

Mémoire présenté pour la validation de la Formation
« Certificat d'Expertise Actuarielle »
de l'Institut du Risk Management
et l'admission à l'Institut des actuaires

le 21 mai 2019

Par : *Alix DUPUY*

Titre : *Modélisation de l'inflation : des vanilles aux structurés*

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des actuaires :

Membres présents du jury de l'Institut du Risk Management :

Secrétariat :

Bibliothèque :

Entreprise : *MAZARS*

Nom : *Nordine CHOUKAR Associe'*

Signature et Cachet :

MAZARS
S.A. d'expertise comptable et de commissariat aux comptes
61, rue Henri Regnault - 92015 Paris - La Défense Cedex
Siret : 784 824 163 0024 - Code NAF : 6920Z
RCS Nanterre 784 824 153
numéro social : 61, rue Henri Regnault - 92400 COURBEVOIE

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : *Nordine CHOUKAR*

Signature :



Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise



Signature(s) du candidat(s)



MÉMOIRE PRÉSENTÉ POUR LA
VALIDATION DE LA FORMATION
”CERTIFICAT D’EXPERTISE ACTUARIELLE”
DE L’INSTITUT DU RISK MANAGEMENT ET
L’ADMISSION À L’INSTITUT DES ACTUAIRES

Février 2019

Modélisation de l’inflation : des vanilles
aux structurés

Entreprise :

Mazars Actuariat
Pôle Ingénierie Financière

Directeur de mémoire en entreprise :

Nordine CHOUKAR

Étudiant à l’institut du risk management :

Alix DUPUY

Plan du mémoire

1	L'inflation : risque, couverture et modélisation	6
2	L'inflation : origines, calcul et naissance des produits dérivés	8
2.1	Les origines de l'inflation	8
2.2	Le calcul de l'inflation	9
2.3	Inflation et marchés financiers	9
3	Les produits indexés sur l'inflation : obligations et dérivés	11
3.1	Les obligations indexées sur l'inflation	11
3.2	Les dérivés indexés sur l'inflation	12
3.2.1	Les swaps indexés sur l'inflation	12
3.2.1.1	Les swaps zéro-coupon	12
3.2.1.2	Les swaps Year-on-Year	12
3.2.2	Les caps et les floors inflation	13
4	Le premier modèle de valorisation des dérivés indexés sur l'inflation : le modèle de Jarrow-Yildirim	14
4.1	Présentation du modèle	14
4.2	Construction d'un marché complet et sans arbitrage	16
4.2.1	Dynamique des prix actualisés des actifs	17
4.2.2	Complétude du marché	18
4.2.3	Absence d'arbitrage	18
4.2.4	Dynamique des prix actualisés des actifs sous la probabilité risque neutre	20
4.3	Formules de pricing des dérivés indexés sur l'inflation	21
4.3.1	Pricing des swaps Year-on-Year	21
4.3.2	Pricing des caplets et des floorlets	22
4.3.3	Pricing des caps et des floors	23
4.4	Calibration du modèle	23
4.4.1	Calibration du taux d'intérêt réel	24
4.4.2	Calibration des autres paramètres	24

5	Un modèle alternatif de valorisation des dérivés indexés sur l'inflation conduit par deux processus de Hull et White	25
5.1	Présentation du modèle	25
5.2	Cadre mathématique du modèle à deux facteurs suivant une dynamique Hull et White	26
5.2.1	Dynamiques de r_t et i_t	26
5.2.2	Dynamiques des intégrales des processus r_t et i_t	27
5.3	Formules de pricing	27
5.3.1	Pricing des swaps Year-on-Year	27
5.3.2	Pricing des caplets et des floorlets	28
5.3.3	Pricing des caps et des floors	28
5.4	Le modèle classique avec des coefficients constants	28
5.4.1	Paramètres et dynamiques des processus	28
5.4.2	La mesure risque neutre	29
5.4.3	Formules de pricing	29
5.4.3.1	Expression de C	30
5.4.3.2	Expression de V^2	30
5.4.4	Calibration du modèle	30
6	Amélioration du modèle à coefficients constants : le modèle à coefficients constants par morceaux	31
6.1	Paramètres et dynamique des processus	31
6.2	La mesure risque neutre	32
6.3	Formules de pricing	32
6.3.1	Expression de C	32
6.3.2	Expression de V^2	33
6.4	Calibration du modèle	34
6.4.1	Calibration du taux d'intérêt	34
6.4.2	Implication de la variance V^{*2} et de la corrélation C^* à partir des prix de marché	35
6.4.3	Calibration du taux d'inflation	36
6.4.4	Calibration du paramètre de corrélation	37
7	Applications numériques et comparaison des différents modèles de valorisation des dérivés indexés sur l'inflation	38
7.1	Calibration des modèles de valorisation	38
7.1.1	Calibration du modèle de Jarrow-Yildirim	38
7.1.2	Calibration du modèle de Hull et White à coefficients constants	39
7.1.3	Calibration du modèle de Hull et White à coefficients constants par morceaux	39
7.2	Applications numériques	40

7.2.1	Valorisation des swaps Year-on-Year	40
7.2.2	Valorisation des caps inflation	41
8	Le modèle développé est plus performant que les modèles de valorisation classiques	45
A	Preuves des résultats sur le modèle de Jarrow et Yildirim	47
B	Preuves des résultats sur le modèle de Hull et White amélioré	51
	Références bibliographiques	56

Chapitre 1

L'inflation : risque, couverture et modélisation

Semaine du 2 janvier 2017 : "D'après les chiffres publiés cette semaine par Eurostat¹, [...] l'inflation [est de] 1,1% dans la zone euro [en ce début d'année]. C'est plus en Allemagne : 1,7%. En France, la hausse des prix atteint 0,8%, alors que Bercy anticipait encore il y a quelques mois une inflation proche de zéro. Des niveaux qui restent assez faibles mais qui marquent un changement de cap pour l'économie européenne. Et si les prix augmentent, c'est d'abord à cause du renchérissement du coût de l'énergie, à commencer par le pétrole : en un an, le baril de brut est passé de 30 à près de 55 dollars.

Et ce mouvement devrait se poursuivre tout au long de l'année. D'un point de vue macroéconomique, c'est plutôt une bonne nouvelle, puisque l'année dernière à la même époque, la faiblesse de l'inflation faisait craindre le début d'une spirale déflationniste étouffant la croissance."

Afin de se couvrir contre le risque d'inflation, les différents agents (i.e. les assureurs vie ou les fonds de pensions) peuvent employer différents types de dérivées sur inflation.

Ce marché est complexe en raison de ses spécificités avec en particulier l'existence d'un segment de marché d'obligations zéro-coupon et d'un marché de swaps "Year-on-Year" dont il faut assurer la cohérence. En effet, depuis la crise de 2008, un nombre croissant d'instruments financiers permettant de se couvrir contre l'inflation sont apparus sur les marchés. Cela a démarré avec certains États comme le Royaume-Uni, la France, puis l'Allemagne, qui avaient pris

¹Se référer à : http://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php/Inflation_in_the_euro_area.

l'habitude d'émettre, à côté des obligations traditionnelles, des obligations indexées sur l'inflation. Après la crise, la demande pour ces obligations s'est mise à augmenter, rendant le marché très liquide. En comparant ces obligations, il était possible d'évaluer l'inflation anticipée sur les marchés. Dès lors, de plus en plus d'institutions financières se sont mises à proposer des produits dérivés, plus ou moins complexes, permettant de se couvrir ou de spéculer sur l'inflation.

L'objectif des travaux présentés dans ce mémoire est de construire un cadre de modélisation risque neutre complet pour la valorisation de produits indexés sur l'inflation. Ainsi, ce mémoire présentera dans un premier temps les effets de l'inflation sur les différents acteurs économiques ainsi que le marché des produits financiers indexés sur l'inflation. Après avoir expliqué les risques liés à l'inflation pour les différents acteurs économiques, ce mémoire présentera les principaux produits en lien avec l'inflation. Ensuite, le mémoire présentera deux modèles fondamentaux utilisés aujourd'hui pour la valorisation des produits vanilles (swap, caps et floors) indexés sur l'inflation : le modèle de Jarrow-Yildirim et un modèle bi-facteurs reposant sur deux processus de Hull et White. Dans le cas du modèle de Jarrow-Yildirim, ce mémoire présente une construction détaillée de l'économie théorique considérée en absence d'opportunité d'arbitrage, ce qu'il ne fera pas dans le cas du second modèle puisque sa construction mathématique s'en déduit par analogie. Enfin, seront développés un modèle – une amélioration des modèles nommés précédemment – permettant une meilleure prise en compte de certains effets de marché, notamment la *term structure* de volatilité des caps inflation² pour la valorisation des options vanilles ainsi que ses méthodes de calibration.

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au sein du Pôle Finance Quantitative de Mazars Actuariat qui joue aujourd'hui un rôle de conseil auprès des banques d'investissement, des compagnies d'assurance et de grands groupes industriels pour des missions variées, dont le développement de modèles et d'outils permettant de générer des scénarios économiques ou encore la valorisation d'instruments financiers vanilles et complexes sur toutes les classes d'actifs (taux, inflation, change, crédit, matières premières, actions).

²Structure par terme, pour un niveau de strike donné, de la volatilité des caplets/floorlets sur inflation.

Chapitre 2

L'inflation : origines, calcul et naissance des produits dérivés

2.1 Les origines de l'inflation

L'inflation est un phénomène de hausse généralisée des prix, et correspond donc à une baisse durable de la valeur réelle de la monnaie. La valeur de la monnaie a tendance à baisser avec le temps, mais il lui arrive parfois d'augmenter, on parle alors de déflation, ou d'inflation négative. Ses causes sont complexes et variées, mais il est possible d'en décrire trois principales qui, combinées ou séparément, génèrent de l'inflation.

1. La première est l'augmentation de la quantité de monnaie en circulation par rapport à la quantité de bien produit;
2. La seconde est une augmentation des prix, liée à une augmentation des coûts de production. Cela peut être dû à une augmentation des prix des matières premières importées, dans ce cas on parle d'inflation importée;
3. La troisième est induite par une augmentation de la demande par rapport à l'offre.

La conjonction de ces trois phénomènes peut inquiéter les investisseurs. En effet, pendant la crise, les pays européens ont vu leurs dettes augmenter de façon importante, au point que la capacité de remboursement de certains d'entre eux a été remise en doute. Par un phénomène de "flight to quality"¹, les taux des obligations d'Etats se sont mis à diminuer en France et en Allemagne et à

¹Flight to quality (fuite vers la qualité en français) est un phénomène d'importants mouvements de capitaux qui, lors d'un krach boursier, se déplacent de valeurs mobilières vers des placements plus surs.

augmenter au Portugal, en Espagne, et en Italie, engendrant ainsi une augmentation des spreads de taux², au sein même de l'Union Européenne. Face à ces difficultés, la tentation pour les gouvernements était grande de faire intervenir la Banque Centrale Européenne, ce qui aurait fait augmenter mécaniquement la quantité de monnaie en circulation. A cela s'ajoute l'augmentation des prix des matières premières tel que le prix du pétrole ou de l'énergie.

2.2 Le calcul de l'inflation

L'inflation est un phénomène difficile à appréhender, d'abord car il est difficile de comparer la valeur de deux biens ou services au cours du temps, mais surtout car l'évolution des prix de différents produits impacte différemment les ménages, en fonction de leur consommation. Par conséquent, l'inflation est souvent calculée par rapport à un panier représentant la consommation moyenne d'un ménage d'une population donnée. L'inflation est donc toujours subjective, car elle est calculée sur la base d'un panier qui diffère d'un pays à l'autre. En France, l'inflation est mesuré par l'INSEE, sous forme d'un indice appelé indice des prix à la consommation (IPC). L'IPC est calculé à la façon d'un indice de Laspeyres, comparant l'évolution des prix de l'échantillon de biens, à quantité constante, par rapport à une année de référence³. Aux Etats-Unis, l'indice utilisé pour calculer l'inflation est le Consumer Price Index (CPI).

2.3 Inflation et marchés financiers

Si les investisseurs se préoccupent de l'inflation, c'est qu'ils en sont les premiers concernés. En effet, un investissement initial permet l'obtention de cash flow futur, cependant si la monnaie perd de la valeur, alors les flux d'argent perçus dans le futur perdent également de la valeur et l'investissement devient moins rentable. L'inflation favorise les emprunteurs au détriment des créanciers. Les actionnaires sont moins affectés par l'inflation car le chiffre d'affaire des entreprises augmente avec l'inflation, mais les détenteurs d'obligations peuvent être particulièrement touchés, surtout si leur taux d'intérêt est fixe. Les investisseurs institutionnels, et notamment les fonds de pension, sont sensibles à l'évolution de l'inflation. Ces fonds sont les principaux acheteurs d'obligations d'États. Les États se sont donc naturellement mis à émettre des obligations indexées sur l'inflation, d'autant que leurs recettes augmentent avec

²Le spread de taux est l'écart de taux par rapport au taux sans risque.

³<http://www.insee.fr>

l'augmentation des prix.

Les créanciers étant, d'une façon générale, affectés par l'inflation, de nombreuses institutions financières se sont mises à proposer sur les marchés des produits dérivés permettant de se couvrir contre ce phénomène. Sur ces marchés, les vendeurs de protection sont généralement des banques d'investissement et les principaux acheteurs sont des assureurs et des fonds de pension. La partie suivante de ce mémoire sera consacrée à l'étude de ces différents produits, elle décrira leurs avantages et leurs inconvénients, et donnera des exemples de contextes dans lesquels ils sont utilisés.

Chapitre 3

Les produits indexés sur l'inflation : obligations et dérivés

3.1 Les obligations indexées sur l'inflation

Les TIPS (*Treasury Inflation Protected Securities*) émises par le trésor américain ou encore les OATi (*Obligation Assimilable du Trésor indexée sur l'inflation*) émises par l'État français diffèrent des obligations conventionnelles puisque leurs coupons sont constamment ajustés en fonction de l'inflation.

En effet, pour une obligation conventionnelle en euro \mathcal{B} émise à la date 0, de maturité T , de nominal N et de taux de coupon RC , le flux versé à chaque instant $t = 1, \dots, T - 1$ est $N \times RC$. A la date T le nominal est remboursé intégralement en plus du coupon. Le flux versé en $t = T$ est donc $N \times RC + N$. Si on note $P(t, T)$ la valeur en t de l'obligation zéro-coupon versant 1 euro en T , la valeur en $t = 0$ de cette obligation est :

$$\mathcal{B}(0) = \sum_{t=1}^T N \times RC \times P(0, t) + NP(0, T).$$

Dans les cas d'une obligation indexée sur l'inflation \mathcal{B}_I , le coupon dépend de l'inflation constatée sur chaque période, par rapport à une période de référence, entre les versements des coupons. Si on considère une obligation émise à la date 0 de maturité T , de nominal N , de taux de coupon RC , alors à une date t de versement du coupon, la valeur de celui-ci sera $RC \times N \times \frac{I(t)}{I(0)}$. La valeur du coupon est simplement compensée par le taux d'inflation après la date d'émission, i.e. le ratio $\frac{I(t)}{I(0)}$ où $I(t)$ représente l'indice des prix à la consomma-

tion à la date t . Le prix en t de l'obligation sera donc :

$$\mathcal{B}_I(t) = \sum_{k=t+1}^T RC \times N \times \frac{I(k)}{I(0)} \times P(0, k) + NP(0, T) \frac{I(T)}{I(0)}.$$

3.2 Les dérivés indexés sur l'inflation

3.2.1 Les swaps indexés sur l'inflation

Un swap indexé sur l'inflation est un swap où, à chaque date de paiement, la contrepartie A verse à la contrepartie B le taux d'inflation sur une période prédéfinie, tandis que B paie à A un taux fixe. Les swaps inflation les plus échangés sont les swaps zéro-coupon et les swaps Year-on-Year.

3.2.1.1 Les swaps zéro-coupon

Dans le cas du swap zéro-coupon, il n'y a qu'un seul versement au bout de $T_M = M$ années. A cette date T_M , B paie à A le montant :

$$N[(1 + K)^M - 1],$$

où K est le taux fixe du swap et N le nominal. En échange, B reçoit :

$$N \left[\frac{I(T_M)}{I(0)} - 1 \right].$$

3.2.1.2 Les swaps Year-on-Year

Dans le cas du swap Year-on-Year, il y a plusieurs versements aux dates T_1, \dots, T_M . A chaque date T_i , B paie à A le montant :

$$N\varphi_i K,$$

où φ_i est un coefficient fixé au départ se rapportant à la période $[T_{i-1}, T_i]$ et caractéristique de la jambe fixe. En échange, B reçoit :

$$N\psi_i \left[\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1 \right],$$

où ψ_i est un coefficient fixé au départ se rapportant à la période $[T_{i-1}, T_i]$ et caractéristique de la jambe variable.

3.2.2 Les caps et les floors inflation

Un cap (resp. floor) indexé sur l'inflation est un flux de caplet (resp. floorlet) indexés sur l'inflation à différentes dates T_0, T_1, \dots, T_M .

Un caplet indexé sur l'inflation est une option d'achat sur le taux d'inflation. Un floorlet est une option de vente sur ce même taux d'inflation. A la date T_i , le payoff d'un caplet ou d'un floorlet est :

$$N\psi_i \left[\omega \left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1 - \kappa\tau \right) \right]_+,$$

où $(x)_+ = \max(x, 0)$, κ est le strike du caplet ou du floorlet, ψ_i un coefficient de pondération se rapportant à la période $[T_{i-1}, T_i]$, N le nominal, $\tau := T_i - T_{i-1}$ et $\omega = 1$ pour un caplet et $\omega = -1$ pour un floorlet.

Finalement, à chaque date T_i le payoff du cap ou du floor sera :

$$N\psi_i \left[\omega \left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1 - \kappa\tau \right) \right]_+.$$

Il existe d'autres produits plus complexes tels que les swaptions inflation, les options knockout, etc... Ici nous nous intéresserons uniquement aux produits standards décrit ci-dessus.

Chapitre 4

Le premier modèle de valorisation des dérivés indexés sur l'inflation : le modèle de Jarrow-Yildirim

En 2003, Jarrow et Yildirim proposent un modèle d'inflation de type Heath-Jarrow-Morton (HJM). Ce modèle avait été étudié auparavant par Barone et Castagna en 1997. Ils modélisent les taux d'intérêt nominal et réel ainsi que l'indice des prix à la consommation (CPI : Consumer Price Index). Dans leur article (cf. [9]), le CPI est vu comme le taux de change entre l'économie nominale et l'économie réelle.

4.1 Présentation du modèle

Jarrow et Yildirim considèrent une économie en temps continu sur l'intervalle $[0, \tau]$. L'incertitude dans l'économie est caractérisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où Ω est l'espace des états, \mathcal{F} l'ensemble des événements possibles (une tribu sur Ω) et \mathbb{P} est la mesure de probabilité historique sur (Ω, \mathcal{F}) . L'espérance sous \mathbb{P} est notée $\mathbb{E}[\cdot]$. De plus, ils notent $(\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ la filtration naturelle engendrée par le mouvement Brownien standard tri-dimensionnel $(W_n(t), W_r(t), W_I(t))_{t \leq T}$. Ses corrélations sont données par $dW_n(t)dW_r(t) = \rho_{nr}dt$, $dW_n(t)dW_I(t) = \rho_{nI}dt$ et $dW_r(t)dW_I(t) = \rho_{rI}dt$. Dans la suite de cette partie, les notations suivantes seront utilisées :

- r le taux d'intérêt réel, n le taux d'intérêt nominal,
- $P_n(t, T)$: prix nominal à l'instant t d'un ticket zéro-coupon de maturité T en euro,

- $I(t)$: indice des prix à la consommation i.e. le nombre d'euro par unité de CPI à l'instant t ,
- $P_r(t, T)$: prix réel à l'instant t d'un ticket zéro-coupon de maturité T ,
- $f_k(t, T)$: valeur à l'instant t du taux forward pour une maturité T donnée avec $k \in \{r, n\}$ i.e. :

$$P_k(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f_k(t, u)du\right),$$

- $r_k(t) = f_k(t, t)$: taux spot,
- $B_k(t) = \exp\left(\int_0^t r_k(u)du\right)$: valeur à l'instant t du prix de marché de l'actif sans risque.

Jarrow et Yildirim définissent ensuite le prix du titre zéro-coupon réel sans date d'ajustement (i.e. sans diviser par $I(0)$) comme :

$$P_I(t, T) = I(t)P_r(t, T). \quad (4.1)$$

et de même pour la valeur réelle de la monnaie :

$$B^*(t) = I(t)B_r(t). \quad (4.2)$$

Puis, étant donné $f_r(0, T)$, ils modélisent le taux forward réel par :

Hypothèse 1 :

$$df_r(t, T) = \alpha_r(t, T)dt + \sigma_r(t, T)dW_r(t), \quad (4.3)$$

où $\alpha_r(t, T)$ est \mathcal{F}_t -adapté, mesurable et $\sigma_r(t, T)$ est une fonction déterministe. Ces fonctions sont telles que :

$$\int_0^T |\alpha_r(u, T)|du < \infty, \quad \mathbb{P} - p.s. \text{ et } \int_0^T \sigma_r^2(u, T)du < \infty.$$

De la même manière, étant donné $f_n(0, T)$, ils modélisent le taux forward nominal par :

Hypothèse 2 :

$$df_n(t, T) = \alpha_n(t, T)dt + \sigma_n(t, T)dW_n(t), \quad (4.4)$$

où $\alpha_n(t, T)dt$ et $\sigma_n(t, T)$ sont soumis aux mêmes hypothèses de régularité que $\alpha_r(t, T)dt$ et $\sigma_r(t, T)$.

Enfin, ils modélisent l'indice d'inflation (CPI) comme un Brownien géométrique :

Hypothèse 3 :

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = \mu_I(t)dt + \sigma_I(t)dW_I(t), \quad (4.5)$$

où $\mu_I(t)$ est \mathcal{F}_t -adapté, mesurable et $\sigma_I(t)$ est une fonction déterministe du temps. Ces fonctions sont telles que :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |\mu_I(u)|^2 du \right] < \infty, \quad \mathbb{P} - p.s. \text{ et } \int_0^T \sigma_I^2(u) du < \infty.$$

Ces hypothèses permettent de garantir l'existence de solutions fortes pour les équations (4.3), (4.4) et (4.5). La suite des travaux de Jarrow et Yildirim nécessite de se placer sous la probabilité risque neutre. Pour cela, ils considèrent un certain nombre d'hypothèses leur permettant de construire un marché complet et sans arbitrage, ce qui leur garantit l'existence d'une unique probabilité risque neutre. Cette démarche est présentée dans la section suivante.

4.2 Construction d'un marché complet et sans arbitrage

Dans cette section, nous détaillons les restrictions nécessaires ajoutées par Jarrow et Yildirim aux processus (4.3), (4.4) et (4.5) afin de rendre leur modèle de marché complet et sans arbitrage. Ces restrictions concernent essentiellement les termes de drift des hypothèses 1 à 3 et imposent quelques conditions de non dégénérescence des volatilités.

Les prix actualisés des actifs du marché sont donnés par $\frac{P_n(t, T)}{B_n(t)}$, $\frac{I(t)P_r(t, T)}{B_n(t)}$ et $\frac{I(t)B_r(t)}{B_n(t)}$. Ainsi, s'il existe une unique mesure telle que ces prix évoluent comme des martingales sous cette mesure, le marché est complet et sans arbitrage. La démarche suivie par Jarrow et Yildirim afin de construire une telle mesure martingale est présentée dans les sous-sections suivantes.

4.2.1 Dynamique des prix actualisés des actifs

Dans cette section, sera développée la dynamique des prix actualisés des actifs. Ainsi, il sera possible de donner des conditions sous lesquelles ces processus sont des martingales. Pour cela, les lemmes qui suivent seront très utiles.

Lemme 4.2.1. *Les processus définis en (4.1) et (4.2) ont la dynamique suivante :*

$$\begin{aligned}\frac{dB^*(t)}{B^*(t)} &= (\mu_I(t) + r_r(t))dt + \sigma_I(t)dW_I(t), \\ \frac{dP_I(t, T)}{P_I(t, T)} &= \mu_{TIPS}(t)dt + a_r(t, T)dW_r(t) + \sigma_I(t)dW_I(t).\end{aligned}$$

où

$$\mu_{TIPS}(t) = r_r(t) + b_r(t, T) + \mu_I(t) + \rho_{rI}a_r(t, T)\sigma_I(t),$$

avec

$$\begin{aligned}a_r(t, T) &= - \int_t^T \sigma_r(t, y)dy, \\ b_r(t, T) &= - \int_t^T \alpha_r(t, y)dy + \frac{1}{2}a_r^2(t, T).\end{aligned}$$

Preuve : Voir l'annexe A. □

On est maintenant en mesure de donner la dynamique des prix des actifs actualisés. Pour cela on introduit quelques notations :

$$\begin{aligned}\cdot Z_n(t, T) &= \frac{P_n(t, T)}{B_n(t)} \\ \cdot Z_r(t, T) &= \frac{P_r(t, T)}{B_n(t)} = \frac{I(t)P_r(t, T)}{B_n(t)} \\ \cdot Z_{nr}(t) &= \frac{B^*(t)}{B_n(t)} = \frac{I(t)B_r(t)}{B_n(t)}\end{aligned}$$

La dynamique de ces processus (i.e. celle des prix actualisés des actifs) est donnée dans le lemme suivant.

Lemme 4.2.2. *(Dynamique des prix actualisés des actifs)*

Les processus $Z_n(t, T)$, $Z_r(t, T)$ et $Z_{nr}(t)$ définis ci-dessus ont pour dynamique

$$\frac{dZ_n(t, T)}{Z_n(t, T)} = b_n(t, T)dt + a_n(t, T)dW_n(t) \quad (4.6)$$

$$\frac{dZ_r(t, T)}{Z_r(t, T)} = (\mu_{TIPS}(t) - r_n(t))dt + a_r(t, T)dW_r(t) + \sigma_I(t)dW_I(t) \quad (4.7)$$

$$\frac{dZ_{nr}(t)}{Z_{nr}(t)} = (\mu_I(t) + r_r(t) - r_n(t))dt + \sigma_I(t)dW_I(t) \quad (4.8)$$

où $a_n(t, T)$ et $b_n(t, T)$ sont définis exactement comme pour le taux forward réel en changeant les r en n ;

Preuve : Voir l'annexe A. □

4.2.2 Complétude du marché

Dans leur article, Jarrow et Yildirim ajoutent une hypothèse à leur modèle afin de rendre le marché complet. Ils commencent par réécrire la dynamique des prix actualisés des actifs comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{dZ_n(t, T)}{Z_n(t, T)} &= \beta_n(t, T)dt + \gamma_{n,2}(t, T)dW_n(t) \\ \frac{dZ_r(t, T)}{Z_r(t, T)} &= \beta_r(t, T)dt + \gamma_{r,1}(t, T)dW_r(t) + \gamma_{r,3}(t, T)dW_I(t) \\ \frac{dZ_{nr}(t)}{Z_{nr}(t)} &= \beta_{nr}(t, T)dt + \gamma_{nr,3}(t)dW_I(t),\end{aligned}$$

où les $\beta_i(t, T)$ et les $\gamma_{i,j}(t, T)$ ($i = 1, 2, 3$) se déduisent des dynamiques du lemme 4.2.2 et par définition $\gamma_{n,1}(t, T) = \gamma_{n,3}(t, T) = \gamma_{r,1}(t, T) = \gamma_{nr,1}(t) = \gamma_{nr,2}(t) = 0, \forall t, T$. Jarrow et Yildirim considèrent ensuite un ticket zéro-coupon nominal de maturité T et un ticket zéro-coupon réel de maturité M . Puis ils définissent :

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} \beta_n(t, T) \\ \beta_r(t, M) \\ \beta_{nr}(t) \end{pmatrix} \text{ et } A_2(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{n,i}(t, T)_{i=1,2,3} \\ \gamma_{r,i}(t, M)_{i=1,2,3} \\ \gamma_{nr,i}(t)_{i=1,2,3} \end{pmatrix}.$$

Afin de s'assurer que ces trois titres recouvrent les trois sources de risques de l'économie, Jarrow et Yildirim ajoutent l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4 : (Marché complet) $A_2^{-1}(t)$ existe $\mathbb{P} - p.s.$.

L'hypothèse 4 garantit que le marché est complet. En effet, dans ce cas, étant donné un payoff aléatoire au temps τ , mesurable et intégrable, il existe une stratégie d'autofinancement mettant en jeu ces trois actifs et dont la valeur terminale réplique le payoff. Jarrow et Yildirim s'intéressent ensuite à des hypothèses permettant d'assurer l'absence d'opportunité d'arbitrage.

4.2.3 Absence d'arbitrage

Notons $\Lambda = (\lambda_r, \lambda_n, \lambda_I)$ la solution de :

$$A_1(t) + A_2(t)\Lambda(t) = 0. \tag{4.9}$$

Ces trois quantités λ_r, λ_n et λ_I correspondent au prix de marché du risque respectivement pour chaque source d'aléa W_r, W_n et W_I .

On définit maintenant une mesure de probabilité \mathbb{Q} telle que sa dérivée de Radon-Nikodym soit donnée par :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(\sum_{i \in \{r, n, I\}} \int_0^T \lambda_i(t) dW_i(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \left(\sum_{i \in \{r, n, I\}} \lambda_i(t) dW_i(t) \right)^2 dt \right). \quad (4.10)$$

On note $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\cdot]$ l'espérance sous \mathbb{Q} .

Hypothèse 5 : (Existence d'une unique mesure martingale pour ces actifs spécifiques)

- (i) \mathbb{Q} est une mesure de probabilités,
- (ii) $Z_r(t, T), Z_n(t, T)$ et $Z_{nr}(t)$ sont des \mathbb{Q} -martingales par rapport à la filtration \mathcal{F}_t , et
- (iii) $\tilde{W}_i(t) = W_i(t) - \int_0^t \lambda_i(s) ds, i \in \{r, n, I\}$ est un mouvement Brownien tridimensionnel sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$.

Ces hypothèses garantissent que les processus de prix actualisés donnés par les trois actifs $Z_r(t, T), Z_n(t, T)$ et $Z_{nr}(t)$ ne sont arbitrables i.e. ce sont des martingales sous la mesure risque neutre. Une condition suffisante pour cela est que $\mu_I(t) + r_r(t) - r_n(t)$ et $\lambda_i(t), i = r, n, I$ soient uniformément bornés sur $(t, \omega) \in [0, \tau] \times \Omega$. Ceci est une conséquence directe du critère de Novikov et du théorème de Girsanov au système (4.9). La combinaison des hypothèses 4 et 5 implique que la mesure martingale est unique. A présent, il faut s'assurer de l'absence d'arbitrage sur les autres actifs de l'économie. Pour cela Jarrow et Yildirim font une dernière hypothèse.

Hypothèse 6 : Les $\lambda_i(t)$ pour $i = r, n, I$ sont indépendants des actifs particuliers choisis pour construire la mesure martingale.

Cette hypothèse combinée aux hypothèses 1 à 5 suffit à assurer que le marché est complet et sans arbitrage.

Proposition 4.2.1. (Existence d'une unique mesure martingale)

Etant données les hypothèses 1 à 6, il existe une unique mesure \mathbb{Q} , équivalente à \mathbb{P} et sous laquelle tous les prix des actifs dans l'économie sont des martingales.

Preuve : C'est une conséquence directe de l'unicité de \mathbb{Q} . □

Et c'est ainsi que Jarrow et Yildirim finissent de construire un marché complet et sans arbitrage. Puis, ils s'intéressent à la dynamique des prix des actifs sous la mesure risque neutre \mathbb{Q} .

4.2.4 Dynamique des prix actualisés des actifs sous la probabilité risque neutre

Afin de déterminer la dynamique des prix actualisés des actifs sous la probabilité risque neutre, Jarrow et Yildirim donnent des conditions nécessaires et suffisantes caractérisant l'absence d'arbitrage sur le marché.

Proposition 4.2.2. *(Structure des drifts en absence d'arbitrage)⁵*

$\frac{P_n(t,T)}{B_n(t)}$, $\frac{I(t)P_r(t,T)}{B_n(t)}$ et $\frac{I(t)B_r(t)}{B_n(t)}$ sont des \mathbb{Q} -martingales si et seulement si on a :

$$\alpha_n(t, T) = \sigma_n(t, T) \left(\int_t^T \sigma_n(t, v) dv - \lambda_n(t) \right), \quad (4.11)$$

$$\alpha_r(t, T) = \sigma_r(t, T) \left(\int_t^T \sigma_r(t, v) dv - \rho_{rI} \sigma_I(t) - \lambda_r(t) \right), \quad (4.12)$$

$$\mu_I(t) = r_n(t) - r_r(t) - \sigma_I(t) \lambda_I(t). \quad (4.13)$$

Preuve : Voir l'annexe A □

Jarrow et Yildirim obtiennent alors les différentes dynamiques des processus sous la probabilité risque neutre.

Proposition 4.2.3. *(Dynamique des processus sous la mesure risque neutre)*

$$df_n(t, T) = \sigma_n(t, T) \left(\int_t^T \sigma_n(t, s) ds \right) dt + \sigma_n(t, T) d\tilde{W}_n(t) \quad (4.14)$$

$$df_r(t, T) = \sigma_r(t, T) \left(\int_t^T \sigma_r(t, s) ds - \rho_{rI} \sigma_I(t) \right) dt + \sigma_r(t, T) d\tilde{W}_r(t) \quad (4.15)$$

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = (r_n(t) - r_r(t)) dt + \sigma_I(t) d\tilde{W}_I(t) \quad (4.16)$$

$$\frac{dP_n(t, T)}{P_n(t, T)} = r_n(t) dt - \left(\int_t^T \sigma_n(t, s) ds \right) d\tilde{W}_n(t) \quad (4.17)$$

$$\frac{dP_I(t, T)}{P_I(t, T)} = r_n(t) dt + \sigma_I(t) d\tilde{W}_I(t) - \left(\int_t^T \sigma_r(t, s) ds \right) d\tilde{W}_r(t) \quad (4.18)$$

$$\frac{dP_r(t, T)}{P_r(t, T)} = \left(r_r(t) + \rho_{rI} \sigma_I(t) \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \right) dt - \left(\int_t^T \sigma_r(t, s) ds \right) d\tilde{W}_r(t) \quad (4.19)$$

⁵La preuve de cette proposition n'utilise pas la structure déterministe de la volatilité

Preuve : Reprendre les dynamiques des processus et utiliser les conditions de la propriété 4.2.2. \square

On voit donc que sous \mathbb{Q} , les taux forward réel et nominal suivent une loi normale et l'indice de l'inflation est un Brownien géométrique. Ces formules sont très utiles pour pricer des produits dérivés indexés sur l'inflation ou dépendant des taux forward réel et nominal.

Jarrow et Yildirim définissent ensuite une structure paramétrique pour les volatilités des processus (4.3), (4.4) et (4.5) afin d'obtenir des formules de pricing sous forme analytique. Ils posent :

$$\sigma_k(t, T) = \sigma_k e^{-a_k(T-t)}, k \in \{r, n\},$$

où $\sigma_k > 0$ et a_k est un réel quelconque. De plus, la volatilité σ_I est constante.

Nous allons maintenant voir les formules de pricing obtenues avec ce modèle.

4.3 Formules de pricing des dérivés indexés sur l'inflation

Les formules de valorisation présentées dans ce mémoire n'ont pas été détaillées afin de ne pas l'alourdir. Toutes les formules sont obtenues avec des arguments standards de la théorie du pricing en absence d'opportunité d'arbitrage. Nous renvoyons à [1] pour les démonstrations et le détail des calculs.

On reprend les notations introduites dans la section 3. De plus, on pose $\mathcal{T} := \{T_1, \dots, T_M\}$, $\Psi := \{\psi_1, \dots, \psi_M\}$ et $l(t) := \min(i : T_i > t)$ (par définition $T_{l(t)-1} \leq t < T_{l(t)}$).

4.3.1 Pricing des swaps Year-on-Year

On note $\mathbf{YYIIS}(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, N)$ le prix à l'instant $t < T_i$ de la patte flottante sur la période $[T_{i-1}, T_i]$. Celui-ci est donné par la formule :

$$\mathbf{YYIIS}(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, N) = N\psi_i P_n(t, T_{i-1}) \frac{P_r(t, T_i)}{P_r(t, T_{i-1})} e^{C(t, T_{i-1}, T_i)} - N\psi_i P_n(t, T_i),$$

où on a :

$$C(t, T_{i-1}, T_i) = \sigma_r B_r(T_{i-1}, T_i) \left[B_r(t, T_{i-1}) \left(\rho_{rI} \sigma_I - \frac{1}{2} \sigma_r B_r(t, T_{i-1}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\rho_{nr} \sigma_n}{a_n + a_r} (1 + a_r B_n(t, T_{i-1})) \right) - \frac{\rho_{nr} \sigma_n}{a_n + a_r} B_n(t, T_{i-1}) \right],$$

avec pour $k \in \{r, n\}$:

$$P_k(t, T) = A_k(t, T) e^{-B_k(t, T) r(t)}, \\ B_k(t, T) = \frac{1}{a_k} (1 - e^{-a_k (T-t)}), \\ A_k(t, T) = \frac{P_k(0, T)}{P_k(0, t)} \exp \left(B_k(t, T) f_k(0, t) - \frac{\sigma_k^2}{4a_k} (1 - e^{-2a_k t}) B_k(t, T)^2 \right).$$

Puis, on note $\mathbf{YYIIS}(t, \mathcal{T}, \Psi, N)$ le prix en $t < T_M$ de la jambe flottante d'un swap Year-on-Year indexé sur l'inflation. Ce prix s'obtient en sommant les valeurs des paiements :

$$\mathbf{YYIIS}(t, \mathcal{T}, \Psi, N) = N \psi_{l(t)} \left[\frac{I(t)}{I(T_{l(t)-1})} P_r(t, T_{l(t)}) - P_n(t, T_{l(t)}) \right] \\ + N \sum_{i=l(t)+1}^M \psi_i \left[\frac{P_r(t, T_i)}{P_r(t, T_{i-1})} e^{C(t, T_{i-1}, T_i)} - P_n(t, T_i) \right]. \quad (4.20)$$

En particulier en $t = 0$ on a :

$$\mathbf{YYIIS}(0, \mathcal{T}, \Psi, N) = N \psi_1 [P_r(0, T_1) - P_n(0, T_1)] \\ + N \sum_{i=2}^M \psi_i \left[\frac{P_r(0, T_i)}{P_r(0, T_{i-1})} e^{C(0, T_{i-1}, T_i)} - P_n(0, T_i) \right]. \quad (4.21)$$

4.3.2 Pricing des caplets et des floorlets

On note $\mathbf{IICplt}(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, K, N, \omega)$ le prix d'un caplet (pour $\omega = 1$) (resp. d'un floorlet pour $\omega = -1$) à l'instant $t < T_i$ avec $K := 1 + \kappa\tau$. Celui-ci est

donné par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{IICplt}(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, K, N, \omega) &= \omega N \psi_i P_n(t, T_i) \left[\frac{P_n(t, T_{i-1}) P_r(t, T_i)}{P_n(t, T_i) P_r(t, T_{i-1})} e^{C(t, T_{i-1}, T_i)} \right. \\
&\times \Phi \left(\omega \frac{\ln \frac{P_n(t, T_{i-1}) P_r(t, T_i)}{K P_n(t, T_i) P_r(t, T_{i-1})} + C(t, T_{i-1}, T_i) + \frac{1}{2} V^2(t, T_{i-1}, T_i)}{V(t, T_{i-1}, T_i)} \right) \\
&\left. - K \Phi \left(\omega \frac{\ln \frac{P_n(t, T_{i-1}) P_r(t, T_i)}{K P_n(t, T_i) P_r(t, T_{i-1})} + C(t, T_{i-1}, T_i) - \frac{1}{2} V^2(t, T_{i-1}, T_i)}{V(t, T_{i-1}, T_i)} \right) \right],
\end{aligned} \tag{4.22}$$

avec les mêmes notations que précédemment. On ne donne pas ici l'expression explicite de $V^2(t, T_{i-1}, T_i)$ car cette dernière est très lourde et sans intérêt particulier. Cependant, le lecteur pourra la trouver dans [1].

Remarque 4.3.1. De plus, notant $v_{Black-call}(S, K, \sigma, T, N)$ (resp. $v_{Black-put}(S, K, \sigma, T, N)$) le prix d'un call (resp. d'un put) européen dans le modèle de Black-Scholes sur un sous-jacent de prix S à maturité T et de strike K où N est le nominal, on a pour $T_1 < T_2$ et $t \leq T_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{IICplt}(t, T_1, T_2, \psi_i, K, N, 1) &= v_{Black-call} \left(\frac{\hat{P}(t, T_2)}{\hat{P}(t, T_1)} e^{C(t, T_1, T_2)}, 1 + \kappa \tau, V(t, T_1, T_2), T_2, N \psi_i \right) \\
\mathbf{IICplt}(t, T_1, T_2, \psi_i, K, N, -1) &= v_{Black-put} \left(\frac{\hat{P}(t, T_2)}{\hat{P}(t, T_1)} e^{C(t, T_1, T_2)}, 1 + \kappa \tau, V(t, T_1, T_2), T_2, N \psi_i \right),
\end{aligned}$$

avec pour $t \leq T$, $\hat{P}(t, T) := \frac{P_r(t, T)}{P_n(t, T)}$.

4.3.3 Pricing des caps et des floors

Le prix en $t = 0$ d'un cap noté $\mathbf{IICapFloor}(0, \mathcal{T}, \Psi, K, N, \omega)$ (pour $\omega = 1$) (resp. d'un floor pour $\omega = -1$) s'obtient en sommant les prix des caplets (resp. floorlets) correspondants :

$$\mathbf{IICapFloor}(0, \mathcal{T}, \Psi, K, N, \omega) = \sum_{i=1}^M \mathbf{IICplt}(0, T_{i-1}, T_i, \psi_i, K, N, \omega).$$

4.4 Calibration du modèle

Les volatilités et les corrélations sont des paramètres inobservables. Il va donc falloir les estimer. En particulier, il faut être capable d'estimer les valeurs

des paramètres présents dans les formules (4.21) et (4.22) afin de pouvoir pricer d'autres produits du même type ensuite. Dans les modèle de Jarrow et Yildirim, les paramètres apparaissant dans ces formules sont $a_n, \sigma_n, a_r, \sigma_r, \sigma_I, \rho_{nr}$ et ρ_{nI} .

4.4.1 Calibration du taux d'intérêt réel

La capture de la courbe des taux réels n'étant pas l'objectif principal des travaux présentés dans ce mémoire, pour les applications numériques, les valeurs des paramètres a_r et σ_r ont été retenues à dire d'expert.

4.4.2 Calibration des autres paramètres

On note $K_{theoric}(\bar{p}, T_j)$ le taux théorique à la monnaie d'un contrat swap Year-on-Year de maturité T_j (\bar{p} désigne l'ensemble des paramètres dont il dépend) et $K_{market}(T_j)$ le taux de marché d'un swap de maturité T_j . Les paramètres restant à calibrer sont $a_n, \sigma_n, \sigma_I, \rho_{nr}$ et ρ_{nI} . Afin, de répliquer au mieux les prix de marché, nous cherchons à minimiser l'erreur quadratique entre le taux théorique à la monnaie et le taux de marché sous des contraintes correspondant à une réalité économique via le programme d'optimisation suivant :

$$\min_{a_n, \sigma_n, \sigma_I, \rho_{nr}, \rho_{nI}} \sum_{j=1}^{N_{obs}} (K_{theoric}(\bar{p}, T_j) - K_{market}(T_j))^2,$$

sous la contrainte que les corrélations soient comprises entre -1 et 1 notamment. Ici N_{obs} est le nombre de données dont on dispose. Ce programme d'optimisation sous contraintes est résolu avec l'algorithme de Nelder-Mead.

Chapitre 5

Un modèle alternatif de valorisation des dérivés indexés sur l'inflation conduit par deux processus de Hull et White

5.1 Présentation du modèle

Les variables entrant en compte dans la modélisation de l'inflation sont le niveau de l'indice d'inflation et le taux d'intérêt. On peut donc modéliser l'inflation uniquement avec ces deux quantités. C'est l'idée du modèle présenté dans cette section. On note :

- r_t la valeur du taux d'intérêt spot à l'instant t ,
- i_t la valeur "taux" d'inflation à l'instant t ,
- $B(t) = \exp(\int_0^t r_u du)$ le prix de l'actif sans risque à l'instant t ,
- $P(t, T)$ le prix en t d'un zéro-coupon de maturité T i.e. sous la mesure risque neutre \mathbb{Q} on a :

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \middle| r_t \right],$$

- $P_I(t, T)$ le prix en t d'un zéro-coupon payant l'inflation en T i.e. sous la mesure risque neutre on a :

$$P_I(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[I(T) \exp \left(- \int_t^T r_u du \right) \middle| r_t, i_t \right],$$

où I est défini ci-dessous. Les autres notations restent inchangées.

Comme dans la partie 4 des conditions de non arbitrage peuvent être trouvées en s'assurant qu'il existe un changement de mesure sous laquelle $\frac{P(t,T)}{B(t)}$ et $\frac{P_I(t,T)}{B(t)}$ sont des martingales.

On considère donc l'indice d'inflation comme un actif dont on voudrait modéliser le prix. Il est alors naturel de prendre le "taux" d'inflation comme processus aléatoire conduisant l'économie, dans ce cas l'indice d'inflation s'écrit comme :

$$I(T) = I(T_0)e^{\int_{T_0}^T i_u du}.$$

On souhaite modéliser le "taux" d'inflation comme un processus de retour à la moyenne, c'est pourquoi on utilise un modèle de Hull et White :

$$di_t = \alpha_t^I(\theta_t^I - i_t) + \sigma_t^I dW_t^I, \quad (5.1)$$

il est également naturel de modéliser le taux spot r de la même manière :

$$dr_t = \alpha_t^r(\theta_t^r - r_t) + \sigma_t^r dW_t^r, \quad (5.2)$$

où (W^I, W^r) est un mouvement brownien standard de corrélation ρ_{rI} .

Nous commençons par étudier la dynamique des processus $(r_t)_t$ et $(i_t)_t$ dans un cadre général. Nous préciserons par la suite la structure des paramètres du modèle.

5.2 Cadre mathématique du modèle à deux facteurs suivant une dynamique Hull et White

5.2.1 Dynamiques de r_t et i_t

En appliquant la formule d'Itô au processus $X_t = e^{\int_0^t \alpha_u^r du} r_t$ on peut montrer que la dynamique du processus $(r_t)_{0 \leq t \leq T}$ s'écrit en connaissant sa valeur à l'instant s :

$$r_t = e^{-\int_s^t \alpha_u^r du} r_s + \int_s^t \alpha_u^r \theta_u^r e^{-\int_u^t \alpha_v^r dv} du + \int_s^t \sigma_u^r e^{-\int_u^t \alpha_v^r dv} dW_u^r. \quad (5.3)$$

De même on obtient la dynamique de $(i_t)_{0 \leq t \leq T}$ en connaissant sa valeur à l'instant s :

$$i_t = e^{-\int_s^t \alpha_u^I du} i_s + \int_s^t \alpha_u^I \theta_u^I e^{-\int_u^t \alpha_v^I dv} du + \int_s^t \sigma_u^I e^{-\int_u^t \alpha_v^I dv} dW_u^I. \quad (5.4)$$

5.2.2 Dynamiques des intégrales des processus r_t et i_t

On considère maintenant deux instants T_1 et T_2 tels que : $t \leq T_1 < T_2$. Par (5.3) et (5.4) on obtient facilement que :

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} r_s ds &= r_t \int_{T_1}^{T_2} e^{-\int_t^s \alpha_u^r du} ds \\ &+ \int_t^{T_1} \alpha_u^r \theta_u^r \left(\int_{T_1}^{T_2} e^{-\int_u^s \alpha_v^r dv} ds \right) du + \int_{T_1}^{T_2} \alpha_u^r \theta_u^r \left(\int_u^{T_2} e^{-\int_u^s \alpha_v^r dv} ds \right) du \\ &+ \int_t^{T_1} \sigma_u^r \left(\int_{T_1}^{T_2} e^{-\int_u^s \alpha_v^r dv} ds \right) dW_u^r + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_u^r \left(\int_u^{T_2} e^{-\int_u^s \alpha_v^r dv} ds \right) dW_u^r, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} i_s ds &= i_t \int_{T_1}^{T_2} e^{-\int_t^s \alpha_u^I du} ds \\ &+ \int_t^{T_1} \alpha_u^I \theta_u^I \left(\int_{T_1}^{T_2} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right) du + \int_{T_1}^{T_2} \alpha_u^I \theta_u^I \left(\int_u^{T_2} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right) du \\ &+ \int_t^{T_1} \sigma_u^I \left(\int_{T_1}^{T_2} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right) dW_u^I + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_u^I \left(\int_u^{T_2} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right) dW_u^I, \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.3 Formules de pricing

On se place maintenant sous la probabilité risque neutre. Nous verrons plus loin, les conditions à donner sur θ_t^r et θ_t^I afin d'être sous cette mesure.

5.3.1 Pricing des swaps Year-on-Year

La formule de pricing des swaps Year-on-Year est la même que (4.20) dans le modèle de Jarrow-Yildirim en ayant cette fois comme expression pour C la covariance due à la corrélation entre les intégrales :

$$C(t, T_{i-1}, T_i) = \text{Corr} \left(\int_t^{T_{i-1}} i_u du, \int_{T_{i-1}}^{T_i} (r_u - i_u) du \right),$$

et en remplaçant $P_n(t, T_i)$ par $P(t, T_i)$ et $P_r(t, T_i)$ par $P_I(t, T_i)$. On a alors une nouvelle définition de \hat{P} , pour $t \leq T$:

$$\hat{P}(t, T) = \frac{P_I(t, T)}{P(t, T)}.$$

5.3.2 Pricing des caplets et des floorlets

La formule de pricing des caplets et des floorlets est la même que celle donnée en (4.22) avec C comme défini précédemment et :

$$V^2(t, T_{i-1}, T_i) = Var \left[\int_{T_{i-1}}^{T_i} i_u du | i_t \right], \quad (5.7)$$

et en remplaçant $P_n(t, T_i)$ par $P(t, T_i)$ et $P_r(t, T_i)$ par $P_I(t, T_i)$.

5.3.3 Pricing des caps et des floors

La formule de pricing des caps et des floors est la même que dans le modèle de Jarrow-Yildirim en changeant les notations comme évoqué précédemment.

5.4 Le modèle classique avec des coefficients constants

5.4.1 Paramètres et dynamiques des processus

Les paramètres sont choisis constants par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \alpha_t^I &= \alpha_I \text{ et } \sigma_t^I = \sigma_I, \\ \alpha_t^r &= \alpha_r \text{ et } \sigma_t^r = \sigma_r. \end{aligned}$$

Cette structure particulière nous donne alors les dynamiques :

$$\begin{aligned} i_t &= i_s e^{-\alpha_I(t-s)} + \alpha_I \int_s^t \theta_u^I e^{-\alpha_I(t-u)} du + \sigma_I \int_s^t e^{-\alpha_I(t-u)} dW_u^I, \\ r_t &= r_s e^{-\alpha_r(t-s)} + \alpha_r \int_s^t \theta_u^r e^{-\alpha_r(t-u)} du + \sigma_r \int_s^t e^{-\alpha_r(t-u)} dW_u^r. \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \int_{T_{i-1}}^{T_i} i_s ds &= i_t e^{-\alpha_I(T_{i-1}-t)} B(\alpha_I, T_i - T_{i-1}) \\ &+ \alpha_I \int_t^{T_{i-1}} \theta_u^I e^{-\alpha_I(T_{i-1}-u)} B(\alpha_I, T_i - T_{i-1}) du + \alpha_I \int_{T_{i-1}}^{T_i} \theta_u^I B(\alpha_I, T_i - u) du \\ &+ \sigma_I \int_t^{T_{i-1}} e^{-\alpha_I(T_{i-1}-u)} B(\alpha_I, T_i - T_{i-1}) dW_u^I + \sigma_I \int_{T_{i-1}}^{T_i} B(\alpha_I, T_i - u) dW_u^I, \end{aligned} \quad (5.8)$$

et :

$$\begin{aligned}
\int_{T_{i-1}}^{T_i} r_s ds &= r_t e^{-\alpha_r(T_{i-1}-t)} B(\alpha_r, T_i - T_{i-1}) \\
&+ \alpha_r \int_t^{T_{i-1}} \theta_u^r e^{-\alpha_r(T_{i-1}-u)} B(\alpha_r, T_i - T_{i-1}) du + \alpha_r \int_{T_{i-1}}^{T_i} \theta_u^r B(\alpha_r, T_i - u) du \\
&+ \sigma_r \int_t^{T_{i-1}} e^{-\alpha_r(T_{i-1}-u)} B(\alpha_r, T_i - T_{i-1}) dW_u^r + \sigma_r \int_{T_{i-1}}^{T_i} B(\alpha_r, T_i - u) dW_u^r,
\end{aligned} \tag{5.9}$$

avec :

$$B(\alpha, T - t) = \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}.$$

Nous allons maintenant donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les drifts afin de se placer sous la mesure risque neutre.

5.4.2 La mesure risque neutre

Dans [1] on pourra trouver une preuve que l'on est sous la mesure risque neutre lorsque le paramètre de retour à la moyenne est donné par :

$$\theta_t^r = f_r(0, t) + \frac{1}{\alpha_r} \frac{\partial}{\partial t} f_r(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha_r^2} (1 - e^{-2\alpha_r t}),$$

où le taux d'intérêt forward est donné par :

$$f_r(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T).$$

Et lorsque simultanément :

$$\begin{aligned}
\theta_t^I &= f_I(0, t) + \frac{1}{\alpha_r} \frac{\partial}{\partial t} f_I(0, t) + \frac{\sigma_I^2}{2\alpha_I^2} (1 - e^{-2\alpha_I t}) \\
&+ \frac{\rho\sigma\sigma_I}{\alpha_I} \left[\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{1}{\alpha_I} (1 - e^{-\alpha_I t}) e^{-\alpha t} \right],
\end{aligned}$$

où l'on a :

$$f_I(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} \ln \frac{P_I(t, T)}{P(t, T)}.$$

5.4.3 Formules de pricing

Nous donnons ici les expressions particulières de C et de V^2 afin de pouvoir utiliser les formules de pricing.

5.4.3.1 Expression de C

D'après les expressions (5.8) et (5.9) :

$$C(t, T_1, T_2) = -\frac{\sigma_I^2}{2} B^2(\alpha_I, T_1 - t) B(\alpha_I, T_2 - T_1) \\ - \frac{\rho_{rI} \sigma_I \sigma_r}{\alpha_I} B(\alpha_r, T_2 - T_1) [B(\alpha_I + \alpha_r, T_1 - t) - B(\alpha_r, T_1 - t)]$$

5.4.3.2 Expression de V^2

De la même manière on a :

$$V^2(t, T_1, T_2) = \frac{\sigma_I^2}{\alpha_I^2} \left[T_2 - T_1 - B(\alpha_I, T_2 - T_1) - \frac{\alpha_I}{2} B(\alpha_I, T_2 - T_1)^2 \right] \\ + \sigma_I^2 B(2\alpha_I, T_1 - t) B(\alpha_I, T_2 - T_1)^2$$

5.4.4 Calibration du modèle

On calibre l'ensemble des paramètres comme dans la section 4.4.2 en ajoutant les contraintes :

$$3\% \leq \alpha_r \leq 5\%, \\ 3\% \leq \alpha_I \leq 5\%,$$

ces contraintes correspondent à des pratiques de place.

Chapitre 6

Amélioration du modèle à coefficients constants : le modèle à coefficients constants par morceaux

Cette nouvelle approche permet d'améliorer le modèle de Hull et White décrit précédemment. En effet, nous allons considérer que le facteur de corrélation ρ , les vitesses de retour à la moyenne α^r et α^I et les volatilités σ^r et σ^I sont constantes par morceaux. Ceci va nous permettre de calibrer le modèle par un algorithme simple à mettre en place et de mieux capter la *term structure* de volatilité des caps inflation¹.

6.1 Paramètres et dynamique des processus

Considérons un horizon de maturité T . On note $T_i, i = 1, \dots, n$ les instants d'un swap d'inflation tels que : $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n = T$. Les dynamiques du taux d'intérêt court terme et du taux d'inflation sont alors :

$$\begin{aligned}dr_t &= \alpha_t^r(\theta_t^r - r_t)dt + \sigma_t^r dW_t^r, \\di_t &= \alpha_t^I(\theta_t^I - i_t)dt + \sigma_t^I dW_t^I,\end{aligned}$$

avec $d \langle W_t^r, W_t^I \rangle = \rho_t dt$. De plus, on pose :

$$j(t) := \arg_{i=1, \dots, n} \{T_{i-1} < t \leq T_i\}.$$

Avec cette notation on a alors :

¹Structure par terme, pour un niveau de strike donné, de la volatilité des caplets/floorlets sur inflation.

- $\rho_t = \rho_{T_{j(t)}}$ pour $t \in]T_{j(t)-1}, T_{j(t)}]$ et $\rho_0 = \rho_{T_1}$,
- $\alpha_t^r = \alpha_{T_{j(t)}}^r$ et $\alpha_t^I = \alpha_{T_{j(t)}}^I$ pour $t \in]T_{j(t)-1}, T_{j(t)}]$ et $\alpha_0^r = \alpha_{T_1}^r$, $\alpha_0^I = \alpha_{T_1}^I$,
- $\sigma_t^r = \sigma_{T_{j(t)}}^r$ et $\sigma_t^I = \sigma_{T_{j(t)}}^I$ pour $t \in]T_{j(t)-1}, T_{j(t)}]$ et $\sigma_0^r = \sigma_{T_1}^r$, $\sigma_0^I = \sigma_{T_1}^I$.

Les dynamiques des processus $(i_t)_t$ et $(r_t)_t$ ne sont pas données ici car leurs expressions sont très lourdes mais il est tout de même possible de les calculer comme pour le modèle à coefficients constants.

6.2 La mesure risque neutre

On ne donne pas ici les conditions sur θ_t^I et θ_t^r pour se placer sous la mesure risque neutre car celles-ci sont très lourdes à expliciter et sans intérêt particulier pour ce mémoire. Cependant, elles s'obtiennent exactement de la même manière que pour le modèle à coefficients constants.

6.3 Formules de pricing

Les formules de pricing sont les mêmes que précédemment en changeant les expressions de C et de V^2 . Nous les donnons maintenant car celles-ci jouent un rôle crucial dans la calibration du modèle.

6.3.1 Expression de C

On s'intéresse au calcul du facteur de corrélation $C(t, T_1, T_2)$, avec t, T_1, T_2 comme ci-dessus :

$$C(t, T_1, T_2) = Corr \left(\int_t^{T_1} i_s ds, \int_{T_1}^{T_2} (r_s - i_s) ds \right).$$

On montre facilement que l'on a :

$$\begin{aligned} C(t, T_1, T_2) = & \int_t^{T_1} \rho_u \sigma_u^r \sigma_u^I \left(\int_u^{T_1} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right) \left(\int_{T_1}^{T_2} e^{-\int_u^s \alpha_v^r dv} ds \right) du \\ & - \int_t^{T_1} \sigma_u^{I^2} \left(\int_u^{T_1} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right) \left(\int_{T_1}^{T_2} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right) du \quad (6.1) \end{aligned}$$

Proposition 6.3.1. *Le facteur de corrélation s'écrit pour $t < T_i < T_{i+1}$:*

$$\begin{aligned}
C(t, T_i, T_{i+1}) &= \rho_{T_j(t)} \sigma_{T_j(t)}^r \sigma_{T_j(t)}^I A_{i,j(t)}^r \times \left(B_{i,j(t)}^I C_{j(t)}(\alpha_{T_j(t)}^r, \alpha_{T_j(t)}^I, t) + D_{j(t)}(\alpha_{T_j(t)}^r, \alpha_{T_j(t)}^I, t) \right) \\
&+ \sum_{j=j(t)}^{i-1} \rho_{T_{j+1}} \sigma_{T_{j+1}}^r \sigma_{T_{j+1}}^I A_{i,j+1}^r \times \left(B_{i,j+1}^I C_{j+1}(\alpha_{T_{j+1}}^r, \alpha_{T_{j+1}}^I, T_j) + D_{j+1}(\alpha_{T_{j+1}}^r, \alpha_{T_{j+1}}^I, T_j) \right) \\
&\quad - \sigma_{T_j(t)}^I{}^2 A_{i,j(t)}^I \times \left(B_{i,j(t)}^I C_{j(t)}(\alpha_{T_j(t)}^I, \alpha_{T_j(t)}^I, t) + D_{j(t)}(\alpha_{T_j(t)}^I, \alpha_{T_j(t)}^I, t) \right) \\
&- \sum_{j=j(t)}^{i-1} \sigma_{T_{j+1}}^I{}^2 A_{i,j+1}^I \times \left(B_{i,j+1}^I C_{j+1}(\alpha_{T_{j+1}}^I, \alpha_{T_{j+1}}^I, T_j) + D_{j+1}(\alpha_{T_{j+1}}^I, \alpha_{T_{j+1}}^I, T_j) \right)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

avec :

- $\beta_k(j, i) = e^{-\sum_{p=j}^{i-1} \alpha_{T_p}^k (T_p - T_{p-1})}$, pour $k \in \{r, I\}$,
- $A_{i,j}^k = \beta_k(j, i+1) B(\alpha_{T_{i+1}}^k, T_{i+1} - T_i)$, pour $k \in \{r, I\}$,
- $B_{i,j}^k = \sum_{p=j}^{i-1} A_{p,j}^k = \sum_{p=j+1}^i \beta_k(j, p) B(\alpha_{T_p}^k, T_p - T_{p-1})$,
- $C_j(\alpha_1, \alpha_2, t) = e^{(\alpha_1 + \alpha_2)(T_j - T_{j-1})} B(\alpha_1 + \alpha_2, T_j - t)$,
- $D_j(\alpha_1, \alpha_2, t) = \frac{1}{\alpha_2} \left\{ \frac{1}{\alpha_1} (e^{\alpha_1(T_j - T_{j-1})} - e^{\alpha_1(t - T_{j-1})}) \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (e^{(\alpha_1 + \alpha_2)t - \alpha_2 T_j - \alpha_1 T_{j-1}} - e^{\alpha_1(T_j - T_{j-1})}) \right\}$

Remarque 6.3.1. *De plus, pour $t = T_i < T_{i+1}$, on a $C(t, T_i, T_{i+1}) = 0$.*

Preuve : Voir l'annexe B. □

6.3.2 Expression de V^2

On s'intéresse au calcul du facteur de volatilité $V(t, T_1, T_2)$, avec t, T_1, T_2 comme ci-dessus :

$$V^2(t, T_1, T_2) = \text{Var} \left[\int_{T_1}^{T_2} i_s ds \middle| i_t \right].$$

On montre facilement que l'on a :

$$V^2(t, T_1, T_2) = \int_t^{T_1} \sigma_u^I{}^2 \left(\int_{T_1}^{T_2} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right)^2 du + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_u^I{}^2 \left(\int_u^{T_2} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right)^2 du \tag{6.3}$$

Proposition 6.3.2. *Le facteur de variance s'écrit pour $t < T_i < T_{i+1}$ et avec les mêmes notations que dans la proposition 6.3.1 :*

$$V^2(t, T_i, T_{i+1}) = \sigma_{T_j(t)}^I{}^2 A_{i,j(t)}^I{}^2 \times C_{j(t)}(\alpha_{T_j(t)}^I, \alpha_{T_j(t)}^I, t) + \sum_{j=j(t)}^{i-1} \sigma_{T_{j+1}}^I{}^2 A_{i,j+1}^I{}^2 \times C_{j+1}(\alpha_{T_{j+1}}^I, \alpha_{T_{j+1}}^I, T_j) \\ + \frac{\sigma_{T_{i+1}}^I{}^2}{\alpha_{T_{i+1}}^I} \left((T_{i+1} - T_i) - B(\alpha_{T_{i+1}}^I, T_{i+1} - T_i) - \frac{\alpha_{T_{i+1}}^I}{2} B^2(\alpha_{T_{i+1}}^I, T_{i+1} - T_i) \right). \quad (6.4)$$

Remarque 6.3.2. *De plus, pour $t = T_i < T_{i+1}$ on a :*

$$V^2(t, T_i, T_{i+1}) = \frac{\sigma_{T_{i+1}}^I{}^2}{\alpha_{T_{i+1}}^I} \left((T_{i+1} - T_i) - B(\alpha_{T_{i+1}}^I, T_{i+1} - T_i) - \frac{\alpha_{T_{i+1}}^I}{2} B^2(\alpha_{T_{i+1}}^I, T_{i+1} - T_i) \right).$$

Preuve : Voir l'annexe B □

6.4 Calibration du modèle

A partir de maintenant, toutes les variables *étoilées* désignent des valeurs de marché.

Pour la calibration du modèle, on se donne, à dire d'expert, les vitesses de retour à la moyenne $\alpha_{T_j}^r$ et $\alpha_{T_j}^I$ (pour $j = 1, \dots, n$) comprises entre 3% et 5% comme précédemment. Pour la partie numérique, nous avons supposé de plus que $\forall j = 1, \dots, n, \alpha_{T_j}^r = \alpha_r$ et $\alpha_{T_j}^I = \alpha_I$ car les produits que nous allons valoriser sont peu sensibles à ces paramètres. Maintenant, nous allons voir comment obtenir les autres paramètres du modèle.

6.4.1 Calibration du taux d'intérêt

Afin d'estimer les $\sigma_{T_j}^{*r}$ pour $j = 1, \dots, n$, nous avons suivi et adapté l'une des méthodes développées dans [4]. Celle-ci utilise la volatilité des swaptions ; le lecteur pourra trouver une description de ce produit dans la littérature.

Proposition 6.4.1. *On considère des swaptions de même tenor T pour différentes maturités correspondant aux instants T_1, \dots, T_n . On note $V_{swap}(T_j, T)$ la volatilité du swaption de tenor T et de maturité T_j ($j = 1, \dots, n$). La méthode de calibration repose sur l'approximation qui suit :*

$$V_{swap}(T_j, T) = \left[\frac{P(0, T_j)}{P(0, T_j) - P(0, T)} \right]^2 V_p(0, T_j, T),$$

avec $V_p(0, T_j, T)$ qui s'écrit dans le cas où la vitesse de retour à la moyenne du processus de Hull et White conduisant le taux d'intérêt (r_t) est constante égale à α_r :

$$V_p(0, T_j, T) = B(\alpha_r, T - T_j) \int_0^{T_j} e^{2\alpha_r u} \sigma_u^{r^2} du.$$

En posant :

$$\hat{V}(0, T_j, T) := \left[\frac{P(0, T_j) - P(0, T)}{P(0, T_j)} \right]^2 \frac{V_{swap}(T_j, T)}{B(\alpha_r, T - T_j)},$$

on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{T_j} e^{2\alpha_r u} \sigma_u^{r^2} du &= \hat{V}(0, T_j, T) \\ &= \sum_{i=1}^j \sigma_{T_i}^{r^2} \int_{T_{i-1}}^{T_i} e^{2\alpha_r u} du = \sum_{i=1}^j \sigma_{T_i}^{r^2} e^{2\alpha_r T_i} B(2\alpha_r, T_i - T_{i-1}), \end{aligned}$$

et donc pour $j = 1$ on déduit en prenant les valeurs de marché :

$$\boxed{\sigma_{T_1}^{*r} = \sqrt{\frac{\hat{V}^*(0, T_1, T)}{e^{2\alpha_r T_1} B(2\alpha_r, T_1)}}},$$

et pour $2 \leq j \leq n$ on a :

$$\boxed{\sigma_{T_j}^{*r} = \sqrt{\frac{\hat{V}^*(0, T_j, T) - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_{T_i}^{*r^2} e^{2\alpha_r T_i} B(2\alpha_r, T_i - T_{i-1})}{e^{2\alpha_r T_j} B(2\alpha_r, T_j - T_{j-1})}}.}$$

6.4.2 Implication de la variance V^{*2} et de la corrélation C^* à partir des prix de marché

On obtient les valeurs de marché de $V^{*2}(0, T_i, T_{i+1})$ pour $i = 0, \dots, n - 1$ et de $C^*(0, T_i, T_{i+1})$ pour $i = 1, \dots, n - 1$. Pour ce faire, nous nous basons sur la proposition suivante :

Proposition 6.4.2. *D'après la remarque 4.3.1 et la parité call-put on a pour $1 \leq i \leq n$:*

$$\begin{aligned} & v_{Black-call} \left(\frac{\hat{P}(0, T_i)}{\hat{P}(0, T_{i-1})} e^{C(0, T_{i-1}, T_i)}, 1 + \kappa\tau, V(0, T_{i-1}, T_i), T_i, N\psi_i \right) \\ & - v_{Black-put} \left(\frac{\hat{P}(0, T_i)}{\hat{P}(0, T_{i-1})} e^{C(0, T_{i-1}, T_i)}, 1 + \kappa\tau, V(0, T_{i-1}, T_i), T_i, N\psi_i \right) \\ & = P(0, T_i) \left(\frac{\hat{P}(0, T_i)}{\hat{P}(0, T_{i-1})} e^{C(0, T_{i-1}, T_i)} - (1 + \kappa\tau) \right), \end{aligned}$$

on en déduit alors avec des notations évidentes :

$$\boxed{C^*(0, T_{i-1}, T_i) = \ln \left[\left(\frac{v_{Black-call}^*(0, T_{i-1}, T_i) - v_{Black-put}^*(0, T_{i-1}, T_i)}{P^*(0, T_i)} + 1 + \kappa\tau \right) \frac{\hat{P}^*(0, T_{i-1})}{\hat{P}^*(0, T_i)} \right]}.$$

Et d'après la formule de type Black, le facteur $V^*(0, T_{i-1}, T_i)$ est égal à la volatilité des caplets observée sur le marché.

6.4.3 Calibration du taux d'inflation

Pour estimer la volatilité $(\sigma_{T_j}^{*I})_{j=1, \dots, n}$ du taux d'inflation, nous allons nous servir de la variance de marché V^{*2} comme dans la proposition qui suit :

Proposition 6.4.3. *On commence par introduire quelques notations :*

$$\begin{aligned} \cdot \gamma_{i,j}^I(t) &:= A_{i,j}^I{}^2 \times C_j(\alpha_{T_j}^I, \alpha_{T_j}^I, t), \\ \cdot \lambda_{T_{i+1}}^I &:= \frac{1}{\alpha_{T_{i+1}}^I} \left((T_{i+1} - T_i) - B(\alpha_{T_{i+1}}^I, T_{i+1} - T_i) - \frac{\alpha_{T_{i+1}}^I}{2} B^2(\alpha_{T_{i+1}}^I, T_{i+1} - T_i) \right). \end{aligned}$$

On peut alors écrire (6.4) comme :

$$V^2(t, T_i, T_{i+1}) = \sigma_{T_{j(t)}}^I{}^2 \gamma_{i,j(t)}^I(t) + \sum_{j=j(t)}^{i-1} \sigma_{T_{j+1}}^I{}^2 \gamma_{i,j+1}^I(T_j) + \sigma_{T_{i+1}}^I{}^2 \lambda_{T_{i+1}}^I. \quad (6.5)$$

On a alors :

$$\boxed{\sigma_{T_1}^{*I} = \sqrt{\frac{V^{*2}(0, 0, T_1)}{\lambda_{T_1}^I}},}$$

et pour $1 \leq i \leq n - 1$ on a :

$$\sigma_{T_{i+1}}^{*I} = \sqrt{\frac{V^{*2}(0, T_i, T_{i+1}) - \sum_{j=0}^{i-1} \sigma_{T_{j+1}}^{*I}{}^2 \gamma_{i,j+1}^I(T_j)}{\lambda_{T_{i+1}}^I}}.$$

Preuve : L'égalité sur $\sigma_{T_1}^{*I}$ s'obtient avec la remarque 6.3.2. Puis, en $t = 0$ on a $j(t) = j(0) = 1$, et on utilise (6.5) avec les valeurs de marché V^* et en faisant varier i pour conclure. \square

6.4.4 Calibration du paramètre de corrélation

Pour estimer la corrélation $(\rho_{T_j}^*)_{j=1,\dots,n}$ entre le taux d'inflation et le taux d'intérêt court terme, nous allons nous servir de la corrélation de marché C^* et des estimations précédentes comme dans la proposition qui suit :

Proposition 6.4.4. *On commence par introduire une notation :*

$$\xi_{i,j}^k(t) := A_{i,j}^k \times \left(B_{i,j}^I C_j(\alpha_{T_j}^k, \alpha_{T_j}^I, t) + D_j(\alpha_{T_j}^k, \alpha_{T_j}^I, t) \right).$$

On peut alors écrire (6.2) comme :

$$\begin{aligned} C(t, T_i, T_{i+1}) &= \rho_{T_{j(t)}} \sigma_{T_{j(t)}}^r \sigma_{T_{j(t)}}^I \xi_{i,j(t)}^r(t) + \sum_{j=j(t)}^{i-1} \rho_{T_{j+1}} \sigma_{T_{j+1}}^r \sigma_{T_{j+1}}^I \xi_{i,j+1}^r(T_j) \\ &\quad - \sigma_{T_{j(t)}}^I{}^2 \xi_{i,j(t)}^I(t) - \sum_{j=j(t)}^{i-1} \sigma_{T_{j+1}}^I{}^2 \xi_{i,j+1}^I(T_j). \end{aligned} \quad (6.6)$$

On a alors :

$$\rho_{T_1}^* = \frac{C^*(0, T_1, T_2) + \sigma_{T_1}^{*I}{}^2 \xi_{1,1}^I(0)}{\sigma_{T_1}^{*r} \sigma_{T_1}^{*I} \xi_{1,1}^r(0)},$$

et pour $2 \leq i \leq n - 1$ on a :

$$\rho_{T_i}^* = \frac{C^*(0, T_i, T_{i+1}) - \sum_{j=0}^{i-2} \rho_{T_{j+1}}^* \sigma_{T_{j+1}}^{*r} \sigma_{T_{j+1}}^{*I} \xi_{i,j+1}^r(T_j) + \sum_{j=0}^{i-1} \sigma_{T_{j+1}}^{*I}{}^2 \xi_{i,j+1}^I(T_j)}{\sigma_{T_i}^{*r} \sigma_{T_i}^{*I} \xi_{i,i}^r(T_{i-1})}.$$

Remarque 6.4.1. *On obtient $\rho_{T_n}^*$ avec une technique d'extrapolation (flat par exemple).*

Preuve : En $t = 0$ on a $j(t) = j(0) = 1$, puis on utilise (6.6) avec les valeurs de marché C^* et en faisant varier i pour conclure. \square

Chapitre 7

Applications numériques et comparaison des différents modèles de valorisation des dérivés indexés sur l'inflation

Dans ce chapitre, sont présentés les résultats de la calibration des différents modèles étudiés dans ce mémoire et en particulier du modèle que nous proposons pour améliorer le modèle à deux facteurs Hull et White à coefficients constants. Après avoir calibré ces modèles à partir des prix de marché obtenus via Bloomberg, les taux swap Year-on-Year et les prix des caps inflation ont été calculés et comparés pour évaluer la performance de chacun des modèles.

Il est important de noter que l'ensemble des modèles de valorisation des dérivés indexés sur l'inflation, présentés dans ce mémoire, ont été implémentés dans la librairie de valorisation du Pôle Ingénierie Financière de Mazars Actuariat. L'ensemble des calculs réalisés à une date donnée et présentés dans cette partie en sont issus.

7.1 Calibration des modèles de valorisation

7.1.1 Calibration du modèle de Jarrow-Yildirim

Pour calibrer le modèle de Jarrow et Yildirim, nous utilisons la démarche décrite dans 4.4. Les paramètres du taux d'intérêt réel ont été fixés à dire d'expert :

$$a_r = 20\% \text{ et } \sigma_r = 1\%,$$

et les valeurs des autres paramètres sont obtenues après résolution du problème de minimisation sous contraintes :

$$a_n = 161\%, \sigma_n = 57\%, \sigma_I = 20\%, \rho_{nr} = 42\% \text{ et } \rho_{rI} = -57\%.$$

7.1.2 Calibration du modèle de Hull et White à coefficients constants

En appliquant la démarche décrite dans 5.4.4, l'estimation des paramètres du modèle de Hull et White à coefficients constants est donnée par :

$$\sigma_I = 10\%, \alpha_I = 4\%, \rho = 44\%, \sigma_r = 23\%, \text{ et } \alpha_r = 4\%.$$

7.1.3 Calibration du modèle de Hull et White à coefficients constants par morceaux

Pour le modèle Hull White à coefficients constants par morceaux, la démarche décrite dans 6.4 a été suivie. En ligne avec les pratiques de place, les vitesses de retour à la moyenne ont été fixées : $\alpha_r = 3\%, \alpha_I = 3\%$.

Par ailleurs, les valeurs retournées par l'algorithme décrit dans la section 6.4.1 sont toutes relativement proches de 20% si bien qu'il a été posé $\forall j = 1, \dots, n : \sigma_{T_j}^r = \sigma_r = 20\%$.

Finalement, les résultats des propositions 6.4.3 et 6.4.4 ont été utilisés pour estimer σ_t^I et ρ_t pour chaque maturité avec des swaps Year-on-Year et des caps inflation de strike 1%. Les valeurs obtenues se trouvent dans le tableau 7.1.

$\sigma_{T_1}^{*I}$	0.278%	$\rho_{T_1}^*$	49.906%
$\sigma_{T_2}^{*I}$	0.179%	$\rho_{T_2}^*$	8.35%
$\sigma_{T_3}^{*I}$	0.406%	$\rho_{T_3}^*$	24.68%
$\sigma_{T_4}^{*I}$	0.316%	$\rho_{T_4}^*$	19.644%
$\sigma_{T_5}^{*I}$	0.273%	$\rho_{T_5}^*$	50.7%
$\sigma_{T_6}^{*I}$	0.213%	$\rho_{T_6}^*$	27.805%
$\sigma_{T_7}^{*I}$	0.191%	$\rho_{T_7}^*$	-19.385%
$\sigma_{T_8}^{*I}$	0.214%	$\rho_{T_8}^*$	-2.931%

Tableau 7.1: Paramètres estimés pour la corrélation et la volatilité du taux d'inflation dans le modèle de Hull et White à coefficients constants par morceaux

7.2 Applications numériques

7.2.1 Valorisation des swaps Year-on-Year

Les valeurs de marché et les valorisations des swaps Year-on-Year obtenus avec les différents modèles étudiés dans ce mémoire, dont l'amélioration du modèle de Hull-White à facteurs constants que nous proposons, se trouvent dans le tableau 7.2 :

Maturité (en année)	Jarrow-Yildirim	Hull-White	Hull-White amélioré	Marché
1	1.46%	1.46%	1.40%	1.40%
2	1.72%	1.74%	1.72%	1.72%
3	1.82%	1.84%	1.83%	1.83%
4	1.91%	1.93%	1.92%	1.92%
5	2.00%	2.02%	1.97%	1.97%
6	2.08%	2.08%	2.08%	2.08%
7	2.13%	2.13%	2.16%	2.16%
8	2.19%	2.18%	2.19%	2.19%

Tableau 7.2: Prix des swaps pour les différents modèles et prix de marché.

Une représentation graphique de ce tableau est donné ci-dessous :

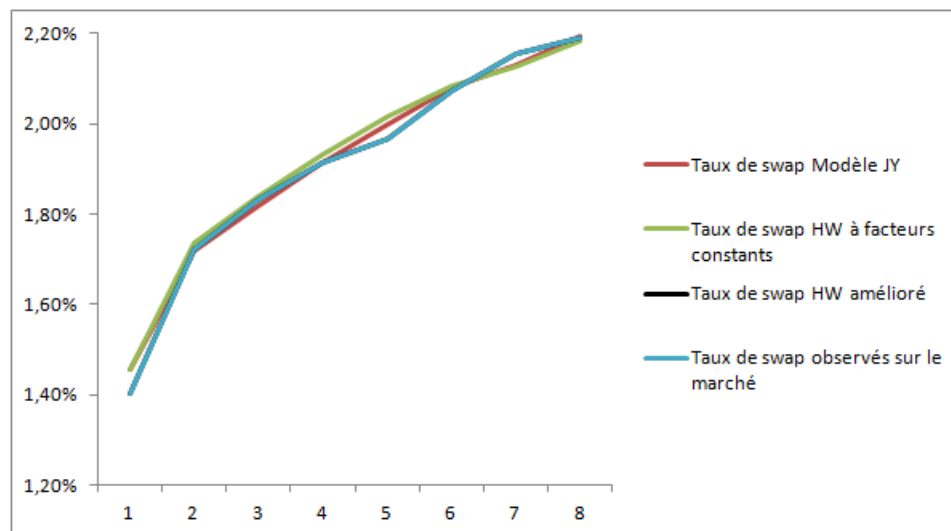


Figure 7.1: En abscisse est représentée la maturité des swaps et en ordonnée leur prix pour les différents modèles ainsi que le prix de marché. Les courbes verte et bleue sont confondues.

Les modèles Jarrow-Yildirim et Hull et White à coefficients constants donnent des prix proches de ceux du marché. **Il est à noter que le modèle de Hull et White à coefficients constants par morceaux permet une meilleure estimation de la valeur de marché des swaps que les deux autres modèles. Le modèle développé semble donc plus performant.** En effet, ce dernier modèle combiné à l'approche de calibration par *bootstrapping* développée dans ce mémoire permet une réplification exacte de la structure par terme des taux de swap inflation de marché.

Dans la suite, seuls les modèles Hull et White à coefficients constants et à coefficients constants par morceaux seront comparés. En effet, même si cela n'est pas prouvé dans ce mémoire, il peut être montré que le modèle de Hull et White à coefficients constants est équivalent au modèle de Jarrow-Yildirim.

7.2.2 Valorisation des caps inflation

Les valeurs de marché et les valorisations des caps indexés sur l'inflation pour un strike $K = 1\%$ obtenus avec le modèle Hull-White à coefficients constants ainsi que l'amélioration que nous en proposons dans ce mémoire, se trouvent dans le tableau 7.3. A noter que les prix des caps inflation ont été obtenus avec les valeurs des paramètres obtenus précédemment.

Maturité	Caps (HW)	Caps (HW amélioré)	Caps du marché
1	4.79%	0.68%	0.68%
2	10.92%	1.81%	1.81%
3	18.08%	3.55%	3.55%
4	26.01%	5.29%	5.29%
5	34.54%	7.03%	7.03%
6	43.51%	8.97%	8.98%
7	52.94%	10.92%	10.92%
8	62.58%	12.80%	12.80%

Tableau 7.3: Prix des caps calculés avec le modèle de Hull et White à coefficients constants et avec le modèle de Hull et White à coefficients constants par morceaux et prix de marché.

Une représentation graphique de ce tableau est donné ci-dessous :

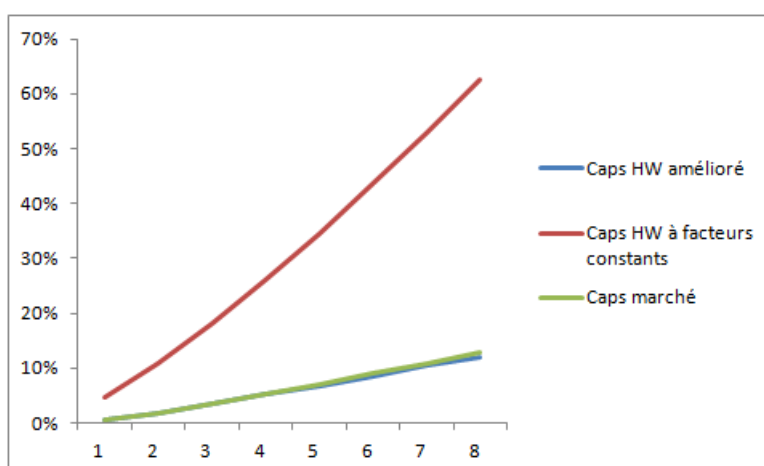


Figure 7.2: En abscisse est représentée la maturité des caps inflations et en ordonnée leur prix pour les différents modèles ainsi que le prix de marché. Les courbes verte et bleue sont confondues.

Nous constatons que le modèle de Hull et White à coefficients constants par morceaux reproduit exactement les prix des caps observés sur le marché. Tandis que les prix donnés par le modèle de Hull et White à coefficients constants s'écartent des prix observés sur le marché. Cela est dû au fait que le modèle de Hull et White à coefficients constants a été calibré sur des swaps qui ne tiennent pas compte de la *term structure* de volatilité des caps inflation¹ contrairement au modèle que nous proposons. Ainsi, ce modèle ne permet pas de valoriser convenablement d'autres produits tels que les caps et les floors inflation si sa calibration est réalisée de manière "naïve", c'est à dire en tenant compte uniquement des prix de marché des swaps Year-on-Year qui ne permettent pas de refléter la volatilité implicite des caps inflations. Au contraire, le modèle développé dans ce mémoire et sa technique de calibration permettent de répliquer, sans utiliser aucun algorithme de résolution de programme d'optimisation, très facilement et simultanément les prix de marché des swaps et des caps et floors inflation.

Pour remédier à ce problème, nous avons re-calibré les paramètres du modèle de Hull-White à facteurs constants en fixant les valeurs de σ_I et de ρ . Elles ont été déterminées à partir des paramètres obtenus avec le modèle de Hull et White à coefficients constants par morceaux. Nous avons choisi de prendre

¹Structure par terme, pour un niveau de strike donné, de la volatilité des caplets/floorlets sur inflation.

$\sigma_I = \sigma_{T_1}^* = 0.278\%$ et $\rho = \rho_{T_1}^* = 49.906\%$. Les résultats du pricing sont donnés dans le tableau 7.4. Nous obtenons une meilleure approximation des prix des caps du marché.

Maturité	Caps (HW)	Caps (HW amélioré)	Caps du marché
1	1.03%	0.68%	0.68%
2	2.14%	1.81%	1.81%
3	3.51%	3.55%	3.55%
4	5.11%	5.29%	5.29%
5	6.88%	7.03%	7.03%
6	8.76%	8.97%	8.98%
7	10.92%	10.92%	10.92%
8	13.06%	12.80%	12.80%

Tableau 7.4: Prix des caps calculés avec le modèle de Hull et White à coefficients constants et avec le modèle de Hull et White à coefficients constants par morceaux et prix de marché.

Une représentation graphique de ce tableau est donné ci-dessous :

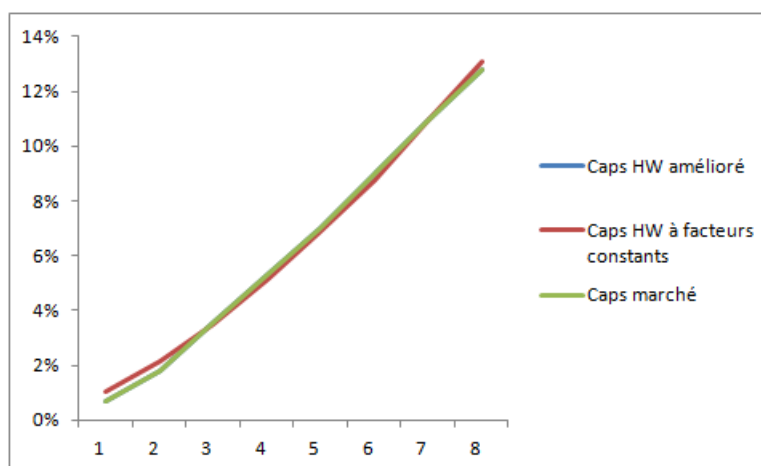


Figure 7.3: En abscisse est représentée la maturité des caps inflations et en ordonnée leur prix pour les différents modèles ainsi que le prix de marché. Les courbes verte et bleue sont confondues.

Enfin, cette nouvelle application du modèle de Hull-White à coefficient constant par morceaux montre qu'il est plus performant que les modèles classiques type Jarrow-Yildirim et Hull-White à coefficient constants puisqu'il permet une réplique exacte des prix de

marché des swaps Year-on-Year tout en répliquant également les prix des caps et floors inflation pour un niveau de strike donné.

Chapitre 8

Le modèle développé est plus performant que les modèles de valorisation classiques

Ce sujet de mémoire d'actuariat se situant à l'intersection des problématiques financières, macroéconomiques et actuarielles m'a permis de mettre en application les enseignements théoriques reçus à l'institut du risk management tout en développant un modèle plus performant que les modèles de valorisation de dérivés indexés sur l'inflation classiques et en enrichissant la librairie de valorisation développée au sein du Pôle Ingénierie Financière de Mazars Actuariat.

L'objectif des travaux, qui a été identique jusqu'à la rédaction du mémoire, était de construire un cadre de modélisation risque neutre complet pour la valorisation de produits indexés sur l'inflation. Cet objectif a été atteint puisque nous sommes parvenus à développer un modèle et une méthode de calibration permettant, au travers d'une approche très simple de *bootstrapping*, de répliquer parfaitement les prix de marché des swaps Year-on-Year et des caps et floors inflation. Il s'agit d'une amélioration notable des modèles classiques répandus dans l'industrie dont l'une des limites connues est leur faible capacité à capturer la *term structure* de volatilité des caplets et floorlets inflation.

Pour y parvenir, au travers d'une revue de littérature, nous nous sommes intéressés dans un premier temps aux dérivés simples indexés sur l'inflation (swap, caps et floors) ainsi qu'aux deux modèles fondamentaux utilisés aujourd'hui pour leur valorisation : le modèle de Jarrow-Yildirim et un modèle bi-facteurs reposant sur deux processus de Hull et White. Ceci nous a permis d'en identifier les faiblesses afin de proposer un modèle permettant de les corriger. C'est ainsi que nous avons développé un modèle – une amélioration des

modèles nommés précédemment – permettant une meilleure prise en compte de la structure par terme de la volatilité implicite des caplets et des floorlets inflation. Nous avons également développé une méthode de calibration très efficace, par *bootstrapping*, ne nécessitant aucun algorithme d’optimisation et permettant de capter précisément les prix des instruments de marché. Enfin, les différents modèles étudiés ont été implémentés et testés sur des données réelles issues de Bloomberg. Les modèles ont ainsi pu être comparés au travers de leur capacité à répliquer les prix de marché et de la difficulté à les calibrer.

Le modèle développé au cours de ces travaux ainsi que son approche de calibration donnent de meilleurs résultats que les modèles utilisés habituellement pour valoriser des dérivés vanilles indexés sur l’inflation.

C’est pourquoi, il semblerait pertinent d’étudier d’autres applications de ce modèle et de son approche de calibration à la valorisation d’instruments indexés sur l’inflation plus complexes et structurés, ou encore à d’autres types de problématiques comme la valorisation de swap de taux dont le taux d’actualisation est flooré à zéro et éventuellement à la génération de scénarios économiques mettant en jeu des indices d’inflation.

Annexe A

Preuves des résultats sur le modèle de Jarrow et Yildirim

Preuve du lemme 4.2.1

On applique la formule d'intégration par parties à $B^*(t)$ en notant que

$$dB_r(t) = B_r(t)r_r(t)dt, \quad (\text{A.1})$$

et donc $d \langle B_r(\cdot), I(\cdot) \rangle_t = 0$, ainsi on a :

$$dB^*(t) = B_r(t)dI(t) + I(t)dB_r(t)$$

et on déduit la dynamique de $B^*(t)$ avec les expressions (4.5) et (A.1).

On fait de même pour la dynamique de P_I :

$$dP_I(t, T) = I(t)dP_r(t, T) + P_r(t, T)dI(t) + d \langle P_r(\cdot, T), I(\cdot) \rangle_t. \quad (\text{A.2})$$

Avant d'aller plus loin dans le calcul, il est nécessaire de déterminer la dynamique de $P_r(t, T)$. On rappelle que l'on a :

$$P_r(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f_r(t, u) du \right)$$

donc

$$\ln P_r(t, T) = - \int_t^T f_r(t, u) du$$

et d'après (4.3)

$$f_r(t, T) = f_r(0, T) + \int_0^t \alpha_r(v, T)dv + \int_0^t \sigma_r(v, T)dW_r(v) \quad (\text{A.3})$$

d'où

$$\ln P_r(t, T) = - \int_t^T f_r(0, u) du - \int_t^T \left(\int_0^t \alpha_r(v, u) dv \right) du - \int_t^T \left(\int_0^t \sigma_r(v, u) dW_r(v) \right) du$$

Jarrow et Yildirim utilisent ensuite un lemme qui généralise le théorème de Fubini aux intégrales stochastiques sous certaines hypothèses de continuité satisfaites ici par nos processus. Afin de ne pas alourdir inutilement ce rapport, nous ne le présentons pas ici mais pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra consulter l'annexe de [2]. Ce lemme permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \ln P_r(t, T) &= - \int_t^T f_r(0, u) du - \int_0^t \left(\int_t^T \alpha_r(v, u) du \right) dv - \int_0^t \left(\int_t^T \sigma_r(v, u) du \right) dW_r(v) \\ &= - \int_0^T f_r(0, u) du - \int_0^t \left(\int_v^T \alpha_r(v, u) du \right) dv - \int_0^t \left(\int_v^T \sigma_r(v, u) du \right) dW_r(v) \\ &\quad + \int_0^t f_r(0, u) du + \int_0^t \left(\int_v^t \alpha_r(v, u) du \right) dv + \int_0^t \left(\int_v^t \sigma_r(v, u) du \right) dW_r(v) \end{aligned}$$

puis utilisant $a_r(v, T)$ et $b_r(v, T)$ définis comme dans l'énoncé du lemme :

$$\ln P_r(t, T) = \ln P_r(0, T) + \int_0^t r_r(u) du + \int_0^t b_r(v, T) dv - \frac{1}{2} \int_0^t a_r^2(v, T) dv + \int_0^t a_r(v, T) dW_r(v). \quad (\text{A.4})$$

En effet, d'après (A.3) on a :

$$\begin{aligned} r_r(t) &= f_r(t, t) \\ &= f_r(0, t) + \int_0^t \alpha_r(v, t) dv + \int_0^t \sigma_r(v, t) dW_r(v) \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^t r_r(u) du = \int_0^t f_r(0, u) du + \int_0^t \left(\int_0^u \alpha_r(v, u) dv \right) du + \int_0^t \left(\int_0^u \sigma_r(v, u) dW_r(v) \right) du$$

et d'après le théorème de Fubini généralisé aux intégrales stochastiques :

$$\int_0^t r_r(u)du = \int_0^t f_r(0, u)du + \int_0^t \left(\int_v^t \alpha_r(v, u)du \right) dv + \int_0^t \left(\int_v^t \sigma_r(v, u)du \right) dW_r(v),$$

ce qui justifie l'expression (A.4). Enfin d'après (A.4) et la formule d'Itô, on déduit la dynamique de $P_r(t, T)$:

$$\frac{dP_r(t, T)}{P_r(t, T)} = (r_r(t) + b_r(t, T))dt + a_r(t, T)dW_r(t). \quad (\text{A.5})$$

Il est à présent aisé de déterminer la dynamique de $P_I(t, T)$. Des expressions (4.5) et (A.5) on déduit que

$$d \langle P_r(\cdot, T), I(\cdot) \rangle_t = \rho_{rI} a_r(t, T) \sigma_I(t) P_I(t, T). \quad (\text{A.6})$$

Enfin, on obtient la formule donnée pour la dynamique de $P_I(t, T)$ en combinant (4.5), (A.2), (A.5) et (A.6).

Preuve du lemme 4.2.2

L'expression (4.6) s'obtient par intégration par partie et comme $dB_n(t) = B_n(t)r_n(t)dt$, on a

$$\begin{aligned} dZ_n(t, T) &= \frac{dP_n(t, T)}{B_n(t)} + P_n(t, T)d\left(\frac{1}{B_n(t)}\right) \\ &= \frac{1}{B_n(t)}(dP_n(t, T) - P_n(t, T)r_n(t)dt) \end{aligned}$$

et la dynamique de $P_n(t, T)$ s'obtient exactement comme celle de $P_r(t, T)$ obtenue en (A.5). On en déduit ensuite l'expression (4.6). On obtient les expressions (4.7) et (4.8) de la même manière, en combinant une intégration par parties et les expressions obtenues dans le lemme 4.2.1.

Preuve de la proposition 4.2.2

D'après (4.8) on a :

$$\begin{aligned}
Z_{nr}(t) &= Z_{nr}(0) + \int_0^t Z_{nr}(s) (\mu_I(s) + r_r(s) - r_n(s)) ds \\
&\quad + \int_0^t Z_{nr}(s) \sigma_I(s) dW_I(s) \\
&= Z_{nr}(0) + \int_0^t Z_{nr}(s) (\mu_I(s) + r_r(s) - r_n(s) + \sigma_I(s) \lambda_I(s)) ds \\
&\quad + \int_0^t Z_{nr}(s) \sigma_I(s) d\tilde{W}_I(s),
\end{aligned}$$

puis, $Z_{nr}(t)$ est une \mathbb{Q} -martingale si et seulement si :

$$\forall s, Z_{nr}(s) (\mu_I(s) + r_r(s) - r_n(s) + \sigma_I(s) \lambda_I(s)) = 0 \quad \mathbb{P} - p.s..$$

Comme $Z_{nr}(s) \neq 0, \mathbb{P} - p.s.$, on en déduit la condition (4.13).

Puis, d'après l'expression (4.6) et par un raisonnement similaire au précédent on a que :

$$Z_n(t, T) \text{ est une } \mathbb{Q}\text{-martingale} \iff \forall s, b_n(s, T) = -a_n(s, T) \lambda_n(s)$$

et on obtient la condition (4.11), en utilisant les expressions de $a_n(s, T)$ et $b_n(s, T)$ et en dérivant l'égalité précédente par rapport à T ; il y a bien équivalence puisqu'on peut remonter les calculs en intégrant par rapport à T , la constante d'intégration étant nulle.

Enfin, on obtient la condition (4.12), de façon identique i.e. par un calcul similaire en partant de (4.7), en y injectant la condition (4.13), et enfin en dérivant (resp. en intégrant) par rapport à T .

Annexe B

Preuves des résultats sur le modèle de Hull et White amélioré

Preuve de la proposition 6.3.1

On décompose le calcul en plusieurs étapes :

1) Notre but est de calculer pour $s \leq T_i$:

$$\int_s^{T_i} e^{-\int_s^v \alpha_u^k du} dv = e^{\int_0^s \alpha_u^k du} \int_s^{T_i} e^{-\int_0^v \alpha_u^k du} dv.$$

1a) Il est facile de montrer que pour $k \in \{r, I\}$ et $v \in [0, T]$ on a :

$$\begin{aligned} e^{-\int_0^v \alpha_u^k du} &= e^{-\sum_{i=1}^{j(v)-1} \alpha_{T_i}^k (T_i - T_{i-1}) - \alpha_{T_{j(v)}}^k (v - T_{j(v)-1})} \\ &= \beta_k(j(v)) e^{-\alpha_{T_{j(v)}}^k (v - T_{j(v)-1})}, \end{aligned} \tag{B.1}$$

avec $\beta_k(j) := e^{-\sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{T_i}^k (T_i - T_{i-1})}$.

1b) Maintenant on écrit que :

$$\int_s^{T_i} e^{-\int_0^v \alpha_u^k du} dv = \int_s^{T_{j(s)}} e^{-\int_0^v \alpha_u^k du} dv + \sum_{j=j(s)}^{i-1} \int_{T_j}^{T_{j+1}} e^{-\int_0^v \alpha_u^k du} dv.$$

Pour $v \in [s, T_{j(s)}]$ on a :

$$\begin{aligned} \int_s^{T_{j(s)}} e^{-\int_0^v \alpha_u^k du} dv &= \beta_k(j(s)) \int_s^{T_{j(s)}} e^{-\alpha_{T_{j(s)}}^k (v - T_{j(s)-1})} dv \\ &= \beta_k(j(s)) e^{-\alpha_{T_{j(s)}}^k (s - T_{j(s)-1})} B(\alpha_{T_{j(s)}}^k, T_{j(s)} - s). \end{aligned}$$

Pour $v \in [T_j, T_{j+1}]$, $j \geq j(s)$ on a :

$$\begin{aligned} \int_{T_j}^{T_{j+1}} e^{-\int_0^v \alpha_u^k du} dv &= \beta_k(j+1) \int_{T_j}^{T_{j+1}} e^{-\alpha_{T_{j+1}}^k (v-T_j)} dv \\ &= \beta_k(j+1) B(\alpha_{T_{j+1}}^k, T_{j+1} - T_j). \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \int_s^{T_i} e^{-\int_0^v \alpha_u^k du} dv &= \beta_k(j(s)) e^{-\alpha_{T_{j(s)}}^k (s-T_{j(s)-1})} B(\alpha_{T_{j(s)}}^k, T_{j(s)} - s) \\ &\quad + \sum_{j=j(s)}^{i-1} \beta_k(j+1) B(\alpha_{T_{j+1}}^k, T_{j+1} - T_j). \end{aligned}$$

1c) Par (B.1) on a :

$$e^{\int_0^s \alpha_u^k du} = \frac{1}{\beta_k(j(s))} e^{\alpha_{T_{j(s)}}^k (s-T_{j(s)-1})},$$

on en déduit alors avec le résultat de 1b :

$$\begin{aligned} \int_s^{T_i} e^{-\int_s^v \alpha_u^k du} dv &= B(\alpha_{T_{j(s)}}^k, T_{j(s)} - s) \\ &\quad + \sum_{j=j(s)}^{i-1} \frac{\beta_k(j+1)}{\beta_k(j(s))} e^{\alpha_{T_{j(s)}}^k (s-T_{j(s)-1})} B(\alpha_{T_{j+1}}^k, T_{j+1} - T_j), \end{aligned}$$

et on a $\frac{\beta_k(j+1)}{\beta_k(j(s))} = e^{-\sum_{p=j(s)}^j \alpha_{T_p}^k (T_p - T_{p-1})} = \beta_k(j(s), j+1)$ d'où :

$$\begin{aligned} \int_s^{T_i} e^{-\int_s^v \alpha_u^k du} dv &= B(\alpha_{T_{j(s)}}^k, T_{j(s)} - s) + e^{\alpha_{T_{j(s)}}^k (s-T_{j(s)-1})} \sum_{j=j(s)}^{i-1} A_{j,j(s)}^k \\ &= B(\alpha_{T_{j(s)}}^k, T_{j(s)} - s) + e^{\alpha_{T_{j(s)}}^k (s-T_{j(s)-1})} B_{i,j(s)}^k. \end{aligned}$$

2) On veut calculer :

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\int_u^s \alpha_v^k dv} ds = e^{\int_0^u \alpha_v^k dv} \int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\int_0^s \alpha_v^k dv} ds.$$

On fait comme précédemment en utilisant (B.1) et en se servant du fait que sur $[T_i, T_{i+1}]$, $j(s) = i+1$:

$$\begin{aligned} \int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\int_u^s \alpha_v^k dv} ds &= \frac{1}{\beta_k(j(u))} e^{\alpha_{T_{j(u)}}^k (u-T_{j(u)-1})} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \beta_k(i+1) e^{-\alpha_{T_{i+1}}^k (s-T_i)} ds \\ &= \beta_k(j(u), i+1) B(\alpha_{T_{i+1}}^k, T_{i+1} - T_i) e^{\alpha_{T_{j(u)}}^k (u-T_{j(u)-1})} \\ &= A_{i,j(u)}^k e^{\alpha_{T_{j(u)}}^k (u-T_{j(u)-1})}. \end{aligned}$$

3) On pose pour $k_1, k_2 \in \{r, I\}$:

$$f(u, \alpha^{k_1}, \alpha^{k_2}) = \left(\int_u^{T_i} e^{-\int_u^s \alpha_v^{k_1} dv} ds \right) \left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\int_u^s \alpha_v^{k_2} dv} ds \right),$$

on a alors par (6.1) :

$$\begin{aligned} C(t, T_i, T_{i+1}) &= \int_t^{T_i} \rho_u \sigma_u^r \sigma_u^I f(u, \alpha^I, \alpha^r) du - \int_t^{T_i} \sigma_u^{I^2} f(u, \alpha^I, \alpha^I) du \\ &= \rho_{T_{j(t)}} \sigma_{T_{j(t)}}^r \sigma_{T_{j(t)}}^I \int_t^{T_{j(t)}} f(u, \alpha^I, \alpha^r) du \\ &\quad + \sum_{j=j(t)}^{i-1} \rho_{T_{j+1}} \sigma_{T_{j+1}}^r \sigma_{T_{j+1}}^I \int_{T_j}^{T_{j+1}} f(u, \alpha^I, \alpha^r) du \\ &\quad - \sigma_{T_{j(t)}}^{I^2} \int_t^{T_{j(t)}} f(u, \alpha^I, \alpha^I) du \\ &\quad - \sum_{j=j(t)}^{i-1} \sigma_{T_{j+1}}^{I^2} \int_{T_j}^{T_{j+1}} f(u, \alpha^I, \alpha^I) du. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Il est donc clair qu'il nous reste qu'à calculer :

$$\int_t^{T_{j(t)}} f(u, \alpha^I, \alpha^r) du \quad \text{et} \quad \int_{T_j}^{T_{j+1}} f(u, \alpha^I, \alpha^r) du$$

et nous déduirons les autres intégrales en posant $r = I$ dans les calculs.

3a) On donne ici une expression de $f(u, \alpha^I, \alpha^r)$ obtenue avec les résultats de 1 et 2 :

$$\begin{aligned} f(u, \alpha^I, \alpha^r) &= \left(B(\alpha_{T_{j(u)}}^I, T_{j(u)} - u) + e^{\alpha_{T_{j(u)}}^I (u - T_{j(u)-1})} B_{i,j(u)}^I \right) \times A_{i,j(u)}^r e^{\alpha_{T_{j(u)}}^r (u - T_{j(u)-1})} \\ &= A_{i,j(u)}^r \left(B(\alpha_{T_{j(u)}}^I, T_{j(u)} - u) e^{\alpha_{T_{j(u)}}^r (u - T_{j(u)-1})} + B_{i,j(u)}^I e^{(\alpha_{T_{j(u)}}^I + \alpha_{T_{j(u)}}^r)(u - T_{j(u)-1})} \right). \end{aligned}$$

3b) On veut calculer :

$$\int_t^{T_{j(t)}} f(u, \alpha^I, \alpha^r) du.$$

Par 3b et comme sur $[t, T_{j(t)}]$, $j(u) = j(t)$, il est clair qu'il nous suffit de calculer :

$$\int_t^{T_{j(t)}} B(\alpha_{T_{j(t)}}^I, T_{j(t)} - u) e^{\alpha_{T_{j(t)}}^r (u - T_{j(t)-1})} du \quad \text{et} \quad \int_t^{T_{j(t)}} e^{(\alpha_{T_{j(t)}}^I + \alpha_{T_{j(t)}}^r)(u - T_{j(t)-1})} du.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que :

$$\int_t^{T_j(t)} e^{(\alpha_{T_j(t)}^I + \alpha_{T_j(t)}^r)(u - T_j(t) - 1)} du = C_{j(t)}(\alpha_{T_j(t)}^r, \alpha_{T_j(t)}^I, t),$$

$$\int_t^{T_j(t)} B(\alpha_{T_j(t)}^I, T_j(t) - u) e^{\alpha_{T_j(t)}^r (u - T_j(t) - 1)} du = D_{j(t)}(\alpha_{T_j(t)}^r, \alpha_{T_j(t)}^I, t).$$

et donc on a :

$$\int_t^{T_j(t)} f(u, \alpha^I, \alpha^r) du = A_{i,j(u)}^r \left(B_{i,j(u)}^I C_{j(t)}(\alpha_{T_j(t)}^r, \alpha_{T_j(t)}^I, t) + D_{j(t)}(\alpha_{T_j(t)}^r, \alpha_{T_j(t)}^I, t) \right).$$

3c) De même, on montre que :

$$\int_{T_j}^{T_{j+1}} f(u, \alpha^I, \alpha^r) du = A_{i,j+1}^r \left(B_{i,j+1}^I C_{j+1}(\alpha_{T_{j+1}}^r, \alpha_{T_{j+1}}^I, T_j) + D_{j+1}(\alpha_{T_{j+1}}^r, \alpha_{T_{j+1}}^I, T_j) \right).$$

4) On reprend (B.2) en utilisant 3b et 3c pour obtenir le résultat.

Preuve de la proposition 6.3.2

On va réutiliser les calculs faits dans la preuve de la proposition 6.3.1 pour calculer (6.3).

1) On veut calculer :

$$\int_t^{T_i} \sigma_u^{I^2} \left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right)^2 du.$$

1a) On se sert du point 2 de la proposition 6.3.1 pour écrire que :

$$\left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right)^2 = A_{i,j(u)}^I{}^2 e^{2\alpha_{T_j(u)}^I (u - T_j(u) - 1)}.$$

1b) On écrit alors que :

$$\int_t^{T_i} \sigma_u^{I^2} \left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right)^2 du = \int_t^{T_j(t)} \sigma_u^{I^2} \left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right)^2 du$$

$$+ \sum_{j=j(t)}^{i-1} \int_{T_j}^{T_{j+1}} \sigma_u^{I^2} \left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right)^2 du$$

Puis par 1a on a :

$$\begin{aligned}
\int_t^{T_i} \sigma_u^{I^2} \left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right)^2 du &= \sigma_{T_{j(t)}}^{I^2} A_{i,j(t)}^{I^2} \int_t^{T_{j(t)}} e^{2\alpha_{T_{j(t)}}^I (u-T_{j(t)-1})} du \\
&\quad + \sum_{j=j(t)}^{i-1} \sigma_{T_{j+1}}^{I^2} A_{i,j+1}^{I^2} \int_{T_j}^{T_{j+1}} e^{2\alpha_{T_{j+1}}^I (u-T_j)} du \\
&= \sigma_{T_{j(t)}}^{I^2} A_{i,j(t)}^{I^2} C_{j(t)}(\alpha_{T_{j(t)}}^I, \alpha_{T_{j(t)}}^I, t) \\
&\quad + \sum_{j=j(t)}^{i-1} \sigma_{T_{j+1}}^{I^2} A_{i,j+1}^{I^2} C_{j+1}(\alpha_{T_{j+1}}^I, \alpha_{T_{j+1}}^I, T_j).
\end{aligned}$$

2) On veut calculer :

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} \sigma_u^{I^2} \left(\int_u^{T_{i+1}} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right)^2 du.$$

Par le point 1c de la preuve de la proposition 6.3.1 on a :

$$\begin{aligned}
\int_{T_i}^{T_{i+1}} \sigma_u^{I^2} \left(\int_u^{T_{i+1}} e^{-\int_u^s \alpha_v^I dv} ds \right)^2 du &= \sigma_{T_{i+1}}^{I^2} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \left\{ B(\alpha_{T_{j(u)}}^I, T_{j(u)} - u) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=j(u)}^i A_{j,j(u)}^k e^{\alpha_{T_{j(u)}}^k (u-T_{j(u)-1})} \right\}^2 du \\
&= \sigma_{T_{i+1}}^{I^2} \int_{T_i}^{T_{i+1}} B^2(\alpha_{T_{i+1}}^I, T_{i+1} - u) du \\
&\quad \text{car } j(u) = i + 1 \text{ pour } u \in]T_i, T_{i+1}].
\end{aligned}$$

Enfin, on laisse au lecteur le soin de vérifier que :

$$\begin{aligned}
\int_{T_i}^{T_{i+1}} B^2(\alpha_{T_{i+1}}^I, T_{i+1} - u) du &= \frac{1}{\alpha_{T_{i+1}}^I} \left((T_{i+1} - T_i) - B(\alpha_{T_{i+1}}^I, T_{i+1} - T_i) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha_{T_{i+1}}^I}{2} B^2(\alpha_{T_{i+1}}^I, T_{i+1} - T_i) \right).
\end{aligned}$$

3) On conclut avec les points 1b et 2.

Références bibliographiques

- [1] F. MERCURIO D. BRIGO. *Interest Rate Models - Theory and Practice With Smile, Inflation and Credits*. Springer, 2nd edition, August 2006.
- [2] A. MORTON D. HEATH, R. JARROW. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, 60(1):77–105, January 1992.
- [3] R. A. JARROW K. I. AMIN. Pricing foreign currency options under stochastic interest rates. *Journal of International Money and Finance*, 10:310–329, 1991.
- [4] T. WONG S. GURRIERI, M. NAKABAYASHI. Calibration Methods of Hull-White model. *Risk Management Department, Mizuho Securities*, November 2009.
- [5] BENHAMOU et BELGRADE. A market model for inflation. *working paper CDS IXIS-CM R&D*, année inconnue.
- [6] Johnny BOU MAACHAR. Inflation Market Models. Technical report, HSBC Derivatives Research, juin 2006.
- [7] Matthew DODGSON et Dherminder KAINTH. Inflation-Linked Derivatives. *Risk Training Course*, Septembre 2006.
- [8] E. KOEHLER. PRMIA et AFGAP : Le Risque d’Inflation. Technical report, Commerzbank, Septembre 2007.
- [9] Robert JARROW et Yildiray YILDIRIM. Pricing Treasury Inflation Protected Securities and Related Derivatives Using an HJM Model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis (JFQA)*, 38(2):337–359, June 2003.
- [10] Gianvittorio MAURI et Fabio MERCURIO. Pricing Inflation-Indexed Derivatives. *Quantitative Finance*, 5:289–302, 2005.
- [11] R. KAUFMANN AND ALL. Introduction to Dynamic Financial Analysis. *Astin bulletin*, 31(1):213–249, 2001.