les notions d'égalité et d'équité ont été cernées, la question qui est posée par Blanchet est qu'est-ce qui doit être égalisé pour que le système de retraite soit équitable ? Un éclairage sur la question est apporté dans la suite.

Finalement, le point de vue conservé est celui qui soutient que l'équité intergénérationnelle peut être définie comme la **justice intemporelle, qui prend soin égal des intérêts des individus indépendamment de leur date de naissance**. Bien entendu, les intérêts des individus correspondent au triptyque fondateur. La suite du travail s'applique à proposer un critère qui constitue en somme la mesure qui permet de lier l'état de la devise à la droite des réels.

Ainsi, avant de se lancer dans la construction de ce pont reliant nos deux mondes, il est primordial de savoir comment les pouvoirs publics voient l'équité intergénérationnelle. L'année 1993 était "l'année des personnes âgées et de la solidarité entre les générations"², et très vite, cela a été traduit en "intergénération".

Dans sa lettre de mission à Jean-Michel Charpin, Lionel Jospin affirme qu'"il est essentiel de rechercher l'équité entre retraités, compte tenu du statut auquel ils étaient soumis en tant qu'actifs".

C'est la première apparition officielle de l'équité intergénérationnelle³. Un peu plus bas dans le rapport, c'est au nom de l'équité intergénérationnelle que l'allongement de la carrière est lissé dans le temps. L'équité intergénérationnelle est vue comme un argument progressiste qui permet de ne pas désavantager certaines générations.

Parallèlement à cela, les gouvernements ont proposé diverses méthodes pour tenter de faire état de l'équité intergénérationnelle. Voyons si la mesure recherchée se trouve dans cette liste "officielle".

2. Puijalon & Trincaz (1994), p.14.

3. Le terme exact est écrit en page 112 du Rapport Charpin.

2.2.2 Indicateurs mesurant l'équité intergénérationnelle

Depuis 2002, le COR s'intéresse aux problématiques d'équité intergénérationnelle⁴. Il présente lors de la réunion plénière de novembre de la même année sur l'"Egalité de traitement entre génération" une méthodologie pour mesurer l'équité intergénérationnelle via l'utilisation de trois indicateurs.

Le premier critère proposé est un critère instantané, qui voudrait qu'à l'instant présent, il y ait égalité ou parité des ressources entre les tranches d'âge. Dès lors, le but serait simplement d'assurer une juste répartition entre les individus d'âges différents. La difficulté repose sur la comparaison des niveaux de vie entre les individus, ainsi que la comparaison du bien-être procuré par les pensions et les revenus.

Le deuxième critère compare pour les inactifs les contributions données et les prestations reçues. Il y a égalité si en proportion, chaque génération reçoit autant que ce qu'elle a donné. Intéressant à différents égards, il apparaît plus bas que la mesure retenue s'inspire largement de ce critère.

Enfin, le dernier critère est un critère d'"égalitarisme fort", qui affirme qu'il n'y a équité que si chaque génération, à chaque âge, connaît exactement les mêmes conditions de vie que les autres générations aux mêmes âges.

La conclusion de cette méthodologie est qu'aucun de ces critères ne parvient à englober la problématique de l'équité.

D'une part, le premier critère ne donne aucune indication sur les mesures à prendre, puisque l'égalité du niveau de vie peut être obtenue par une infinité de combinaisons entre répartition et capitalisation. D'autre part, il n'apporte aucune solution quant à l'âge de la retraite en tant que critère instantané. Pour pouvoir apporter un éclairage sur la question de l'âge, il convient de faire état du vécu des générations, et donc de se tourner à la fois vers le passé et le futur.

Le deuxième critère comble dans une certaine mesure les lacunes du premier sans pour autant être une solution globale. En effet, il permet d'avoir recours à des comparaisons simples et de prendre des mesures drastiques. Mais là encore, l'égalité stricte entre les générations est-elle un point indispensable ? Les premières générations des régimes en répartition, celles bénéficiant du "repas gratuit" doivent-elles être punies ? Est ce que les autres générations doivent à tout prix recevoir en proportion autant que ces générations là ? Ce sont ces considérations qui amènent à réfléchir au troisième critère.

Il faut être conscient qu'imposer un niveau de vie égal pour toutes les générations tuerait la croissance. Il est légitime que les nouvelles générations aient un niveau de vie supérieur aux générations antérieures. Alors, ce qu'il faut viser n'est pas l'égalité parfaite entre les générations mais plutôt la maîtrise du niveau de croissance qui sera accordé aux générations futures.

Presque 10 ans plus tard, le COR⁵ publie une méthode plus complète pour gérer l'équité entre les générations en matière de retraite, et cette section du travail passe en

4. Blanchet (1998).

5. COR (2012).

revue les possibilités qui s'offrent aux gérants.

Le premier point à noter est qu'aucun indicateur ne fait consensus pour décrire l'équité intergénérationnelle, et il faudra donc calculer une batterie d'indicateurs, et la méthodologie du COR propose de se pencher sur quatre indicateurs. Ces quatre indicateurs sont censés résumer les différentes dimensions du système de retraite du point de vue des individus :

- un indicateur permettant d'apprécier la durée de retraite compte tenu de l'âge de départ à la retraite et de l'espérance de vie ;
- un indicateur permettant d'apprécier la durée d'activité ;
- un indicateur permettant d'apprécier le taux de prélèvement servant à financer les retraites comme le taux de cotisation ;
- un indicateur permettant d'apprécier le niveau des pensions comme le taux de remplacement.

Ces quatre indicateurs font échos aux différents leviers permettant d'assurer l'équilibre du régime : l'âge de départ à la retraite, le montant des ressources et le niveau des pensions.

Le pilotage doit être fait de manière à placer l'équité intergénérationnelle comme un objectif tout aussi important que la santé financière du régime. En effet, les deux notions sont inséparables, puisqu'il paraît irréaliste de piloter le régime sans tenir compte du caractère équitable ou inéquitable des actions entreprises. Dès lors, ces quatre critères permettent de juger sur quels leviers et dans quelle mesure il serait utile d'agir pour assurer l'équilibre. Bien entendu, il ne s'agit pas de regarder les valeurs indépendamment, mais de porter un regard d'ensemble sur ces critères.

Le COR a fait le choix de retenir des indicateurs sur les taux, et non pas sur les niveaux. De fait, les écarts de niveau de salaires sont ignorés : ils n'entrent pas dans le périmètre d'étude de la retraite, et n'ont donc pas de lien avec les problématiques d'équité intergénérationnelle présentées ici.

La durée de retraite : elle se calcule comme la différence entre l'âge moyen au décès et l'âge moyen de départ à la retraite. Dans l'absolu, cet indicateur n'apporte pas grand chose. En revanche, il semble pertinent de comparer le rapport entre la durée de retraite et la durée d'activité des différentes générations. En matière de retraite, il est plus avisé de considérer l'espérance de vie à 60 ans. L'espérance de vie à la naissance prend en compte la mortalité infantile et la mortalité avant d'atteindre l'âge de la retraite. Néanmoins, lorsqu'il s'agira de comparer les générations, il faudra tenir compte des décès survenus avant l'âge effectif de la retraite. En effet, les anciennes générations ont un nombre important de décès avant l'âge de la retraite, et il faudrait en tenir compte en complétant l'indicateur par la proportion de décès avant l'âge de la retraite. De la même façon, il serait intéressant de comparer non pas l'espérance de vie, mais l'espérance de vie en bonne santé, puisque ces deux espérances n'évoluent pas de la même façon. En pratique, il est difficile de comparer l'état de santé des différentes générations.

La durée d'activité : elle peut être mesurée par plusieurs moyens :

- la moyenne de la durée cotisée tous régimes ;
- la moyenne de la durée validée tous régimes ;
- la durée d'assurance exigée pour le taux plein ;
- la différence entre l'âge moyen de départ à la retraite et l'âge moyen de fin d'études ;
- la différence entre l'âge moyen de départ à la retraite et l'âge moyen de première validation d'un droit à la retraite.

La moyenne de la durée cotisée tous régimes est le meilleur indicateur qui permet de juger de l'effort de contribution. A durée de retraite, taux de cotisation et taux de remplacement constants, une durée de cotisation réduite signifie que la génération en question a bénéficié d'un meilleur rendement. Pour autant, avoir cotisé moins longtemps ne signifie pas forcément avoir été avantagé. Plusieurs raisons peuvent expliquer la diminution de la durée de cotisation :

- un départ à la retraite précoce constitue un avantage ;
- des périodes de chômage ou de non-emploi sont un désavantage ;
- une scolarité longue, qui implique une entrée sur le marché du travail tardive fait perdre des années de cotisation ⁶. L'effet est très flagrant sur les deux schémas suivants ⁷ :

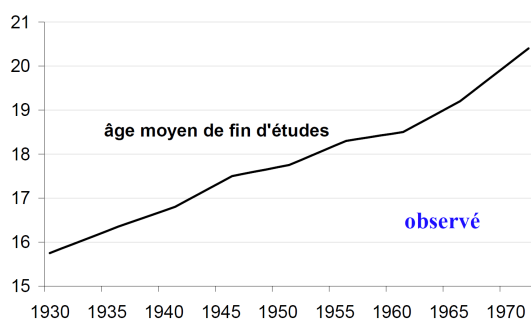


Figure. 2.1 – Age moyen de fin d'études

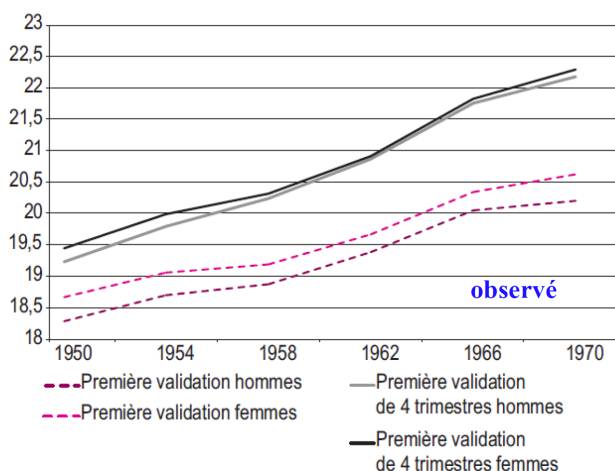


Figure. 2.2 – Age moyen de la première validation de droits

Ces évolutions doivent être mises en perspective avec la politique scolaire des gouvernements menée depuis plusieurs années. Le fait de rendre les universités accessibles à tout détenteur du baccalauréat, d'avoir réduit les filières en apprentissage et d'avoir favorisé la poursuite des études permet de faire "gagner" deux ans avant la première validation. Au final, ce mécanisme, couplé à l'augmentation de la durée de cotisation, peut être considéré comme une manière de décaler l'âge de la retraite.

6. A noter qu'il est possible de racheter des trimestres d'études, et que le diplôme conféré suite à ces années permet a priori de faciliter son insertion sur la marché du travail.

7. Source : INSEE, enquête Patrimoine 2004, d'après Olivier Bontout, Amandine Brun et Benoît Rapport, "Les droits à la retraite des jeunes générations", Dossiers Solidarité et Santé, n12, 2009, DREES.

Dès lors, il est possible de considérer la durée validée tous régimes confondus, qui permettrait de réintégrer les périodes d'inactivité involontaire (chômage) ou volontaire (interruption liée aux enfants). Néanmoins, l'indicateur de durée validée tous régimes confondus a quelques lacunes. D'abord, la durée est sous-estimée pour les générations nées avant 1931, puisque le régime est instauré en 1946, et la durée du travail est inférieure à la durée de cotisation. De la même façon, les femmes nées entre 1920 et 1955 ne bénéficient pas du même environnement réglementaire notamment en matière d'AVPF (Assurance Vieillesse du Parent au Foyer). Aussi, il faut être conscient que la comparaison des durées validées peut en fin de compte être une comparaison des évolutions réglementaires et pas celle du parcours d'activité.

L'autre point de vue est de considérer les durées requises, c'est-à-dire le nombre d'années d'activité que les générations doivent compter avant d'avoir une carrière complète. Il est alors possible de retenir la durée d'assurance exigée pour le taux plein, et de la comparer au fil des générations. Cependant, la durée d'assurance exigée peut ne pas refléter la durée d'activité. En effet, les générations nées avant 1948 ont souvent validé le nombre d'annuités requises avant 60 ans, âge minimal de départ à la retraite de l'époque.

Au vu des limites que présentent tous ces indicateurs, le mieux serait peut être de considérer la durée associée à chaque génération en calculant la différence entre l'âge moyen de départ à la retraite et l'âge moyen de première validation d'un droit à la retraite. Cet indicateur permet d'avoir une idée assez précise de la durée d'activité d'un assuré qui aurait travaillé sans interruption entre la sortie de ses études et la retraite.

Le taux de cotisation : est un indicateur qui peut être utilisé pour comparer l'équité entre les générations. En effet, en fixant les autres paramètres, et donc à niveau de pension ou taux de remplacement identique, avoir un taux de cotisation élevé est un désavantage. Il existe des limites à ce critère puisque le système de retraite n'est plus uniquement financé par les cotisations sociales des assurés. En ce qui concerne les droits non contributifs du type droits familiaux, périodes assimilées au titre du chômage, 75 %⁸ du financement est assuré par des organismes extérieurs dont le FSV et la CNAF⁹. De fait, l'existence de sources de financement autres que les cotisations complique l'analyse de l'équité intergénérationnelle : il faudrait être capable de reconstituer la part prélevée chez les actifs et les retraités. La part prélevée sur les actifs serait assimilée à une majoration du taux de cotisation alors que la part prélevée sur les retraités s'apparenterait plutôt à une baisse de la prestation. Néanmoins, si le travail à fournir semble relativement simple pour les prélèvements assis sur les revenus, la CSG ou le patrimoine, il sera beaucoup plus compliqué pour les prélèvements assis sur d'autres assiettes.

Le taux de remplacement : il est plus raisonnable donc de considérer le taux de remplacement qui est défini comme le rapport entre le montant de la retraite à la liquidation

8. Source : document numéro 15 de la séance du 25 mai 2011 du COR.

9. Le FSV est le Fonds de Solidarité Vieillesse. Depuis 1994, il assure le financement des allocations du minimum vieillesse et d'autres avantages de retraites relevant de la solidarité nationale. La CNAF est la Caisse Nationale des Allocations Familiales.

et le montant du salaire de fin de carrière. Son utilité réside, en plus de permettre de neutraliser l'évolution des salaires, dans sa capacité à retranscrire le lissage des revenus opéré par le système de retraite. C'est important puisque c'est un des objectifs inhérents à la retraite, comme vu précédemment.

Un point essentiel est celui du salaire à prendre en compte. En effet, le taux de remplacement fait mention du dernier salaire, et non pas du salaire moyen. Premièrement, le fait de considérer ce dernier salaire pourrait induire des erreurs si certaines générations ont des fortes progressions de salaires sur les dernières années, ou au contraire, si certaines générations ont des baisses de salaires. Mais les études du COR¹⁰ montrent qu'il n'y a pas eu de baisse des rémunérations pour les générations, en tout cas pas depuis 1942, et que les évolutions se sont faites à peu de choses près au rythme de celles du salaire moyen. Un autre point doit être clarifié, celui de la revalorisation de la pension, puisque le taux de remplacement ne prend en compte que le dernier salaire et le montant de la pension à la liquidation, sans considérer la revalorisation. A taux de remplacement identique, deux pensions peuvent évoluer différemment en fonction de leur taux de revalorisation. S'il faut avoir conscience de cela, dire que les pensions continueront d'être revalorisées sur les prix n'est pas une aberration. Toutefois, une proposition pertinente serait non pas de mettre au dénominateur le montant de la retraite à la liquidation mais le montant de la retraite x années après la liquidation.

Au final, ces indicateurs peuvent être rassemblés en un paramètre de rendement et un paramètre d'échelle :

- le paramètre de rendement du régime est le rapport des prestations reçues et l'effort fourni pour une même génération. En se référant aux indicateurs précédemment décrits, le paramètre de rendement est d'autant plus élevé que les rapports "durée de retraite/durée d'activité" et "taux de remplacement/taux de cotisation" sont élevés. En l'espèce, le critère retenu et présenté dans la suite est synonyme du paramètre de rendement ;
- le paramètre d'échelle permet d'identifier à rendement identique, les générations ayant beaucoup cotisé et recevant beaucoup, et à l'inverse les générations ayant peu cotisé.

La méthodologie du COR est dès lors complète. En se remémorant les contraintes de notre travail, à savoir prendre en compte les facteurs responsables d'une éventuelle dérive ainsi que travailler à l'échelle individuelle, le paramètre de rendement semble être plus ou moins pertinent. Néanmoins, il convient de se pencher avec précision sur cette idée de comparer l'effort contributif et les prestations offertes par le régime en retour afin de pouvoir apporter des éléments de réponse à la question initiale de la pérennité.

10. Andrieux & Chantel (2012).

2.2.3 Le critère retenu

A la lecture des références citées, associées aux différentes définitions de l'équité intergénérationnelle, il apparaît que la problématique de la justice intemporelle n'est traitée que d'un point de vue du régime dans son ensemble sans forcément accorder une importance remarquable à l'échelle individuelle. C'est pour cette raison que le travail s'applique à proposer un critère supplémentaire, complémentaire à ceux évoqués précédemment, au caractère nouveau en tant que critère individuel, tout en prenant en compte les contraintes de l'étude. Cette échelle individuelle est inhérente à sa définition, et *a fortiori*, à sa construction. Ce critère peut être défini comme le **taux de récupération**, ou encore comme le **rendement individuel** du régime.

Avant de le définir, il convient de rappeler que le système de retraite se caractérise par trois points fondamentaux : il est protecteur, il instaure une solidarité entre les générations, et il est obligatoire. Donc, il est légitime qu'il conserve ce triptyque originel. Des mesures ont été prises à travers des réformes paramétriques, en augmentant la durée de cotisation, en reculant l'âge de la retraite, et en majorant progressivement les taux de cotisation. Il y a un sentiment que le débat sur les réformes de la retraite s'est focalisé sur l'équilibre financier à long terme, au détriment de l'évaluation de l'effet des réformes à l'échelle individuelle. Les problématiques d'équité sont reléguées au second plan, sans toutefois pouvoir dire qu'elles ont été oubliées ou négligées. Ce n'est que depuis une dizaine d'années que l'équité est un véritable enjeu pour les gestionnaires. Différents comités et chercheurs ont alors proposé des méthodologies pour quantifier l'équité, via des critères complémentaires, qui forment un groupe inséparable.

La proposition d'un critère supplémentaire relève du questionnement suivant : à quel moment est-ce que l'augmentation de l'espérance de vie intervient dans les critères proposés et préconisés ? Une trace est perceptible dans les notions de durée de retraite, ou dans le niveau de vie, sans jamais être explicite. Cette dernière section s'emploie à détailler la genèse de ce nouveau critère.

Au fil de l'étude des idéologies sur l'équité intergénérationnelle, celle qui a été retenue est celle qui définit l'équité entre les générations comme une justice intemporelle, qui prend soin égal des intérêts des individus indépendamment de leur date de naissance. De plus, il semble important que les principes fondamentaux soient respectés dans l'évolution des régimes. De fait, si le futur du système se restreint à une durée de cotisation très longue pour au final percevoir une pension dérisoire, la justification du caractère obligatoire devient compliquée. Pourquoi ne pas se constituer une épargne individuelle ? Au nom de la solidarité. Plein de promesses, le système s'engage à fournir une couverture viagère. Et pourtant, tous les indicateurs s'appliquent à comparer des montants, des taux, sans jamais faire intervenir ce caractère viager dans les comparaisons, alors l'idée est venue de ce constat très simple.

Soient deux personnes de deux générations distinctes, de façon à ce que leurs espérances de vie soient différentes. La question est la suivante : est-ce que les deux individus

ont le même retour sur investissement ? Chacun cotise pendant sa carrière puis reçoit une pension viagère. Néanmoins, avec l'allongement de la durée de cotisation nécessaire pour liquider à taux plein, et avec les évolutions des Valeurs d'Achat et de Service des points, qu'en est-il réellement du retour sur investissement ? Pour qu'il y ait équité, la logique voudrait qu'il soit plus ou moins égal entre les générations, l'allongement de la période de cotisation venant compenser les augmentations d'espérance de vie.

Comme il a été vu plus haut, le but de certaines réformes a été de partager ce gain d'espérance de vie entre la période d'activité et la période de retraite. Certes perspicace, cette mesure est orientée vers la santé financière du régime. Mais qu'en est-il au niveau individuel ? C'est l'objectif de ce critère, comparer entre les générations le niveau de ressources atteint sur toute la durée de la retraite. Pour cela, la comparaison se fait uniquement sur le rapport entre le montant perçu sur la durée de la retraite et le montant cotisé, au niveau individuel. En effet, la position adoptée pour la construction du critère est celle de l'affilié lambda, qui réfléchirait à l'utilité du régime.

La définition proposée pour le calcul est la suivante, initialement présentée dans Dubois & Marino (2015) :

$$\text{rendement}_{\text{individuel}} = \frac{\text{montant perçu sur la durée de la retraite}}{\text{montant cotisé}}$$

Le critère consiste à calculer le rapport de la somme des prestations sur la somme des cotisations. Dans la suite, la somme des prestations sera dénommée par "prestation globale" et la somme des cotisations par "cotisation globale". Ainsi, la prestation globale est la somme actualisée et probabilisée des pensions touchées par l'affilié, et la cotisation globale est la somme des cotisations capitalisées.

Avant de présenter une définition mathématique du critère, il convient de s'arrêter un instant sur le fonctionnement du régime étudié. Le régime sur lequel l'étude se base dans la suite est un régime complémentaire de professions libérales. Le critère retenu fait intervenir deux notions : le montant de la pension sur la durée de la retraite, et le montant cotisé sur la durée de cotisation. De fait, le premier travail consiste à comprendre le mode de calcul de ces deux valeurs.

La retraite complémentaire des affiliés est une retraite en points : les cotisations des assurés sont transformées en points au moment du versement en fonction de la valeur d'achat du point à cette date.

Avant 1996, le régime complémentaire propose aux affiliés de choisir entre 5 classes de cotisations, chacune offrant un nombre différent de points.

Classe	Points acquis
B	8
C	12
D	16
E	20
F	24

TABLE 2.1 – Fonctionnement du régime complémentaire avant la réforme de 1996

Depuis 1997, le régime permet d'acquérir annuellement un nombre forfaitaire de points et un nombre de points proportionnel aux revenus. Une fois cet aspect spécifié, voici comment se calcule la cotisation.

En ce qui concerne l'investissement total dans le régime, les affiliés versent une cotisation composée d'une part forfaitaire et d'une part proportionnelle au revenu. En 2015 et 2016, la part forfaitaire est de 1 456 € et permet d'acquérir 8 points de retraite. La part proportionnelle correspond à 3 % de la base de cotisation comprise entre 25 246 € et 153 579 € en 2015 et 2016. Cette part permet d'obtenir jusqu'à 22 points. Le prix d'achat du point est fixé tous les ans, la décision incombant au Conseil d'Administration du régime.

Pour ce qui est de la pension, l'adhérent au régime obtient le montant de sa rente de la façon suivante :

$$\text{pension annuelle} = \text{valeur annuelle du point} \times \text{nombre de points acquis}$$

La valeur annuelle du point est la Valeur de Service du point, c'est-à-dire le montant des prestations correspondant à un point. Cette valeur est révisée par le Conseil d'Administration annuellement, et la valeur est déterminante pour le calcul de l'indicateur. De plus, le montant de l'arrérage peut se voir appliquer des réductions en cas de départ anticipé, ou des majorations dans des cas bien précis. Ces décotes et surcotes ont été réformées par arrêté du 31 juillet 2015, en même temps que l'âge normal de liquidation, et sont résumées dans le tableau 2.2 ci-après. Le taux de liquidation dépend donc de la durée d'assurance réelle et de la durée d'assurance requise pour obtenir une pension à taux plein.

Enfin, le régime complémentaire assure une pension de réversion. Si l'assuré qui cotise auprès de la caisse décède, son conjoint survivant peut prétendre à une pension de réversion équivalente à 60 % de la pension complémentaire versée par la caisse. Pour pouvoir bénéficier de la réversion, le mariage doit avoir duré au moins deux ans, et cette condition de durée est effacée si le couple a eu au moins un enfant. Ensuite, le bénéficiaire doit être âgé d'au moins 65 ans, mais il est possible, sous conditions, de percevoir la pension de réversion dès 55 ans.

Voici les caractéristiques du régime complémentaire de professions libérales étudié, en 2017 :

Taux de cotisation et bases de cotisation	Cotisation forfaitaire de 1 456 € permettant l'acquisition de 8 points, plus cotisation proportionnelle de 3 % des revenus N-2 compris entre un seuil (25 246 € inchangé depuis 2005) et un plafond (158 713 € en 2017) établi pour que la cotisation proportionnelle apporte 22 points sur la base maximale.
Prix d'achat du point 2017	182 €.
Valeur de service du point 2017	19,36 €.
Rendement du régime	10,64 % en 2017 (11,4 % en 2016). Le rendement est décroissant chaque année par augmentation du prix d'achat du point, avec un objectif fixé par le Conseil d'Administration de rendement de 6 % à l'horizon 2030.
Age de liquidation des droits au taux plein	65 ans pour la génération 1956, augmentant de 4 mois par génération jusqu'à 67 ans pour les générations 1961 et suivantes.
Anticipation	Génération 1955 et antérieures : 4 % par année d'anticipation plus 0,25 % par trimestre manquant pour pouvoir liquider la pension du régime de base au taux plein. Génération 1956 et postérieures : 1,25 % par trimestre manquant pour pouvoir liquider la pension du régime de base au taux plein, dans la limite du nombre de trimestres séparant l'affilié de son âge du taux plein sans condition.
Prorogation	La pension est majorée de 1,25 % par trimestre civil entier d'ajournement, dans la limite de vingt trimestres.
Réversion	60 %, sous condition d'âge (65 ans, 60 ans en cas d'inaptitude, ou 55 ans si la rente de survie du régime invalidité-décès n'est pas versée) et de durée de mariage (2 ans, sauf si un enfant est issu du mariage).

TABLE 2.2 – Présentation succincte du régime complémentaire

Pour le calcul, il suffira d'être capable de reconstituer les montants cotisés ainsi que les montants perçus. Pour les projections, il faudra tenir compte de la revalorisation ainsi que de l'actualisation des prestations, tout en étant capable de projeter les cotisations, le tout au niveau individuel.

Dès lors, dans le cadre de ce régime, la *prestation globale* et la *cotisation globale* s'expriment ainsi :

$$\begin{aligned}
 \text{prestation globale} &= \sum_{t=l}^{\infty} t-c p_c \times \text{pension}_t \times \frac{1}{(1+r)^{(t-l)}} \\
 \text{cotisation globale} &= \sum_{t=c}^{l-1} t-c p_c \times (f_t + (\text{revenus}_t - \text{seuil}_t)_+ \times 0,03) \times (1+r)^{(l-t)} \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Avec :

- c : la date de la première cotisation ;

- l : la date de liquidation ;
- ${}_{t-c}p_c$: la probabilité qu'un individu atteigne l'âge t sachant qu'il a l'âge c ;
- $pension_t$: le montant de la rente à la date t , c'est-à-dire le nombre de points cumulés multiplié par la Valeur de Service du point de la date t (notée VS_t) ;
- r : le taux d'actualisation ;
- f_t : le montant de la cotisation forfaitaire de la date t ;
- $revenus_t$: salaire à la date t ;
- $seuil_t$: seuil de salaire à la date t .

Schématiquement, voici ce qui est comparé :

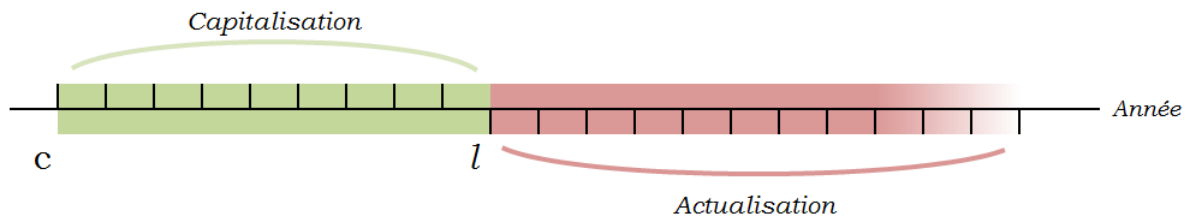


Figure. 2.3 – Comparaison du montant investi et du montant reçu

Finalement, les cotisations et les prestations sont rapportées à la date de liquidation ¹¹. L'expression peut être légèrement modifiée en explicitant le terme $pension_t$:

$$prestation\ globale = \sum_{t=l}^{\infty} {}_{t-c}p_c \times \text{Nombre de points} \times VS_t \times \frac{1}{(1+r)^{(t-l)}}$$

Mais le *Nombre de points* est en réalité dépendant de la cotisation :

$$\text{Nombre de points} = 8 \times (l - c) + \sum_{t=c}^{l-1} (revenus_t - seuil_t)_+ \times \frac{0,03}{VA_t}$$

où VA_t est la valeur d'achat du point à la date t . En réalité, il faudra tenir compte de la date de mise en place de la cotisation proportionnelle, mais globalement, si l'individu cotise à partir de 1997, la formule de la *cotisation globale* est valable. En fin de compte, le critère, noté $R_i(l, c)$ s'exprime alors comme :

$$R_i(l, c) = \left(8(l - c) + \sum_{t=c}^{l-1} (revenus_t - seuil_t)_+ \times \frac{0,03}{VA_t} \right) \times \frac{\sum_{t=l}^{\infty} {}_{t-c}p_c VS_t \frac{1}{(1+r)^{(t-l)}}}{cotisation\ globale}$$

L'allongement de la durée de vie, et donc l'amélioration de la mortalité est prise en compte dans le calcul du critère via la probabilisation des flux. Il faudra donc porter une attention particulière à l'étude de la mortalité, afin de retranscrire le plus finement possible

11. Il paraît assez naturel de ramener tous les flux en date de liquidation, c'est pourquoi toutes les comparaisons se feront à cette date. Néanmoins, les flux auraient pu être ramenés à une autre date.

l'évolution du critère.

Si cette expression est vraie à la date de liquidation, est-il possible de la généraliser à une date quelconque ?

Le raisonnement adopté ici mérite d'être discuté. Comme présentée au début de ce travail, la retraite par répartition a un mode de fonctionnement particulier au sens où les cotisations de l'année t servent à payer les prestations de l'année t . Ici, le but du critère est de comparer la cotisation à un investissement, et la prestation au retour sur investissement. De fait, le point de vue à adopter dans la démonstration n'est pas celui de la répartition globale, mais celui de l'individu. Cela signifie que la cotisation globale, perçue comme le montant total investi dans le régime, est en fin de compte assimilable à un capital qui permet d'acheter la prestation globale. De fait, il est possible de montrer que le rendement individuel est constant, peu importe la date de calcul choisie. Il est nécessaire de faire l'hypothèse que l'affilié est vivant à date de calcul.

Soit :

- $P_{globale}^l$ la prestation globale ramenée à date de liquidation ;
- $C_{globale}^l$ la cotisation globale ramenée à date de liquidation ;
- $R_i(l, c)$ le rendement individuel d'un affilié ayant commencé à cotiser en c , et qui liquide en l , exprimé en date de liquidation ;
- $R_i(l + 1, c)$ le rendement individuel d'un affilié ayant commencé à cotiser en c , et qui liquide en l , exprimé en date de un an après la liquidation ;
- P^l la prestation reçue en l ;
- C^l la part de la cotisation qui a servi à "acheter" la prestation de l ;
- i est le taux d'actualisation.

Alors, la prestation globale exprimée en $l + 1$ est la prestation globale de l , à laquelle la prestation de l'année l est déduite puisqu'elle est touchée. Comme nous avançons d'une année, il faut capitaliser le montant mais pas le probabiliser, car l'affilié est vivant, d'où

$$P_{globale}^{l+1} = (P_{globale}^l - P^l) (1 + i)$$

Pour la cotisation globale, elle est constituée de la cotisation globale de la période précédente, diminuée de la part de la cotisation qui a servi à payer la prestation de la période. De fait, nous avons :

$$C_{globale}^{l+1} = (C_{globale}^l - C^l) (1 + i)$$

Entendons nous bien sur la signification de C^l : c'est le montant de cotisation utilisé pour "acheter" la prestation P^l , ce n'est pas la cotisation de l'année l . En se plaçant du point de vue individuel, toucher une prestation est équivalent à acheter de la prestation avec de la cotisation. La part de cotisation qui a justement servi à acheter P_l est notée C_l . Le capital constitué de la somme des cotisations est donc diminué de ce montant C_l si on le regarde en $l + 1$. Ici il n'y a pas lieu de probabiliser, puisque la cotisation est entièrement acquise à date de liquidation. De fait, il faut juste capitaliser sur la période adéquate.

Alors le rendement individuel en $l + 1$ s'exprime comme suit :

$$R_i(l + 1, c) = \frac{(P_{globale}^l - P^l)}{(C_{globale}^l - C^l)}$$

Mais, la part de la cotisation C_l qui sert à payer la prestation P_l est justement calculée en fonction de $R_i(l, c)$ puisque :

$$C^l = \frac{P^l}{R_i(l, c)}$$

De plus, en utilisant la définition du rendement individuel, il vient que :

$$R_i(l + 1, c) = \frac{(P_{globale}^l - P^l)}{\left(\frac{P_{globale}^l}{R_i(l, c)} - \frac{P^l}{R_i(l, c)}\right)}$$

En fin de compte, le rendement individuel en $l + 1$ est :

$$R_i(l + 1, c) = R_i(l, c)$$

La conclusion est donc que le rendement individuel est constant tant que l'affilié est vivant et n'a pas dépassé son espérance de vie moyenne à la liquidation, sous réserve que la Valeur de Service du point observée soit égale à celle utilisée dans la projection. En effet, la cotisation est calibrée de façon à acheter la prestation globale, elle même calculée sur la base de la mortalité moyenne. De fait, après la durée de vie attendue, $P_{globale}^l$ et $C_{globale}^l$ sont nulles, donc le régime offre un bonus à l'affilié. Au contraire, si l'affilié meurt avant ce qui est prévu, il ne consomme pas toutes ses cotisations pour payer sa prestation, et son rendement individuel est plus faible. En revanche, il a été montré que si l'affilié meurt comme l'anticipe la table de mortalité sous-jacente, alors le rendement individuel est constant. Dans ce cas là, ce résultat est loin d'être surprenant : le régime de retraite assure un niveau, puisque ni le nombre de points, ni la Valeur de Service du point ne changent. Si la Valeur de Service du point viendrait à augmenter, la prestation croit, donc le rendement augmente, la cotisation étant acquise. A l'inverse, si la Valeur de Service du point diminue, le rendement diminue, la cotisation étant acquise.

L'utilisation de cet indicateur doit toutefois être accompagnée de restrictions inhérentes à sa construction. En effet, il serait tentant de comparer la valeur du critère au rapport démographique. Naïvement, une conclusion à tirer pourrait être que si la valeur du critère est supérieure au rapport démographique, alors le retraité "consomme" plus que ce que le régime peut lui offrir. Néanmoins, le fonctionnement d'un régime en répartition rend ce raisonnement dénué de sens. La valeur du critère fait intervenir le nombre de cotisations passées, et donc en réalité utilisées pour payer les prestations de l'époque, et non pas pour constituer la prestation du cotisant. De fait, comparer le rendement individuel au rapport démographique n'a pas de sens, puisque le régime ne fonctionne pas ainsi. Le travail propose une méthode pour étudier la consommation du retraité en termes de cotisants, mais le but de ce critère de rendement individuel est uniquement un moyen de rassembler l'effort de cotisation, l'amélioration de la mortalité, et le niveau de pension. Il n'est pas un indicateur de la santé financière du régime.

Pour regarder la consommation d'un retraité en termes de cotisants, il suffit d'être capable de reconstruire les cotisations et les prestations sur une période, et d'exprimer de façon instantanée le rapport prestations sur cotisations. Ce rapport instantané peut être comparé au rapport démographique. Dès lors, l'interprétation est aisément réalisable. Si le rapport démographique est supérieur à la valeur calculée, alors cela veut dire que le régime peut constituer des réserves, ou qu'il peut offrir des prestations plus hautes. Dans le cas inverse, le régime puise dans ses réserves s'il en a, et il faut prendre des mesures pour rétablir l'équilibre.

Le critère de rendement individuel permet de comparer le niveau de service offert par le régime. En menant le raisonnement à son terme, si le rendement est trop faible, la justification du caractère obligatoire de la cotisation peut paraître compliquée à expliquer. Dès lors, pour chaque date de liquidation, le travail fournira le taux de rendement annuel purement financier nécessaire pour obtenir le même rapport. Plusieurs pistes de discussions seront soulevées suite à l'analyse des résultats.

Entendons nous bien, le but recherché n'est pas d'égaliser les valeurs du taux de récupération pour les différentes générations, mais de tester la pérennité de la devise étant donné la valeur des taux de récupération en fonction des générations. En effet, les différences entre les générations ne sont pas forcément des entraves à l'équité intergénérationnelle. Bien que des écarts dans les rendements sont plus facilement assimilables à une forme d'inéquité, deux explications peuvent être exploitées. Tout d'abord, les générations des débuts de la mise en place du régime bénéficient de droits gratuits, et ont donc un rendement élevé. Ensuite, la retraite doit être replacée dans tout le contexte économique et il peut sembler légitime que certaines générations voient leur rendement augmenter, en tant que compensation de conditions difficiles dans d'autres domaines (notamment la guerre, des conditions de travail difficiles). C'est dans l'esprit de ce rendement que le critère retenu réside.

Chapitre 3

Application et mise en oeuvre : un régime complémentaire de professions libérales

Cette ultime partie met en application les principes décrits précédemment. L'utilisation des données d'un régime complémentaire de professions libérales permet de concrétiser les problématiques soulevées, tout en illustrant les propos par des exemples concrets. Cette section s'ouvre par l'étude de la mortalité étant donné le rôle primordial qu'elle joue dans le calcul du critère. L'analyse de deux méthodes d'ajustement est présentée. Une fois cette première étape menée à bien, le travail se conclut sur le calcul du critère pour trois profils types, liquidant à différentes dates. Dès lors, à la vue des résultats, le questionnement sur la pérennité du triptyque prend son sens.

3.1 Mortalité spécifique

Étant donné la définition du critère retenu, il est indispensable de se pencher sur l'étude de la mortalité de la population couverte. Afin d'être certain d'avoir une population suivie avec précision, seuls les pensionnés de droits directs sont conservés. L'étude de la mortalité consiste à présenter deux méthodes d'ajustement d'une table de référence, en l'occurrence, la table INSEE 2007-2060. Riche dans sa mise en oeuvre, l'ajustement d'une table de référence à la mortalité empirique est un processus complet, que le travail propose de détailler dans son ensemble. Pour cela, cette section est décomposée en trois parties, qui correspondent en somme aux étapes du raisonnement mené. Les méthodes sont présentées, puis testées. Par la suite, il sera nécessaire de choisir la méthode à adopter, et une procédure testant la robustesse des estimations sera présentée à ce moment là. Enfin, l'étude se conclura par la fermeture de la table avec une méthode bien précise.

3.1.1 Présentation des méthodes : comparaison et mise en oeuvre

Les données de 2009 à 2015 ont été reconstituées : 64 355 lignes sont disponibles. Comme précisé plus haut, le régime étudié regroupe différents corps de métiers. Toutefois, le nombre trop restreint de données pour certaines catégories ne permet pas d'étudier la mortalité à cette maille. Le sexe constitue alors l'unique facteur discriminant.

La première étape est de mettre en forme la table de façon à pouvoir utiliser le package

R ELT¹ dédié². Ainsi, voici le format utilisé :

Id	Gender	DateOfBirth	DateIn	DateOut	Status
100001	Female	22/05/1914	01/07/1979	18/07/2015	deceased
100002	Female	15/05/1920	01/01/2004	31/12/2015	other
100003	Female	10/06/1913	01/01/1979	27/03/2010	deceased
100004	Female	05/12/1915	01/01/1981	24/01/2010	deceased
100005	Female	27/04/1912	01/07/1977	11/01/2013	deceased
100006	Female	07/06/1920	01/07/1985	31/12/2015	other
100007	Female	22/05/1916	01/01/1977	31/12/2015	other

TABLE 3.1 – Format initial des données

Sur la période, les données se résument en 3 825 décès chez les femmes pour 47 129 individus, et 1 846 décès chez les hommes pour 17 226 individus. Voici comment sont répartis les décès³ ($D_{x,t}$), en fonction de l'âge (Age x) et de l'année (Year t) :

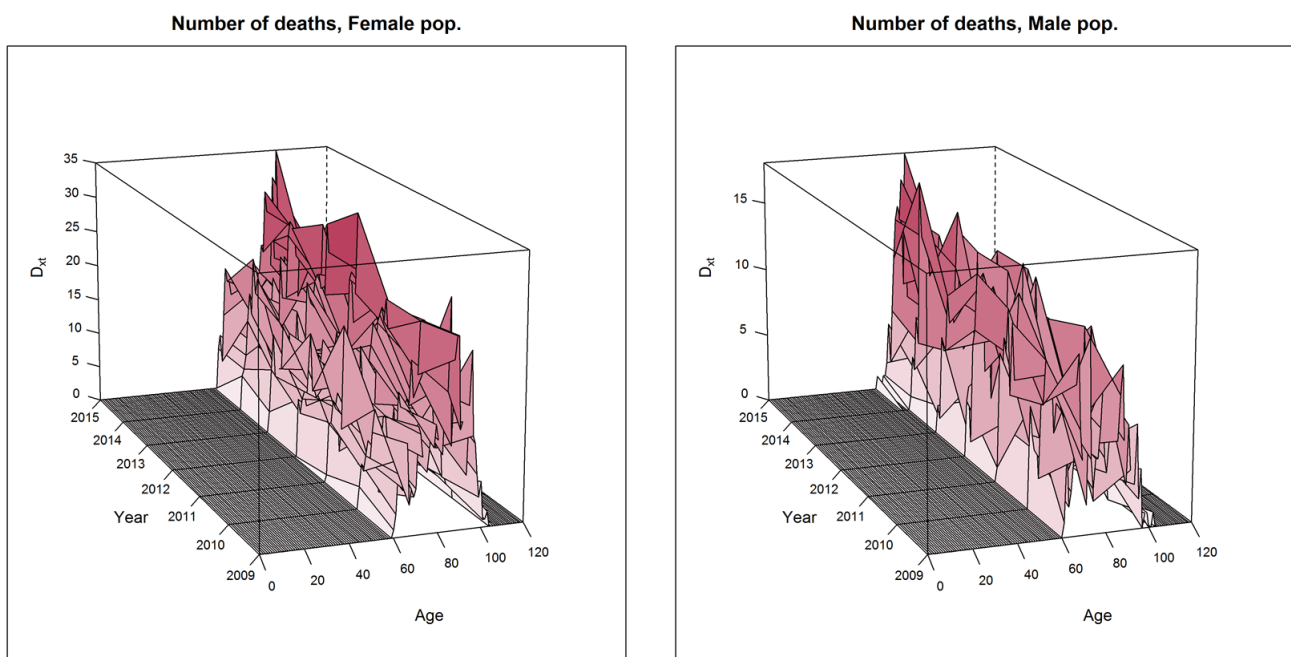


Figure. 3.1 – Décès observés pour les femmes et les hommes sur la période

1. Le package ELT (Experience Life Tables) permet de mettre en oeuvre des méthodes d'ajustement de tables de référence. Fort d'une grande quantité de fonctions, le package offre des possibilités diverses et variées pour faciliter la procédure d'ajustement.

2. Les aspects théoriques présentés dans la suite sont tirés de Planchet & Tomas (2014a), (2014b) et (2014c).

3. Les six graphiques suivants sont tirés de la méthode de la note de travail de l'Institut des Actuaire III1291-15 v1.5, page 5/35, Planchet & Tomas [2014a]

et l'exposition ($E_{x,t}$) sur la période :

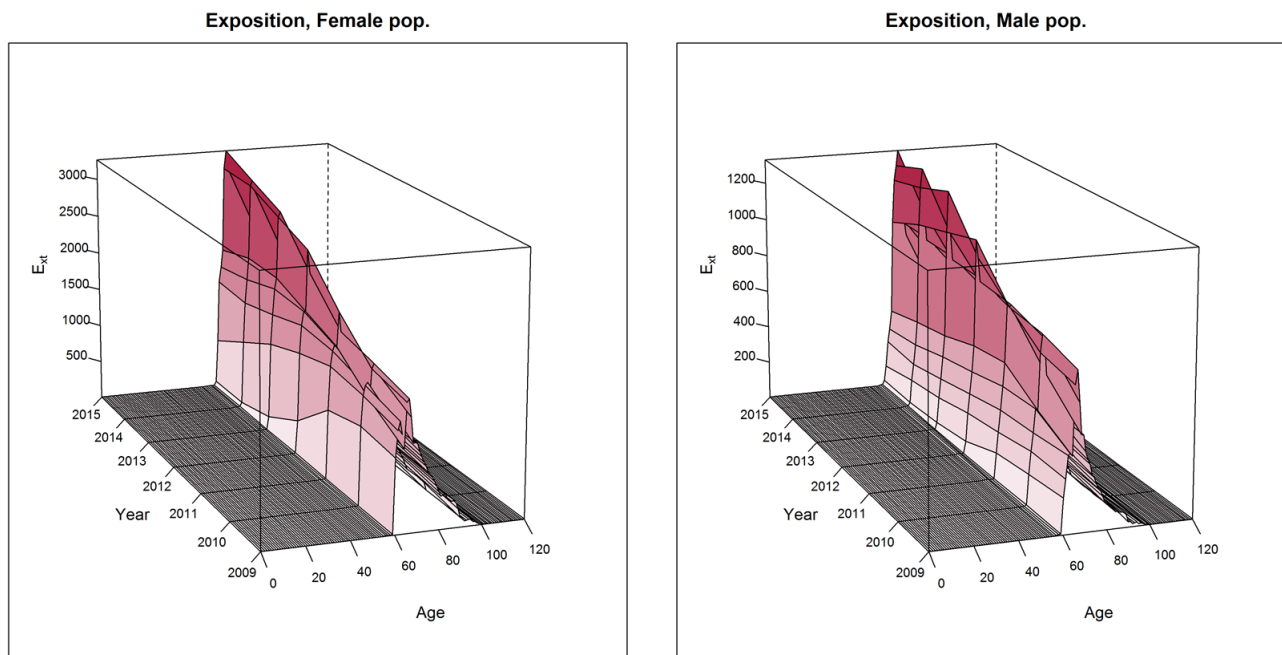


Figure. 3.2 – Exposition observée pour les femmes et les hommes sur la période

L'exposition est quasi nulle à partir de 100 ans. Il faudra en tenir compte pour l'ajustement, puisque les taux de mortalité empiriques à ces âges n'apporteront que peu d'information. En effet, lorsque nous nous penchons sur le logarithme des taux de mortalité empiriques (noté $\log q_{x,t}$), la sous-exposition est flagrante, surtout pour les hommes :

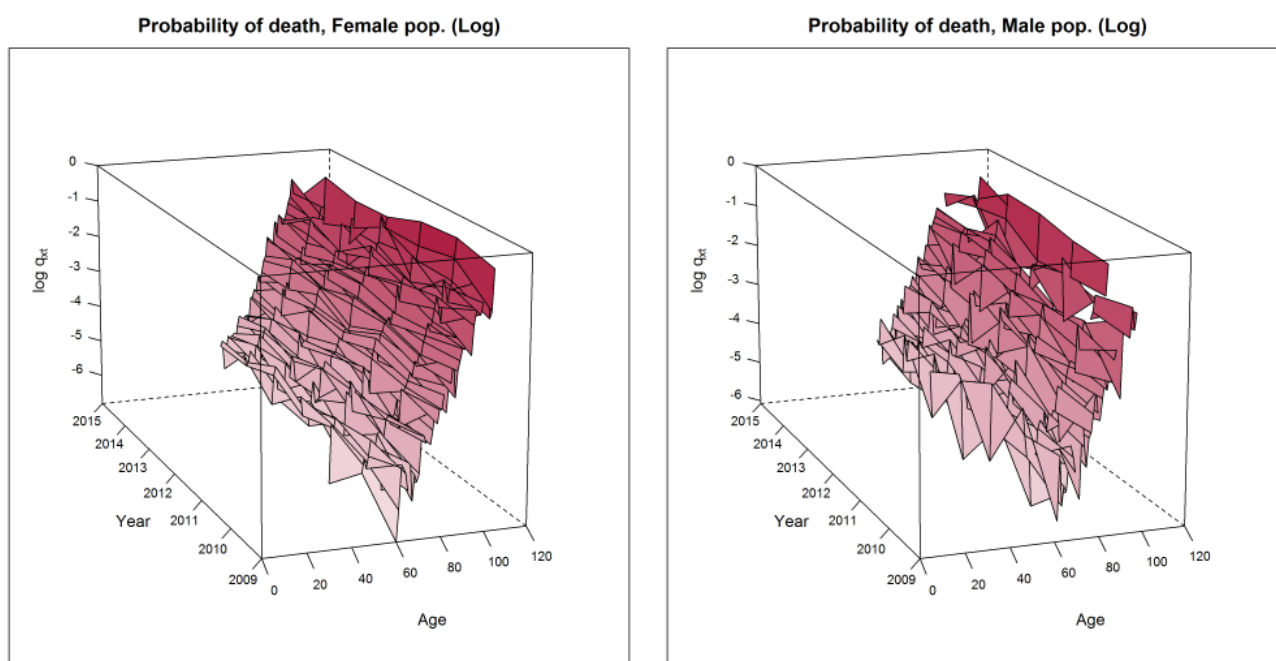


Figure. 3.3 – Surface du \log des taux de mortalité des femmes et des hommes sur la période

Si pour les femmes la surface est relativement plane, il n'est pas possible d'en dire autant pour celle des hommes. Les valeurs sont exploitables jusqu'à 95 ans, et la plage d'âge de l'étude sera fixée a priori de 60 à 95 ans sur les années 2009 à 2015⁴.

Il convient maintenant de se pencher sur les méthodes d'ajustement. Le travail consiste à mettre en œuvre deux méthodes d'ajustement de tables de référence qui sont présentées une à une. Le package ELT propose en réalité 4 méthodes. Néanmoins, seules les méthodes faisant intervenir au maximum deux paramètres sont retenues. Ce choix se justifie par la facilité d'interprétation qui découle de ces méthodes ainsi que le manque de données. Conscient de la faible quantité de données, l'ajustement voulu est un ajustement global, qui ne nécessite pas une adéquation parfaite à la mortalité considérée. Bien entendu, l'ajustement sera réalisé avec toute l'application possible, sans négliger aucune étape du travail.

Comme spécifié plus haut, la table de référence utilisée pour l'ajustement est la table INSEE 2007-2060. Dès lors, puisque la mise en œuvre du critère nécessite un calcul sur les cotisations, il faut avoir à disposition la mortalité avant 2007. Pour ce faire, la stratégie adoptée consiste à récupérer la mortalité des tables INSEE instantanées depuis 1980, de façon à avoir la mortalité à 30 ans des générations à partir de 1951. Si ces conditions peuvent paraître inouïes à ce stade, elles seront largement détaillées lors de la mise en œuvre effective du critère. Le travail propose de se pencher sur cette complétion dans un second temps, et de commencer l'étude de la mortalité par l'ajustement de la table sur la période de travail : 2009-2015.

Avant de se lancer dans la description des méthodes, voici les notations qui seront utilisées dans ce qui suit⁵ :

- $L_{x,t}$ est le nombre d'individus d'âge x vivant au 1^{er} janvier de l'année t ;
- A chaque observation i , une indicatrice δ_i est associée, indiquant si l'individu est décédé ou non :

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu } i \text{ est décédé,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- τ_i est le temps durant lequel l'individu i est observé : c'est l'exposition au risque ;
- $D_{x,t}$ le nombre de décès enregistré à l'âge x durant l'année t . Il est calculé par :

$$D_{x,t} = \sum_{i=1}^{L_{x,t}} \delta_i$$

- $E_{x,t}$ est l'exposition au risque à l'âge x durant l'année t . Elle est définie par :

$$E_{x,t} = \sum_{i=1}^{L_{x,t}} \tau_i$$

4. Lors de la mise en œuvre des tests, cette plage changera puisqu'elle influe sur les valeurs des p -values.

5. Afin de conserver des notations cohérentes avec les sources, les notations sont celles de la note de travail de l'Institut des Actuariés II1291-12 v1.7., Planchet & Tomas [2014b].

- $\hat{q}_x(t)$ est la probabilité qu'un individu d'âge x décède durant l'année t . Cette probabilité est calculée à partir de l'estimateur de Hoem :

$$\hat{q}_x(t) = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}}$$

- x^* et t^* sont respectivement la plage d'âge et la période d'observation communes avec la référence de mortalité ;
- ε_{x^*,t^*} est le terme d'erreur ;
- $q_x^{ref}(t)$ est la probabilité de mourir à l'âge x l'année t de la référence.

Méthode 1⁶ : La première approche de positionnement est l'approche à un paramètre avec le Standardized Mortality Ratio (SMR).

Cette approche est la plus simple au sens où elle ne fait intervenir qu'un coefficient de réduction/majoration appliqué de manière multiplicative aux probabilités conditionnelles de décès de la table de référence, et ce coefficient est appelé le Standardized Mortality Ratio.

Il est égal à :

$$SMR = \frac{\sum_{(x^*,t^*)} D_{x^*,t^*}}{\sum_{(x^*,t^*)} E_{x^*,t^*} \times q_{x^*}^{ref}(t^*)}$$

Et finalement, les probabilités de décès de l'organisme sont données par :

$$\tilde{q}_x(t) = SMR \times q_x^{ref}(t) \quad (3.1)$$

Il faut noter que la plage d'âge est importante pour le calcul du SMR puisque la table construite par positionnement ne sera valide que sur la plage d'âge retenue. Les SMR obtenus sont regroupés dans le tableau suivant :

SMR - [65,95]	
Table	INSEE
Hommes	0,8133
Femmes	0,9188

TABLE 3.2 – Valeur du SMR sur la plage d'âge considérée pour les hommes et les femmes

L'Annexe F page 126 précise les différentes valeurs des SMR en fonction de la plage d'âge retenue. Il faut garder à l'esprit que la plage d'âge intervient aussi dans la phase de validation via les critères, il convient donc d'arbitrer entre la valeur du SMR et les valeurs des tests. Finalement, la plage retenue est 65 – 95 ans sur la période 2009 – 2015 pour l'étude de la population. Puisque les SMR sont inférieurs à 1, la population étudiée meurt moins que la population de la table de l'INSEE.

6. La présentation de la méthode est tirée de la note de travail de l'Institut des Actuaraires II1291-12 v1.7, page 3/13, Planchet & Tomas [2014b].

Il faudra retrouver cette hiérarchie dans les espérances de vie. En effet, l'espérance de vie de la population du régime considéré devrait être supérieure à celle de la table INSEE, et en particulier pour les hommes, cela devrait être plus flagrant.

C'est fort heureusement ce que met en évidence les courbes des Figures 3.4 et 3.5 pour l'année 2010⁷.

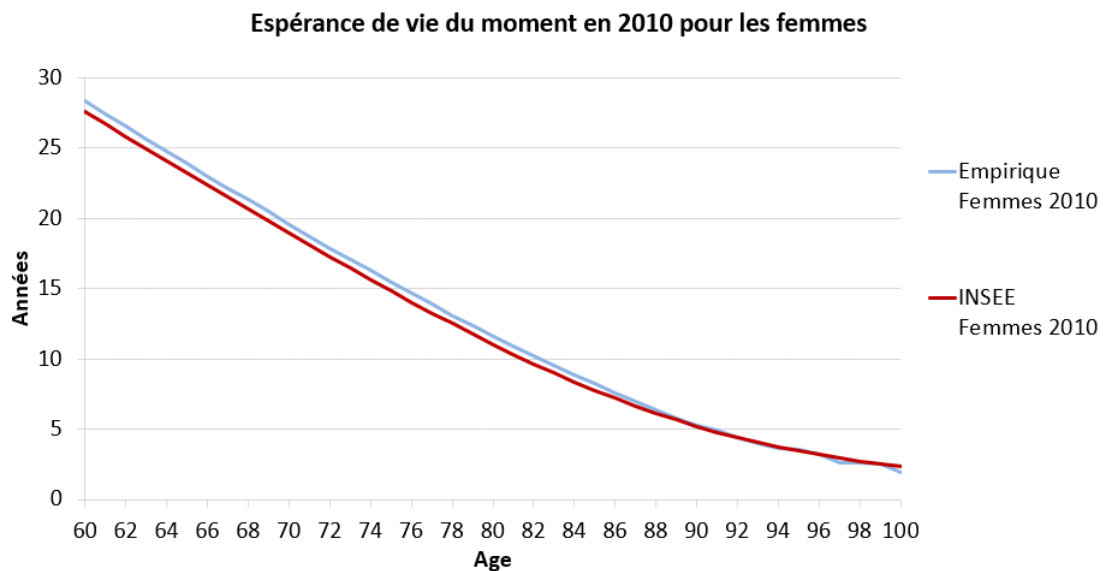


Figure. 3.4 – Espérance de vie du moment calculée l'année 2010 pour les femmes avant ajustement

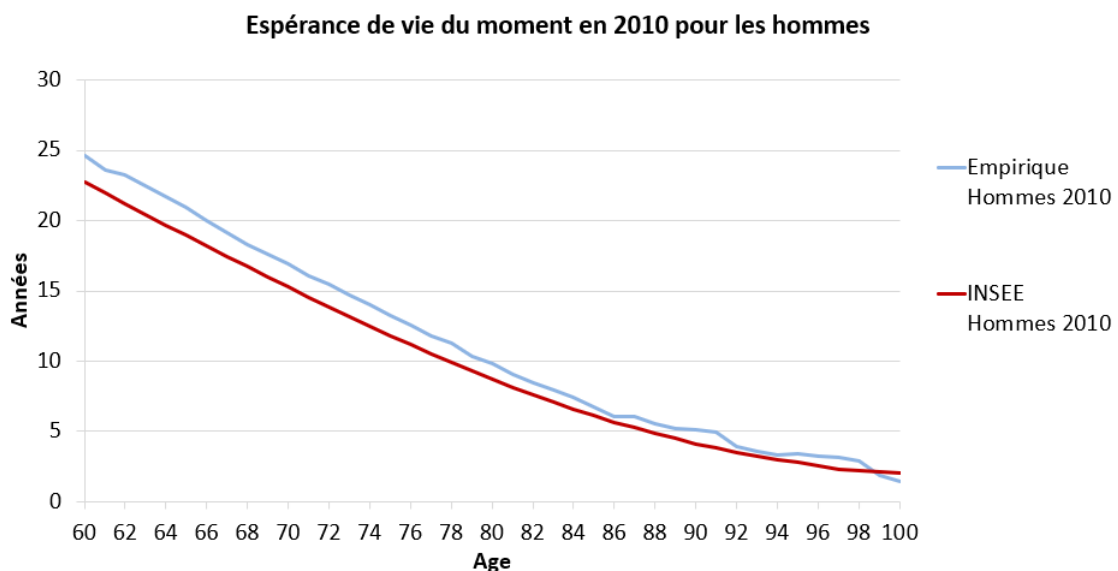


Figure. 3.5 – Espérance de vie du moment calculée l'année 2010 pour les hommes avant ajustement

Finalement, l'approche par le SMR est assez simple puisqu'elle consiste à ajuster la mortalité de l'organisme uniquement avec un paramètre. Le SMR représente la déviation observée entre les décès empiriques et ceux de la table de référence. L'étude abordera dans la suite la fermeture de la table et la validation de l'ajustement par cette méthode.

7. Les autres années sont présentées en Annexe G, pages 127 et 128.

Méthode 2⁸ : La deuxième méthode consiste en l'approche à deux paramètres avec un modèle relationnel. L'ajustement est réalisé via une régression logistique :

$$\text{logit}(\tilde{q}_{x^*}(t^*)) = \alpha + \beta \text{logit}(q_{x^*}^{ref}(t^*)) + \varepsilon_{x^*,t^*}$$

Cette relation peut être utilisée dans le cas de pays développés à en croire Viville (2008)⁹. Les logits des probabilités conditionnelles de décès sont ajustés sur les logits des probabilités de décès de la table de référence. Le paramètre α est un indicateur de mortalité qui affecte tous les âges, alors que le paramètre β modifie cet effet avec l'âge. L'estimation est effectuée par minimisation de la distance pondérée par l'exposition entre les probabilités de décès observées et estimées :

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \underset{\alpha, \beta}{\text{argmin}} \sum_{x^*, t^*} |E_{x^*, t^*} \times (\hat{q}_{x^*}(t^*) - \tilde{q}_{x^*}(t^*))|$$

Voici les résultats de l'estimation des paramètres pour les femmes et les hommes, sur la même période que précédemment :

Table INSEE - [65,95]		
Population	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
Hommes	0,1742	1,1355
Femmes	-0,0684	1,0167

TABLE 3.3 – Valeur des paramètres α et β pour les deux populations

En fin de compte, nous obtenons les probabilités de décès de la population étudiée sur la plage $x \in [65, 95]$ et $t \in [2009, 2060]$ via :

$$\tilde{q}_x(t) = \frac{\exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta} \times \text{logit}(q_x^{ref}(t)))}{1 + \exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta} \times \text{logit}(q_x^{ref}(t)))} \quad (3.2)$$

Il faut à ce stade noter que la fonction *logit* est telle que les probabilités de décès sont sous-estimées lorsque $q_x(t) \leq 1/2$ et sur estimées sinon¹⁰. En ce qui nous concerne, c'est-à-dire le risque de survie, le modèle apporte une marge de sécurité.

Une fois que l'ajustement est obtenu, il convient de le tester. En effet, avant de se lancer dans la fermeture des tables, il faut d'abord voir si elles sont admissibles. Pour cela, deux groupes de critères sont applicables, permettant soit de poursuivre la démarche, soit de la stopper. Le premier groupe correspond à des critères de proximité entre les observations et le modèle, alors que le second groupe fait état de la régularité de l'ajustement.

8. La présentation de la méthode est tirée de la note de travail de l'Institut des Actuaire III291-12 v1.7, page 5/13, Planchet & Tomas [2014b].

9. Viville propose une étude efficace sur la mortalité de différents pays et montre que l'ajustement linéaire des logits des taux de décès est pertinent à partir de 25 ans dans les pays développés.

10. L'Annexe H page 129 propose une démonstration de cette affirmation.

Les critères du groupe 1 sont des critères de proximité entre les observations et les valeurs de la table de référence. Les critères de proximité entre les observations peuvent être appréciés soit de manière graphique, soit par des tests. Les graphiques utiles sont bien sûr ceux des ajustements avec la mortalité de référence, ceux des décès ajustés et observés avec les intervalles de confiance et enfin les graphiques des résidus de la réponse, des résidus de Pearson, et des résidus de la déviance pour chaque année.

En ce qui concerne les graphiques¹¹, leur construction doit être inspectée afin de comprendre la manière de les interpréter.

- Le premier graphique disponible est celui de la probabilité conditionnelle de décès ajustée $\tilde{q}_x(t)$ avec la mortalité observée. L'ajustement de la table INSEE pour l'année 2010 pour les deux populations se trouve en Figure 3.6.

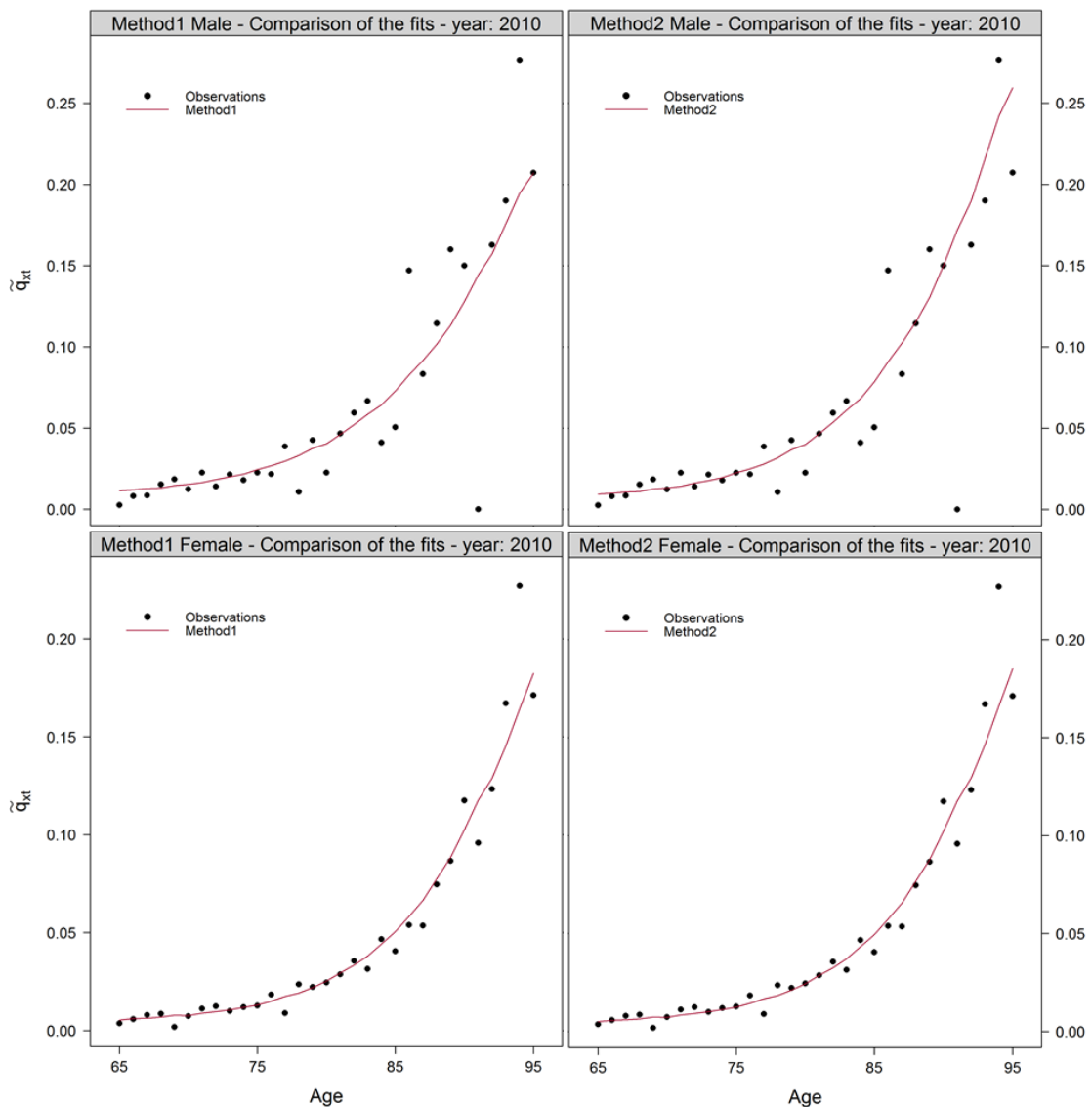


Figure. 3.6 – Ajustement des q_x en 2010 via la méthode 1 (gauche) et la méthode 2 (droite)

11. Les différents graphiques présentés ci-dessous sont issus des fonctionnalités du package ELT.

En ce qui concerne la population féminine, il semblerait qu'il y ait peu de différence entre les deux méthodes jusqu'à 92 ans. Pour les trois derniers âges, la méthode 2 capte légèrement mieux les taux de décès. Les différences proviennent donc des âges élevés. Néanmoins, la question de la fermeture de la table se posera dans la suite, et il faudra donc y revenir.

Pour ce qui est de la population masculine, la méthode 2 semble beaucoup plus efficace dès 86 ans. Mais, comme pour la population féminine, les ajustements paraissent (visuellement) très semblables aux âges précédents... Il faut donc prendre du recul à la vue de ces graphiques qui ne permettent pas réellement d'établir une hiérarchie dans la qualité des ajustements. Par contre, ils permettent d'annoncer les prémices d'un rejet ou d'une validation.

Qui plus est, seule une année est présentée, mais en réalité, le choix se fait en ayant conscience des ajustements sur l'ensemble de la plage.

- Le deuxième graphique permet de comparer le logarithme de la probabilité conditionnelle de décès $\log(\tilde{q}_x(t))$ avec la mortalité observée. Ici encore, voici le résultat obtenu pour l'ajustement de la table INSEE pour les deux méthodes et les deux populations, présenté en Figure 3.7.

L'observation de ces graphiques mène à la même conclusion que pour ceux de l'ajustement des taux de décès : la méthode 2 ne semble pas plus efficace que la méthode 1 dans le cas de la population féminine. En revanche, la méthode 2 surclasse la première méthode pour la population masculine aux âges élevés. Une fois encore, les valeurs des ajustements seront susceptibles d'être modifiées lors de la mise en oeuvre de la procédure de fermeture des tables : il est alors délicat de hiérarchiser les ajustements avec si peu d'information.

- Le troisième graphique est celui des résidus¹² de la réponse, des résidus de Pearson et des résidus de la déviance pour chaque année.

Les résidus de la réponse sont égaux à la différence entre les valeurs observées et les valeurs issues de la modélisation.

$$r_{x,t} = \hat{q}_x(t) - \tilde{q}_x(t)$$

Les résidus de la réponse ne doivent pas présenter de tendance.

Pour pouvoir parler du graphique des résidus de Pearson, il faut les définir. Ils sont définis comme :

$$r_{x,t} = \frac{D_{x,t} - E_{x,t}\tilde{q}_x(t)}{\sqrt{\text{Var}(E_{x,t}\tilde{q}_x(t))}}$$

12. Les définitions des résidus sont issues de la note de travail de l'Institut des Actuaire II1291-14 v1.4, page 2/29, Planchet & Tomas (2014c).

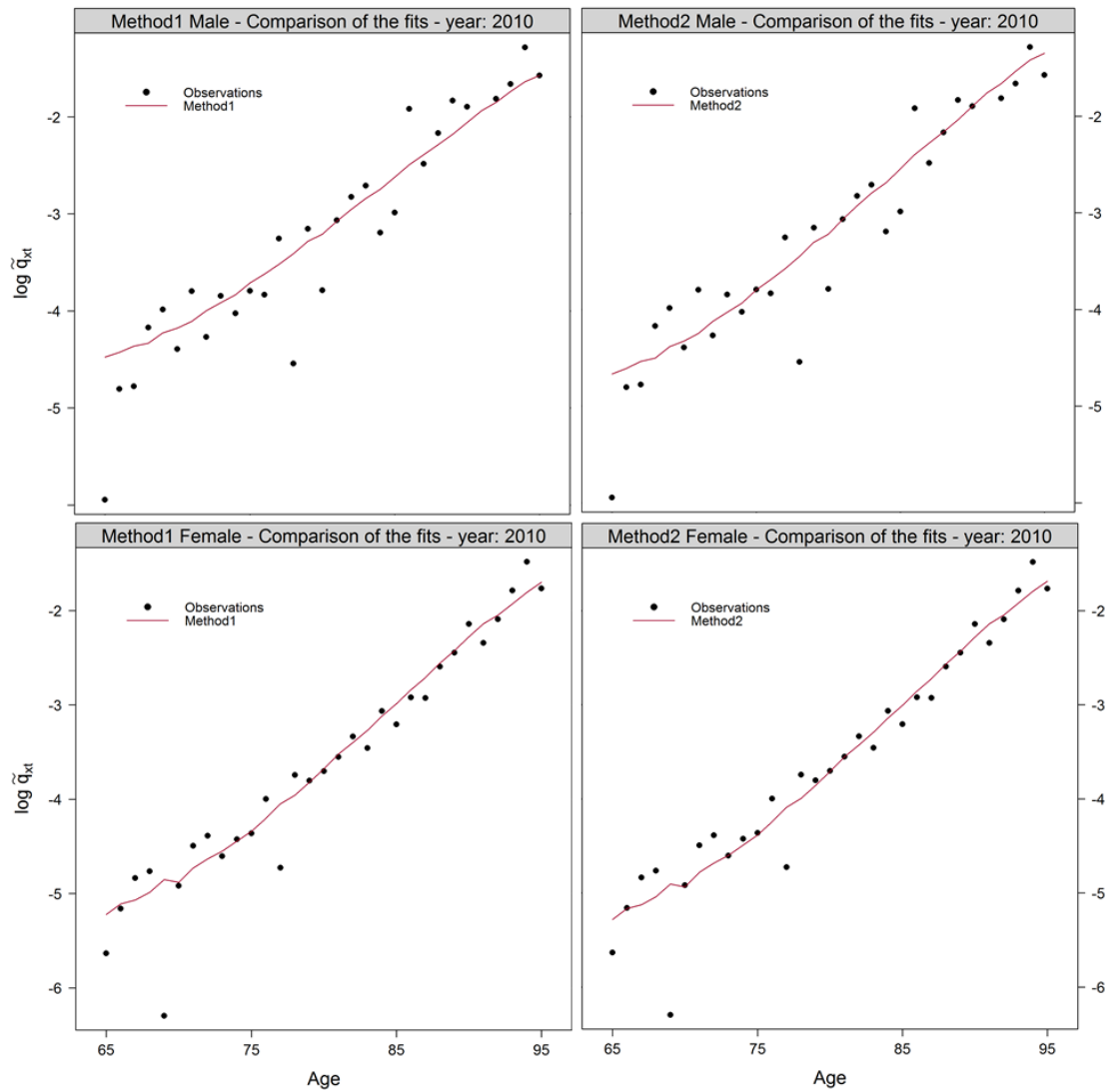


Figure. 3.7 – Ajustement du log des taux de décès en 2010 via la méthode 1 (gauche) et la méthode 2 (droite)

Comme pour les résidus de la réponse, les résidus de Pearson ne doivent pas présenter de tendance. De plus, si les résidus de Pearson sont dans l'intervalle $[-2, 2]$, alors l'approche modélise correctement la variabilité des données.

Enfin, en ce qui concerne les résidus de la déviance, ils sont définis par :

$$r_{x,t} = \text{signe}(D_{x,t} - E_{x,t}\tilde{q}_x(t)) \times \sqrt{\text{Deviance}_{x,t}}$$

Sous l'hypothèse que les décès suivent une loi de Poisson, $D_{x,t} \sim \mathcal{P}(E_{x,t}q_x(t))$, alors $\text{Deviance}_{x,t}$ ¹³ est telle que :

$$\begin{aligned} \text{Si } D_{x,t} > 0, \text{ Deviance}_{x,t} &= 2 \left(D_{x,t} \ln \left(\frac{D_{x,t}}{E_{x,t}\tilde{q}_x(t)} \right) - (D_{x,t} - E_{x,t}\tilde{q}_x(t)) \right) \\ \text{Si } D_{x,t} = 0, \text{ Deviance}_{x,t} &= 2E_{x,t}\tilde{q}_x(t) \end{aligned}$$

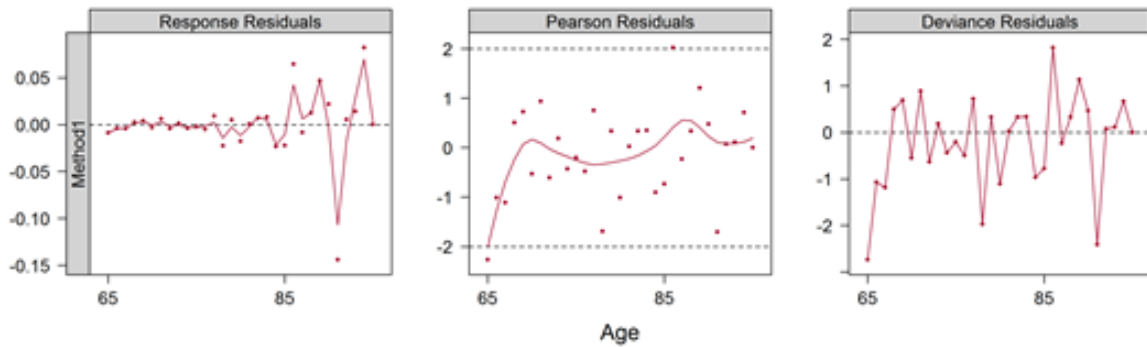
13. L'Annexe I page 130 propose une démonstration de ce résultat.

S'il s'avère que plusieurs résidus successifs ont un même signe, alors les données sont sur-lissées localement.

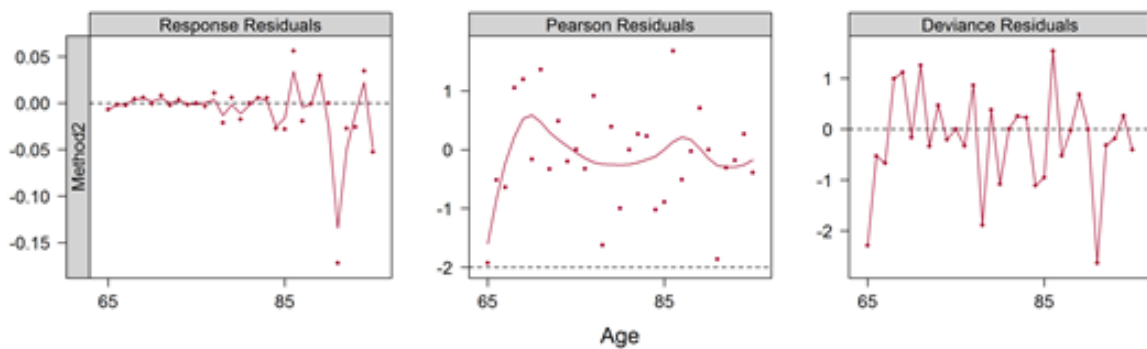
L'interprétation se fait sur la base de la Figure 3.8 ci-après. Pour la population masculine, la forme des ajustements sur les taux de décès se retrouve dans les résidus de la réponse. En effet, ceux de la méthode 2 sont plus faibles aux âges élevés que ceux de la méthode 1. Les résidus de Pearson sont meilleurs dans le cas de la méthode 2, puisqu'ils sont tous dans l'intervalle $[-2, 2]$, contrairement à ceux de la méthode 1. Enfin, les résidus de la déviance semblent plus acceptables dans le cas de la méthode 2 : les signes sont plus alternés, notamment entre les âges 72 et 77.

Concernant la population féminine, les conclusions sont moins aisément tranchées. Les résidus de la réponse et de Pearson sont quasiment identiques, bien que le résidus à l'âge 69 soit moins loin de -2 pour la méthode 2 que pour la méthode 1. En revanche, la différence se fait sur les résidus de la déviance. Si les âges 85 à 89 présentent les mêmes caractéristiques, la méthode 1 propose des résidus plus efficaces entre 73 et 75 ans ainsi qu'entre 79 et 81 ans. Ici encore, seule l'année 2010 est présentée afin de saisir la méthode d'interprétation, mais les conclusions quant à une éventuelle préférence pour une méthode ne peuvent pas être tirées à ce stade.

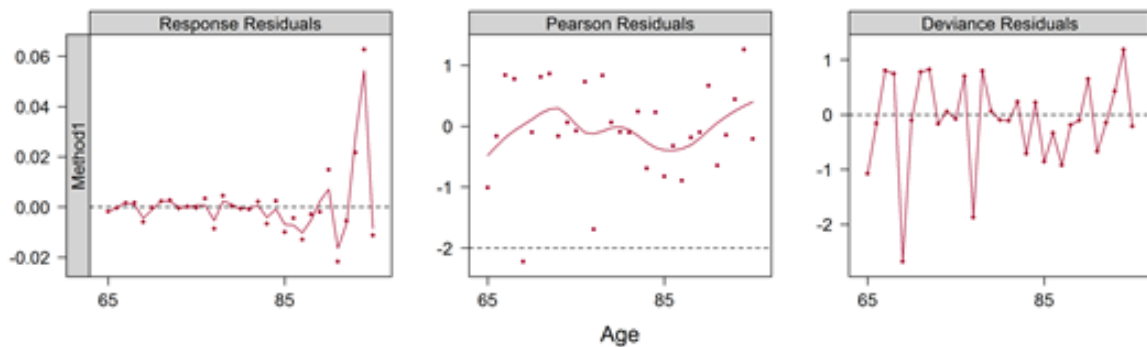
Method1 Male - Plot of the residuals - year: 2010



Method2 Male - Plot of the residuals - year: 2010



Method1 Female - Plot of the residuals - year: 2010



Method2 Female - Plot of the residuals - year: 2010

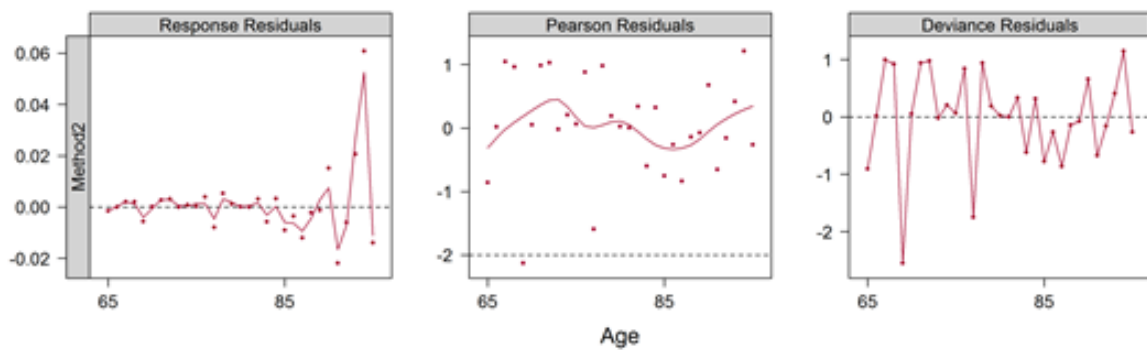


Figure. 3.8 – Graphiques des résidus pour les deux méthodes, pour chaque population

- Enfin, le dernier type de graphique à observer est celui des décès ajustés et observés avec les intervalles de confiance par année calendaire. Ces informations sont importantes puisqu'elles permettent de juger de l'efficacité de la modélisation des décès. L'approximation fondamentale qui permet d'obtenir les intervalles de confiance est l'approximation d'une loi Binomiale par une loi Normale.

En effet, en supposant que :

$$\mathcal{D}_{x,t} \sim \mathcal{N}(E_{x,t}q_x(t), E_{x,t}q_x(t)(1 - q_x(t)))$$

Alors l'intervalle de confiance à $(1 - \alpha) \%$ est donné par :

$$\left[E_{x,t}\tilde{q}_x(t) - z_{1-\alpha/2}\sqrt{E_{x,t}\tilde{q}_x(t)(1 - \tilde{q}_x(t))}, E_{x,t}\tilde{q}_x(t) + z_{1-\alpha/2}\sqrt{E_{x,t}\tilde{q}_x(t)(1 - \tilde{q}_x(t))} \right]$$

où $z_{1-\alpha/2}$ est le $(1 - \alpha/2)$ quantile de la distribution normale.

Il faut que les décès observés se situent dans l'intervalle de confiance théorique pour avoir une représentation correcte de la réalité. Il convient de garder à l'esprit que ce sont des intervalles ponctuels reliés, et non-pas des bandes de confiance, qui elles seraient plus larges.

Voici dans un premier temps les résultats pour la population féminine avec les deux méthodes, pour l'année 2010. Ce critère étant particulièrement important, les autres années sont présentées en Annexe J pages [131](#) et [132](#).



Figure. 3.9 – Intervalles de confiance femmes en 2010 via la méthode 1 (gauche) et la méthode 2 (droite)

C'est sans surprise que les différences entre les deux méthodes ne sont pas notoires, étant donné ce qui a été dit plus haut sur les ajustements des taux de décès et leur logit. Mais, ici encore, il semble plus pertinent de se concentrer sur les âges moins élevés, puisque les ajustements aux âges élevés seront quoi qu'il en soit modifiés avec la fermeture de la table. Cet aspect semble plus facilement interprétable que les graphiques précédents : l'ajustement permet-il de fournir une bonne estimation du nombre de décès ? C'est ce qui est directement lu sur les graphiques. Il est alors possible de compter le nombre de points hors de l'intervalle de confiance sur chaque année, indépendamment de l'âge. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Méthode 1	2	1	3	1	0	0	2
Méthode 2	2	1	4	2	0	0	1

TABLE 3.4 – Nombre de points hors de l'IC pour la population féminine par année

La première conclusion que l'on peut faire est que la méthode 2 n'améliore pas les estimations. Ensuite, il ressort que l'année 2011 est très volatile en termes de nombre de décès : aucune méthode n'arrive à prendre en compte cette variation. Enfin, un dernier point intéressant est que les nombres de décès prédits par la méthode 2 sont plus faibles que ceux prédits par la méthode 1. Cette observation est pertinente puisqu'elle informe sur la prudence des ajustements : la méthode 2 est plus prudente que la méthode 1, puisque les taux de décès ajustés sont plus bas. Néanmoins il faudra arbitrer entre prudence et imprécision. Dès lors l'argument de prudence ne doit pas se transformer en une parade et une fausse raison pour ne pas tenter d'obtenir une construction robuste.

Pour la population masculine, seule l'année 2010 est présentée à la Figure 3.10, et comme pour la population féminine, les autres années sont présentées en Annexe K pages 133 et 134. La première remarque à formuler est que la méthode 2 encadre mieux les décès. Globalement, l'intervalle de confiance de la méthode 1 est, ici aussi, plus haut. De fait, le nombre de décès à 65 ans est mal prévu. Finalement, 3 âges ne sont pas dans l'intervalle de confiance pour l'année 2010 pour la méthode 1, contre 1 pour la méthode 2. Comme pour la population féminine, il ne reste plus qu'à faire le décompte des points hors des intervalles de confiance. Les résultats sont résumés dans le tableau 3.5.

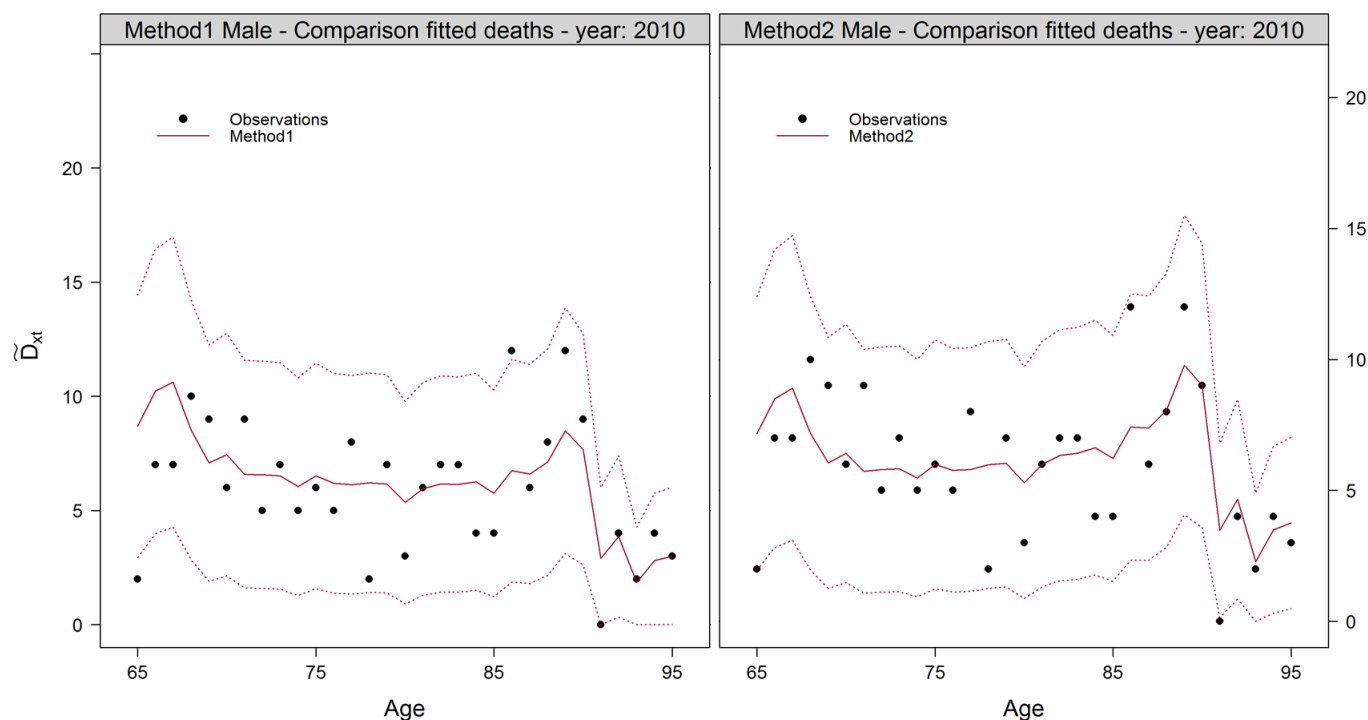


Figure. 3.10 – Intervalles de confiance hommes en 2010 via la méthode 1 (gauche) et la méthode 2 (droite)

	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Méthode 1	1	3	4	1	3	1	0
Méthode 2	2	1	4	1	2	0	0

TABLE 3.5 – Nombre de points en dehors de l'IC pour la population masculine par année

Contrairement à la population féminine, la méthode 2 semble mieux représenter les décès. Néanmoins, les points en dehors pour la méthode 2 sont ceux qui sont en dehors pour la méthode 1. La différence se fait bien souvent sur des points en bordure des intervalles. Il est donc difficile de se prononcer fermement sur la hiérarchie de ces méthodes. La méthode 2 nécessite l'estimation de 2 paramètres, alors que la méthode 1 n'est basée que sur un seul. La parcimonie inhérente à la première méthode est appréciable, mais cet aspect est difficilement discriminant.

Finalement, ces graphiques donnent une idée visuelle de l'ajustement. Ils permettent l'élimination des ajustements présentant des caractéristiques aberrantes, mais ne suffisent pas à déterminer la méthode la plus efficace. Pour la population féminine, il semblerait que les deux méthodes mènent plus ou moins au même résultat. Une explication théorique est fournie dans la suite. En plus d'une validation visuelle, il faut aussi se pencher sur les tests statistiques¹⁴, et là encore, il en existe plusieurs.

14. Casella & Berger (2001) et Wasserman (2004) offrent un bon aperçu théorique.

Test 1.1 : rapport de vraisemblance¹⁵ : le premier test est celui du rapport de vraisemblance, dont les hypothèses sont :

- \mathcal{H}_0 : l'ajustement correspond à la loi de mortalité sous-jacente ;
- \mathcal{H}_1 : l'ajustement ne correspond pas à la loi de mortalité sous-jacente.

Sous l'hypothèse de la loi de Poisson, la statistique du test est :

$$\xi^{LR} = \sum_{(x,t)} \left(D_{x,t} \ln \left(\frac{D_{x,t}}{E_{x,t} \tilde{q}_x(t)} \right) - (D_{x,t} - E_{x,t} \tilde{q}_x(t)) \right)$$

Si \mathcal{H}_0 est vraie, alors $\xi^{LR} \sim \chi^2(n)$, où n est le nombre d'observations. L'hypothèse \mathcal{H}_0 est rejetée si :

$$\xi^{LR} > \chi_{1-\alpha}^2(n)$$

où $\chi_{1-\alpha}^2(n)$ est le quantile $(1 - \alpha)$ de la distribution du χ^2 à n degrés de liberté. La p -value est donnée par :

$$p - value = \mathbb{P}[\chi_{1-\alpha}^2(n) > \xi^{LR}] = 1 - F_{\chi^2(n)}(\xi^{LR})$$

Plus la p -value est proche de 1, mieux c'est.

Test 1.2 : test du SMR¹⁶ : le second test disponible est le test du SMR. Il s'agit du test du rapport entre le nombre de décès observés et ajustés. Toujours sous l'hypothèse que les décès suivent une loi de Poisson, le SMR est alors égal à :

$$SMR = \frac{\sum_{(x,t)} D_{x,t}}{\sum_{(x,t)} E_{(x,t)} \tilde{q}_x(t)}$$

Le test de Liddell¹⁷ est effectué pour savoir si le SMR est significativement différent de 1. Le test du SMR est défini par :

- \mathcal{H}_0 : le SMR n'est pas significativement différent de 1 ;
- \mathcal{H}_1 : le SMR est significativement différent de 1.

Nous calculons la statistique suivante :

$$\begin{aligned} \text{Si } SMR > 1, \quad \xi^{SMR} &= 3 \times D^{\frac{1}{2}} \left(1 - (9D)^{-1} - (D/E)^{\frac{1}{3}} \right) \\ \text{Si } SMR < 1, \quad \xi^{SMR} &= 3 \times D^{*\frac{1}{2}} \left((D^*/E)^{\frac{1}{3}} + (9D^*)^{-1} - 1 \right) \end{aligned}$$

15. La présentation du test dans le contexte de la mortalité est issue de la note de travail de l'Institut des Actuaire II1291-14 v1.4, page 5/29, Planchet & Tomas (2014c).

16. De la même façon, la présentation du test est tirée de la note de travail de l'Institut des Actuaire II1291-14 v1.4, page 6/29, Planchet & Tomas (2014c).

17. Liddell (1984).

où :

$$\begin{aligned} - D &= \sum_{(x,t)} D_{x,t} \\ - D^* &= \sum_{(x,t)} D_{x,t} + 1 \\ - E &= \sum_{(x,t)} -E_{x,t} \tilde{q}_x(t) \end{aligned}$$

Si \mathcal{H}_0 est vraie, alors $\xi^{SMR} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. L'hypothèse \mathcal{H}_0 est rejetée si :

$$\xi^{SMR} > \mathcal{N}_{1-\alpha}(0, 1)$$

où $\mathcal{N}_{1-\alpha}(0, 1)$ est le quantile $(1-\alpha)$ de la distribution normale centrée réduite. La p -value est donnée par :

$$p - value = \mathbb{P}[\mathcal{N}_{1-\alpha}(0, 1) > \xi^{SMR}] = 1 - F_{\mathcal{N}(0,1)}(\xi^{SMR})$$

Plus la p -value est proche de 1 mieux c'est.

Test 1.3 : test de Wilcoxon¹⁸ : le dernier test du groupe est le test de Wilcoxon. Ce test prend en compte la direction et la grandeur des différences entre les paires composées des probabilités de décès observées et ajustées. Le test de Wilcoxon est défini par :

- \mathcal{H}_0 : la médiane entre la différence de chaque paire est nulle ;
- \mathcal{H}_1 : la médiane entre la différence de chaque paire n'est pas nulle.

En pratique, nous calculons les différences entre les probabilités de décès observées et ajustées, puis nous les classons par ordre croissant des valeurs absolues, en enlevant les différences nulles. Nous affectons à chaque différence non nulle son rang dans le classement, et nous notons w_+ et w_- la somme des rangs des différences strictement positives et négatives respectivement. Enfin, nous notons $w = \max(w_+, w_-)$.

Nous pouvons calculer la statistique du test :

$$\xi^{WIL} = \frac{(w - 1/2 - n(n+1))/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

Si \mathcal{H}_0 est vraie, alors $\xi^{WIL} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

L'hypothèse \mathcal{H}_0 est rejetée si :

$$|\xi^{WIL}| > \mathcal{N}_{1-\alpha/2}(0, 1)$$

où $\mathcal{N}_{1-\alpha/2}(0, 1)$ est le quantile $(1 - \alpha/2)$ de la distribution normale centrée réduite. La p -value est donnée par :

$$p - value = \mathbb{P}[|\mathcal{N}_{1-\alpha/2}(0, 1)| > |\xi^{SMR}|] = 2 \times (1 - F_{\mathcal{N}(0,1)}(|\xi^{SMR}|))$$

Plus la p -value est proche de 1 mieux c'est.

18. La présentation du test est issue de la note de travail de l'Institut des Actuaire II1291-14 v1.4, page 6/29, Planchet & Tomas (2014c).

Les critères étant maintenant définis, les tests peuvent être appliqués sur les résultats des méthodes. Voici les résultats, pour les femmes et les hommes et pour les deux méthodes :

Test du rapport de vraisemblance	Femmes		Hommes	
	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 1	Méthode 2
Méthode	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 1	Méthode 2
χ^2	231,18	314,80	237,13	261,93
Seuil	252,37	252,37	252,37	252,37
Hypothèse	<i>H0</i>	<i>H1</i>	<i>H0</i>	<i>H1</i>
<i>p - values</i>	0,2425	0	0,1661	0,0199

TABLE 3.6 – Résultats du test du rapport de vraisemblance

Pour les deux populations, le test du rapport de vraisemblance rejette l'utilisation de la méthode 2. Bien qu'acceptées, les *p - values* de la méthode 1 restent faibles. Ce test permet de vérifier l'adéquation de l'ajustement, et il semble à première vue assez dérangeant de voir que les ajustements ne remplissent pas ce critère. Néanmoins, le test du rapport de vraisemblance n'apporte qu'une seule information, il faut donc poursuivre pour avoir d'autres sources d'aide à la décision. De plus, étant donné la volatilité observée des données, il semble être compliqué d'avoir un ajustement fin avec des méthodes peu flexibles. De fait, ce test ne sera pas considéré comme discriminatoire.

Test du SMR	Femmes		Hommes	
	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 1	Méthode 2
Méthode	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 1	Méthode 2
<i>SMR</i>	1,0000	1,0260	1,0000	1,0286
χ^2	0,0058	1,4505	0,0082	1,1358
Seuil	1,6449	1,6449	1,6449	1,6449
Hypothèse	<i>H0</i>	<i>H0</i>	<i>H0</i>	<i>H0</i>
<i>p - values</i>	0,4977	0,0735	0,4967	0,1280

TABLE 3.7 – Résultats du test du SMR

Pour le test du SMR, il convient de spécifier que les *p - values* issues de la méthode 1 sont bonnes, alors que celles issues de la méthode 2 sont très faibles. Ceci pose problème puisque le SMR est le rapport entre le nombre de décès observés et ajustés. Ce critère est primordial étant donné la direction que va prendre la suite du travail. La conclusion qu'il est possible de tirer est que le nombre de décès modélisé est assez représentatif de la réalité pour les tables de la méthode 1.

Enfin, pour le dernier test du groupe 1, le test de Wilcoxon, tous les voyants sont au vert :

Test de Wilcoxon	Femmes		Hommes	
Méthode	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 1	Méthode 2
W	11 880	12 779	13 308	12 047
χ^2	0,0572	1,0281	1,5994	0,2376
Seuil	1,96	1,96	1,96	1,96
Hypothèse	H_0	H_0	H_0	H_0
$p - values$	0,9544	0,3039	0,1097	0,8122

TABLE 3.8 – Résultats du test de Wilcoxon

Étant donné la définition de ce test présentée plus haut, il constitue un critère fondamental dans l'analyse de l'ajustement. Deux $p - values$ sortent du lot : celle de la méthode 1 pour les femmes et la méthode 2 pour les hommes. Néanmoins, pour cette dernière, il faut garder en tête les résultats du test du rapport de vraisemblance. Un dernier niveau de contrôle est possible, à l'aide de différentes valeurs d'intérêt.

Il ne reste plus qu'à examiner les valeurs du χ^2 , du R^2 , du $MAPE$ et de la déviance¹⁹.

Valeur d'intérêt	Femmes		Hommes	
Méthode	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 1	Méthode 2
χ^2	237,66	246,16	244,30	220,88
R^2	0,9030	0,9049	0,7018	0,7329
$MAPE$	27,36	26,23	34,28	31,49
$Deviance$	462,37	629,59	474,26	523,87

TABLE 3.9 – Valeurs d'intérêt

Pour ces valeurs, l'objectif est d'avoir la plus petite valeur du χ^2 , du $MAPE$ et de la déviance, et la plus grande pour le R^2 . Sur ces valeurs, le clivage homme-femme apparaît dans le R^2 : il est de 90 % pour les femmes contre 70 % pour les hommes. Ceci n'est pas étonnant, étant donné la dispersion des décès pour la population masculine, et la forme de l'ajustement. En effet, il faut avoir conscience que l'ajustement par la méthode 1 est une translation directe sur les taux de mortalité de référence, et la méthode 2 est une translation sur les *logits* des taux. En somme, ces méthodes ne transforment pas les courbures des tables de références, mais les déplacent. Comme les données sont assez erratiques, l'ajustement simple ne peut techniquement pas prendre en compte ces variations. Dans la suite, une méthode sera présentée afin de tester la solidité des paramètres estimés en fonction du nombre de données disponibles.

Pour la *Deviance*, l'ordre n'est pas étonnant puisque la déviance est utilisée pour construire le test du rapport de vraisemblance : la méthode 2 présente des grandes valeurs, alors que celles de la méthode 1 sont plus faibles.

19. Bien que la déviance ait été définie plus haut, les définitions du χ^2 , du R^2 et du $MAPE$ sont détaillées en Annexe L page 135. Ces définitions sont tirées de la note de l'Institut des Actuaire II1291-14 v1.4, pages 4 et 5/29, Planchet & Tomas (2014c).

Enfin, le $MAPE$ permet de mesurer l'exactitude de l'ajustement par rapport aux observations. Là encore, les résultats numériques sont à mettre en relation avec les études graphiques précédemment effectuées. La différence entre les valeurs issues des méthodes pour la population féminine est faible, tout comme l'était la différence entre le nombre de points en dehors des intervalles de confiance. En revanche, la méthode 2 pour les hommes captait mieux les décès, il n'est donc pas surprenant d'obtenir une valeur du $MAPE$ plus petite pour la méthode 2 que pour la méthode 1.

Il convient de s'arrêter un instant sur un point. Les tests sont largement dépendants de la plage d'âge considérée, et donc de la quantité de points utilisée pour construire le test.

En effet, illustrons le problème à l'aide d'un exemple très simple, mais très parlant. Imaginons que les données soient constituées de réalisations d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(5, 1)$.

Nous connaissons la loi de cette variable aléatoire, et allons tester si les données peuvent être assimilées à une loi Exponentielle. Le test utilisé est le test de Kolmogorov-Smirnov. La question est la suivante : à partir de quand le test rejette l'hypothèse H_0 ? Pour ce faire, la démarche est la suivante :

- Etape 1 : création d'un vecteur de tailles d'échantillons, en l'occurrence, la taille va de 5 en 5, en partant de 5 pour atteindre 50 ;
- Etape 2 : simulation de 1000 échantillons de taille correspondante issus d'une distribution $\mathcal{N}(5, 1)$;
- Etape 3 : mise en oeuvre du test de Kolmogorov-Smirnov pour chaque échantillon ;
- Etape 4 : décompte du nombre de fois où la p -value dépasse 0,05.

Finalement, nous avons 1000 tests pour chaque taille qui augmente de 5 en 5. De fait, nous sommes capables de fournir l'allure du résultat du test en fonction du nombre de données utilisées pour l'effectuer (cf Figure 3.11).

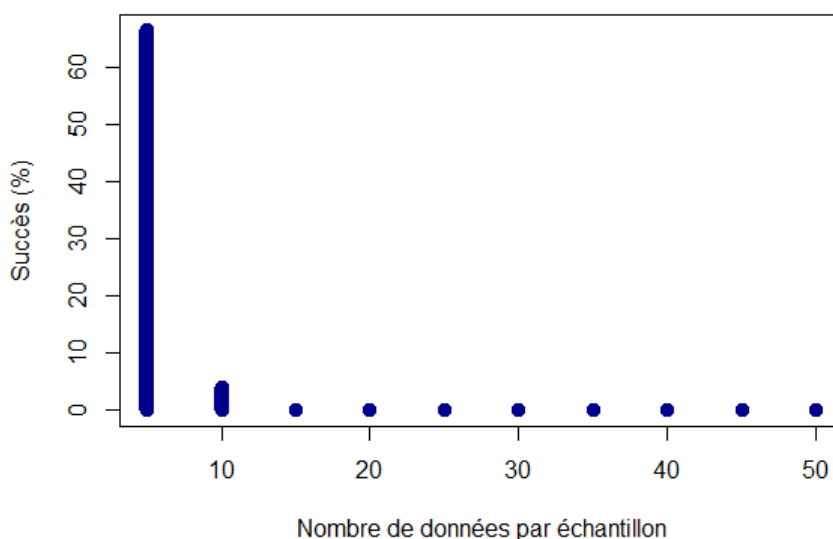


Figure. 3.11 – Mise en lumière de la précaution nécessaire pour utiliser les tests

Pour le cas des tailles 5 et 10, le test valide H_0 dans 65,6 % et 4,19 % des cas. En revanche, dès que l'on passe à une taille supérieure ou égale à 15, H_0 n'est jamais retenue. Dès lors, la taille des échantillons est importante dans la lecture de la signification du test.

Suite à cette digression sur les tests, les résultats présentés ci-dessus méritent d'être éclaircis. Par exemple, le tableau 3.10 présente la valeur de p - *value* du test du rapport de vraisemblance pour la méthode 2 :

Plage d'âge	65-95	67-95	69-92	72-92
Femmes	0	0	9e-04	0,219
Hommes	0,019	0,054	0,004	3e-04

TABLE 3.10 – p - *values* du test du rapport de vraisemblance en fonction de la plage d'âge

Le fait de changer les plages a permis d'avoir des p - *values* acceptables pour chaque méthode, et pour chaque population. Néanmoins, la source des tests a changé : les données utilisées pour calculer les valeurs des statistiques ne sont plus les mêmes. Qui plus est, la plage a été modifiée de façon à avoir une p - *value* acceptable. La comparaison n'est donc pas viable. La question de la plage d'âge est primordiale. Le choix qui a été fait ici est de donner plus d'importance à une large plage, afin d'être sûr que le test ait le plus de chance de refléter la réalité et ne soit pas entaché par un nombre de données trop faible. C'est donc la plage [65, 95] qui a été retenue, même si les tests ne sont pas tous satisfaisants pour la méthode 2.

Dans la suite, le même raisonnement est tenu pour les paramètres, afin de regarder dans quelle mesure les estimations sont dépendantes de la taille de l'échantillon.

Maintenant que les critères du groupe 1 sont satisfaits, la validation peut passer à la mise en oeuvre des critères du groupe 2. Ce sont des tests faisant état de la régularité de l'ajustement. Deux tests sont mis en oeuvre : le test des *runs* et le test des signes.

Test 2.1 : test des runs²⁰ : le test des *runs* est un test non-paramétrique qui permet de déterminer si les éléments d'une séquence sont mutuellement indépendants. Par définition, un *run* est le segment d'une séquence, formé par des éléments adjacents égaux. Par exemple, dans la séquence suivante, 5 *runs* apparaissent :

$$\{++++- - - + + - - - - - + + +\}$$

3 *runs* sont constitués de + et 2 sont constitués de -.

Le test des *runs* est :

- \mathcal{H}_0 : le nombre de *runs* d'une séquence de n éléments est une variable aléatoire dont la distribution conditionnelle sachant le nombre n_+ de signes positifs et n_-

20. Le test est présenté dans la note de travail de l'Institut des Actuaire II1291-14 v1.4, page 4/29, Planchet & Tomas (2014c).

de signes négatifs, avec $n = n_+ + n_-$ est approximativement normale, avec :

$$\mu = \frac{2n_+n_-}{n_+ + n_-} + 1 \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{2n_+n_-(2n_+n_- - (n_+ + n_-))}{(n_+ + n_-)^2(n_+ + n_- - 1)}$$

— \mathcal{H}_1 : la distribution conditionnelle de la variable aléatoire n'est pas normale.

La statistique du test est :

$$\xi^{RUN} = \frac{\text{nombre de runs} - \mu}{\sigma}$$

Si \mathcal{H}_0 est vraie, alors $\xi^{RUN} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. L'hypothèse \mathcal{H}_0 est rejetée si :

$$|\xi^{RUN}| > \mathcal{N}_{1-\alpha/2}(0, 1)$$

où $\mathcal{N}_{1-\alpha/2}(0, 1)$ est le quantile $(1 - \alpha/2)$ de la distribution normale centrée réduite. La p -value est donnée par :

$$p\text{-value} = \mathbb{P}[\mathcal{N}_{1-\alpha/2}(0, 1) > |\xi^{RUN}|] = 2 \times (1 - F_{\mathcal{N}(0,1)}(|\xi^{RUN}|))$$

Encore une fois, nous chercherons la p -value la plus proche de 1.

Test 2.2 : test des signes²¹ : le deuxième test est le test des signes. Il est très proche du test de Wilcoxon, mais il n'examine que la fréquence des changements de signes de la différence entre les probabilités de décès observées et ajustées (sans s'intéresser à leur amplitude). Le test est :

- \mathcal{H}_0 : la médiane entre les signes négatifs et positifs de la différence est nulle ;
- \mathcal{H}_1 : la médiane n'est pas nulle.

En reprenant les notations du test des *runs*, la statistique du test s'écrit :

$$\xi^{SIG} = \frac{|n_+ - n_-| - 1}{\sqrt{n}}$$

Si \mathcal{H}_0 est vraie, alors $\xi^{SIG} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. L'hypothèse \mathcal{H}_0 est rejetée si :

$$|\xi^{SIG}| > \mathcal{N}_{1-\alpha/2}(0, 1)$$

où $\mathcal{N}_{1-\alpha/2}(0, 1)$ est le quantile $(1 - \alpha/2)$ de la distribution normale centrée réduite. La p -value est donnée par :

$$p\text{-value} = \mathbb{P}[\mathcal{N}_{1-\alpha/2}(0, 1) > |\xi^{SIG}|] = 2 \times (1 - F_{\mathcal{N}(0,1)}(|\xi^{SIG}|))$$

L'objectif est d'avoir une p -value la plus proche de 1.

Il ne reste plus qu'à appliquer les tests aux données, en commençant par le test des *runs*.

21. Ce test est décrit dans la note de travail de l'Institut des Actuariés II1291-14 v1.4, pages 3 et 4/29, Planchet & Tomas (2014c).

Test des <i>runs</i>	Femmes		Hommes	
	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 1	Méthode 2
Méthode				
Nombre de <i>runs</i>	107	103	104	121
Signes (-)	113	106	107	112
Signes (+)	104	111	110	105
$ \chi^2 $	0,3154	0,8772	0,7458	1,5820
Seuil	1,96	1,96	1,96	1,96
Hypothèse	<i>H0</i>	<i>H0</i>	<i>H0</i>	<i>H0</i>
<i>p-values</i>	0,7525	0,3804	0,4558	0,1137

TABLE 3.11 – Résultats du test des *runs*

Toutes les *p-values* sont acceptables, bien que celle de la méthode 2 pour les hommes soit plus faible. La méthode 1 s'illustre par de bonnes valeurs.

Pour le test des signes, voici les résultats :

Test des signes	Femmes		Hommes	
	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 1	Méthode 2
Méthode				
Signes (-)	113	106	107	112
Signes (+)	104	111	110	105
χ^2	0,5431	0,2715	0,1358	0,4073
Seuil	1,96	1,96	1,96	1,96
Hypothèse	<i>H0</i>	<i>H0</i>	<i>H0</i>	<i>H0</i>
<i>p-values</i>	0,5871	0,7890	0,8920	0,6838

TABLE 3.12 – Résultats du test des signes

Le test des signes ne pas permet de différencier les méthodes, puisque toutes les valeurs sont très bonnes.

Si ces deux tests ont la faculté de mesurer la régularité de l'ajustement, ils sont directement dépendants de la qualité des données et la capacité d'adaptation de la méthode. Or, comme spécifié plus haut, la malléabilité des méthodes n'est pas énorme. De fait, bien que ces tests soient bons, ils doivent être pris avec précaution.

Pour les deux populations, voici le résumé de la hiérarchie des méthodes, en fonction des résultats des tests et les valeurs d'intérêt, et du nombre de dépassements :

	Femmes M1	Femmes M2	Hommes M1	Hommes M2
Rapport de vraisemblance	1	2	1	2
Test du SMR	1	2	1	2
Test de Wilcoxon	1	2	2	1
χ^2	1	2	2	1
R^2	2	1	2	1
<i>MAPE</i>	2	1	2	1
Déviante	1	2	1	2
Test des <i>runs</i>	1	2	1	2
Test des signes	2	1	1	2
nombre de dépassements	1	2	2	1
Moyenne	1,3	1,7	1,5	1,5

TABLE 3.13 – Résumé des tests pour chacune des méthodes

Cette moyenne des scores permet de se faire une idée sur tous les tests appliqués. La hiérarchie qui en résulte doit être couplée à celle qui découlait de l'étude graphique. La conclusion de cette salve de tests graphiques et statistiques est que les deux méthodes peinent à se différencier clairement. En effet, hormis pour le test de vraisemblance, tous les autres sont validés, avec plus ou moins de réussite. Nous proposons d'apporter un éclairage théorique pour donner une base d'explication de la ressemblance des résultats.

Pour rappel, la méthode 1 consiste à dire que $\tilde{q}_x(t) = SMRq_x^{ref}(t)$, et la méthode 2 consiste à faire une régression logistique des taux de décès : $logit(\tilde{q}_{x^*}(t^*)) = \alpha + \beta logit(q_{x^*}^{ref}(t^*)) + \varepsilon_{x^*,t^*}$. Alors, en considérant des taux de décès petits, il vient, en faisant un développement limité de la méthode 2 :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\tilde{q}_{x,t}}{1 - \tilde{q}_{x,t}}\right) &= \alpha^* + \beta^* \ln\left(q_{x,t}^{ref} \left(1 + \sum_{i=1}^n q_{x,t}^{ref^i}\right) + o(q_{x,t}^{ref^{n+1}})\right) \\ &= \ln\left(\tilde{q}_{x,t} \left(1 + \sum_{i=1}^n \tilde{q}_{x,t}^i\right) + o(\tilde{q}_{x,t}^{n+1})\right) \end{aligned}$$

En passant à l'exponentielle,

$$\tilde{q}_{x,t} \left(1 + \sum_{i=1}^n \tilde{q}_{x,t}^i\right) + o(\tilde{q}_{x,t}^{n+1}) = \exp(\alpha^*) \exp\left(\beta^* \ln\left(q_{x,t}^{ref} \left(1 + \sum_{i=1}^n q_{x,t}^{ref^i}\right) + o(q_{x,t}^{ref^{n+1}})\right)\right)$$

Si cette expression semble a priori complexe, elle se simplifie drastiquement en considérant l'ordre du développement limité à 1. Dans ce cas, il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{x,t} + o(\tilde{q}_{x,t}) &= e^{\alpha^*} \exp\left(\beta^* \ln(q_{x,t}^{ref} + o(q_{x,t}^{ref}))\right) \\ \tilde{q}_{x,t} &\approx e^{\alpha^*} \exp(\beta^* \ln(q_{x,t}^{ref})) \\ \tilde{q}_{x,t} &\approx e^{\alpha^*} (q_{x,t}^{ref})^{\beta^*} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Alors, la forme $\tilde{q}_{x,t} = \text{constante} \times q_{x,t}^{ref}$ de la méthode 1 se retrouve. En particulier, la procédure d'estimation des paramètres de la méthode 2 conduit à $\alpha^* = -0,0684$ et $\beta^* = 1,0167$ pour la population féminine. Autrement dit, $e^\alpha = 0,934$, qui est à comparer à la valeur du SMR trouvée avec la méthode 1, à savoir 0,919. Voici la représentation graphique de l'approximation (3.3) :

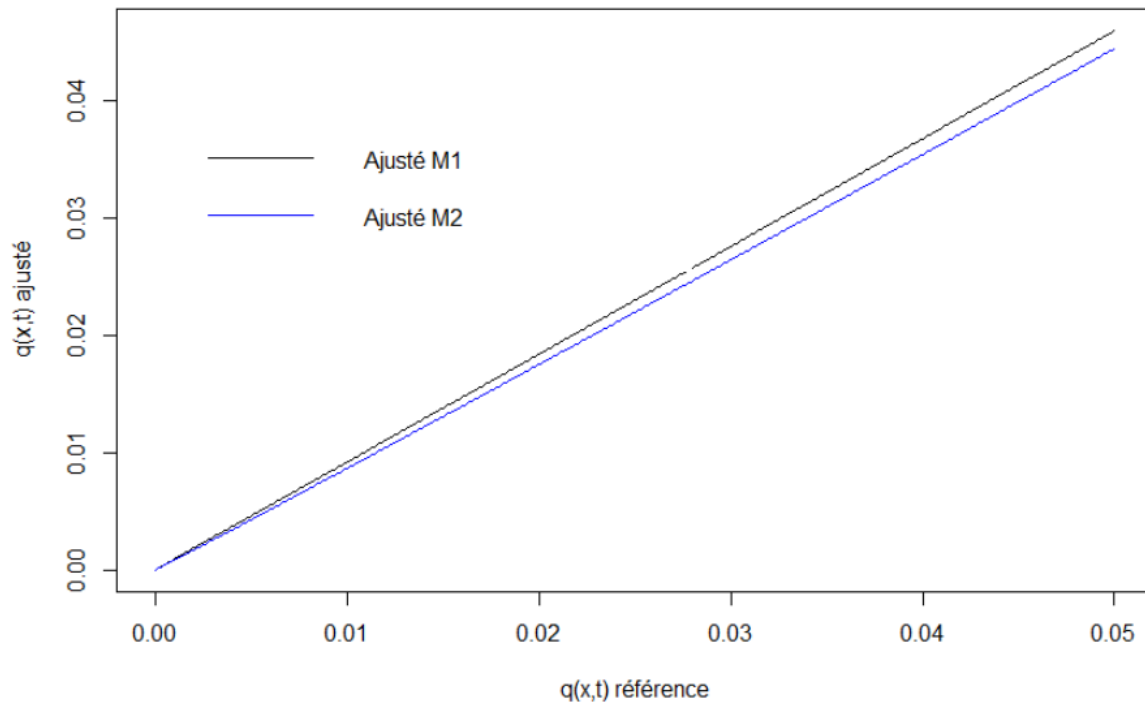


Figure. 3.12 – Comparaison de l'approximation (3.3) pour la population féminine

Il est donc normal d'avoir des résultats semblables pour la méthode 1 et 2. Ici encore, les taux de mortalité de la méthode 2 sont légèrement plus faibles que ceux de la méthode 1. Dès lors, il convient de mettre en oeuvre une méthode qui permette de tester la robustesse des estimations de chaque méthode. En effet, la différence intrinsèque de la méthode 1 avec la méthode 2 est le nombre de paramètres. Avec la même quantité de données, il faut une estimation pour la méthode 1 contre deux pour la méthode 2. La question qui se pose maintenant est la suivante : sachant que les deux méthodes sont plus ou moins équivalentes pour les taux de décès petits, comment choisir la méthode la plus appropriée ? Le critère retenu est celui de la capacité de la méthode à retranscrire correctement le nombre de décès attendu. Pour pouvoir comparer les deux méthodes, nous avons mis au point une méthode classique en machine learning : le bootstrap.

3.1.2 Une méthode discriminante

Lors de la phase de test des deux méthodes, il apparaît qu'aucune des méthodes ne se démarque. De plus, les deux méthodes sont peu ou prou équivalentes pour des taux de décès petits. Alors comment choisir ? La démarche adoptée permet de comparer la capacité de chacune des méthodes à prévoir le nombre de décès, et par conséquent de choisir

la meilleure méthode. Voici comment nous avons procédé.

La première étape consiste en la création d'un échantillon de travail et d'un échantillon de validation. En l'espèce, l'échantillon de travail est construit en tirant aléatoirement des lignes dans la base initiale. L'échantillon de travail est calibré pour faire 60 % de la base initiale : par conséquent, l'échantillon test correspond à toutes les lignes non tirées. Bien évidemment, le tirage est sans remise, de façon à ne pas avoir de doublons. Une fois les échantillons construits, la première phase consiste en l'estimation des paramètres de chaque méthode sur la base de l'échantillon de travail. De fait, le SMR et le couple (α^*, β^*) sont estimés grâce aux données de l'échantillon de travail. Puis, il suffit d'appliquer les formules (3.1) et (3.2) pour obtenir les taux de décès ajustés. Ensuite, le travail porte sur l'échantillon de validation. Nous calculons le nombre de décès observés sur les données de cet échantillon ainsi que l'exposition. Enfin, nous comparons le nombre de décès issus de l'application de la mortalité ajustée à la population de l'échantillon de validation, et le nombre de décès effectivement observés sur cet échantillon. En termes mathématiques, nous comparons pour chaque méthode

$$\Delta D_{Mi} = \sum_{x=65}^{95} \sum_{t=2009}^{2015} (D_{x,t}^{obs} - \tilde{q}_{x,t}^{Mi} E_{x,t}^{obs})$$

avec :

- $D_{x,t}^{obs}$: le nombre de décès observés sur l'échantillon de validation à l'âge x l'année t ,
- $\tilde{q}_{x,t}^{Mi}$: le taux de décès ajusté avec la méthode $i = 1, 2$, les paramètres de chaque méthode étant ajustés sur l'échantillon de travail,
- $E_{x,t}^{obs}$: l'exposition observée sur l'échantillon de validation à l'âge x l'année t .

ΔD_{Mi} est bien la différence entre les décès observés et les décès attendus. En pratique, et c'est pour cette raison que nous parlons de bootstrap plus haut, cette opération est répétée 2000 fois, de façon à pouvoir étudier la dispersion de ΔD_{Mi} . Finalement, nous obtenons quatre vecteurs de taille 2000 contenant les valeurs des ΔD_{Mi}^k , où k représente la k^{me} itération, pour chaque population (M1 Homme, M2 Homme et M1 Femme, M2 Femme).

Voici alors les *boxplots* de chacun des vecteurs, d'abord pour les hommes,

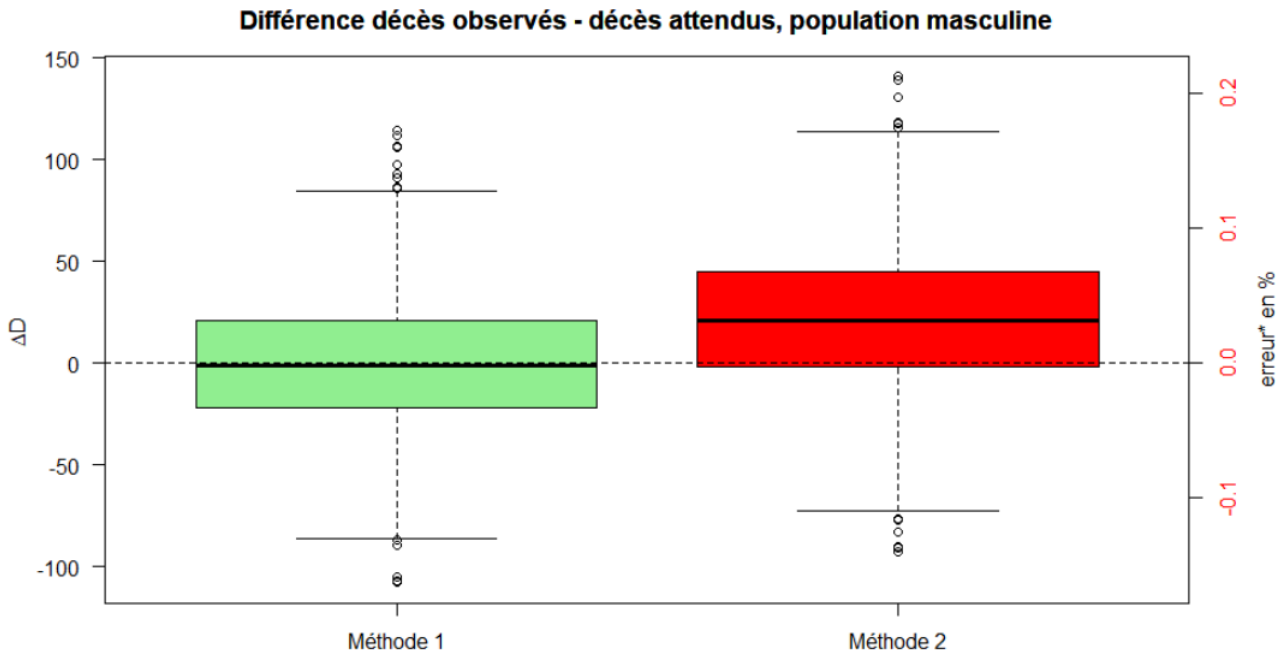


Figure. 3.13 – *Boxplot* de ΔD_{M1} à gauche et ΔD_{M2} à droite pour les hommes

puis pour les femmes,

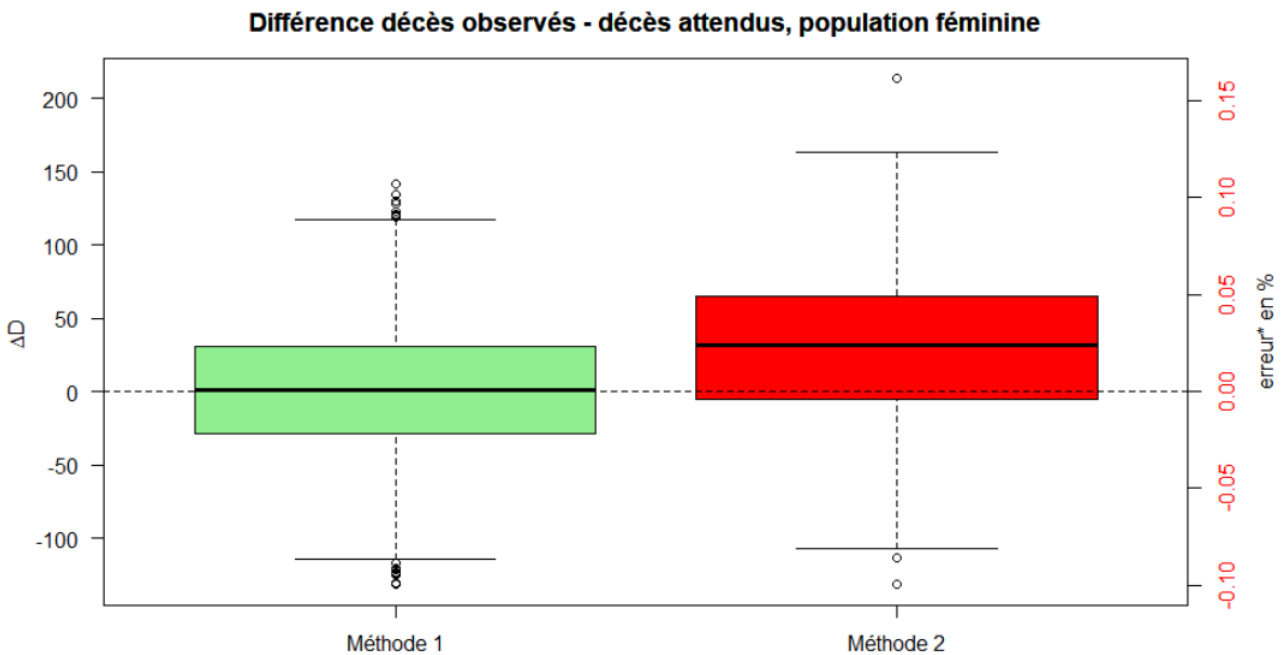


Figure. 3.14 – *Boxplot* de ΔD_{M1} à gauche et ΔD_{M2} à droite pour les femmes

Les axes de droite mettent en évidence "l'erreur en %" : c'est-à-dire que nous représentons la différence entre décès observés et décès attendus, rapportée au nombre moyen de décès observés sur l'échantillon de validation, soit 1530 décès dans le cas des femmes et 664 dans le cas des hommes. Pour rappel, les échantillons de validation représente 40 % des données initiales. En moyenne, il y a donc bien 40 % du nombre de décès total dans l'échantillon de validation. La méthode apporte un éclairage nouveau sur l'efficacité des

méthodes. En effet, que ce soit pour la population masculine ou féminine, la médiane de la différence entre les décès observés et les décès prévus est quasiment nulle pour la méthode 1, alors qu'elle est sensiblement supérieure à 0 pour la méthode 2. En somme, la méthode de *bootstrap* permet de mettre en lumière l'intuition initiale qu'a suscité l'étude graphique : la méthode 2 est plus prudente au sens où elle sous-estime les taux de décès. En d'autres termes, la méthode 1 représente mieux la mortalité de la population étudiée que la méthode 2.

Afin de comparer à la fois le biais et la dispersion, nous calculons pour chaque méthode la valeur suivante, appelée *Root Mean Square Error*²² :

$$\sigma_{Mi} = \sqrt{\mathbb{E}[\Delta D_{Mi}^2]}$$

Voici les valeurs numériques finales pour les hommes et les femmes :

Hommes	Différence moyenne	Erreur moyenne	σ_{Mi}
Méthode 1	-1,140	-0,172 %	32,074
Méthode 2	21,554	3,244 %	41,350

TABLE 3.14 – Valeurs numériques issues du *bootstrap* pour la population masculine

Femmes	Différence moyenne	Erreur moyenne	σ_{Mi}
Méthode 1	0,580	0,044 %	44,759
Méthode 2	30,955	2,341 %	58,392

TABLE 3.15 – Valeurs numériques issues du *bootstrap* pour la population féminine

A la vue de ces résultats, il semble clair que la méthode 1 est celle qui représente le mieux les décès. En effet, sa différence moyenne est la plus proche de 0 et elle est celle qui a le plus σ . Cette conclusion numérique est rassurante puisqu'elle confirme les intuitions éveillées dès les observations graphiques : la méthode 2 présentait des taux de décès ajustés plus faibles que ceux de la méthode 1. Puis, lors de la comparaison théorique des méthodes, la même conclusion était tirée. De fait, la méthode du *bootstrap* offre un argument robuste pour apporter une réponse sans équivoque à la question du choix de la méthode d'ajustement : c'est donc la méthode 1 qui sera retenue pour la suite du travail²³.

22. Différentes notations existent, celle retenue est celle proposée dans Hyndman & Koehler (2006).

23. Bien entendu, le travail fera une analyse de sensibilité de la mortalité lors de l'élaboration du critère.

3.1.3 Fermeture et finalisation

Même si la méthode a été sélectionnée, l'ajustement de la table n'est pas terminé. L'étude l'a mentionné plus haut, la question de la fermeture de la table est primordiale. Qui plus est, la table de référence a été "calée" de la meilleure façon, sans se préoccuper des âges hors de la plage d'étude. L'ajustement n'est valable que sur la plage [65; 95] ans, mais la mise en place du critère d'équité nécessite une plage plus large.

La méthode utilisée dans le package est celle de Denuit & Goderniaux (2005), mais il en existe d'autres²⁴. L'examen de la méthode permet de comprendre son utilisation. La méthode de Denuit & Goderniaux travaille sur les q_x et ajoute une contrainte de fermeture des tables. La méthode consiste à ajuster par moindres carrés le modèle log-quadratique :

$$\ln(\hat{q}_x) = a + bx + cx^2 + \epsilon_x$$

avec $\epsilon_x \sim \mathcal{N}(0, 1)$. La contrainte est double puisqu'ils imposent que :

$$q_{130} = 1$$

$$q'_{130} = 0$$

La signification de ces contraintes est très claire : le taux de mortalité est de 100 % à 130 ans, et de plus, à cet âge, la courbe admet une tangente horizontale. Etant donné la forme en "S" de la courbe des q_x , cela signifie que les auteurs imposent la concavité. La source de cette concavité est précisément l'observation d'une légère concavité sur les données réelles (mise en avant dans Horiuchi & Wilmoth (1998)). Se pose alors la question de l'âge à partir duquel les taux bruts sont remplacés par les taux issus du modèle. En pratique, cela se fait par maximisation du R^2 , mais comme le travail se fait pour plusieurs années, il est trop compliqué d'avoir des âges de raccord différents pour chacune d'elles, au risque d'avoir une surface très irrégulière. Dès lors, un âge commun est imposé à chaque année, et un âge commun à partir duquel les probabilités de décès ajustées sont remplacées par les valeurs issues du modèle de fermeture est imposé. Voici pour l'année 2012 pour la population féminine le résultat de la fermeture de la table :

24. Voir par exemple en première approche le court article de Quashie & Denuit (2005) sur les modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges.

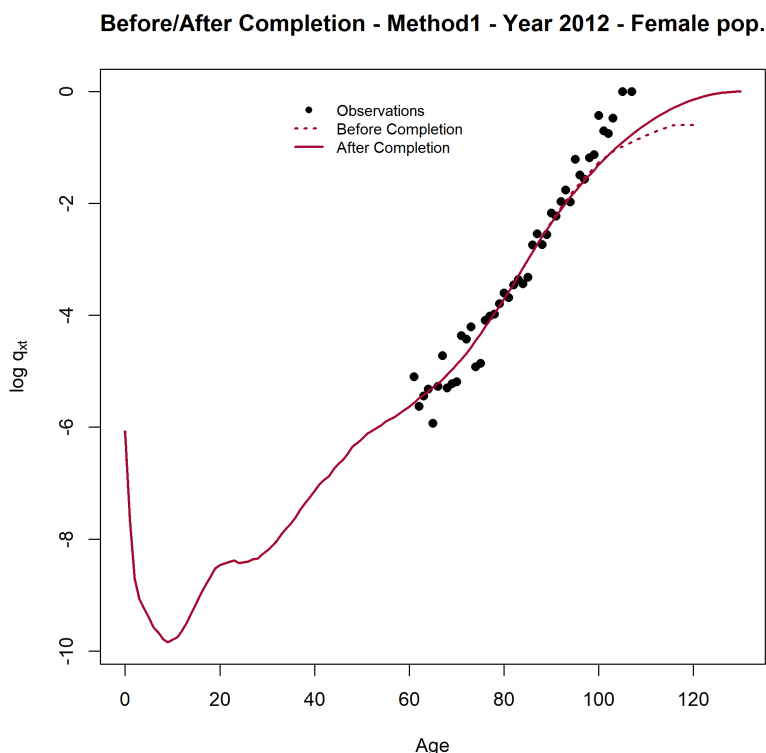


Figure. 3.15 – Fermeture des tables de la population féminine : exemple pour 2012

Les q_x sont abaissés, il n'y a pas de cassure au point de raccord (95 ans) : la fermeture est bonne.

Finalement, voici les tables finales :

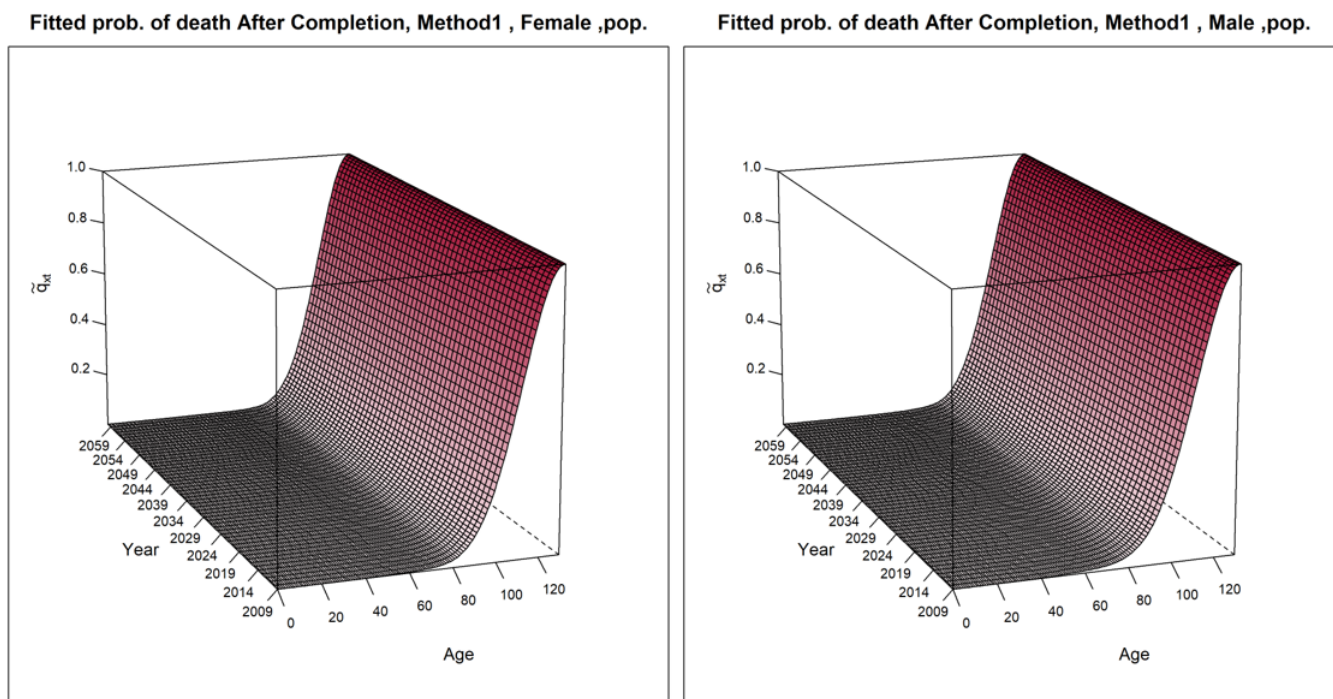


Figure. 3.16 – Table ajustée pour les femmes et les hommes avec la méthode 1

La cohérence est maintenue : les q_x femmes sont plus longtemps faibles que ceux des hommes. Qui plus est la fermeture a bien permis d'avoir des taux de décès à 1 à 130 ans. Il ne reste plus qu'à observer les espérances de vie. Ces courbes sont à comparer avec les Figures des pages 62, 125 et 126.

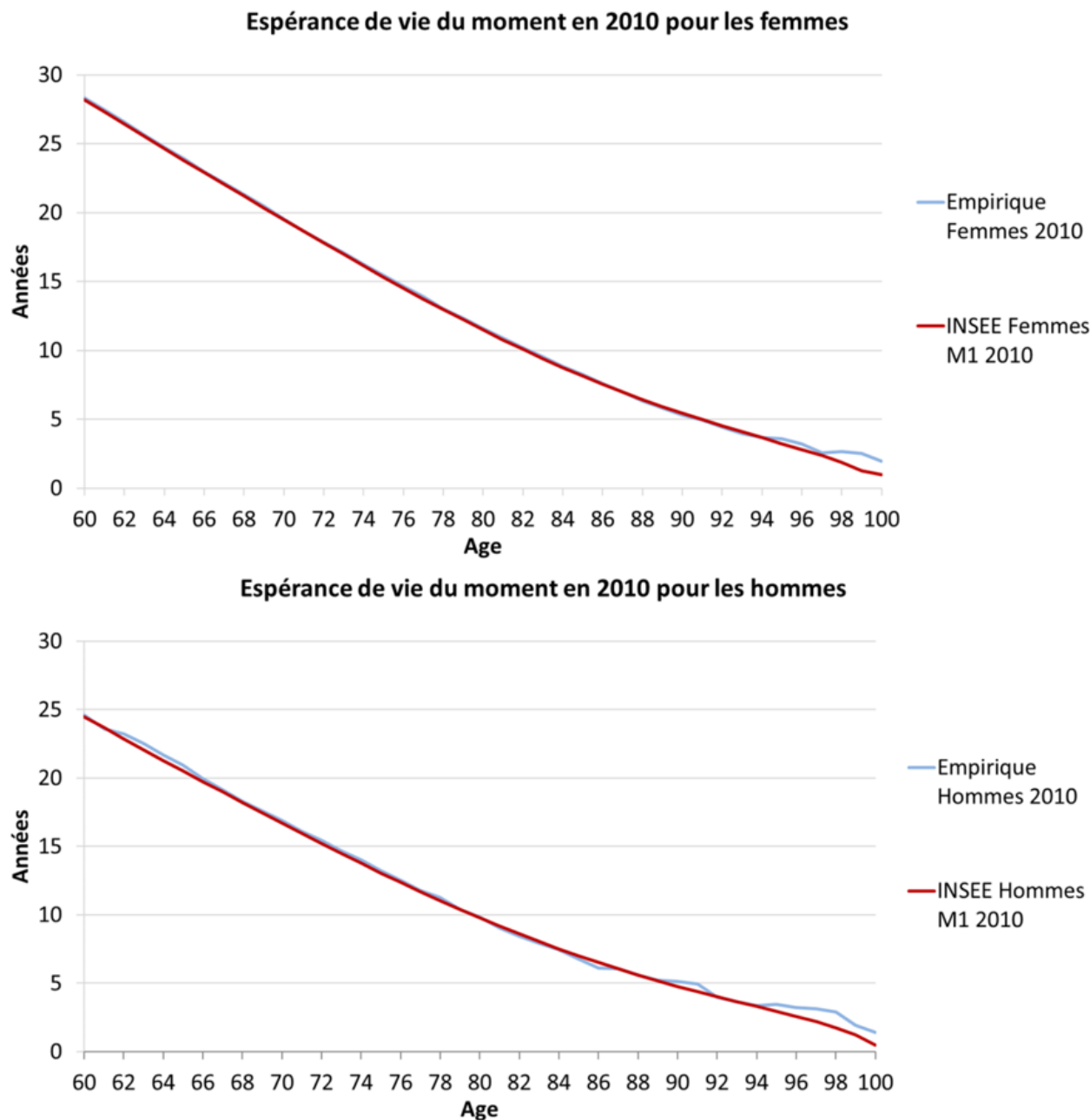


Figure. 3.17 – Espérance de vie ajustée pour les femmes et les hommes en 2010

La table a maintenant été ajustée, et à ce stade, la mortalité de 2009 à 2060 est disponible. Néanmoins, le critère se calcule en tenant compte de la mortalité passée, puisqu'il nécessite la probabilisation des cotisations annuelles (cf (2.1)). Il est nécessaire d'avoir la mortalité à 30 ans d'une personne née en 1951 : il faut donc remonter jusqu'en 1981. Pour cela, la démarche adoptée est la suivante :

- Etape 1 : la mortalité du moment depuis 1980 est calculée à l'aide des tables INSEE correspondantes ;

- Etape 2 : les coefficients d'ajustement sont appliqués à cette mortalité de façon à conserver la cohérence de la méthode ;
- Etape 3 : les taux sont lissés à l'aide de la méthode de Whittaker-Henderson.

En réalité, bien que cela soit montré dans la suite, ce lissage aura un impact plus que négligeable pour le résultat. L'Annexe M pages 136 à 140 présente toutefois la méthode utilisée pour mener à bien le lissage. Ceci s'explique par les âges et les générations considérées. Le premier taux qui sera utilisé est celui de 30 ans en 1981. Déjà à cette époque, les taux de mortalité sont très faibles, et donc la probabilité de survie est quasiment égale à 1. Finalement, la plage utilisée sur ces années 1981 - 2009 est de 30 à 59 ans.

L'étude sur la mortalité se termine alors, et la partie suivante met en oeuvre le calcul du critère dans une optique de pilotage. Elle se termine par des suggestions de mesures à prendre, ainsi que l'étude de l'impact de celles-ci sur l'ensemble de la santé du régime.

3.2 Application sur le régime étudié

Le travail sur la mortalité de la population couverte peut à présent être concrétisé par la mise en oeuvre du critère. Bien que déjà évoqué en page 49, le critère est décrit ici d'un point de vue implémentation. Nécessitant un bon nombre d'hypothèses, elles seront toutes discutées et justifiées. Enfin, des analyses de sensibilité sont mises en avant. Celles-ci mènent à une ultime réflexion qui clôture ce mémoire.

3.2.1 La mise en oeuvre du critère

La mise en oeuvre du critère de rendement individuel nécessite de nombreuses hypothèses, tant au niveau démographique qu'au niveau économique. L'objectif recherché dans la mise en oeuvre du critère est de pouvoir comparer son évolution pour différentes générations, dans le but de retranscrire l'évolution de la capacité du régime à rester en accord avec le triptyque originel, à savoir solidarité, protection et obligation. Dès lors, cette section s'ouvre sur la présentation de trois profils types, qui sont en fait les profils utilisés par le COR pour la description du régime. Indispensables pour la comparaison, ces profils sont caractérisés par leur âge d'affiliation, par leur durée de cotisations, et bien entendu par l'évolution de leur base de cotisation. Les valeurs présentées dans la suite sont issues des statistiques sur les données de 2015.

- **Affilié de type 1** : en moyenne, les individus du type 1 ont un âge d'affiliation de 37 ans, et une durée d'affiliation de 18 ans.
- **Affilié de type 2** : en moyenne, les individus du type 2 s'affilient à 30 ans, et restent 30 ans dans le régime.
- **Affilié de type 3** : les individus de type 3 intègrent le régime vers 33 ans, et cotisent durant 24 ans.

Ces âges d'affiliation, qui peuvent paraître élevés, sont à expliquer. D'une part, les études nécessaires pour accéder aux métiers sont relativement longues (bac+3, voire bac+4). D'autre part, la majorité des profils considérés commencent d'abord une carrière professionnelle en tant que salarié avant de se mettre à leur compte. C'est ce qui explique l'affiliation à 37 ans pour le profil 1 par exemple. Afin de mener à bien le calcul du critère, il est indispensable de connaître la base de cotisation des différents profils. Voici donc en Figure 3.18 l'évolution de cette base pour les trois profils, exprimée en euros de 2016. A ce propos, tous les résultats monétaires ainsi que tous les raisonnements sont exprimés en **euros constants de 2016** de façon à pouvoir faire des comparaisons directes entre les montants.

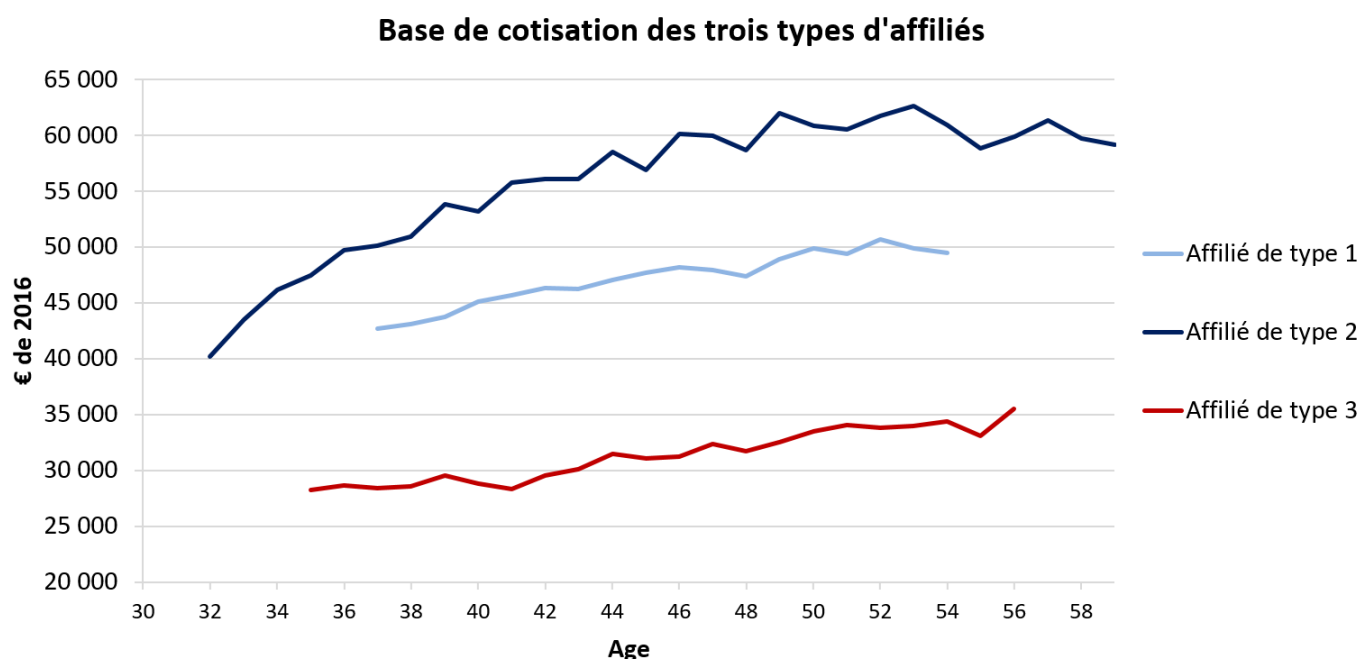


Figure. 3.18 – Évolution de la base de cotisation en fonction de l'âge pour les trois profils étudiés

Grâce aux statistiques de 2015, la segmentation des métiers est claire dans les évolutions de la base de cotisation, avec une distinction sans équivoque des trois profils. Puisque le travail se base à la fois sur les valeurs des revenus passés et futures, la convention adoptée pour déterminer les revenus à la date souhaitée est de dire que l'affilié a un gain de pouvoir d'achat de 0,5 % par an en plus de l'évolution de son revenu en fonction de son âge. Si la valeur de cette hypothèse peut être discutée, nous pouvons néanmoins la justifier par le fait que la valeur de 0,5 % est plus basse que l'hypothèse généralement retenue de 1 %, voire 1,5 %, mais correspond à l'observation sur cette population.

La présentation des profils et de leurs caractéristiques est maintenant terminée. Afin de pouvoir comparer l'évolution de la valeur du critère entre les générations, il est nécessaire de considérer plusieurs dates de liquidation, et par conséquent de définir un échéancier de calcul. Celui-ci est fourni ci-dessous. En somme, quatre dates de liquidation sont considérées, communes à chaque profil : 2016, 2021, 2031 et 2041. Bien entendu, puisque les âges de liquidation et les durées d'affiliation varient d'un profil à l'autre, la génération sous-jacente à la date de liquidation varie également d'un profil à l'autre.

	Affilié de type 1	Affilié de type 2	Affilié de type 3
Liquidation en 2016			
Génération	1952	1951	1951
Année d'affiliation	1989	1981	1984
Liquidation en 2021			
Génération	1957	1956	1956
Année d'affiliation	1994	1986	1989
Liquidation en 2031			
Génération	1967	1966	1966
Année d'affiliation	2004	1996	1999
Liquidation en 2041			
Génération	1977	1976	1976
Année d'affiliation	2014	2006	2009

TABLE 3.16 – Résumé des générations, années d'affiliation et de liquidation pour chaque type

En fin de compte, le travail consiste donc à calculer le rendement individuel pour chaque affilié type, à quatre dates de liquidation différentes. Évidemment, les hypothèses sur les cotisations et les prestations varient, de façon à retranscrire l'état de santé du régime, et pouvoir comparer l'évolution des valeurs du critère.

D'après l'expression du critère, plusieurs valeurs sont à expliciter : le taux d'actualisation, la Valeur de Service, la Valeur d'Achat et la cotisation forfaitaire.

- **Taux d'actualisation** : le taux d'actualisation retenu est le taux net d'évolution du Plafond de la Sécurité Sociale (PSS). En effet, la vision économique qu'offre ce taux est plus pertinente qu'un taux purement financier. A partir de l'historique des valeurs du PSS²⁵, le taux retenu est de 1,5 %. Évidemment, la sensibilité du résultat au taux d'actualisation sera mise en oeuvre. Qui plus est, c'est intéressant de prendre ce taux puisqu'il reflète l'évolution du salaire moyen soumis à cotisation. Enfin, cette valeur s'inscrit dans les projections de croissance du COR.
- **Valeur de Service et Valeur d'Achat** : d'après la Figure 3.19 la Valeur de Service, exprimée en € de 2016, est constante, aux alentours de 19,4 €.

De fait, c'est cette valeur qui sera utilisée dans les projections. Conserver la Valeur de Service historique dans la projection n'est pas dénué de sens. La justification peut se faire de deux façons. La première est que cette valeur de 19,4 en euros constants a été volontairement conservée depuis 1984 par le Conseil d'Administration. Projeter avec cette valeur s'inscrit donc dans sa démarche. La deuxième raison est que le fait de conserver une Valeur de Service constante n'implique pas que les autres paramètres du régime ne bougent pas. En effet, l'objectif à 2030 du

25. Cet historique est disponible en Annexe N page 141.

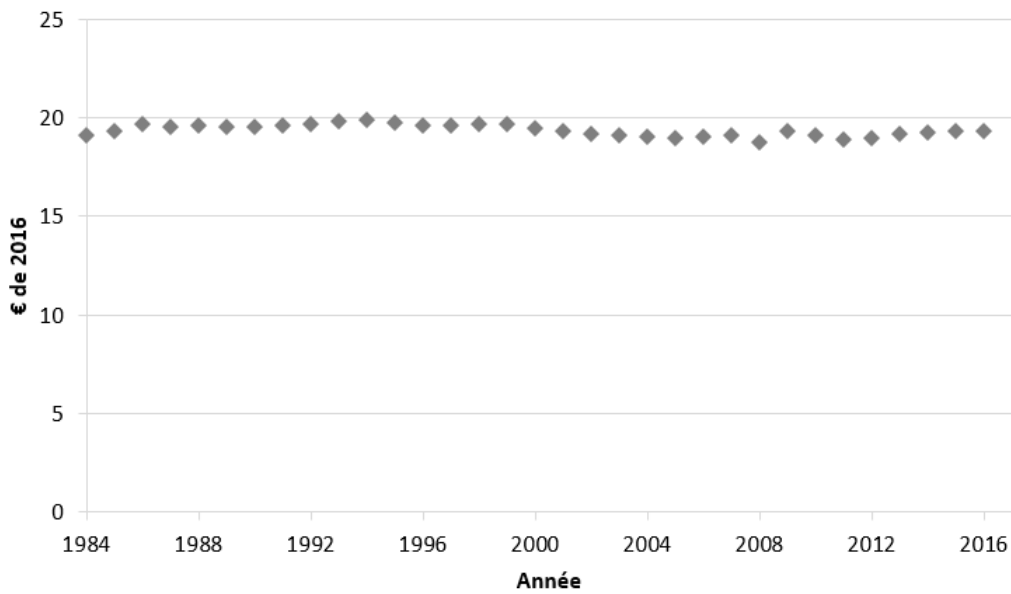


Figure. 3.19 – Valeur de service du point en € de 2016 depuis 1984

régime est d'avoir un rendement à 6 %. Etant donné la relation qui lie le rendement, la Valeur de Service et le prix d'achat, si la Valeur de Service est constante, et que le rendement baisse, alors le prix d'achat varie forcément. C'est donc sur le rendement et le prix d'achat que les modifications se feront. Pour le rendement, après la baisse programmée à 6 % en 2030, il sera supposé rester constant sur tout le reste de la projection. Voici donc l'allure du rendement du régime de 1984 à 2050 :

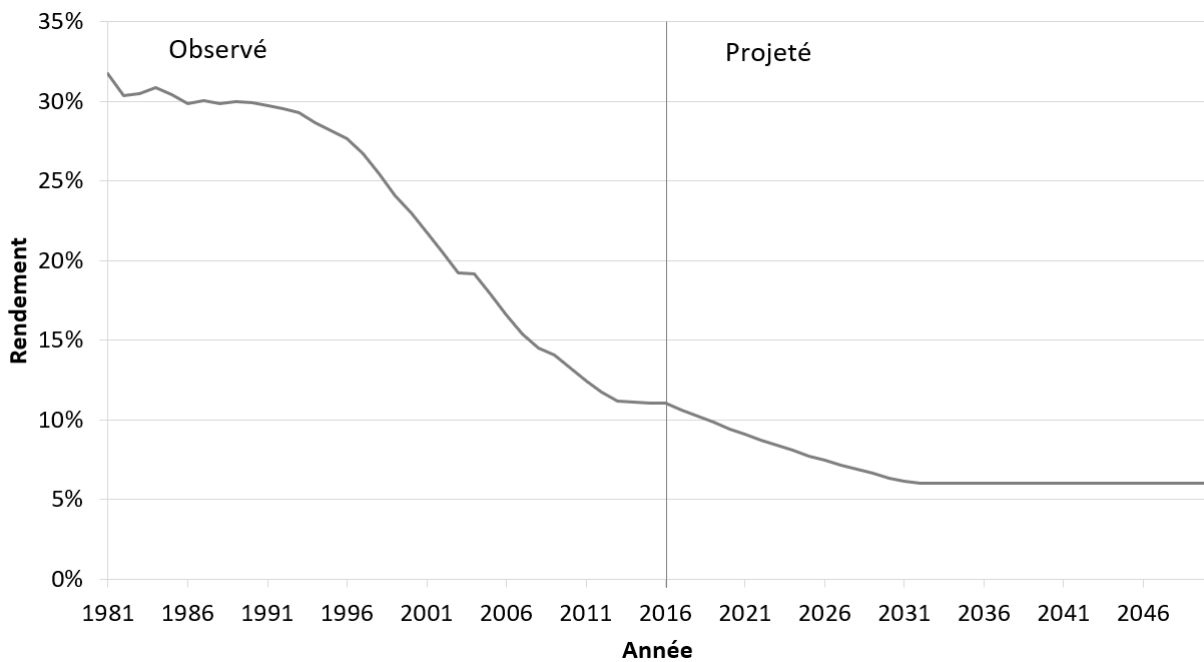


Figure. 3.20 – Rendement du régime complémentaire étudié depuis 1984

Si le rendement varie, alors que la Valeur de Service du point ne varie pas, cela signifie que le prix d'achat du point varie. C'est à partir de cette valeur que la cotisation est calculée. La Figure 3.21 décrit l'évolution de la Valeur d'Achat des points.

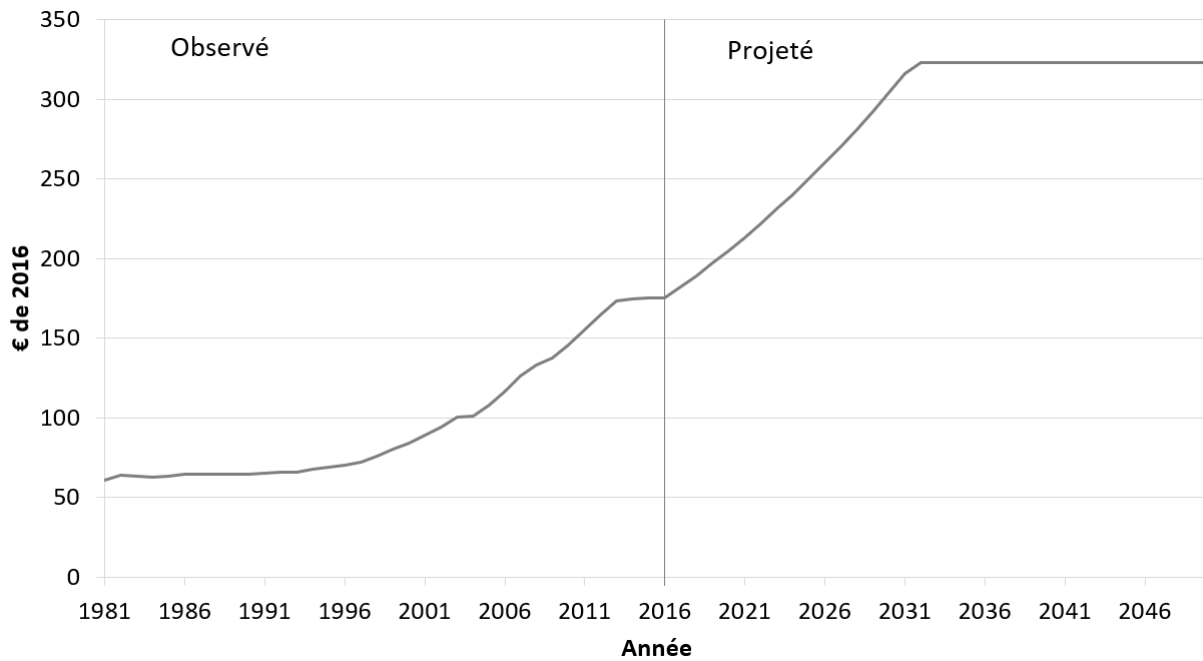


Figure. 3.21 – Evolution du prix d'achat du point en euros de 2016 en fonction de l'année

Ce n'est pas du tout étonnant d'obtenir cette forme pour l'évolution de la Valeur d'Achat des points. En effet, c'est l'inverse de l'évolution du rendement, de façon à ce que la multiplication soit toujours égale à la valeur de service. Dès lors, si le rendement est fixé à 6 % à partir de 2030, alors la Valeur d'Achat maximum est de $19,4/0,06 = 322,8$. Cela signifie qu'un euro de cotisation permet d'acheter de moins en moins de point.

Parallèlement, la cotisation proportionnelle dépend aussi d'un seuil minimal, qui n'a d'ailleurs pas bougé en euros courants depuis 2005. Ce seuil minimal est calculé sur la base de 2016, en fonction de l'évolution de l'indice d'inflation noté I . L'inflation est supposée augmenter de 1,75 % par an, et voici alors comment est calculée le seuil en t :

$$seuil_t = seuil_{2016} \frac{I_{2016}}{I_t}$$

- **Cotisation forfaitaire** : la cotisation forfaitaire est égale à huit fois la Valeur d'Achat du point. Elle a donc la même évolution que la Valeur d'Achat du point.

Maintenant que toutes les hypothèses ont été fixées, il nous suffit de calculer les valeurs du critère pour les différentes populations en fonction de la date de liquidation. Voici alors les résultats pour la population féminine²⁶, avec la table ajustée via la méthode adéquate

26. L'Annexe O page 142 présente les résultats pour la population masculine.

pour l'hypothèse de mortalité :

	Affilié type 1	Affilié type 2	Affilié type 3
Liquidation en 2016			
Nombre de points	193	353	201
Prestations	81 798	133 012	79 469
Cotisations	20 514	37 736	21 232
Rendement individuel	3,99	3,52	3,74
Liquidation en 2021			
Nombre de points	209	377	202
Prestations	90 285	145 373	81 588
Cotisations	27 607	48 765	25 719
Rendement individuel	3,27	2,98	3,17
Liquidation en 2031			
Nombre de points	212	391	210
Prestations	92 138	157 172	88 173
Cotisations	40 520	74 310	41 007
Rendement individuel	2,27	2,12	2,15
Liquidation en 2041			
Nombre de points	204	367	217
Prestations	90 827	151 354	93 617
Cotisations	61 070	102 947	63 222
Rendement individuel	1,49	1,47	1,48

TABLE 3.17 – Tableau récapitulatif des valeurs du rendement individuel par année de liquidation et par affilié type, pour la population féminine

L'analyse des résultats permet de retrouver la cohérence entre les différentes valeurs. Seul le cas de l'affilié de type 1 est disséqué, puisque le raisonnement appliqué est aisément transposable aux autres profils :

- Pour la liquidation en 2016, le nombre de points est relativement faible, puisque la cotisation proportionnelle n'apparaît qu'en 1997. De fait, pour la personne ayant commencé à cotiser en 1989, 8 années se sont écoulées sans qu'elle puisse s'acheter des points supplémentaires. Mais d'un autre côté, le montant total de la cotisation n'est que de 20 514 €.
- Pour la liquidation en 2021, donc seulement 6 ans plus tard, la personne a 16 points de plus. Cela s'explique par le fait qu'elle ne voit que 2 années où son seul moyen d'obtenir des points est la cotisation forfaitaire. En contrepartie, comme elle achète plus de points, sa cotisation est plus haute. Son rendement individuel est plus faible, puisque l'augmentation de la prestation issue d'un plus grand nombre de points ne se fait pas dans les mêmes proportions que l'augmentation de sa masse de cotisation (la prestation globale augmente de 10,37 % alors que la cotisation globale augmente de 34,57 %).
- Pour la liquidation en 2031, c'est le même principe : l'individu a directement accès

à la cotisation proportionnelle, il peut donc acheter dès le début de sa période de cotisation des points. En revanche, en ayant en tête les Valeurs d'Achat des points, la cotisation globale a plus que doublé par rapport à celle de la liquidation de 2016. Comme les prestations sont quasiment équivalentes (la Valeur de Service étant constante), ce n'est pas étonnant de voir le rendement individuel chuter.

- Enfin, pour la liquidation en 2041, la valeur du rendement individuel est la plus faible. Ceci n'est pas surprenant étant donné que la période de cotisation de cet individu s'étend de 2014 à 2031, période pendant laquelle le rendement baisse continuellement et assez fortement : les Valeurs d'Achat s'envolent. Il en résulte d'une part un nombre de points limité ainsi qu'une cotisation globale très haute (près de 3 fois celle de 2016), et une pension de niveau équivalent à celle des autres années de liquidation d'autre part, d'où un rendement individuel presque 2,7 fois plus faible que celui de la liquidation de 2016.

A priori, il est très clair que le régime n'offre pas la même quantité de prestation. Bien que les explications soient facilement identifiables, il n'en reste pas moins que 1 € de cotisation donne droit à 3,99 € de prestation pour une liquidation en 2016, contre 1,49 € pour une liquidation en 2041. Est-ce juste ? En effet, cette vision quelque peu naïve mérite d'être complétée. Il faut impérativement garder en tête le fonctionnement intrinsèque du régime par répartition. Si 1 € investi – cotisé – rapporte plus de 1 €, alors le reste ne peut provenir que de deux sources : soit des réserves, soit des autres cotisants. Pour recevoir 3,99 fois plus que ce qui a été cotisé, c'est qu'il y a la possibilité d'offrir 3,99 fois plus, peu importe la source de financement. Mais quoi qu'il en soit, la répartition fonctionnant a priori sans réserve, les cotisations entrantes sont la source des prestations sortantes.

C'est la première limite à ce critère. Il n'intègre en rien l'équilibre du régime, puisque la valeur prise n'est pas comparable au rapport démographique. Si le but était de comparer la consommation de cotisation par retraité, voici comment il faudrait procéder.

- La première étape serait de reconstituer les cotisations. Pour ce faire, il suffit de projeter les évolutions de salaires, la Valeur d'Achat du point, et donc la cotisation forfaitaire.
- Parallèlement, il faudrait reconstituer les prestations. Pour cela, il suffirait de calculer le nombre de points acquis, et de le multiplier par la Valeur de Service à la même date.
- Enfin, et c'est ici que la différence avec le rendement individuel se fait, la comparaison se fait directement entre la cotisation de l'année i et la prestation de l'année i , peu importe les montants précédents.

Comme expliqué lors de la présentation du critère, le rapport ainsi obtenu peut être comparé au rapport démographique. Alors la question qu'il est légitime de se poser est : comment est-ce que le régime a pu offrir un tel rendement ? La réponse réside dans la mise en oeuvre des étapes ci-dessus. Par exemple, considérons l'affilié de type 1 qui liquide en

2016. Alors l'individu a 193 points, d'où une pension de 3 744 €. En contrepartie, combien reçoit le régime ? Pour calculer ce montant, il faut disposer du salaire, qui déterminera la cotisation proportionnelle. Ce salaire est calculé en prenant le salaire moyen sur la durée de cotisation des affiliés de type 1. En 2016, il s'élève à 47 376 €. Le seuil étant à 25 246 €, sa cotisation est donc de 663,9 €. A cela s'ajoute la cotisation forfaitaire de 1 456 €. Donc finalement, la cotisation moyenne est de 2 119,9 €. Ainsi, le rapport prestation sur cotisation est de 1,81. En ayant travaillé de la sorte, il est maintenant possible de dire qu'il faut 1,81 cotisations de 2016 pour payer la pension de 2016. Nul besoin de s'alarmer, il suffit d'observer le rapport démographique à cette date pour se rassurer : 3,66²⁷. De fait, le régime ne sur-consomme pas. Toutefois, ce raisonnement relativement simple ne doit pas être la base du pilotage, puisque bon nombre d'approximations ont été faites, et que les responsables du régime ne maîtrisent pas complètement l'évolution du rapport démographique. Néanmoins, ce petit exercice met en lumière la différence de raisonnement à mener entre le calcul et l'utilisation du critère, et le calcul et l'utilisation de la consommation de cotisations du régime.

Pour revenir au critère d'équité individuelle, il convient d'étudier les sensibilités des résultats aux hypothèses.

Mortalité : Etant donné ce qui a été dit plus haut sur la difficulté du choix quant à la méthode d'ajustement, voici les résultats avec les différentes tables, en considérant les affiliés de type 1 issus de la population féminine :

Table	Affilié de type 1			
	2016	2021	2031	2041
Liquidation en				
Table INSEE initiale	3,880	3,184	2,214	1,451
Variation par rapport à la référence	-2,699 %	-2,647 %	-2,635 %	-2,450 %
Référence : INSEE ajustée sans lissage M1	3,987	3,270	2,274	1,487
Table INSEE ajustée avec lissage M1	3,987	3,270	2,274	1,487
Variation par rapport à la référence	-0,011 %	-0,002 %	-0,004 %	-0,000 %
Table INSEE ajustée sans lissage M2	4,026	3,301	2,295	1,500
Variation par rapport à la référence	0,972 %	0,943 %	0,928 %	0,829 %
Table INSEE ajustée avec lissage M2	4,026	3,301	2,295	1,500
Variation par rapport à la référence	0,971 %	0,943 %	0,927 %	0,829 %

TABLE 3.18 – Tableau récapitulatif des valeurs du rendement individuel par année de liquidation et par base de mortalité, pour la population féminine

Plusieurs points méritent d'être commentés. Le premier est que tous les rendements décroissent. Ensuite, il faut remarquer que la table initiale sans ajustement présente les rendements les plus faibles. Ceci corrobore les observations sur la mortalité. La population couverte semble "moins mourir" que la référence. De fait, la table initiale sous estime la

27. L'Annexe P page 143 présente le calcul du rapport et l'historique de ses valeurs.

survie et fait ressortir donc des rendements plus faibles, puisque la prestation est touchée pendant moins longtemps.

La méthode 2 présentant des espérances de vie générationnelles plus hautes, il est normal d'avoir des rendements plus hauts. Néanmoins, la différence entre la méthode 1 et la méthode 2 est au maximum de 0,972 % c'est-à-dire en 2016.

Enfin, le lissage n'apporte pas de différence par rapport la table non lissée. C'est donc pour cela qu'il n'a pas été détaillé plus haut. Les variations extrêmement faibles entre les méthodes lissées et non lissées sont cher payées étant donné les outils qu'elles nécessitent. Néanmoins, ne pas présenter les résultats du lissage aurait été une négligence. En fin de compte, sachant l'apport quasi inexistant de la mise en oeuvre du lissage, ce dernier n'a pas été présenté.

Pour en finir avec l'impact de la mortalité, il est intéressant de voir comment l'augmentation de l'espérance de vie entre en jeu, parce que même si les taux de mortalité varient d'un ajustement à l'autre, les tendances, elles, ne bougent pas. De fait, le tableau suivant propose les valeurs de rendement individuel pour les trois profils, en considérant la mortalité féminine instantanée de 2009 comme la réalité, et ce sur toute la durée de projection :

	Affilié type 1	Affilié type 2	Affilié type 3
Liquidation en 2016			
Rendement individuel	3,09	2,82	2,85
Variation par rapport à la référence	-22,551 %	-23,500 %	-23,858 %
Liquidation en 2021			
Rendement individuel	2,49	2,25	2,37
Variation par rapport à la référence	-23,999 %	-25,107 %	-25,350 %
Liquidation en 2031			
Rendement individuel	1,65	1,55	1,54
Variation par rapport à la référence	-27,645 %	-27,893 %	-28,075 %
Liquidation en 2041			
Rendement individuel	1,06	1,05	1,04
Variation par rapport à la référence	-29,063 %	-29,681 %	-29,851 %

TABLE 3.19 – Tableau récapitulatif des valeurs du rendement individuel par année de liquidation avec la mortalité féminine figée en 2009

Tous les rendements sont plus bas que précédemment, et l'écart se creuse avec les générations. Encore une fois, l'explication est aisée. Les cotisations ne changent pas énormément puisque les taux de mortalité n'ont pas un impact très grand sur les âges considérés. En revanche, la méthode appliquée revient à prendre la table instantanée de 2009. De fait, aucune progression dans l'espérance de vie n'est prise en compte. Les prestations globales sont fortement impactées puisque les taux de mortalité sont plus rapidement élevés.

Taux d'actualisation : sachant le rôle que joue le taux d'actualisation dans le calcul du critère, il est important de voir l'impact d'une variation du taux sur les valeurs prises par

le rendement individuel.

Table	Affilié de type 1			
Liquidation en	2016	2021	2031	2041
Très bas : référence $-0,5\%$	4,334	3,557	2,423	1,624
Variation par rapport à la référence	8,683 %	8,771 %	6,548 %	9,203 %
Bas : référence $-0,25\%$	4,157	3,411	2,348	1,554
Variation par rapport à la référence	4,254 %	4,296 %	3,244 %	4,503 %
Référence : $1,5\%$	3,987	3,270	2,274	1,487
Haut : référence $+0,25\%$	3,825	3,135	2,202	1,423
Variation par rapport à la référence	-4,085 %	-4,123 %	-3,183 %	-4,314 %
Très haut : référence $+0,5\%$	3,668	3,006	2,131	1,362
Variation par rapport à la référence	-8,008 %	-8,080 %	-6,302 %	-8,447 %

TABLE 3.20 – Tableau récapitulatif des valeurs du rendement individuel par année de liquidation et par taux d'actualisation, pour la population féminine

Pour comprendre quel est l'impact d'une variation du taux d'actualisation, il suffit de se rappeler là où il intervient. Dans le calcul de la cotisation globale, il sert à capitaliser : plus le taux est grand, plus la cotisation globale est grande. En revanche, puisqu'il sert à actualiser dans la prestation globale, une augmentation du taux conduit à une diminution de la prestation. Finalement, en fixant tous les autres paramètres, plus le taux est grand, plus le rendement individuel calculé est faible et inversement.

La dégradation du rendement individuel n'est pas une surprise, mais est inévitable. Plus le temps passe, plus les cotisations seront élevées, et même si les prestations conservent leur niveau actuel, force est de constater que le rapport sera affaibli. C'est inévitable pour permettre la pérennité du régime avec la baisse du rapport démographique, mais qu'en est-il de la pérennité du triptyque originel de la retraite ?

3.2.2 Pérennité du triptyque

Pour finir, le critère d'équité mis en oeuvre est le reflet de la capacité du régime à verser un niveau de prestation. Il apparaît que la capacité du régime est altérée au fil du temps. Quels sont les leviers disponibles ? Plusieurs solutions existent : augmenter les prestations, baisser les cotisations. Dit autrement, augmenter le rendement en augmentant la Valeur de Service du point, à Valeur d'Achat constante, ou augmenter le rendement en baissant la Valeur d'Achat du point à Valeur de Service constante. Mais ces mesures sont infaisables : une augmentation du rendement est impensable pour ce régime, qui s'efforce de le baisser à 6% .

Bien sûr, d'autres mesures pourraient être prises en compte, comme le recul de l'âge de la retraite de façon à avoir une période de prestations moins longue, ou encore mettre en place une cotisation forfaitaire offrant plus de points, néanmoins le tout n'est pas d'augmenter le rendement individuel, mais plutôt de garantir un niveau de pension. Mettre en

place une cotisation forfaitaire offrant plus de points est une mascarade : cela revient à augmenter le rendement, action qui s'avère être impossible.

La dernière réflexion menée sur la base des valeurs du critère est la remise en question du triptyque originel sur lequel est fondé le système de retraite français. En effet, la décroissance inévitable du rendement rend légitime la question de l'avenir de la répartition comme elle est entendue aujourd'hui. La redistribution immédiate peut se permettre d'offrir des prestations élevées tant qu'il y a assez de cotisants pour alimenter les caisses. Le problème qui se pose est lorsque le nombre de cotisants se stabilise, puisque le volume de cotisations sera le même, et le volume de prestations augmentera, étant donné que les anciens cotisants deviendront retraités. En ajoutant à cela que les retraités vivent de plus en plus longtemps, la capacité à offrir des prestations élevées est limitée.

Alors, certes, il est possible de puiser dans les éventuelles réserves, mais cette méthode n'est que temporaire, les réserves n'étant pas infinies. Alors, en considérant qu'il n'y a pas de réserves, le rapport démographique donne une bonne approximation de la capacité du régime à verser des prestations. Si le rapport est de 10, cela signifie qu'il y a 10 cotisations pour une prestation : il n'est donc pas incohérent d'avoir une prestation 10 fois plus grosse que la cotisation pour une même année. Le problème observé est que le rapport démographique du régime étudié est actuellement de 3,66, et en se basant sur les hypothèses de projections, à réglementation constante, préconisées par le COR, ce rapport atteint environ 2 en 2031 et un peu moins de 1,5 en 2041. A plus long terme et à réglementation inchangée, les projections envisagent un rapport démographique limite de 1,04. C'est pour cette raison que les rendements individuels diminuent. Avoir un rapport démographique de 1,04 signifie que la prestation théorique en répartition pure limite est de 1,04 fois la cotisation correspondante. Alors le rendement individuel sera sûrement différent, mais il sera très faible. Ces observations conduisent à se demander, comme il en a été fait mention plus haut, pourquoi ne pas se constituer une épargne individuelle, plutôt que d'être obligé à alimenter un système qui, en fin de compte n'offre que des prestations restreintes, sans se poser dans ce cas la question du financement des droits acquis.

Dès lors, voici la démarche adoptée. Nous considérons pour chaque date de liquidation un profil "affilié" et un profil "épargnant". L'affilié cotise au régime pendant une certaine période, puis recevra les prestations correspondantes. Le calcul du rendement individuel est exactement le même que précédemment. D'autre part, l'épargnant investit exactement les montants correspondant aux cotisations, de façon à ce que la somme investie soit la même pour les deux profils. Différentes hypothèses sur les frais sont proposées, pour rendre la comparaison la plus réaliste possible. Ces frais sont modélisés par une décote α sur les montants investis : pour un montant investi de c €, c'est en réalité $c(1 - \alpha)$ € qui sont placés, le reste étant prélevé par l'organisme gestionnaire.

Une fois le contexte posé, il convient de mentionner que pour apporter une réponse à la question posée concernant l'épargne individuelle, deux démarches sont possibles. La première consiste à dire que l'épargnant cherche le rendement financier qu'il doit atteindre de sorte qu'à la date de liquidation, il dispose exactement du montant $P_{globale}^l$. Dans cette solution, seule la partie en capitalisation est étudiée, et l'actualisation des prestations est

mise au second plan. Dès lors, pour l'épargnant, le raisonnement à mener est le suivant. En appelant $f(r)$ la somme des cotisations capitalisées au taux r telle que

$$f(r) = \sum_{t=c}^{l-1} cotisation_t (1 - \alpha)(1 + r)^{(l-t)}$$

alors il faut avoir r tel que :

$$f(r) - P_{globale}^l = 0$$

Bien évidemment, la $cotisation_t$ est probabilisée en termes de survie, et capitalisée au taux r , a priori inconnu.

Voici les valeurs de r pour l'affilié de type 1 de sexe féminin pour les différentes dates de liquidation, en considérant que les frais sont nuls ($\alpha = 0$)²⁸ :

Première approche	Affilié de type 1			
Liquidation en	2016	2021	2031	2041
Taux annuel équivalent	9,63 %	8,44 %	6,16 %	3,74 %

TABLE 3.21 – Tableau récapitulatif des rendements nets à atteindre en fonction des dates de liquidation, pour $\alpha = 0$, via la première approche

En considérant les frais non nuls, voici l'évolution du rendement financier net à atteindre :

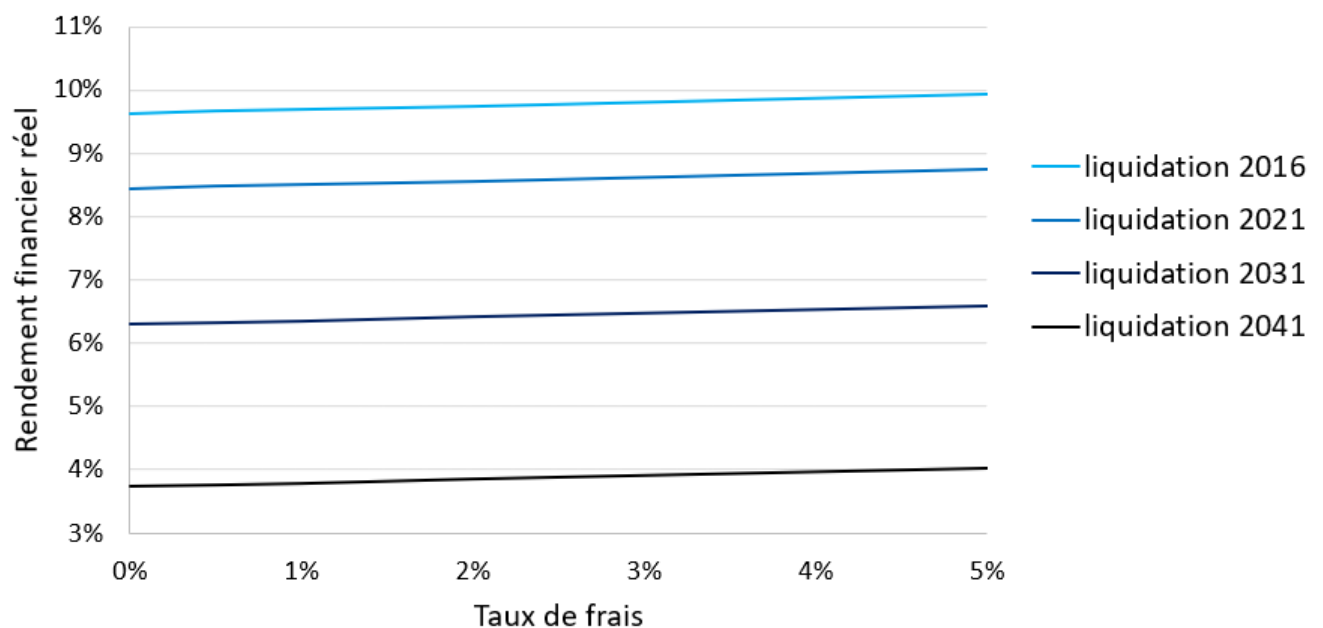


Figure. 3.22 – Evolution du rendement financier net en fonction du taux de frais appliqué via la première approche

28. L'Annexe Q page 144 présente les taux équivalents pour la population masculine.

C'est sans surprise que plus les frais augmentent, plus le rendement financier doit augmenter, pour palier la diminution du capital investi. Globalement, le rendement financier à atteindre diminue avec l'année de liquidation. Si cette première manière de présenter les choses est claire et aisément interprétable, un point mérite toutefois une attention particulière. Si les cotisations sont capitalisées au taux r , il faut que les prestations soient actualisées au taux r . C'est sur ce principe qu'est fondée la seconde méthode. Au lieu de ne traiter que la capitalisation des cotisations, cette seconde façon de calculer le rendement financier est plus complète dans le sens où elle conserve la cohérence de la mise en oeuvre du critère de rendement individuel : capitalisation des cotisations et actualisation des prestations. Alors, en termes mathématiques, voici ce que nous cherchons à résoudre :

$$\sum_{t=c}^{l-1} cotisation_t(1 - \alpha)(1 + r)^{(l-t)} = \sum_{t=l}^{\infty} prestation_t(1 + r)^{(l-t)},$$

ce qui signifie que la seule source de prestation est le montant acquis lors de la capitalisation des cotisations. Là encore, les $cotisation_t$ et $prestation_t$ sont probabilisées comme pour le calcul du rendement individuel. En reprenant les montants des cotisations et des prestations correspondant à l'affilié de type 1, et en considérant d'abord les frais nuls, voici les valeurs du rendement financier net à atteindre en fonction de la date de liquidation :

Deuxième approche	Affilié de type 1			
	2016	2021	2031	2041
Liquidation en				
Taux annuel équivalent	6,39 %	5,60 %	4,15 %	2,78 %

TABLE 3.22 – Tableau récapitulatif des rendements nets à atteindre en fonction des dates de liquidation, pour $\alpha = 0$, via la deuxième approche

En considérant les frais non nuls, la Figure 3.23 présente l'évolution du rendement financier à atteindre pour la seconde approche.

Bien entendu, les rendements nets à atteindre sont plus faibles si l'actualisation des prestations est prise en compte. Néanmoins, la conclusion à tirer de ces deux approches est très similaire. Les rendements à atteindre diminuent, mais restent relativement hauts, même pour les liquidations les plus lointaines. Qui plus est, lorsque l'actualisation est considérée, le taux d'actualisation appliqué est précisément le rendement financier. Il faut alors s'interroger sur la solidité et le réalisme de l'utilisation d'un taux à 6,39 % nets pour une liquidation en 2016...

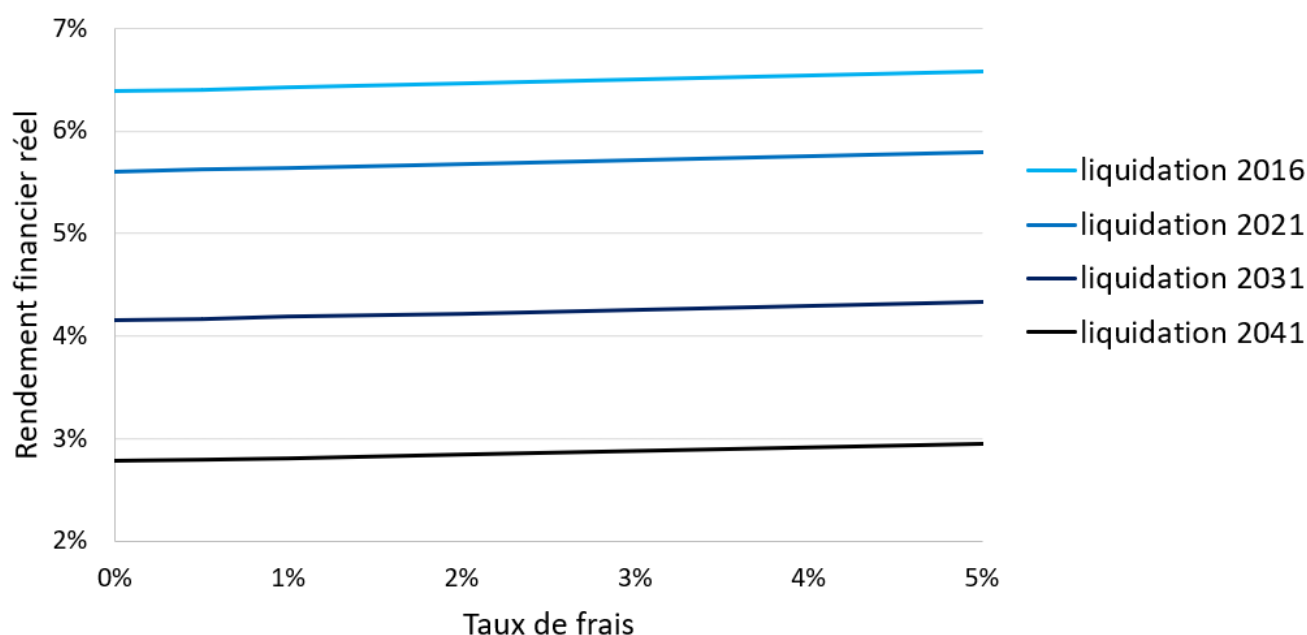


Figure. 3.23 – Evolution du rendement financier net en fonction du taux de frais appliqué via la deuxième approche

C'est dans cette courte explication que la pérennité du triptyque est établie : le système reste protecteur en tant que garantie viagère de couverture réaliste. Le caractère obligatoire est complémentaire à la protection, puisque tout cotisant est quasiment certain de toucher une pension pour assurer la période de vie inactive. Enfin, la solidarité entre les générations semble être le point le plus délicat à commenter. Si dans l'esprit de la répartition, les cotisations continuent toujours de payer les prestations de façon instantanée, alors la solidarité perdure. Néanmoins, il semble clair que plus l'effort contributif augmente, plus la justification de ces trois piliers sera compliquée à bâtir... C'est alors que les réserves peuvent jouer un rôle déterminant. En effet, la constitution de réserves peut servir à l'amélioration du rendement individuel, au sens où elles pourraient venir majorer le niveau de prestation, et donc augmenter la prestation globale, à cotisation constante. La constitution des réserves peut se faire tant que la charge des prestations est inférieure au produit des recettes. Néanmoins, puisque le nombre de retraités et leur durée de vie est en augmentation, l'utilisation des réserves pour améliorer le rendement individuel n'est qu'une mesure temporaire qui ne constitue qu'un voile sur le problème : une fois les réserves consommées, la problématique du rendement individuel persiste.

Conclusion

Le système de retraite français a une genèse complexe, mais trois principes fondamentaux se sont imposés au fil du temps : la retraite protège, la retraite est obligatoire et la retraite instaure la solidarité entre les générations. Les velléités vieilles de plusieurs siècles de corps de métiers précis ont donné naissance à une myriade de régimes. Toutefois, si l'organisation est complexe, elle n'est pas dénuée de structure. En trois piliers, celle-ci permet dans une certaine mesure de classer les régimes d'après leurs fonctions et leur rôle, collectif ou individuel.

Depuis quelques années, le gouvernement français est conscient des enjeux auxquels le système de retraite va devoir faire face dans les années à venir. Le vieillissement de la population a bien souvent été traité de façon financière. L'orientation des réformes est tournée vers la baisse des déficits, en mettant parfois l'individu au second plan. Dès lors, c'est toute la philosophie du système qui est remise en question, puisque l'état financier ne permet plus d'assurer aussi bien qu'avant la protection fondamentale de l'individu. Des questions se posent et des travaux émergent sur le pilotage des régimes, de façon à amorcer des décisions délicates le plus tôt possible pour que les changements se fassent en douceur. Néanmoins, ces mesures sont à l'échelle globale des régimes, et non pas à l'échelle individuelle. Parallèlement, les questions d'équité apparaissent, menant à des considérations plus pragmatiques et concrètes à cette échelle individuelle. Compliquée à définir de par la largeur des horizons qu'elle couvre, la conception de l'équité intergénérationnelle retenue est celle d'une justice intemporelle, qui prend soin égal des intérêts des individus indépendamment de leur date de naissance. A partir de cette vision, la mesure de l'équité est facilitée.

Aussi, l'esprit de ce travail a été de proposer un critère d'équité individuelle, via le taux de récupération, assimilable à un rendement individuel. Son but est de comparer les cotisations obligatoires du régime à un investissement. L'affilié se constitue une épargne dans un système qu'il ne choisit pas, et la question naturelle est de savoir combien il perçoit en retour, l'objectif étant d'être capable de comparer les rendements au cours des générations. Complet dans sa construction, l'indicateur de rendement individuel offre la possibilité de traiter les changements démographiques, mais à une échelle individuelle. Grâce à son expression, il permet d'avoir accès à l'effort contributif, à la durée de cotisation, au taux de remplacement. Lors de sa mise en oeuvre, un grand nombre d'hypothèses ont été mises en oeuvre, et à la vue des sensibilités, une limite de cet indicateur peut être la forte dépendance à ces hypothèses.

Les résultats présentés conduisent à une réflexion sur la pérennité du régime étudié, non pas en termes financiers, mais en termes d'attractivité. Les rendements individuels étant en baisse continue, la justification du caractère obligatoire est discutable. En adop-

tant un point de vue éloigné de la répartition, il a été mis en lumière que le régime n'est pour l'instant pas dénué d'intérêt. Il demeure protecteur, malgré les anticipations des niveaux de versements futurs. Finalement, le critère d'équité intergénérationnelle proposé est un critère passif au sens où il est utopique de vouloir piloter le régime en tentant d'augmenter le rendement individuel. L'égalité recherchée n'est pas celle de la valeur prise par le critère, mais bien celle de l'état du triptyque fondateur. L'équité intergénérationnelle est caractérisée par la conservation de ce dernier, non pas par l'égalisation du critère. Le critère n'est qu'un outil, une mesure, qui permet de quantifier l'état de la devise à un moment donné.

C'est d'ailleurs une limite de l'équité intergénérationnelle. Si l'objectif est de rendre égal le rendement individuel, la santé financière en pâtira. Qui plus est, le travail se concentre uniquement sur le point de vue individuel. Toutefois, une étude plus poussée sur la projection du régime, en tenant compte des réserves par exemple, aurait permis de proposer des valeurs plus fines. Dans le même esprit, et cette remarque s'inscrit dans l'essence primaire de la répartition, le régime est analysé de façon isolée, alors qu'il s'inscrit dans une politique étatique sociale dont les interactions qui lient les différents enjeux sociétaux sont loin d'être indépendantes. En d'autres termes, la retraite n'est pas un mécanisme cloisonné. Aussi, des considérations plus larges à l'image de celles menées par Tragaki (1998) sur la comptabilité intergénérationnelle permettraient d'élargir l'étude à la réalité du financement des régimes de retraite d'aujourd'hui.

Une seconde limite découle de l'axe de travail traité. En effet, l'aspect de l'ajustement de la mortalité de référence à la mortalité observée est au centre de l'étude, peut-être au détriment des liens qui peuvent exister entre l'évolution de la mortalité et les autres hypothèses. Le choix qui a été fait place l'ajustement au coeur du débat : les méthodes sont décortiquées et analysées de façon fine afin d'avoir une justification solide du choix d'ajustement. De fait, la réflexion sur l'équité ne se fait que dans ce cadre-ci, en reléguant les autres facteurs au second plan. Une analyse complète aurait consisté en une étude sur la corrélation entre mortalité et les valeurs paramétriques du régime, puisqu'il faut garder en tête les liens qui prévalent entre ces notions. De fait, des garde-fous doivent être mis en place dans la viabilité des projections constantes (à partir de 2030) qui ne constituent en somme qu'une approche simplifiée du problème. Dans cette optique, des sensibilités aux Valeurs d'Achat et/ou Valeur de Service aurait été les bienvenues. Quoi qu'il en soit, la problématique de la pérennité du triptyque historique n'est en rien bousculée, il suffit simplement d'être conscient des limites inhérentes à l'importance accordée à l'ajustement de la mortalité.

Dans le même esprit, le taux de récupération n'est calculé que de façon prospective, au sens où les dates de liquidation débutent en 2016 pour arriver en 2041. De fait la méthode consistant à comparer le taux de récupération au taux de rendement financier net n'est valable que sur la même période. Un axe de perfectionnement aurait été de calculer les couples (taux de récupération / taux de rendement financier net) pour des dates de liquidation antérieures, afin de voir si la conclusion actuelle se vérifie toujours. Qui plus est, les taux de rendements financiers sont des taux valables sur toute la pé-

riode de calcul, soit de la date d'ouverture des droits jusqu'à la date de décès. Ainsi, afin de pouvoir les comparer aux taux de revalorisation servis par les assureurs vie, il convient de retracer l'historique de ces taux, et non plus seulement de comparer le taux de récupération au taux servi à date de liquidation. Malgré cela, il faudra tout de même avoir des hypothèses de projections de ces taux, pour une liquidation en 2041 par exemple.

L'analyse effectuée pour ce régime peut être aisément élargie à tous les régimes fonctionnant en répartition. La conclusion a des chances d'être uniforme : les rendements individuels chutent de génération en génération. Vont-ils atteindre 1 un jour ? Il vaudrait mieux pour le système que non.

Bibliographie

ANDRIEUX V., CHANTEL C. [2012] "Les taux de remplacement du salaire par la retraite pour la génération 1942 – Définitions et méthodologie", *Conseil d'Orientation des Retraites*, doc. 4.

AP ROBERTS L. [2007] "Les logiques des systèmes de retraite en Europe", *Retraite et société*, vol. 50, pp. 9-33.

AUBERT P., RABATE S. [2014] "Durée passé en carrière et durée de vie en retraite : quel partage des gains d'espérance de vie", *Economie et statistique*, vol. 474.

BICHOT J. [2010] "La retraite entre passé et avenir", *Droit social*, avril 2010, pp. 424-436.

BLANCHET D. [1998] "Mesurer l'équité intergénérationnelle : le choix des indicateurs", *Lettre de l'observatoire des retraites*, vol. 10.

BLANCHET D. [2010] "Le débat sur la retraite en France : le critère intergénérationnel aide-t-il à trancher", *Regards croisés sur l'économie*, vol. 7, pp. 125-135.

BOHN H. [2009] "International risk sharing and Fiscal policy", *Journal of Monetary Economics*, vol. 56, pp. 805-816.

BOONEN T., DE WAEGENAERE A., NORDE H. [2012] "Intergenerational solidarity within a closing pension fund", *Journal of Health Economics*, vol. 31, pp. 484-489.

CASELLA G., BERGER R. [2001] "Statistical inference", *Duxbury*.

CHARPIN J-M., ZAIDMAN C., AUBERT J-M. [1999] "L'avenir de nos retraites : rapport au Premier ministre", *La documentation française*.

COR [2012] "L'équité entre les générations en matière de retraite : méthodologie et indicateurs", *Conseil d'Orientation des Retraites*, février 2012, doc. 10.

CORNILLEAU G., STERDYNIK H. [2003] "Les cinq piliers de la retraite", *Observatoire Français des Conjonctures Economiques*.

DENUIT M., GODERNIAUX A. C. [2005] "Closing and projecting life tables using log-linear models", *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, (1), pp. 29–48.

DUBOIS Y., MARINO A. [2015] "Indicateurs de rendement du système de retraite français", *Séance plénière du 15 avril 2015*", COR.

FERRARI S., MERY J. [2008] "Équité intergénérationnelle et préoccupations environnementales. Réflexions autour de l'actualisation", *Management et Avenir*, vol. 20, pp. 240-257.

GANNON F., HAMAYON S., LEGROS F., TOUZE V. [2014] "Sustainability of the French First Pillar Pension Scheme (CNAV) : Assessing Automatic Balance Mechanisms", *Australian Journal of Actuarial Practice*, vol. 2, pp. 33-45.

GARAIX J-C., LE QUELLEC N. [1999] "L'équité intergénérationnelle", *Mémoire présenté devant l'Institut des Actuaire Français*.

HILLAIRET C., BARRIEU P., BENSUSAN H., EL KAROUI N., LOISEL S., RAVANELLI C., SALHI Y. [2012] "Understanding, Modeling and Managing Longevity Risk : Key issues and Main Challenges", *Scandinavian Actuarial Journal*.

HORIUCHI S., WILMOTH J. [1998] "Deceleration in the age pattern of mortality at older ages", *Demography*, vol. 35, pp. 391-412.

HUMMEL C., HUGENTOBLER V. [2007] "La construction sociale du "problème" intergénérationnel", *Gérontologie et société*, vol. 30, pp. 71-84.

HYNDMAN R., KOEHLER A. [2006] "Another look at measures of forecast accuracy", *International Journal of Forecasting*, vol. 22, pp. 679-688.

KESSLER D. [1991] "Histoire et avenir du système de retraite en France", *Revue d'économie financière*, vol. 1, pp. 465-490.

KNELL M. [2011] "Pay-As-You-Go - a relict from the past or a promise for the future?", *Winning contribution of the Hannes Androsch Prize*.

KOLM S-C. [1972] "Justice et équité", *Editions du CNRS*.

LAVIGNE A. [2013] "Economie des retraites", *Revue d'économie financière*, vol. 1, pp. 465-490.

LEIMGRUBER M. [2005] "Les trois piliers de la sagesse? La métaphore ternaire de la protection vieillesse", *Aspects de la sécurité sociale*, vol. 4, pp. 2-11.

LETANG O. [2013] "Vingt-cinq ans d'écrits sur les relations entre les générations", Dans : PITAUD P., VERCAUTEREN R., *L'intérgénération en Europe : recherche et dynamisation de la cohésion sociale*, Toulouse, Edition Erès, Pratiques du champ social.

LIDDELL F. D. [1984] "Simple exact analysis of the standardised mortality ration", *Journal of Epidemiology and Community Health*, vol. 38, pp. 85-88.

PISON G. [2014] "1914-2014 : un siècle d'évolution de la pyramide des âges en France", *Population et Sociétés*, mars 2014.

PLANCHET F., TOMAS J. [2014a] "Construction d'une table de mortalité par positionnement : mode d'emploi", *Note de travail III291-15 v1.5 de l'Institut des Actuares*.

PLANCHET F., TOMAS J. [2014b] "Méthodes de positionnement : aspects méthodologiques", *Note de travail III291-12 v1.7 de l'Institut des Actuares*.

PLANCHET F., TOMAS J. [2014c] "Critères de validation : aspects méthodologiques", *Note de travail III291-14 v1.4 de l'Institut des Actuares*.

POURVILLE G. [2011] "L'assurance maladie en France : Beveridge et Bismarck enfin réconciliés?", *Annales des Mines - Réalités industrielles*, pp. 19-24.

PUIJALON B., TRINCAZ J. [1994] "L'Alliance des âges", *Fondation de France*.

QUASHIE A., DENUIT M. [2005] "Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges", *Institut des Sciences Actuarielles et Institut de Statistique Université Catholique de Louvain*.

RAWLS J. [1989] "Théorie de la justice", *Le Seuil*.

ROBERT G. [1981] "La protection sociale et médicale sous l'Ancien Régime", *Collection Repères*.

ROCARD M. [1991] "Livre blanc sur les retraites", *La documentation française*.

SEN A. [2000] "Repenser l'inégalité", *Éditions du Seuil*.

TRAGAKI A. [1998] "Le système de retraite et l'équité intergénérationnelle", *Economie et prévision*, vol. 136, pp. 107-116.

VIVILLE M-B. [2008] "Comparaison de méthodes d'ajustement de la mortalité des rentiers dans un but prospectif", *Mémoire d'actuariat présenté devant l'Institut des Actuares Français*, pp. 9-10.

WASSERMAN L. [2004] "All of statistics : a concise course in statistical inference", *Springer texts in statistics*.

Table des figures

1.1	Évolution de l'espérance de vie à 60 ans pour les hommes et les femmes . . .	24
1.2	Évolution de la mortalité pour les hommes et les femmes entre 1985 et 2015	25
1.3	Pyramide des âges en 1914	26
1.4	Pyramide des âges en 2014	27
1.5	Évolution de l'effectif des pensionnés de droits directs du Régime Général de la Sécurité Sociale	28
1.6	Les piliers du système de retraite en France	33
1.7	Les régimes de retraite en France	36
2.1	Age moyen de fin d'études	46
2.2	Age moyen de la première validation de droits	46
2.3	Comparaison du montant investi et du montant reçu	53
3.1	Décès observés pour les femmes et les hommes sur la période	58
3.2	Exposition observée pour les femmes et les hommes sur la période	59
3.3	Surface du <i>log</i> des taux de mortalité des femmes et des hommes sur la période	59
3.4	Espérance de vie du moment calculée l'année 2010 pour les femmes avant ajustement	62
3.5	Espérance de vie du moment calculée l'année 2010 pour les hommes avant ajustement	62
3.6	Ajustement des q_x en 2010 via la méthode 1 (gauche) et la méthode 2 (droite)	64
3.7	Ajustement du <i>log</i> des taux de décès en 2010 via la méthode 1 (gauche) et la méthode 2 (droite)	66
3.8	Graphiques des résidus pour les deux méthodes, pour chaque population .	68
3.9	Intervalles de confiance femmes en 2010 via la méthode 1 (gauche) et la méthode 2 (droite)	69
3.10	Intervalles de confiance hommes en 2010 via la méthode 1 (gauche) et la méthode 2 (droite)	71
3.11	Mise en lumière de la précaution nécessaire pour utiliser les tests	76
3.12	Comparaison de l'approximation (3.3) pour la population féminine	81
3.13	<i>Boxplot</i> de ΔD_{M1} à gauche et ΔD_{M2} à droite pour les hommes	83
3.14	<i>Boxplot</i> de ΔD_{M1} à gauche et ΔD_{M2} à droite pour les femmes	83

3.15	Fermeture des tables de la population féminine : exemple pour 2012	86
3.16	Table ajustée pour les femmes et les hommes avec la méthode 1	86
3.17	Espérance de vie ajustée pour les femmes et les hommes en 2010	87
3.18	Évolution de la base de cotisation en fonction de l'âge pour les trois profils étudiés	89
3.19	Valeur de service du point en € de 2016 depuis 1984	91
3.20	Rendement du régime complémentaire étudié depuis 1984	91
3.21	Evolution du prix d'achat du point en euros de 2016 en fonction de l'année	92
3.22	Evolution du rendement financier net en fonction du taux de frais appliqué via la première approche	99
3.23	Evolution du rendement financier net en fonction du taux de frais appliqué via la deuxième approche	101

Liste des tableaux

1.1	Résumé des visions Bismarckienne et Beveridgienne	18
1.2	Avantages et Inconvénients de la gestion par répartition	20
1.3	Avantages et Inconvénients de la gestion par capitalisation	22
1.4	Effets de l'augmentation de l'espérance de vie sur la retraite : exemple de la population masculine	28
1.5	Effets de la réforme de 2003	30
1.6	Évolution de l'âge de la retraite et espérance de vie des femmes	31
2.1	Fonctionnement du régime complémentaire avant la réforme de 1996	51
2.2	Présentation succincte du régime complémentaire	52
3.1	Format initial des données	58
3.2	Valeur du SMR sur la plage d'âge considérée pour les hommes et les femmes	61
3.3	Valeur des paramètres α et β pour les deux populations	63
3.4	Nombre de points hors de l'IC pour la population féminine par année	70
3.5	Nombre de points en dehors de l'IC pour la population masculine par année	71
3.6	Résultats du test du rapport de vraisemblance	74
3.7	Résultats du test du SMR	74
3.8	Résultats du test de Wilcoxon	75
3.9	Valeurs d'intérêt	75
3.10	p – values du test du rapport de vraisemblance en fonction de la plage d'âge	77
3.11	Résultats du test des runs	79
3.12	Résultats du test des signes	79
3.13	Résumé des tests pour chacune des méthodes	80
3.14	Valeurs numériques issues du <i>bootstrap</i> pour la population masculine	84
3.15	Valeurs numériques issues du <i>bootstrap</i> pour la population féminine	84
3.16	Résumé des générations, années d'affiliation et de liquidation pour chaque type	90
3.17	Tableau récapitulatif des valeurs du rendement individuel par année de liquidation et par affilié type, pour la population féminine	93
3.18	Tableau récapitulatif des valeurs du rendement individuel par année de liquidation et par base de mortalité, pour la population féminine	95

3.19	Tableau récapitulatif des valeurs du rendement individuel par année de liquidation avec la mortalité féminine figée en 2009	96
3.20	Tableau récapitulatif des valeurs du rendement individuel par année de liquidation et par taux d'actualisation, pour la population féminine	97
3.21	Tableau récapitulatif des rendements nets à atteindre en fonction des dates de liquidation, pour $\alpha = 0$, via la première approche	99
3.22	Tableau récapitulatif des rendements nets à atteindre en fonction des dates de liquidation, pour $\alpha = 0$, via la deuxième approche	100

Annexes

Annexe A

Historique de la retraite en France

Frise des évolutions de la retraite en France :

- 1673 : Colbert institue une pension de retraite pour les marins : Etablissement National des Invalides de la Marine
- 1698 : création du régime de l'Opéra de Paris
- 1790 : loi créant un régime de retraite (minime) pour les fonctionnaires et à l'origine de régimes spéciaux
- 1831 : loi sur les pensions militaires
- 1853 : loi sur les pensions civiles des agents de l'Etat
- 1850 : création de la Caisse des retraites pour la vieillesse qui regroupe la caisse des fonctionnaires et des grandes entreprises (mines, chemins de fer...)
- 1883 : l'Allemagne de Bismarck crée le premier système de retraite obligatoire co-financé (cotisations salariales et employeur), en capitalisation
- 1893 : mise en place du régime des mineurs
- 1909 : loi créant le régime de retraite des chemins de fer (regroupement de différents régimes existants antérieurement)
- 1910 : loi sur les retraites ouvrières et paysannes : introduction du premier système interprofessionnel en France (Retraites Ouvrières et Paysannes (ROP), en capitalisation, non obligatoire jusqu'en 1930)
- 1924 : loi améliorant l'accès à la retraite des fonctionnaires
- 1928 : loi créant les assurances sociales, gérée comme les autres régimes en capitalisation
- 1929 : crise de Wall Street
- 1930 : création du premier régime légalement obligatoire de retraite pour les salariés de l'industrie et du commerce percevant un salaire en deçà d'un certain plafond

- 1941 : allocation aux vieux travailleurs salariés : abandon du système par capitalisation au profit du système par répartition. La loi de 1941 combine le régime des assurances sociales avec celui de l'allocation aux vieux travailleurs salariés (AVTS)
- 1945 : ordonnance du 4 octobre 1945 instituant le caractère obligatoire de l'assurance-vieillesse par répartition pour tous les salariés dans le cadre de la sécurité sociale
- 1947 : création de l'AGIRC
- 1948 et 1952 : mise en place de régimes pour les non-salariés non agricoles et pour les exploitants agricoles
- 1956 : création du Fonds de Solidarité Vieillesse
- 1961 : création de l'ARRCO (en tant que fédération de régimes d'entreprise ou professionnels existants déjà)
- 1972 : loi Boulin : le taux de liquidation à 60 ans passe de 20 à 25 %, pour atteindre 50 % à 65 ans. Elle porte la durée d'assurance requise pour la pension complète de 30 à 37,5 ans (120 à 150 trimestres)
- 1972 : la liquidation des pensions de réversion devient possible à partir de 55 ans au lieu de 65 ans ; 10 meilleures années et non plus 10 dernières
- 1974 : instauration de la compensation financière entre les régimes de base
- 1975 : loi du 3 novembre supprimant la durée minimum d'assurance pour avoir une pension
- 1975 : loi du 30 novembre permettant à des travailleurs manuels ayant subis des travaux pénibles d'obtenir dès 60 ans une pension de vieillesse calculée au taux plein
- 1977 : loi du 1er juillet 1977 : accorde aux femmes comptant 150 trimestres le bénéfice de la pension au taux plein de 50 %, dès l'âge de 60 ans
- 1982 : retraite à 60 ans, sous réserve de compter 150 trimestres validés
- 1983 : loi du 26 mars 1983 : accord retraite les régimes complémentaires s'alignent sur la loi du 1982
- 1993 : réforme Balladur : indexation des pensions sur l'indice des prix hors tabac. Le nombre de trimestres pour liquider au taux plein passe de 150 à 160. De 1994 à 2008, le nombre d'années pris en référence pour le calcul des pensions est progressivement porté des 10 aux 25 meilleures années

- 1994 : loi créant le nouveau cadre des Institutions de Retraite Complémentaire
- 1994 : loi Madelin donnant la possibilité aux travailleurs indépendants de capitaliser de manière facultative à leur retraite
- 1999 : publication du rapport Charpin « l'avenir de nos retraites »
- 1999 : unification des régimes ARRCO (création du régime unique), et harmonisation des dispositions de l'ARRCO et de l'AGIRC
- 2000 : création du Conseil d'Orientation des Retraites
- 2002 : création d'un fonds de réserve pour les retraites
- 2003 : loi Fillon : augmentation de la durée d'assurance, coordination des régimes. . .
- 2004 : création d'un régime complémentaire obligatoire pour les commerçants, en gestion semi-provisionnée
- 2005 : création d'un régime additionnel de retraite pour les fonctionnaires, géré en capitalisation. Adossement de la CNIEG aux régimes de droit commun
- 2010 : loi Woerth : réforme des retraites, avec le recul de l'âge des pensions
- 2013 : loi Hollande sur les carrières longues
- 2014 : loi Hollande sur l'allongement de la durée de cotisation
- 2015 : fusion des régimes complémentaires des artisans et des commerçants
- 2019 : fusion de l'AGIRC et de l'ARRCO

Annexe B

Le calcul de la pension au Régime Général de la Sécurité Sociale

Le calcul de la pension au RGSS est assez simple :

$$Pension = SAM \times Taux \times \frac{\text{Nombre de trimestres validés à la SS}}{\text{Durée de référence}}$$

Où :

- *SAM* (Salaire Annuel Moyen) : moyenne des 25 meilleurs salaires limités au plafond de la Sécurité Sociale et revalorisés ;
- *Taux* : 50 % si l'assuré a acquis suffisamment de trimestres tous régimes de base confondus pour liquider à taux plein, ou s'il a 67 ans (générations 1955 et après) ou s'il est invalide ;
- *Durée de référence* : initialement fixée à 150 trimestres, elle augmente progressivement pour atteindre 172 trimestres pour les générations 1973 et suivantes.

Annexe C

Présentation du PERP et du PERCO

Le PERP est un dispositif de retraite individuelle. Il a été créé par la loi du 21 août 2003. Ce plan d'épargne a été initialement institué avec une sortie en rente, après la liquidation du régime général. Toutefois, depuis la loi 2006-872 (Article 35), il y a possibilité de sortir en capital à la retraite pour le primo-acquéreur, et depuis la Loi de Financement de la Sécurité Sociale de 2011, il est possible de sortir 20 % de la provision mathématique en capital à la liquidation.

Ce plan constitue une retraite par capitalisation, et il peut prendre trois formes différentes :

- contrat de rente viagère différée : acquisition directe de droits à une rente viagère qui est différée ;
- contrat en unité de rente : acquisition de points de rente qui seront transformés en une rente ;
- contrat multi-support : constitution d'une épargne qui sera à terme convertie en rente viagère. C'est la forme de contrat la plus courante.

Les versements sur le PERP peuvent être programmés ou libres, sans condition de montant. Il existe des déductions fiscales sur les versements, à hauteur de :

$$deduction = \max(10\% \text{ du } PASS; 10\% (\text{revenu net}, \min(8 \times PASS)))$$

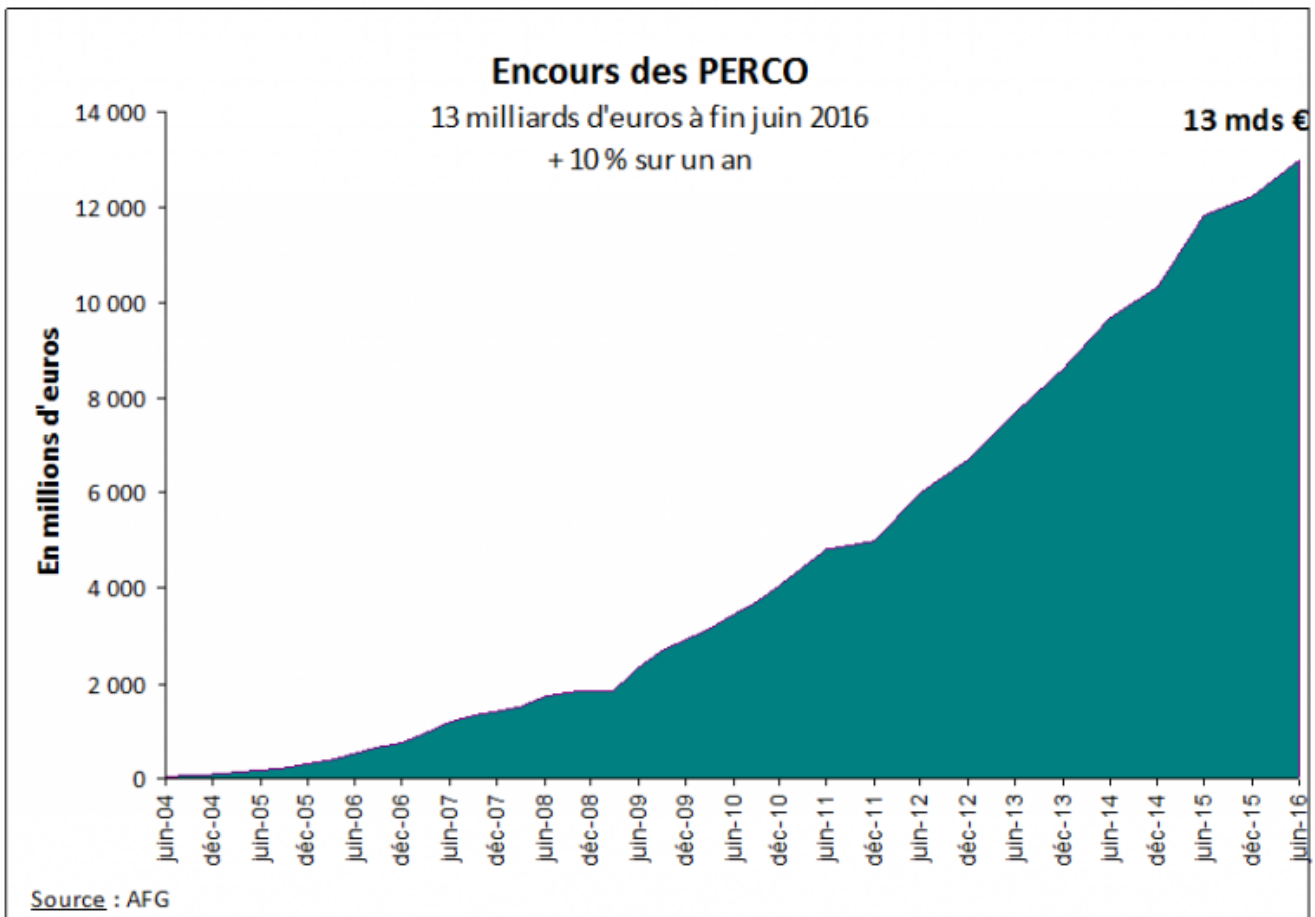
Le PERCO a été mis en place dans le cadre de la loi Fillon de 2003. C'est un système d'épargne collectif et facultatif permettant aux salariés, avec l'aide de leur entreprise, de se constituer un portefeuille de valeurs mobilières. Le plan s'adresse obligatoirement à tous les salariés de l'entreprise. Les droits sont définitivement acquis et transférables en cas de changement d'employeur. Voici les avantages et les inconvénients du plan pour l'entreprise :

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> — Rémunération différée dans un cadre fiscal et social avantageux ; — Abondement maximum possible deux fois supérieur à celui du PEE ; — Pas de passif social et coût plafonné ; — Souplesse de renégociation. 	<ul style="list-style-type: none"> — Mise en place obligatoire pour l'ensemble du personnel ; — Ne favorise pas l'actionnariat salarié ; — Conditionné par la mise en place d'un PEE.

et du salarié :

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> — Droits acquis et transférables ; — Déblocage anticipé dans certains cas ; — Abondement de l'employeur non imposable et non soumis à charges sociales ; — Abondement possible sur la participation ; — Possibilité de sortie en capital. 	<ul style="list-style-type: none"> — Versements volontaires du salarié non déductibles d'impôt ; — Pas d'effort d'épargne obligatoire.

Le PERCO est un produit très apprécié par les salariés, comme en témoigne le graphique sur l'évolution de l'encours du PERCO :



Annexe D

Liquidation au RGSS

Année de naissance	Nbre de salaires pour calculer le SAM	Nbre de trimestres pour le taux plein	Age minimum de liquidation	Age de liquidation sans condition
1933	10	150	60 ans	65 ans
1934	11	151	60 ans	65 ans
1935	12	152	60 ans	65 ans
...
1942	19	159	60 ans	65 ans
1943	20	160	60 ans	65 ans
1944	21	160	60 ans	65 ans
1945	22	160	60 ans	65 ans
1946	23	160	60 ans	65 ans
1947	24	160	60 ans	65 ans
1948	25	160	60 ans	65 ans
1949	25	161	60 ans	65 ans
1950	25	162	60 ans	65 ans
1951	25	163	60 ans 4 mois	65 ans 4 mois
1952	25	164	60 ans 9 mois	65 ans 9 mois
1953	25	165	61 ans 2 mois	66 ans 2 mois
1954	25	165	61 ans 7 mois	66 ans 7 mois
1955-1957	25	166	62 ans	67 ans
1958-1960	25	167	62 ans	67 ans
1961-1963	25	168	62 ans	67 ans
1964-1966	25	169	62 ans	67 ans
1967-1969	25	170	62 ans	67 ans
1970-1972	25	171	62 ans	67 ans
1973	25	172	62 ans	65 ans

Annexe E

La retraite dans le monde

Les Etats-Unis : Le premier pilier, connu sous le nom "old age survivors insurance" est constitué d'un régime obligatoire géré en répartition avec une forte composante redistributive. Il couvre les salariés du secteur privé, de l'Etat fédéral et les non-salariés. Le deuxième pilier comporte les régimes professionnels, facultatifs et capitalisés. Historiquement, ces fonds de pension étaient à prestations définies, mais étant donné leur état dans les années 1990, ils se sont peu à peu tournés vers la cotisation définie. Les deux premiers piliers s'avèrent peu généreux, et c'est pour cette raison que les ménages américains sont incités à se constituer une épargne individuelle : c'est le troisième pilier. Il existe de nombreux supports d'épargne individuelle aux Etats-Unis, et la plupart bénéficie d'une fiscalité avantageuse, à l'image des "individual retirement account". Ces comptes individuels d'épargne sont liquidables avec une imposition favorable entre 59,5 ans et 70 ans. Ces bornes permettent à la fois de pousser à la constitution d'une réelle épargne, et d'empêcher les legs déguisés.

Le Royaume-Uni : A priori beveridgien, le premier pilier offre une pension qui n'est ni universelle, ni forfaitaire, ni généreuse. Le régime public offre trois pensions : une pension de base, une pension complémentaire et une pension garantie. Le régime de base couvre les travailleurs actifs, et offre une pension proportionnelle à la durée de cotisation, et indépendante du revenu. Depuis 2002, une pension complémentaire est mise en place. Au départ, elle était proportionnelle au salaire, puis elle devient partiellement forfaitaire en 2008, et l'objectif à horizon 2030 est de la rendre entièrement forfaitaire pour retrouver l'esprit beveridgien. Enfin, le régime public offre depuis 1997 une pension minimale universelle, non contributive sous condition de ressources. Au total, la pension de base représente plus ou moins 15 % de la rémunération moyenne pour une carrière complète et la pension complémentaire environ 20 %. En réponse à cette faible générosité des régimes publics, le Royaume-Uni assiste à l'essor des régimes professionnels. Ces régimes fonctionnent par capitalisation, et comme aux Etats-Unis, ils bénéficient d'incitations fiscales. Enfin, le dernier pilier regroupe les plans d'épargne individuelle, qui offrent des supports d'épargne longue, avec sortie en rente viagère. Avec l'arrivée au pouvoir du parti travailliste en 1997, le système britannique tend à se rapprocher à une vision beveridgienne de la retraite : le régime public s'oriente vers un régime moins contributif et plus généreux pour les ménages les plus modestes. D'un autre côté, les gouvernements ont renforcé les incitations à développer l'épargne individuelle.

L'Allemagne : Pendant longtemps, le système de retraite allemand était caractérisé par une forte générosité reposant sur un premier pilier fort, représentant près de 85 % des pensions reçues. Puis à la suite des réformes de 2001, la générosité est réduite, et la capi-

talisation est favorisée au détriment de la répartition. Plus que les autres pays européens, l'Allemagne subit un choc démographique fort caractérisé par la hausse de l'espérance de vie, et surtout par un taux de fécondité bas¹.

Le premier pilier comporte un régime public obligatoire couvrant tous les salariés, sauf les fonctionnaires et certains travailleurs non-salariés. Le deuxième pilier est constitué par les régimes complémentaires du secteur privé à adhésion facultative. Néanmoins, comme la réforme Riester a réduit les taux de remplacement, des mesures ont été prises pour encourager l'épargne individuelle par capitalisation. Mais puisque l'adhésion à ce troisième pilier est facultative, les foyers les plus démunis n'y ont pas accès, faute de pouvoir mobiliser une épargne importante.

La Suède : Durant les années 90, la Suède est en proie à une crise économique rude, qui la pousse à revoir la générosité de l'Etat-providence. Une réforme voit le jour en 1999 : elle réorganise le premier pilier contributif et crée un régime non contributif de garantie vieillesse.

Le premier pilier est constitué de deux régimes obligatoires, l'un géré par répartition, l'autre par capitalisation. Les deux régimes sont à cotisations définies. Le deuxième pilier est formé de fonds de pension complémentaires, quasi obligatoires. Ces fonds peuvent être à prestations ou à cotisations définies, et ils couvrent environ 90 % des salariés. Pour finir, le troisième pilier est complètement géré par capitalisation et regroupe l'épargne individuelle. Cependant, ce pilier est marginal puisqu'il finance moins de 5 % des pensions versées aux retraités.

Les pays en transition : Les Pays d'Europe Centrale et Orientale (PECO) ont des systèmes publics de retraite orientés vers un principe d'assistance. Ces régimes sont gérés par l'Etat. Ils sont peu contributifs et offrent des retraites très généreuses et égalitaires. De fait, l'épargne individuelle de long terme est inexistante. L'effet de l'évolution démographique couplé à une modernisation de l'économie est que ces régimes à un seul pilier ont dû revoir leur modèle. Dès lors, vers le début des années 90, les PECO ont engagé des réformes de leur système : caractère contributif, augmentation de l'âge légal de la retraite et de la durée de cotisation et encouragement de l'épargne privée. Mais dix ans plus tard, ces régimes sont déficitaires. Ils se tournent donc vers une disposition en trois piliers préconisée par la Banque Mondiale. Les réformes menées sont plus radicales dans ces pays. Les piliers complémentaires en capitalisation sont rendus obligatoires pour les jeunes actifs, et facultatifs pour les salariés plus âgés.

1. Il s'élève à 1,4 enfants par femme en 2011.

Annexe F

Valeurs des SMR en fonction de la plage d'âge retenue

SMR 65 - 95	
Tables	INSEE
Hommes	0,8148
Femmes	0,9157

SMR 60 - 95	
Tables	INSEE
Hommes	0,8245
Femmes	0,9199

SMR 60 - 90	
Tables	INSEE
Hommes	0,8075
Femmes	0,9171

SMR 65 - 90	
Tables	INSEE
Hommes	0,7975
Femmes	0,9117

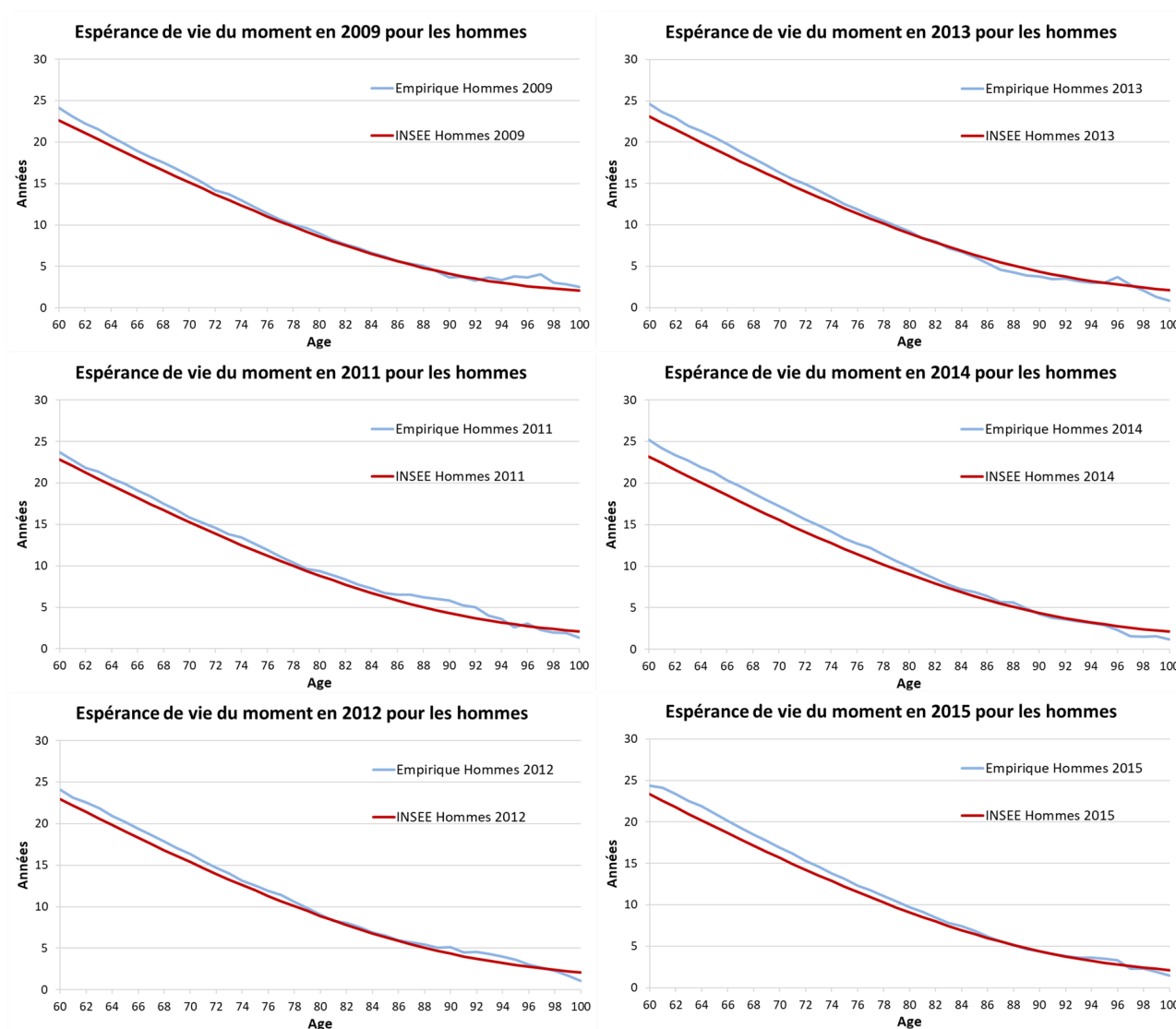
Les ordres sont conservés au sens où $SMR_{Femmes} > SMR_{Hommes}$, mais les valeurs changent. La plage d'âge est également déterminante dans la mise en place des tests. Il conviendra alors de faire un arbitrage entre la plage d'âge pour les valeurs du SMR et les valeurs des $p - values$.

Annexe G

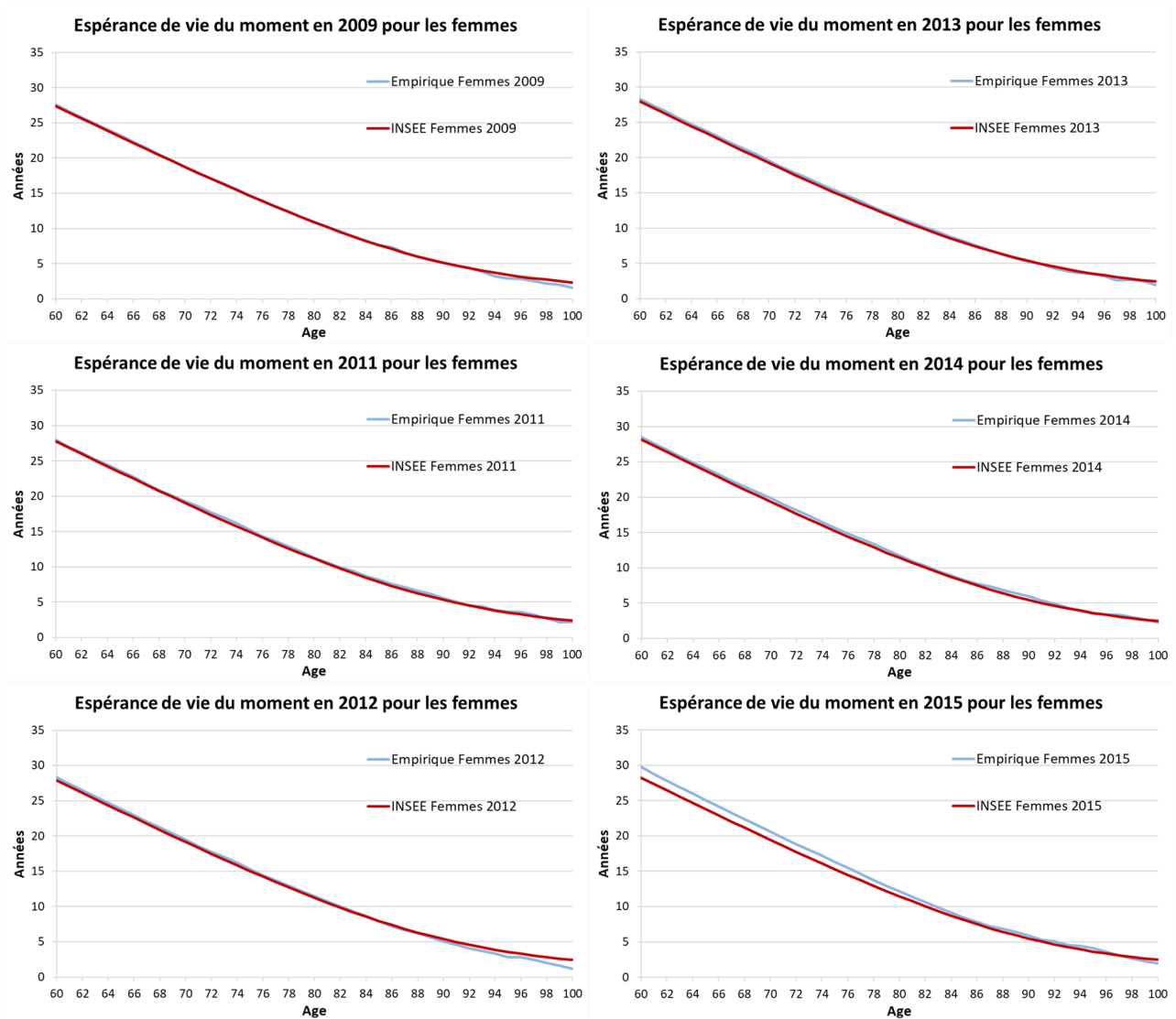
Espérance de vie du moment sur la plage d'étude pour les deux populations avant ajustement

L'année 2010 se trouve dans le corps du rapport.

Population Masculine :



Population Féminine :



Annexe H

A propos de la fonction *logit*

La fonction logistique est par définition :

$$lg(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad x \in]0; 1[$$

Qui plus est, elle est croissante sur cet intervalle :

$$\frac{d}{dx}lg(x) = \frac{1}{x(1-x)}$$

et elle est concave sur $]0; 1/2[$:

$$\frac{d^2}{dx^2}lg(x) = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$$

Par l'inégalité de Jensen, si f est convexe, alors $\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X])$.

Dans une zone où les taux de décès sont petits, alors le taux de décès estimé \hat{q}_x (supposé sans biais) est tel que :

$$\mathbb{E}[lg(\hat{q}_x)] \leq lg(q_x)$$

En d'autres termes, les logits obtenus sous-estiment les vrais logits. Comme la fonction $lg()$ et son inverse est croissante, les taux de décès théoriques sont sous-estimés.

La conclusion est inversée pour des taux de décès supérieurs à $\frac{1}{2}$.

Annexe I

A propos de la déviance

Il s'agit d'une mesure de qualité de l'ajustement. Sous l'hypothèse des décès suivant une loi de Poisson $D_{x,t} \sim \mathcal{P}(E_{x,t}q_x(t))$:

$$\begin{aligned}\ell &= \sum_{(x,t)} \ln \left(e^{-E_{x,t}q_x(t)} \frac{(E_{x,t}q_x(t))^{D_{x,t}}}{D_{x,t}!} \right) \\ \ell &= \sum_{(x,t)} (-E_{x,t}q_x(t) + D_{x,t} \ln(E_{x,t}q_x(t)) - \ln(D_{x,t}!))\end{aligned}$$

Pour le modèle saturé, on a $E_{x,t}\tilde{q}_x(t) = D_{x,t}$. D'où :

$$\begin{aligned}\ell_{SATURE} &= \sum_{(x,t)} (-E_{x,t}\tilde{q}_x(t) + D_{x,t} \ln(E_{x,t}\tilde{q}_x(t)) - \ln(D_{x,t})) \\ \ell_{SATURE} &= \sum_{(x,t)} (-D_{x,t} + D_{x,t} \ln(D_{x,t}) - \ln(D_{x,t}))\end{aligned}$$

La déviance s'écrit : $Deviance_{x,t} = 2(\ell_{SATURE} - \ell)$.

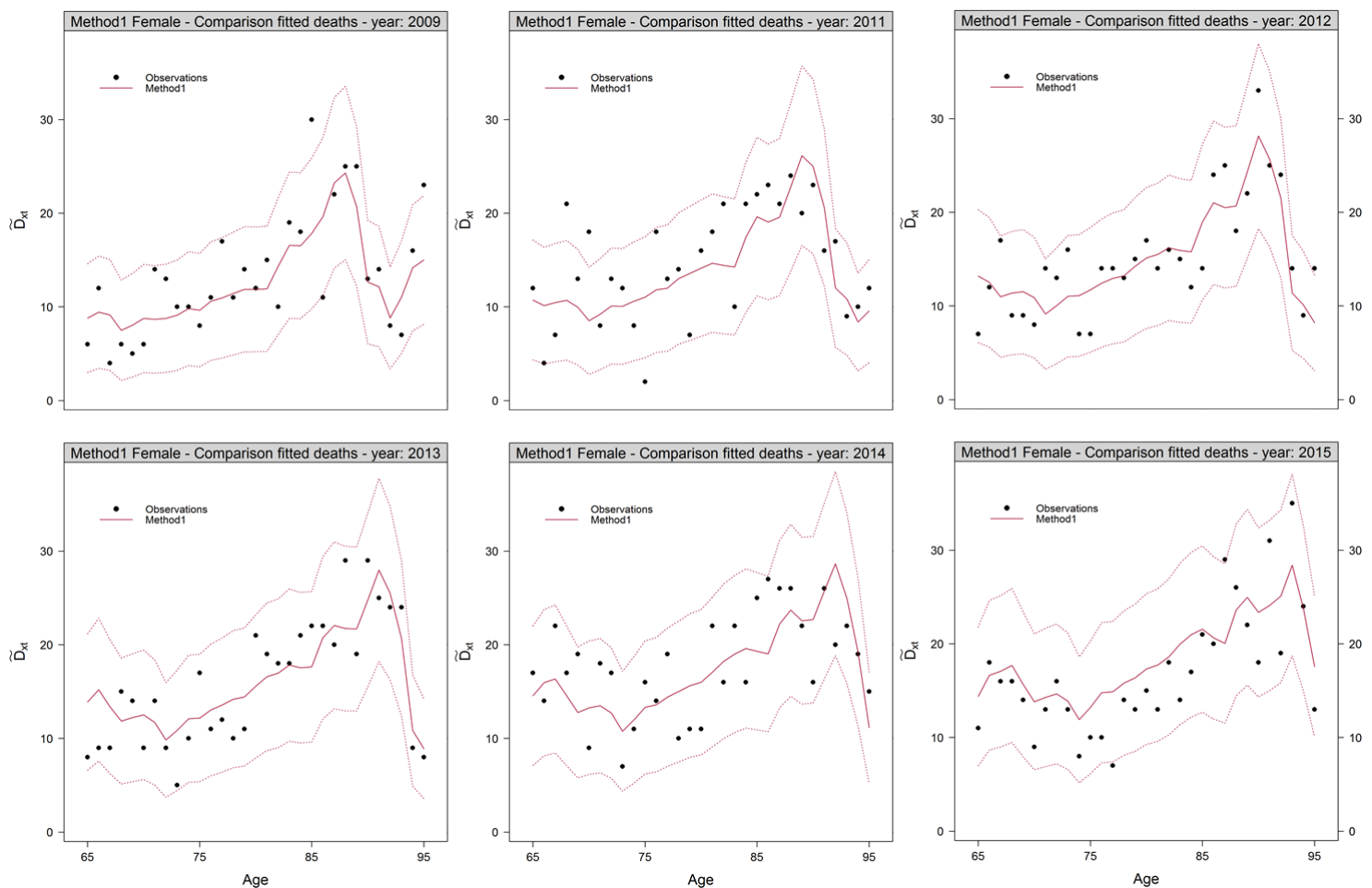
$$\begin{aligned}Deviance_{x,t} &= 2 \left[\sum_{(x,t)} (-D_{x,t} + D_{x,t} \ln(D_{x,t}) - \ln(D_{x,t}!) + E_{x,t}q_x(t) - D_{x,t} \ln(E_{x,t}q_x(t)) - \ln(D_{x,t}!)) \right] \\ Deviance_{x,t} &= 2 \left[\sum_{(x,t)} \left(D_{x,t} \ln \left(\frac{D_{x,t}}{E_{x,t}q_x(t)} \right) - (D_{x,t} - E_{x,t}q_x(t)) \right) \right]\end{aligned}$$

Annexe J

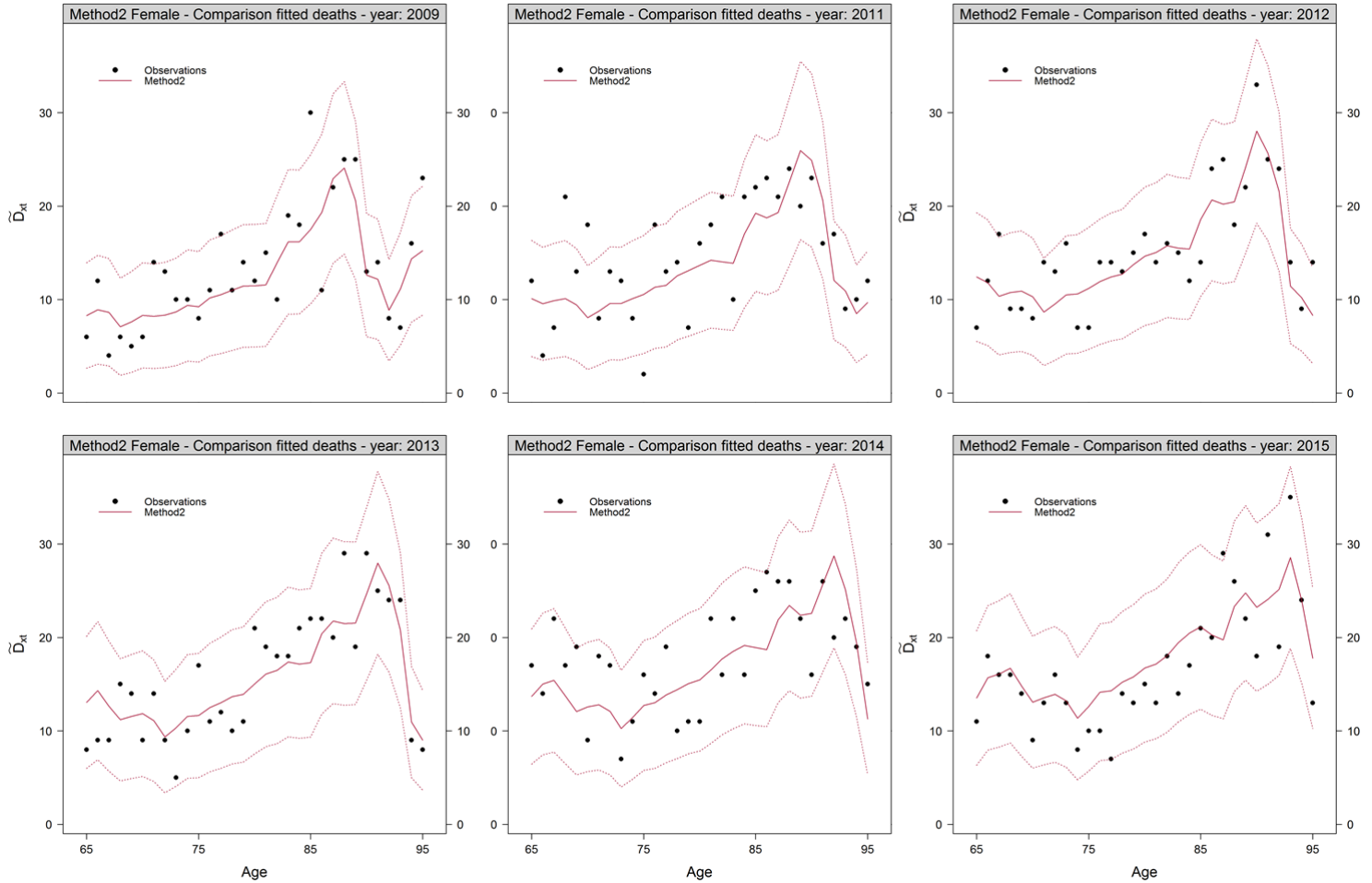
Intervalle de confiance femmes 2009-2015

L'année 2010 se trouve dans le corps du rapport.

Méthode 1 :



Méthode 2 :

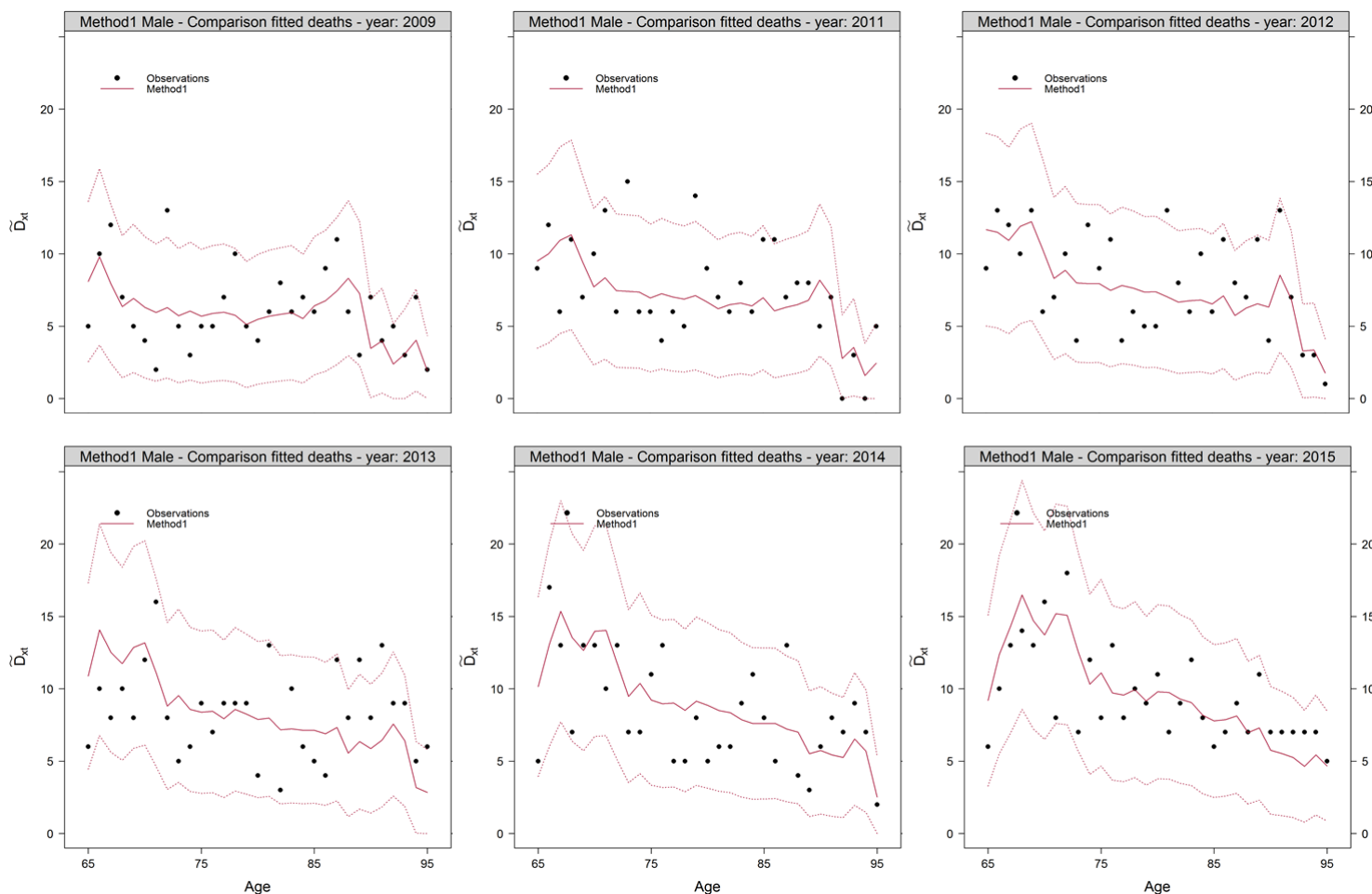


Annexe K

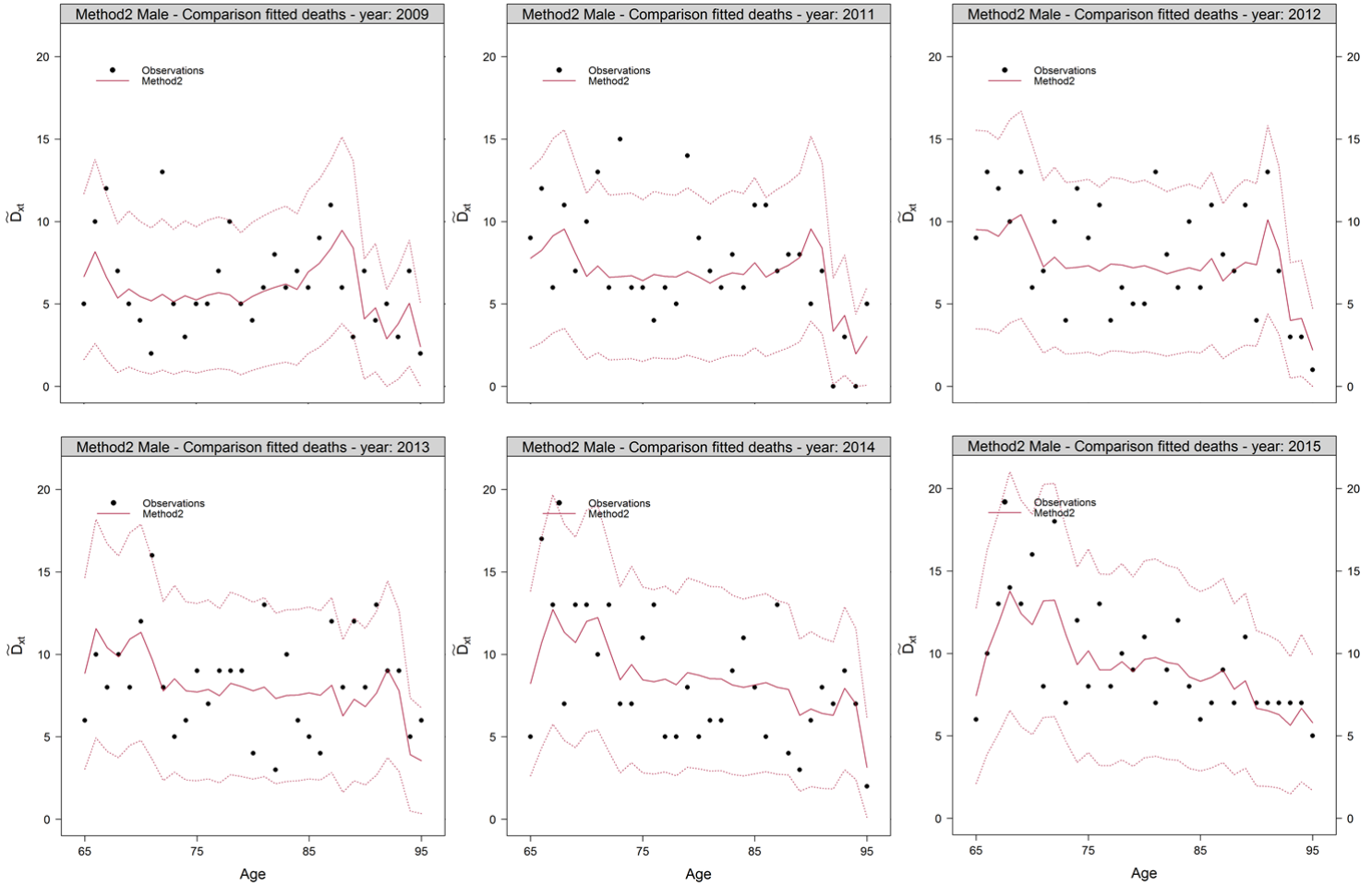
Intervalle de confiance hommes 2009-2015

L'année 2010 se trouve dans le corps du rapport.

Méthode 1 :



Méthode 2 :



Annexe L

A propos du χ^2 , du R^2 et du $MAPE$

χ^2 . Cet indicateur permet de mesurer la qualité de l'ajustement du modèle. La valeur du χ^2 est :

$$\chi^2 = \sum_{(x,t)} \frac{(D_{x,t} - E_{x,t}\tilde{q}_x(t))^2}{E_{x,t}\tilde{q}_x(t)(1 - \tilde{q}_x(t))}$$

On privilégiera le modèle ayant la valeur du χ^2 la plus faible.

R^2 . D'une valeur comprise entre 0 et 1, le coefficient de détermination mesure l'adéquation entre le modèle et les données observées.

Le R^2 se définit comme la part de la variance expliquée par rapport à la variance totale,

$$R^2 = 1 - \left(\frac{\sum_{(x,t)} (D_{x,t}/E_{x,t} - \tilde{q}_x(t))^2}{\sum_{(x,t)} (D_{x,t}/E_{x,t} - (\sum_{(x,t)} (D_{x,t}/E_{x,t})/n))^2} \right)$$

où n est le nombre d'observations.

$MAPE$. Il s'agit d'une mesure de l'exactitude de l'ajustement par rapport aux observations. Cet indicateur correspond à la moyenne des écarts en valeur absolue par rapport aux valeurs observées.

$$MAPE = \frac{\sum_{(x,t)} |(D_{x,t}/E_{x,t} - \tilde{q}_x(t))/(D_{x,t}/E_{x,t})|}{\sum_{(x,t)} D_{x,t}} \times 100$$

C'est donc un pourcentage et par conséquent un indicateur pratique de comparaison. Néanmoins, en présence d'observations nulles il y aura une division par zéro et ces observations doivent être retirées.

Annexe M

Lissage par la méthode de Whittaker-Henderson

Comme précisé en page 88, le calcul du critère nécessite de connaître la mortalité passée. L'idée retenue dans ce travail a été de "coller" la mortalité instantanée de 1980 à 2008 à la mortalité ajustée de 2009 à 2060, de façon à disposer des taux de décès sur la période adéquate. Afin de conserver une cohérence dans la méthode, il semble a priori nécessaire de lisser les taux instantanés de sorte que la table "globale" soit la moins erratique possible. Pour ce faire, le lissage utilisé est celui de Whittaker-Henderson en deux dimensions. Afin de saisir les principes de la méthode, nous commençons par présenter le lissage en dimension 1, puis élargirons le raisonnement lors de l'ajout de la deuxième dimension.

Globalement, le principe de la méthode de Whittaker-Henderson est de combiner un critère de fidélité, et un critère de régularité, puis de rechercher les valeurs ajustées qui minimisent la somme de ces deux critères.

Arrêtons nous un instant sur les notations utilisées :

- différence avant : $\Delta u(x) = u(x+1) - u(x)$. $\Delta^n u(x)$ s'écrit en fonction des coefficients binomiaux :

$$\Delta^n u(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} u(x+j),$$

- \hat{q}_i : taux de décès brut, c'est-à-dire non lissé,
- q_i : taux de décès lissé.

Cas de la dimension 1 :

Fixons des poids (w_i) et posons pour le critère de fidélité :

$$F = \sum_{i=1}^p w_i (q_i - \hat{q}_i)^2$$

et pour le critère de régularité :

$$S = \sum_{i=1}^{p-z} (\Delta^z q_i)^2$$

où z est un paramètre du modèle. Le critère total à minimiser est une combinaison linéaire de la fidélité et de la régularité, le poids de chacun des deux termes étant contrôlé par un

second paramètre h :

$$M = F + h \times S$$

La solution de ce problème d'optimisation satisfait aux conditions $\frac{\partial M}{\partial q_i} = 0$, $1 \leq i \leq p$. La résolution de ce système d'équations peut se faire en utilisant les matrices. Posons $q = (q_i)_{1 \leq i \leq p}$, $\hat{q} = (\hat{q}_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $w = \text{diag}(w_i)_{1 \leq i \leq p}$. Alors il est possible d'écrire :

- $F = (q - \hat{q})'w(q - \hat{q})$,
- En notant $\Delta^z q = (\Delta^z q_i)_{1 \leq i \leq p}$, alors $S = (\Delta^z q)' \Delta^z q$. Pour écrire S de cette façon, nous introduisons la matrice K_z de taille $(p - z, p)$, dont les termes sont les coefficients binomiaux d'ordre z pour lesquels le signe alterne et commence positivement pour z pair :

$$\Delta^z q(i) = \sum_{j=0}^z \binom{z}{j} (-1)^{z-j} q(j+i).$$

A titre d'exemple, si $p = 3$ et $z = 1$, alors,

$$K_z = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons alors écrire,

$$\begin{aligned} M &= (q - \hat{q})'w(q - \hat{q}) + hq'K_z'K_zq \\ M &= q'wq - 2q'w\hat{q} + \hat{q}'w\hat{q} + hq'K_z'K_zq, \end{aligned}$$

d'où,

$$\frac{\partial M}{\partial q} = 2wq - 2w\hat{q} + 2hK_z'K_zq.$$

Finalement, en résolvant $\frac{\partial M}{\partial q} = 0$, nous obtenons l'expression des taux lissés :

$$q^* = (w + hK_z'K_z)^{-1}w\hat{q}.$$

Il est à noter que l'inversion de la matrice $C = w + hK_z'K_z$ peut être délicate. En pratique, l'utilisation de la décomposition de Cholesky permet d'y arriver.

Cas de la dimension 2 :

En dimension 2, nous disposons d'estimations $\hat{q} = (q_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$. Le critère de fidélité se généralise immédiatement,

$$F = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q w_{ij} (q_{ij} - \hat{q}_{ij})^2.$$

En revanche, l'extension en dimension 2 du critère de régularité est plus délicate. Le critère de régularité est découpé en une régularité verticale S_v , à laquelle est affectée un poids

α , et une régularité horizontale S_h à laquelle est affectée un poids β . A titre indicatif, la régularité verticale s'écrit

$$S_v = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{p-z} (\Delta^z q_{ij})^2.$$

La régularité horizontale est calculée de la même manière. Alors, nous devons minimiser

$$M = F + \alpha \times S_v + \beta \times S_h.$$

Le principe est de se ramener au cas unidimensionnel en réarrangeant les éléments. Nous définissons alors le vecteur de taille $p \times q$, u tel que $u_{q(i-1)+j} = \hat{q}_{ij}$. Cela revient à prendre pour les q premiers éléments du vecteur u la première ligne de la matrice \hat{q} , puis ensuite les éléments de la seconde ligne, etc... De même, nous fabriquons une matrice de poids w^* en copiant sur la diagonale les lignes de la matrice (w_{ij}) . Nous procédons de la même façon pour définir les matrices K_z^v et K_z^h , et nous obtenons les valeurs lissées par

$$q^* = (w^* + \alpha K_z^{v'} K_z^v + \beta K_y^{h'} K_y^h)^{-1} w^* u.$$

Une fois que la méthode de lissage est présentée, voyons comment tester la qualité du lissage. Plusieurs méthodes existent, mais pour rester dans le cadre des tests de validation de l'ajustement d'une mortalité de référence à une mortalité empirique, seule une méthode est présentée ici : le test des changements de signes. Succinctement, le test des signes consiste à calculer

$$\xi = \frac{|n_+ - n_-| - 1}{\sqrt{n_+ + n_-}} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

Cela permet de dire que si $\xi \geq u_{1-\alpha/2}$, alors le lissage est bon. Pour la population féminine et la méthode 1, voici les paramètres du lissage :

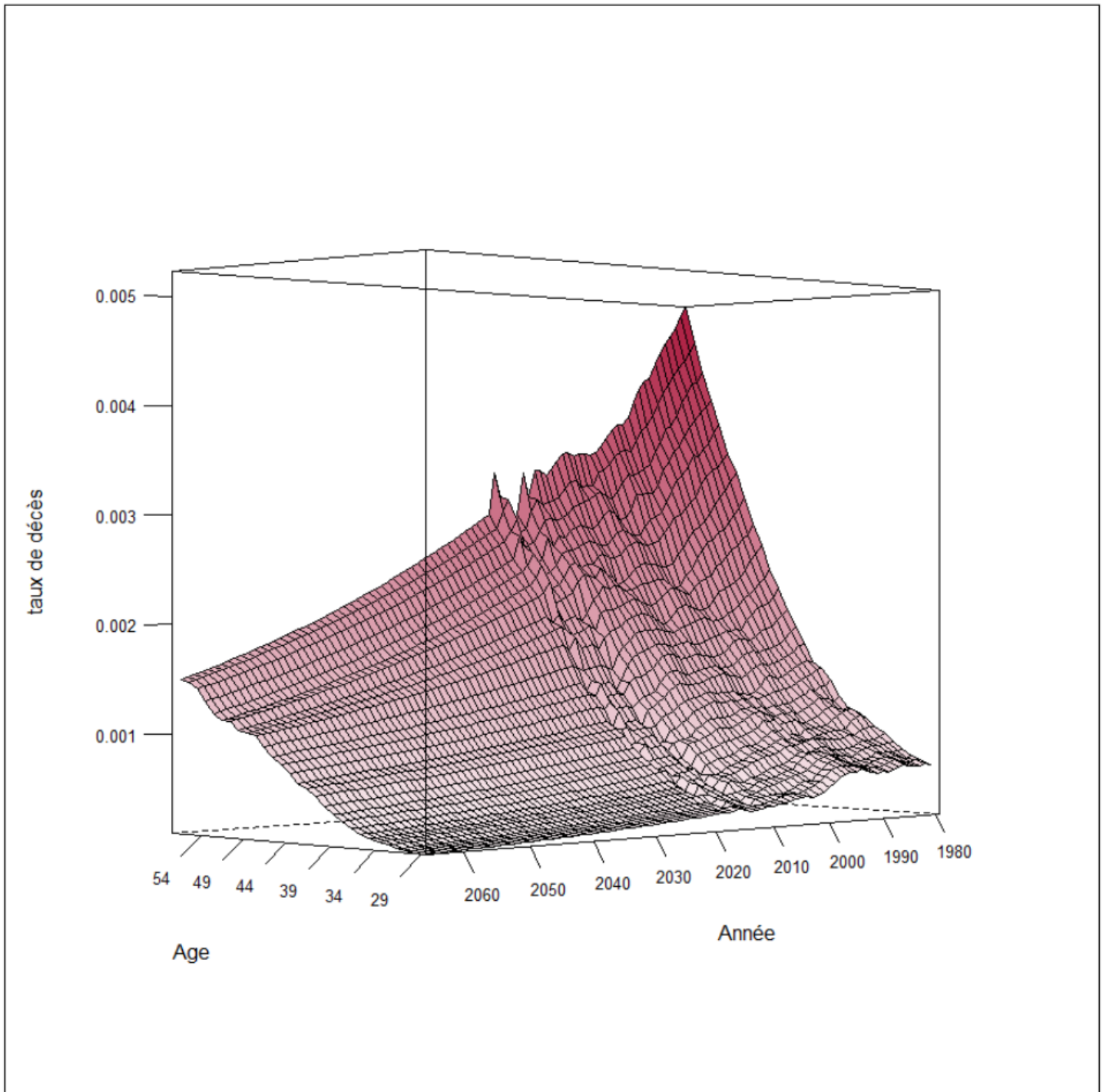
- $w_{ij} = \frac{1}{p \times q}$,
- $\alpha = 50$,
- $z = 5$,
- $\beta = 10$,
- $y = 5$.

Le résultat du test est le suivant :

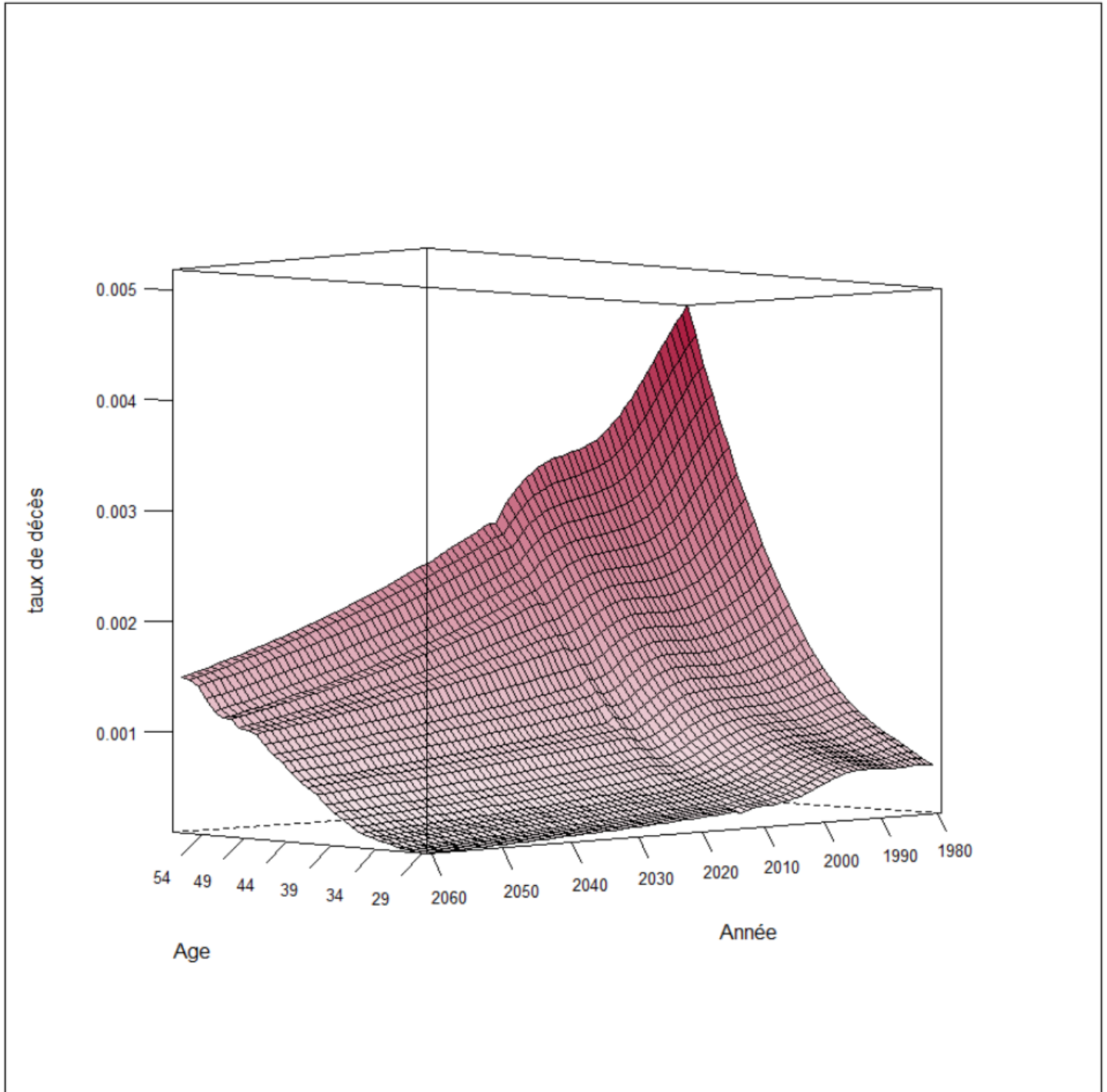
Test des signes	
Signe (-)	415
Signe (+)	426
Seuil	1,96
ξ	0,345
$p - value$	0,73
hypothèse	\mathcal{H}_0

Graphiquement, l'impact du lissage est réel comme le montrent les deux Figures suivantes : d'abord la table sans lissage, puis ensuite la table lissée.

Surface des taux de décès féminins sans lissage avec M1

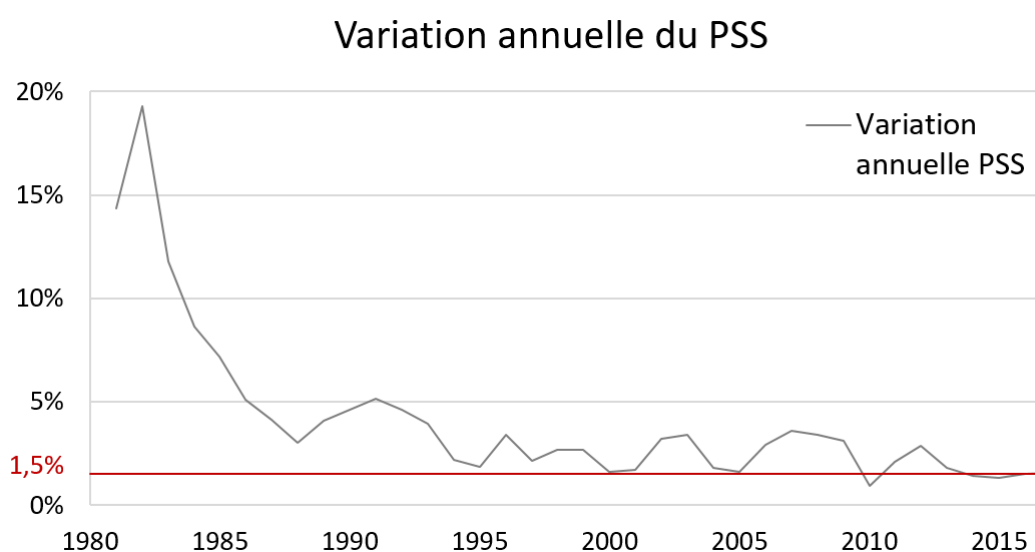


Surface des taux de décès féminins avec lissage avec M1



Annexe N

Historique du taux d'évolution du PSS de 1981 à 2017



Le plafond de la Sécurité Sociale diminue continuellement pour stagner autour de 1,5 % (barre rouge) depuis quelques années.

Annexe O

Rendement individuel pour la population masculine

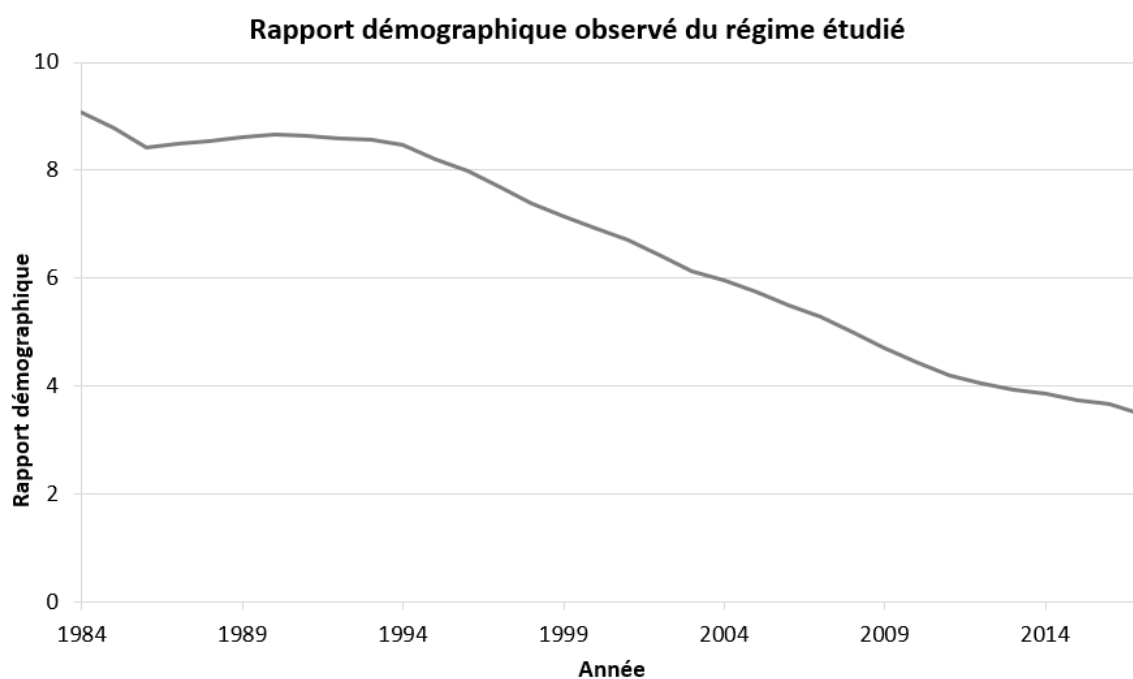
	Affilié type 1	Affilié type 2	Affilié type 3
Liquidation en 2016			
Nombre de points	193	353	201
Prestations	67 647	108 000	64 670
Cotisations	20 190	36 748	19 244
Rendement individuel	3,35	2,94	3,36
Liquidation en 2021			
Nombre de points	209	377	202
Prestations	75 593	119 289	61 787
Cotisations	27 214	47 533	23 587
Rendement individuel	2,78	2,51	2,62
Liquidation en 2031			
Nombre de points	212	391	210
Prestations	78 626	132 525	68 830
Cotisations	40 274	73 114	38 415
Rendement individuel	1,95	1,81	1,79
Liquidation en 2041			
Nombre de points	204	367	217
Prestations	78 919	130 247	74 718
Cotisations	60 658	101 701	59 015
Rendement individuel	1,30	1,28	1,27

Table O.1 - Tableau récapitulatif des valeurs du rendement individuel par année de liquidation et par affilié type

Les rendements masculins sont sans surprise plus faibles que les rendements féminins. En effet, la mortalité pendant la période de cotisation est peu ou prou égale à la mortalité féminine, d'où des montants de cotisations globales quasiment égaux entre les deux populations. En revanche, la mortalité est beaucoup plus forte pour les hommes dans la période de prestation. De fait, ils touchent des pensions moins longtemps, ce qui vient affaiblir le montant des prestations globales : il en résulte un taux de récupération plus faible pour les hommes que pour les femmes.

Annexe P

Rapport démographique de 1981 à 2016



Le rapport démographique est en baisse continue. Cela s'explique par l'augmentation du nombre de retraités, qui fait suite à une augmentation du nombre de cotisants. Selon le scénario central du COR, le rapport démographique de ce régime devrait atteindre 1,5 en 2041.

Annexe Q

Taux financiers nets de frais en fonction de la date de liquidation pour la population masculine

Première approche	Affilié de type 1			
Liquidation en	2016	2021	2031	2041
Taux annuel équivalent	8,60 %	7,48 %	5,30 %	2,98 %

Table Q.1 - Tableau récapitulatif des taux annuels équivalents en fonction des dates de liquidation via la première approche

Deuxième approche	Affilié de type 1			
Liquidation en	2016	2021	2031	2041
Taux annuel équivalent	5,89 %	5,14 %	3,79 %	2,37 %

Table Q.2 - Tableau récapitulatif des taux annuels équivalents en fonction des dates de liquidation via la deuxième approche

Comme pour la population féminine, les rendements financiers sont plus faibles avec la deuxième approche qu'avec la première. Les taux restent toutefois assez élevés dans la deuxième approche pour que le caractère obligatoire, et donc protecteur reste d'actualité.